

## بررسی پارامترهای موثر بر توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های غیردایروی تحت چشمه گرمایی

محمد جعفری\*

محمد حسین بیاتی چالشتری

فاطمه کریمی

احمد معتمدنژاد

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

### چکیده

در این مقاله، بر پایه‌ی نظریه ترموالاستیسیته‌ی دوبعدی حالت پایا، تاثیر پارامترهای موثر بر میدان تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی غیردایروی واقع در صفحه نامحدود همسانگرد تحت یک چشمه گرمایی، بررسی می‌شود. صفحه همسانگرد در نزدیکی گشودگی دارای چشمه گرمایی نقطه‌ای بوده و مرز گشودگی، عایق می‌باشد. نتایج تنش مقاله حاضر با استفاده از توابع پتانسیل مختلط، به کارگیری نگاشت همنا و حل معادلات انتگرالی، به دست آمده است. روش استفاده شده در این تحقیق، بسط روش متغیر مختلط برای صفحات نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل است. شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه چرخش گشودگی از جمله پارامترهای مورد بررسی هستند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهند که پارامتر شعاع انحنای گوشه گشودگی تأثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف گشودگی و تنش اطراف چشمه گرمایی دارند.

**واژه‌های کلیدی:** روش متغیر مختلط، نگاشت همنا، چشمه گرمایی نقطه‌ای، گشودگی غیردایروی.

## Investigation of Effective Parameters on Stress Distribution around Non-Circular Hole Under Thermal Source

M. Jafari

M. H. Bayati

Chaleshtari

F. Karimi

A. Motamednezhad

Faculty of Mechanic and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Narmak, Tehran 16846, Iran

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

### Abstract

In this paper, based on the theory of two-dimensional thermo-elasticity steady state, the influence of parameters affecting stress field created around a non-circular hole in an infinite isotropic plate under a heat source is investigated. The isotropic plate has a point heat source near the hole and the boundary of the hole is insulated. By using the complex potential functions and applying conformal mapping and solving the integral equations, stress distribution around the hole is represented. The used method is the expansion of the complex variable method for an infinite isotropic plate with circular and elliptical holes. Bluntness and rotation angle of the hole are important parameters that are considered in this research. The results of this study show that the bluntness parameter has a significant effect on the stress distribution around the holes and near the heat source.

**Keywords:** Complex variable method, Conformal mapping function, Heat source point, Non-circular holes.

موشخلیشویلی [۲] پایه‌گذار نظریه‌های مربوط به حل مسائل ترموالاستیک دوبعدی با استفاده از روش متغیر مختلط هستند. فلورنس و گودیر [۳] تنش‌های حرارتی برای یک صفحه‌ی الاستیک همسانگرد، شامل گشودگی دایروی و بیضی را با استفاده از روش متغیر مختلط، حل کردند. چائو و همکاران [۴]، به ارائه حل دقیق به جهت تحلیل تنش حرارتی در یک سیلندر کامپوزیتی پرداختند. بهولار [۵] مدل دوبعدی مسأله‌ی ترموالاستیک در یک ناحیه‌ی شش‌ضلعی با یک گشودگی بیضی‌شکل در مرکز ناحیه و تحت جریان گرمایی یکنواخت را مورد بررسی قرار داد. آسری [۶] از روش متغیر مختلط برای به دست آوردن توابع پتانسیل و توابع گورست برای یک صفحه‌ی الاستیک نامحدود دارای گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف استفاده کرد. به‌منظور دسترسی به حلی صریح، این گشودگی‌ها با استفاده از تابع نگاشتی مناسب و همنا به خارج دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته شدند. بهولار و همکارش [۷] با فرض تنش صفحه‌ای، تحلیل تنش حرارتی در یک صفحه‌ی همسانگرد با یک گشودگی شبه‌بیضی را

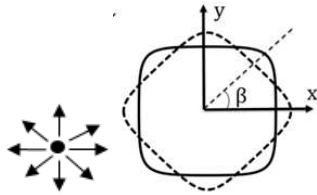
### ۱- مقدمه

تنش‌های حرارتی نقش مهمی در صنایع متنوع مهندسی، از جمله طراحی وسایل نقلیه با سرعت بالا، اجزای ماشین‌ها، ساخت موتورهای موشک و جت، ساخت توربین‌های بخار و راکتورهای هسته‌ای دارند. تعیین مقدار، تأثیر و محل این تنش‌ها برای دستیابی به طراحی منطقی و بهینه امری ضروری است. میدان‌های حرارتی یکنواخت و غیر یکنواخت یا چشمه گرمایی متمرکز، باعث از کارافتادگی و یا کاهش عمر مفید مواد در سازه‌های مهندسی می‌شوند. بنابراین، تحقیق در مورد تمرکز تنش ایجاد شده در مواد الاستیک که تحت جریان‌های حرارتی قرار گرفته‌اند، در طراحی سازه‌های مهندسی بسیار مهم است. یکی از مسائل جذاب در این حوزه‌ها، تحلیل توزیع تنش در صفحات حاوی گشودگی است. تحقیقات متعددی در مورد مسأله‌ی ترموالاستیک صفحات حاوی گشودگی یا نقص هندسی انجام شده است. برخی مربوط به صفحاتی از جنس مواد همسانگرد و برخی مربوط به صفحات ناهمسانگرد هستند. گودیر و فلورنس [۱] و

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ransari.guilan@gmail.com

## ۲- تعریف مساله

موضوع تنش حرارتی دوبعدی، یکی از مسائل مهم در زمینه مکانیک جامدات است. وجود گشودگی در نزدیکی چشمه گرمایی، باعث مغشوش شدن جریان گرمایی می‌شود و تنش‌های بزرگی را در اطراف گشودگی و محل قرار گرفتن چشمه گرمایی ایجاد می‌کند. این تنش‌ها می‌توانند منجر به شکست سازه به ویژه برای مواد ترد شوند. شکل ۱، یک صفحه‌ی همسانگرد نامحدود حاوی یک گشودگی در مرکز، و یک چشمه گرمایی نقطه‌ای در نزدیکی آن را نشان می‌دهد. زاویه‌ی چرخش گشودگی که بیان‌گر نحوه‌ی قرارگیری آن نسبت به افق است با  $\beta$  نمایش داده شده است. صفحه مفروض دارای رفتار الاستیک خطی بوده و با توجه به شرایط مرزی تنها تنش ایجاد شده در مرز گشودگی  $\sigma_\theta$  است. باتوجه به نامحدود بودن صفحه نسبت بزرگترین ضلع گشودگی به ابعاد صفحه در حل عددی کمتر از  $0.05$  در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است. یعنی در مرز گشودگی  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$  است



شکل ۱- صفحه‌ی همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی و چشمه گرمایی

## ۳- روش حل تحلیلی

روش مورد استفاده، روش متغیر مختلط می‌باشد. تابع پتانسیل دمایی مختلط  $\Omega(z)$  برای یک ماده همسانگرد دوبعدی، تابعی هولومورفیک است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(z) = T(x, y) + i\theta(x, y) \quad (1)$$

که در آن  $T(x, y)$  تابع دما و  $\theta$  تابع همساز مزدوج با  $T$  است. تابع دمایی  $T(x, y)$  برای یک جسم الاستیک، تابعی هارمونیک است که معادله رسانش گرمایی زیر را ارضا می‌کند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

چون  $T(x, y)$  قسمت حقیقی  $\Omega(z)$  است؛ پس می‌توان نوشت:

$$T(x, y) = \frac{1}{2} [\Omega_0(z) + \overline{\Omega_0(z)}] \quad (3)$$

همانطور که قبلاً عنوان شد؛ فلورنس و گودیر [۳] توزیع تنش صفحه همسانگرد حاوی گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی شکل را از روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. به منظور بسط روابط ارائه شده توسط فلورنس و گودیر و برای به دست آوردن توزیع تنش اطراف گشودگی غیردایره‌ای و همچنین برای محاسبه انتگرال کوشی در هنگام محاسبه تنش، لازم است مرز گشودگی غیردایره‌ای، به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل گردد. لذا بوسیله نگاشت همنوا، ناحیه خارج گشودگی غیردایره‌ای در مختصات فیزیکی  $z$ ، به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای

بررسی کردند. آن‌ها از روش متغیر مختلط و از شرایط هم‌دمایی در مرز گشودگی استفاده کردند. شارما [۸] راه حلی عمومی برای توزیع تنش اطراف گشودگی‌های چندضلعی در صفحه همسانگرد نامحدود به دست آورد. او همچنین تأثیر هندسه‌ی گشودگی و الگوی بارگذاری بر توزیع تنش صفحه را بررسی نمود.

جعفری و همکاران [۹] با توسعه‌ی روش گودیر و فلورنس برای مسأله‌ی ترموالاستیک صفحه‌ی همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی تحت شار گرمایی یکنواخت، پرداختند. هاسبه و همکاران [۱۰] با استفاده از روش متغیر مختلط و تابع نگاشت کسری مناسب، مسأله‌ی توزیع جریان الکتریکی، دما و تنش‌های حرارتی در یک صفحه‌ی هادی نامحدود دارای گشودگی بیضی‌شکل که در مرز گشودگی دارای یک ترک لبه‌ای است را حل کردند. هاسبه و همکاران [۱۱] مسأله‌ی مقدار مرزی ترموالاستیک برای یک میان‌بار صلب در تقابل با یک ترک خطی در یک صفحه‌ی نامحدود، تحت جریان گرمایی یکنواخت را حل کردند. مسأله با استفاده از روش متغیر مختلط و با ارائه‌ی تابع نگاشت کسری حل شد. طاهری‌نسب و جعفری [۱۲] به بررسی تنش حرارتی در صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی غیر دایره‌ای تحت شار گرمایی پرداختند. آن‌ها زاویه‌ی چرخش و کشیدگی گشودگی و زاویه‌ی شار گرمایی را به عنوان پارامترهای تأثیرگذار بر تنش حرارتی در نظر گرفتند. رسولی و جعفری [۱۳] به تحلیل تنش حرارتی در صفحه‌ی ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی بیضی تحت شار گرمایی یکنواخت پرداختند. در این پژوهش، زاویه‌ی چرخش گشودگی و زاویه‌ی الیاف به عنوان پارامترهای مؤثر، مورد مطالعه قرار گرفته است. بیاتی و جعفری [۱۴] به تعیین پارامترهای بهینه صفحات فلزی حاوی گشودگی غیر دایره‌ای تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با استفاده از الگوریتم گرگ خاکستری پرداختند. پارامترهایی از قبیل انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع صفحه، نسبت اندازه‌ی گشودگی به صفحه و نوع بارگذاری به‌عنوان پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین، بیاتی و جعفری [۱۵] به بررسی توزیع تنش بهینه در صفحات فلزی محدود حاوی گشودگی‌های چندضلعی تحت بار کششی تک‌محوری پرداخته‌اند.

نوآوری مقاله حاضر، بررسی دو پارامتر شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی و زاویه‌ی چرخش گشودگی بر توزیع تنش ایجاد شده در یک صفحه‌ی همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های غیردایره‌ای دارای چشمه گرمایی نقطه‌ای، می‌باشد. علاوه بر این، استفاده از روش متغیر مختلط، تابع نگاشت و بسط روش گودیر و فلورنس به انواع گوناگون از شکل‌های هندسی گشودگی از دیگر نوآوری‌های مقاله حاضر می‌باشد. در حالت کلی، شکل گشودگی به صورت سه ضلعی، چهار ضلعی، پنج-ضلعی و شش ضلعی مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین چشمه گرمایی در نزدیکی گشودگی اعمال شده است. صفحه‌ی مورد نظر، همگن و الاستیک خطی در نظر گرفته شده که قانون عمومی هوک برقرار می‌شود. گشودگی عایق بوده و مرز آن از بار خارجی آزاد است. اندازه‌ی گشودگی، نسبت به ابعاد صفحه به قدر کافی کوچک است که بتوان صفحه را بی‌نهایت فرض کرد.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

موشخلسیولی [۲] حل زیر را برای معادله فوق پیشنهاد کرد:

$$F(x, y) = \operatorname{Re} [z \varphi(z) + \chi(z)] \quad (9)$$

که در آن  $\chi(z)$  و  $\varphi(z)$  توابع پتانسیلی تحلیلی هستند که باتوجه به شرایط مرزی و دمایی و پیوستگی جابجایی، قابل محاسبه می‌باشند. در نهایت با مشخص شدن تابع تنش  $F$ ، به کمک رابطه (۷)، می‌توان تنش‌های اطراف گشودگی را به دست آورد. مؤلفه‌های تنش و جابجایی برحسب توابع پتانسیل فوق در صفحه نگاشت به صورت رابطه (۱۰) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{\phi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 \left[ \frac{\overline{w(\zeta)} \left\{ \frac{\phi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right\}'}{w'(\zeta)} + \frac{\psi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2} G \left[ \kappa \psi(\zeta) - \frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)} \phi'(\zeta) - \overline{\psi(\zeta)} \right] \\ &+ \alpha' \int \Omega(\zeta) w'(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

باتوجه به رابطه فوق، برای تعیین توابع پتانسیل، نیاز به تعیین تابع دمایی  $\Omega(\zeta)$  است. برای محاسبه‌ی تابع دمایی مختلط ابتدا باید تابع دمایی برای صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی چشمه گرمایی بدون گشودگی را داشته باشیم که به صورت زیر است [۹].

$$\Omega_1(z) = -\frac{M}{2\pi k} \log(z - z_0) \quad (11)$$

که در آن  $M$  شدت چشمه گرمایی و  $k$  رسانایی گرمایی ماده است. تابع پتانسیل دمایی در صفحه نگاشت به صورت زیر است:

$$\Omega_0(z) = \Omega_0[w(\zeta)] \equiv \Omega(\zeta) \quad (12)$$

با استفاده از اصل جمع آثار فرض می‌شود تابع دمایی مختلط از دو بخش مجزا تشکیل شده است:

$$\Omega(\zeta) = \Omega_1(\zeta) + \Omega_2(\zeta) \quad (13)$$

$\Omega_2(\zeta)$  مربوط به صفحه دارای گشودگی و بدون چشمه گرمایی و  $\Omega_1(\zeta)$  همان تابع دمایی در صفحه‌ی بدون گشودگی و دارای چشمه گرمایی است که در صفحه نگاشت به صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود:

$$\Omega_1(z) = -\frac{M}{2\pi k} \{\log(\zeta - \zeta_a)\} \quad (14)$$

که در آن  $\zeta_a$  مختصات چشمه گرمایی در صفحه‌ی نگاشت است. شرایط مرزی حاکم بر مساله حاضر به صورت رابطه (۱۵) است.

$$\Omega(\sigma) - \Gamma \Omega(\sigma) = \text{const} \quad (15)$$

در این رابطه  $\Gamma = 1$  مربوط به شرط مرزی عایق و  $\Gamma = -1$  برای شرط مرزی همدما می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه مربوط به شرایط مرزی (۱۵)، رابطه شرایط مرزی برحسب شدت چشمه گرمایی به صورت رابطه (۱۶) خواهد بود.

$$\begin{aligned} -\frac{M}{2\pi k} \{\log(\sigma - \zeta_a)\} + \Omega_2(\sigma) + \\ \frac{\Gamma M}{2\pi k} \left\{ \log\left(\frac{1}{\sigma} - \overline{\zeta_a}\right) + \overline{\Omega_2(\sigma)} \right\} = \text{const} \end{aligned} \quad (16)$$

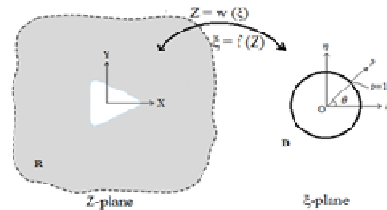
به شعاع واحد در صفحه  $\zeta$ ، با تابع انتقال زیر صورت می‌گیرد (شکل ۲):

$$z = w(\zeta) = x + iy \quad (5)$$

که در رابطه فوق  $x$  و  $y$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(\cos\theta + w\cos(n\theta)) \\ y &= -\lambda(c\sin\theta - w\sin(n\theta)) \end{aligned} \quad (6)$$

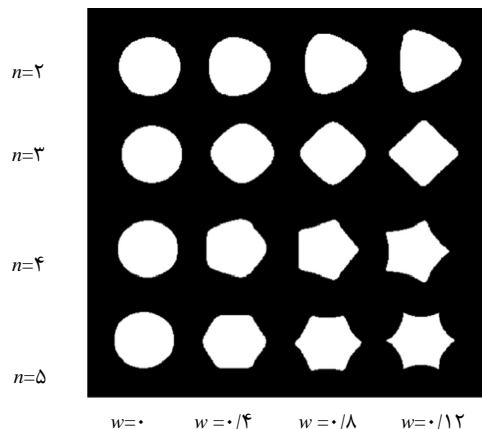
در رابطه فوق، پارامترهای مختلفی از قبیل  $c$ ،  $\lambda$  و  $w$  دیده می‌شوند. این پارامترها نوع شکل، بزرگی و تیزی یا نرمی آن را نشان می‌دهند.  $c$  نسبت طول به عرض گشودگی است و  $\lambda$  بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد. پارامتر  $w$  برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر  $w$  نشان دهنده انحنای گوشه‌های گشودگی می‌باشد و مطابق شکل ۳، با کاهش آن، گشودگی به دایره ( $w=0, c=1$ ) یا بیضی ( $w=0, c \neq 1$ ) تبدیل می‌شود. در حقیقت شکل ۳، ترسیم معادله‌ی (۶) برای  $w$  های مختلف است که مرز گشودگی را نشان می‌دهد. انحنای گوشه‌های گشودگی ( $w$ ) یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی است که در این مقاله تأثیر این پارامتر به همراه زاویه‌ی چرخش گشودگی ( $\beta$ ) بررسی می‌شود.



شکل ۲- نگاشت همونا

مؤلفه‌های تنش با استفاده از تابع تنش ایری  $F(x, y)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (7)$$



شکل ۳- تأثیر پارامتر  $w$  و  $n$  بر گشودگی‌های چندضلعی در  $c=1$

با ارائه روابط سازگاری در حالت دوبعدی برحسب مؤلفه‌های تنش، و اعمال تابع تنش  $F$  در آن، معادله سازگاری به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید.

با ضرب طرفین معادله‌ی (۱۶) در  $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\zeta)}$  و گرفتن انتگرال کوشی رابطه (۱۷) حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{-M}{2\pi k} \right) \int \log(\sigma-\zeta_a) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int \Omega_2(\sigma) \frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)} + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \frac{GM}{2\pi k} \int \log\left(\frac{1}{\sigma}-\zeta_a\right) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \frac{GM}{2\pi k} \int \Omega_2(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \int c \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

در نتیجه پس از انتگرال کوشی روابط زیر حاصل می‌شود.

$$\Omega_2(\zeta) + \frac{TM}{2\pi k} \left\{ \begin{aligned} & -\log\frac{1-\zeta\zeta_a}{\zeta} \\ & +\log(-\zeta_a) \end{aligned} \right\} = const \tag{۱۸}$$

$$\Omega_2(\zeta) = -\frac{TM}{2\pi k} \left\{ \log\left(-\zeta_a \frac{\zeta}{1-\zeta\zeta_a}\right) \right\}$$

+ const

پس از محاسبه  $\Omega_2(\zeta)$  و جایگذاری آن در رابطه (۱۳)، رابطه (۱۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{TM}{2\pi k} \left\{ \log\left(\frac{1-\zeta\zeta_a}{\zeta\zeta_a}\right) \right\} + const = \\
 & -\frac{TM}{2\pi k} \left\{ \log\left(\frac{\zeta-\zeta_a}{\zeta}\right) \right\} + const
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\Omega_2(\zeta) = -\frac{M}{2\pi k} \{ \log(\zeta-\zeta_a) +$$

$$\Gamma \log\left(\frac{\zeta-\zeta_a}{\zeta}\right) \} + const$$

که  $\zeta'_a = \frac{1}{\zeta_a}$  مقدار ثابتی است که می‌توان با داشتن

دما در یک نقطه‌ی استاندارد آن را تعیین کرد. در صفحه‌ی بی‌نهایت دارای چشمه گرمایی بدون گشودگی، جابه‌جایی که در اثر گرادیان دمایی به وجود می‌آید را می‌توان به صورت زیر نشان داد [۹].

$$\begin{aligned}
 u_0 + iv_0 &= \alpha' \int \Omega_1(z) dz = -\frac{\alpha'M}{2\pi k} \\
 & \int \log(z-z_0) dz = -\frac{\alpha'M}{2\pi k} (z-z_0) \times \\
 & \{ \log(z-z_0) - 1 \}
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

معادلات شرایط مرزی نیرو و جابه‌جایی در صفحه‌ی z به صورت روابط (۲۱) و (۲۲) قابل ارائه است [۱۰].

$$\kappa\phi(z) - z\overline{\phi(z)} - \overline{\psi(z)} + 2G\alpha' \int \Omega_1(z) dz \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}
 & = 2G(u+iv) \\
 & \phi(z) + \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi'(z)} = i \int (p_x + ip_y) ds
 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در رابطه فوق برای حالت تنش صفحه‌ای  $\alpha' = \alpha(1+\nu)$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \alpha' = \alpha \text{ و برای حالت کرنش صفحه‌ای } \kappa = 3-4\nu$$

است. برای محاسبه توابع تنش از روش جمع آثار استفاده شده است؛ صفحه دارای گشودگی که تحت چشمه گرمایی داخلی است در ابتدا با در نظر گرفتن صفحه‌ای با چشمه گرمایی و بدون گشودگی و سپس

صفحه با گشودگی تحلیل می‌شود. با جایگذاری (۲۰) در (۲۱) و (۲۲) و در نظر گرفتن اینکه نیروهای خارجی  $p_x$  و  $p_y$  حول منبع صفر هستند؛ توابع تحلیلی تنش برای صفحه بی‌نهایت با چشمه گرمایی و بدون گشودگی به صورت زیر خواهند بود [۱۰].

$$\phi_1(z) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} (z-z_0) \{ \log(z-z_0) - 1 \} \tag{۲۳}$$

$$\psi_1(z) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k} z_0 \log(z-z_0) \tag{۲۴}$$

برای صفحه‌ی بی‌نهایت، جابه‌جایی که از طریق تابع دما  $\Omega_1(\zeta)$  اتفاق می‌افتد، در حالت کلی شامل تابع چندمقداره است. بنابراین بعد از طی یک دور حول هر ناحیه‌ی خاص در صفحه یک نابه‌جایی ظاهر می‌شود در نتیجه برای برقراری تک مقداره بودن جابه‌جایی، تابع دیگری معرفی می‌شود که این نابه‌جایی‌ها را حذف کند. بدین ترتیب توابع تنش تحلیلی مختلط در صفحه‌ی نگاشت می‌توان به این صورت تعریف کرد [۹].

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) \tag{۲۵}$$

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta)$$

$$\phi_1(z) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} [ \{ w(\zeta) - w(\zeta_a) \} \tag{۲۶}$$

$$\{ \log(\zeta-\zeta_a) - 1 \} ] + A \log \zeta$$

$$\psi_1(z) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k} [ w(\zeta_a) \log(\zeta-\zeta_a) ] \tag{۲۷}$$

$$+ B \log \zeta$$

با داشتن توابع تنش در حالت اول (صفحه بدون گشودگی) میدان تنش در نقاط واقع بر مرز گشودگی قابل محاسبه خواهند بود. برای صفحه دارای گشودگی، با جایگذاری (۲۷) در شرط مرزی جابه‌جایی (۲۲) و با توجه به اینکه مقدار تنش بعد از یک دور حول گشودگی نباید تغییر کند، رابطه‌ی (۲۸) حاصل می‌شود. (A و B اعداد مختلط ثابت هستند).

$$B = \overline{A} \tag{۲۸}$$

با جایگذاری روابط (۲۶) و (۲۷) در شرط مرزی جابه‌جایی و با در نظر گرفتن این که بعد از یک دور حول گشودگی نابه‌جایی باید برطرف شود، رابطه (۲۹) به دست می‌آید.

$$(u+iv)_2 - (u+iv)_1 = 2G\alpha' \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Omega_2(\zeta) w'(\zeta) d\zeta \tag{۲۹}$$

$$(u+iv)_2 - (u+iv)_1 = \kappa\overline{\phi(\zeta)} - \frac{w(\zeta)}{w(\zeta_a)} \overline{\phi'(\zeta)}$$

$$-\overline{\psi(\zeta)}$$

که  $\zeta_1$  نقطه‌ی (r,0) و  $\zeta_2$  نقطه‌ی (r,2π) روی مرز است. نتایج حاصل از رابطه‌ی اول (۲۹) به صورت رابطه (۳۰) خواهد بود.

$$\phi(\sigma) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} [\{w(\sigma) - w(\zeta_a)\} \log(\sigma - \zeta_a) - 1] + A \log \sigma + \phi_2(\sigma) \quad (35)$$

با داشتن مشتق آن به صورت رابطه (36) خواهد بود:

$$\phi'(\sigma) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} [w'(\sigma) \log(\sigma - \zeta_a) + \frac{w(\sigma) - w(\zeta_a)}{\sigma - \zeta_a} - w'(\sigma)] + \frac{A}{\sigma} + \phi_2'(\sigma) \quad (36)$$

تابع پتانسیل  $\psi(\sigma)$  نیز با توجه به شرط مرزی داده شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\psi(\sigma) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k} [\overline{\{w(\zeta_a) \log(\sigma - \zeta_a)\}}] + B \log \sigma \quad (37)$$

با جایگذاری روابط (35) تا (37) در معادله شرط مرزی (34) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha MGR}{4\pi k} [\{w(\sigma) - w(\zeta_a)\} \log(\sigma - \zeta_a) - 1] + A \log \sigma + \phi_2(\sigma) + \\ & \frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)} \left[ \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \overline{w'(\sigma) \log\left(\frac{1}{\sigma} - \zeta_a\right)} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \frac{w(\sigma) - w(\zeta_a)}{\sigma - \zeta_a} - \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \overline{w'(\sigma)} \right] \\ & + A\sigma + \phi_2'(\sigma) - \frac{\alpha MGR}{4\pi k} [w(\zeta_a) \log\left(\frac{1}{\sigma} - \zeta_a\right)] \\ & + B \log \frac{1}{\sigma} + \psi_2(\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

با ضرب دو طرف معادله‌ی (38) در  $\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$  و گرفتن انتگرال

کوشی، تابع تحلیلی مختلط تنش  $\phi(\zeta)$  به صورت رابطه (39) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) = \\ & A \log \zeta + [\{w(\zeta) - w(\zeta_a)\} \log(\zeta - \zeta_a)] \\ & - \{w(\zeta) - w(\zeta_a)\} + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left[ -\frac{a}{\zeta} \log(-\zeta_a) \right. \\ & \left. + \frac{we}{(n-1)!} \frac{d^n}{d\sigma^n} \left( \frac{\log(\sigma - \zeta_a)}{\sigma - \zeta} \right) \right]_{\sigma=0} + 2 \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \times \\ & \left[ \frac{a}{\zeta} + \frac{we}{\zeta^n} \right] \frac{\alpha MGR}{4\pi k} [-w(\zeta) \log\left(\frac{1}{\zeta} - \zeta_a\right) + \\ & b\zeta \log(-\zeta_a) + \frac{wd}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{\log(z - \zeta_a)}{\zeta(z - \frac{1}{\zeta})} \right) \Big|_{Z=0}] \\ & + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \times \left[ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{d\sigma^n} \times \right. \\ & \left. \left( \frac{a\sigma^{n-1} + b\sigma^{n+1} + wd\sigma^{2n} + we}{(\sigma - \zeta)(1 - \sigma\zeta_a)} \right) \times \right. \\ & \left. \left( \frac{\overline{a}\sigma^{n+1} + \overline{b}\sigma^{n-1} + \overline{wd} + \overline{we}\sigma^{2n} - \sigma^n \overline{w(\zeta_a)}}{(-\overline{a}\sigma^{n+1} + \overline{b}\sigma^{n-1} + n\overline{wd} - n\overline{we}\sigma^{2n})} \right) \right]_{\sigma=0} \\ & \frac{w(\zeta_a) \overline{w(\zeta_a)} - w(\zeta_a)}{w'(\zeta_a)(\zeta_a - \zeta)} - \frac{\alpha MGR}{4\pi k} w(\zeta_a) \times \\ & [-\log\left(\frac{1}{\zeta} - \zeta_a\right) + \log(-\zeta_a)] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & (u+iv)_2 - (u+iv)_1 = \\ & \frac{G\alpha M}{2\pi k} \int \{ \log(\zeta - \zeta_a) + \Gamma \log(\zeta - \zeta'_a) \\ & - \Gamma \log \zeta \} \left\{ -\frac{a}{\zeta^2} + b + nwd\zeta^{n-1} - \frac{nwe}{\zeta^{n+1}} \right\} d\zeta \\ & = \frac{G\alpha M}{2\pi k} \left[ \frac{a}{\zeta} \log(\zeta - \zeta_a) + \frac{a}{\zeta_a} \log \zeta \right. \\ & \left. - \frac{a}{\zeta_a} \log(\zeta - \zeta_a) + b(\zeta - \zeta_a) \log(\zeta - \zeta_a) \right. \\ & \left. - b(\zeta - \zeta_a) + wd\zeta^n \log(\zeta - \zeta_a) \right. \\ & \left. + \frac{we}{\zeta^n} \log(\zeta - \zeta_a) + \frac{d\Gamma}{\zeta} \log(\zeta - \zeta'_a) + \frac{d\Gamma}{\zeta_a} \log \zeta \right. \\ & \left. - \frac{d\Gamma}{\zeta_a} \log(\zeta - \zeta'_a) + b\Gamma(\zeta - \zeta'_a) \log(\zeta - \zeta'_a) \right. \\ & \left. - b\Gamma(\zeta - \zeta'_a) + wd\Gamma\zeta^n \log(\zeta - \zeta'_a) \right. \\ & \left. + \frac{we\Gamma}{\zeta^n} \log(\zeta - \zeta'_a) - \frac{d\Gamma}{\zeta} \log \zeta \right. \\ & \left. - \Gamma b\zeta \log \zeta + \Gamma b\zeta - wd\Gamma\zeta^n \log \zeta \right] \zeta_1^2 \end{aligned} \quad (30)$$

در نظر گرفتن فقط جمله‌های لگاریتمی و به کارگیری دومین رابطه (29)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} & \kappa \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left[ \frac{a}{\zeta} \log(\zeta - \zeta_a) + b\zeta \log(\zeta - \zeta_a) \right. \\ & \left. + wd\zeta^n \log(\zeta - \zeta_a) + \frac{we}{\zeta^n} \log(\zeta - \zeta_a) \right. \\ & \left. - \frac{a}{\zeta_a} \log(\zeta - \zeta_a) - b\zeta_a \log(\zeta - \zeta_a) \right. \\ & \left. + \kappa A \log \zeta - wd\zeta_a^n \log(\zeta - \zeta_a) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left[ \frac{a}{\zeta} \log(\zeta - \zeta'_a) + b\zeta \log(\zeta - \zeta'_a) \right. \right. \\ & \left. \left. + wd\zeta^n \log(\zeta - \zeta'_a) - \frac{we}{\zeta^n} \log(\zeta - \zeta'_a) \right] \right. \\ & \left. + \frac{we}{\zeta^n} \log(\zeta - \zeta'_a) + A \log \zeta \right] \zeta_1^2 \end{aligned} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌ی (31) و مساوی قرار دادن دو رابطه‌ی (29) و (30) نتایج زیر حاصل می‌شوند.

$$\frac{G\alpha M}{2\pi k} = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} (\kappa + 1) \quad (32)$$

$$\log\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right) = 2\pi i$$

$$A = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left[ \frac{a}{\zeta_a} + wd\zeta_a^n + \frac{we}{\zeta_a^n} - b\Gamma\zeta'_a \right] \quad (33)$$

شرط مرزی حاکم بر مرز گشودگی به صورت رابطه (34) خواهد بود.

$$\phi(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)} \phi'(\sigma) + \psi(\sigma) = 0 \quad (34)$$

با جایگذاری روابط (25)، (26)، (27) و (33) در معادله‌ی اول شرط مرزی (22) و با توجه به این که مرز گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است و همانطور که قبلاً اشاره شد با توجه به روابط (25) و (26)، تابع تنش  $\phi$  در مرز گشودگی به صورت زیر خواهد بود.

برای به دست آوردن  $\psi(\zeta)$  به همین ترتیب از مزدوج رابطه‌ی (۳۸) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) = \\ &= -\frac{\alpha MGR}{4\pi k} [w(\zeta a) \log(\zeta - \zeta a)] + B \log \zeta - \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \\ & \left\{ a\zeta + \frac{b}{\zeta} + \frac{wd}{\zeta^n} + we\zeta^n - w(\zeta a) \right\} \left\{ \log\left(\frac{1}{\zeta} - \zeta a\right) \right\} \\ & + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} a\zeta \log(-\zeta a) + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} we \left( \frac{\log(z - \zeta a)}{\zeta(z - \frac{1}{\zeta})} \right) \Big|_{Z=0} \\ & + 2 \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left[ \frac{b}{\zeta} + \frac{wd}{\zeta^n} \right] + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \times \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{b}{\zeta} \log(-\zeta a) + \frac{wd}{(n-1)!} \frac{d^n}{d\sigma^n} \left( \frac{\log(\sigma - \zeta a)}{\sigma - \zeta} \right) \Big|_{\sigma=0} \right] + \\ & \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}} \times \\ & \left( \frac{a\sigma^{n+1} + b\sigma^{n-1} + wd\sigma^{2n} + wd}{-a\sigma^{n-1} + b\sigma^{n+1} + nwd\sigma^{2n} - nwe} \right. \\ & \left. \times \frac{a\sigma^{n-1} + b\sigma^{n+1} + wd\sigma^{2n} + we - \sigma^n w(\zeta a)}{(\sigma - \zeta a)(1 - \sigma\zeta)} \Big|_{\sigma=0} \right) \end{aligned}$$

روابط فوق تابع تنش برای گشودگی‌های با اشکال مختلف را مشخص می‌کند. همانطور که قبلاً بیان شد و در این رابطه نیز آورده شده با تغییر  $n$  نوع گشودگی و با تغییر  $w$  شعاع انحنای گوشه گشودگی قابل تغییر است. پس از تعیین توابع تنش، مؤلفه‌های تنش در مختصات قطبی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \text{Re} \left[ \frac{\zeta^2}{|\zeta|^2} \frac{w'(\zeta)}{w'(\zeta)} \left[ \frac{\overline{w(\zeta)}}{w'(\zeta)} \right] \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\varphi''(\zeta)w'(\zeta) - \varphi'(\zeta)w''(\zeta)}{w'(\zeta)^2} \right\} + \frac{\psi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] \\ & + 2 \text{Re} \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\sigma_r = 4 \text{Re} \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] - \sigma_\theta \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \text{Im} \left[ \frac{\zeta^2}{|\zeta|^2} \frac{w'(\zeta)}{w'(\zeta)} \left[ \frac{\overline{w(\zeta)}}{w'(\zeta)} \right] \times \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\varphi''(\zeta)w'(\zeta) - \varphi'(\zeta)w''(\zeta)}{w'(\zeta)^2} \right\} + \frac{\psi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

#### ۴- نتایج

در این مقاله به بررسی تاثیر شعاع انحنای گوشه گشودگی ( $w$ ) و زاویه چرخش گشودگی ( $\beta$ ) بر نحوه توزیع تنش اطراف گشودگی‌های سه ضلعی، چهار ضلعی، پنج ضلعی و شش ضلعی در  $c=1$  پرداخته شده است. همانطور که می‌دانیم، تمرکز تنش در صفحات همسانگرد حاوی گشودگی مستقل از جنس و خواص مکانیکی ماده می‌باشد. بنابراین نتایج پژوهش فوق را می‌توان برای صفحات همسانگرد از سایر جنس‌ها نیز استفاده کرد. بر این اساس مشخصات ماده همسانگرد به کار رفته در این مقاله مطابق جدول ۱ ارائه شده است. لازم به اشاره است؛ نتایج تنش ارائه شده در این مقاله بر

اساس  $\frac{\sigma}{\alpha MGR/k}$  بی‌بعد شده است.

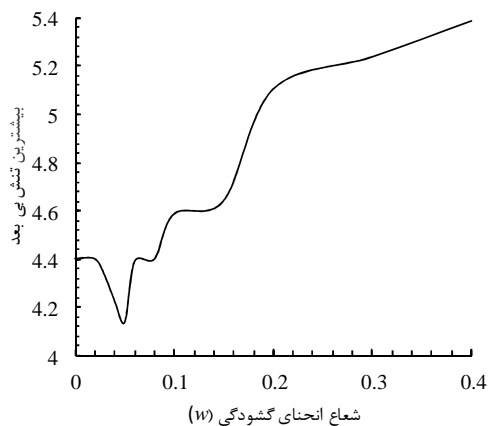
جدول ۱- خواص مکانیکی ماده مورد استفاده

ماده	$V$	$\alpha_0(\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C})$	$k(\text{w}/\text{m}^\circ\text{C})$	$E(\text{GPa})$
فولاد	۰٫۳	۱۱/۱	۵۰/۲	۲۱۰

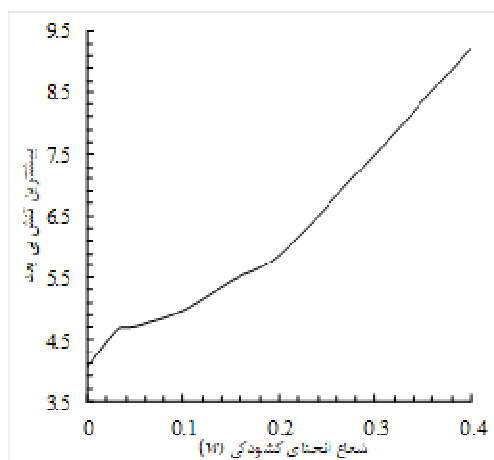
#### ۴-۱- گشودگی سه ضلعی

ابتدا بدون در نظر گرفتن تأثیر  $w$ ، فقط تأثیر زاویه چرخش گشودگی بر بیشترین تنش حرارتی بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است تا برای یک مقدار مشخص شعاع انحنای گوشه گشودگی ( $w=0/05$ )، تأثیر زاویه چرخش گشودگی مورد مطالعه قرار گیرد. شکل ۴ نشان دهنده‌ی تاثیر زاویه چرخش بر روی بیشترین تنش ایجاد شده اطراف گشودگی سه ضلعی است. مشاهده می‌شود که شکل ۴ دارای یک تابع نوسانی با نوسان ۱۲۰ درجه است. بنابراین کافی است تا نتایج در زاویه چرخش بین صفر تا ۱۲۰ درجه ارائه شوند. همچنین، این شکل نشان می‌دهد که با تغییر زاویه چرخش، تنش تغییر می‌کند و در زوایای خاصی که برای گشودگی‌های مختلف، متفاوت است، تنش کمترین و بیشترین مقدار را خواهد داشت. بنابراین برای گشودگی سه ضلعی و  $w=0/05$  در زاویه چرخش خاصی ( $\beta$ )، تنش کمترین مقدار را خواهد داشت (تنش مطلوب). مقادیر زاویه چرخش مطلوب در گشودگی سه ضلعی در جدول ۲ ارائه شده است. مشاهده می‌گردد که محدود مناسب برای زاویه چرخش بین صفر تا ۲۵ درجه می‌باشد. در طراحی باید با انتخاب زاویه چرخش مناسب سعی کرد تا به تنش مطلوب رسید. تاثیر زاویه چرخش گشودگی بر روی بیشترین تنش بی‌بعد برای گشودگی سه ضلعی در شعاع انحنای گوشه گشودگی مختلف در شکل ۵ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود، در صورت انتخاب زاویه چرخش ۶۰ درجه، تنش بیشترین مقدار خواهد بود (تنش نامطلوب). نتیجه‌ای که از شکل‌های ۴ و ۵ حاصل می‌گردد، این است که برای یک صفحه تحت چشمه گرمایی و دارای گشودگی سه ضلعی، بهتر است زاویه  $\beta$  را در محدوده‌ی ۶۰ درجه انتخاب نگردد و این زاویه صفر یا ۱۲۰ درجه باشد. اگرچه این نتایج برای  $w=0/05$  آورده شده ولی همان‌طور که در شکل ۵ نشان داده شده است، برای سایر  $w$ ها نیز تنش مطلوب در همان زوایای صفر یا ۱۲۰ درجه اتفاق می‌افتد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در جدول ۳ مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب در مقادیر مختلف از شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی برای گشودگی سه ضلعی نشان داده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد، کمترین مقدار تنش مطلوب در  $w=0/05$  و بیشترین مقدار تنش نامطلوب در  $w=0/1$  به دست آمده است.

می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت  $w=0$  یا گشودگی دایره‌ای، مقدار تنش مطلوب  $4/402$  می‌باشد. شکل ۷ نشان می‌دهد که با بیشتر شدن  $w$  مقدار تنش نامطلوب نیز افزایش می‌یابد. در  $w=0$  که معادل گشودگی دایره‌ای است؛ تنش نامطلوب کمترین مقدار ممکن است. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، تنش مطلوب برای تمام  $w$ ها در زاویه‌ی صفر یا  $120$  درجه و تنش نامطلوب در زاویه‌ی  $60$  درجه اتفاق می‌افتد.



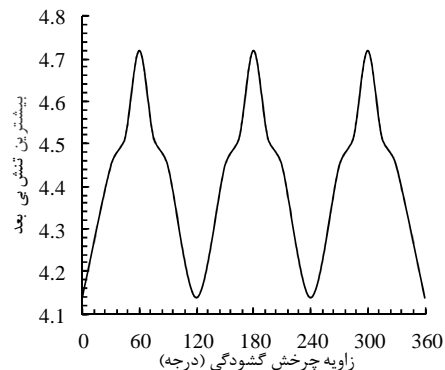
شکل ۴- تأثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی سه ضلعی



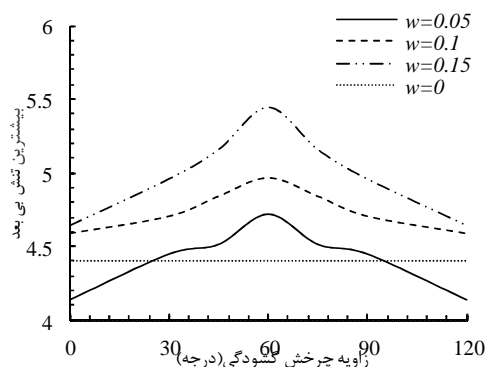
شکل ۵- تأثیر  $w$  بر روی تنش نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی سه ضلعی

#### ۲-۴- گشودگی چهارضلعی

در این بخش نیز ابتدا تأثیر زاویه‌ی چرخش در  $w=0/05$  بررسی می‌شود. همان‌طور که در شکل ۸ پیدا است دوره‌ی نوسان برای گشودگی چهارضلعی در حالت  $90$  درجه است. بنابراین کافی است تا نتایج در زاویه‌ی چرخش بین صفر تا  $90$  درجه ارائه شود. همچنین، این شکل نشان می‌دهد که با تغییر زاویه‌ی چرخش، تنش تغییر می‌کند و در زوایای خاصی تنش مطلوب و نامطلوب را به دست می‌آورد. در شکل ۹ مشاهده می‌شود که تنش مطلوب در زاویه‌ی  $45$  درجه و تنش نامطلوب در زوایای صفر یا  $90$  درجه اتفاق می‌افتد. زوایایی که تحت آن‌ها تنش مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهد با تغییر  $w$ ، تغییر نمی‌کند.



شکل ۶- تأثیر زاویه‌ی چرخش  $\beta$  بر روی بیشترین تنش بی‌بعد برای گشودگی سه ضلعی و  $w=0/05$



شکل ۷- تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی بیشترین تنش بی‌بعد برای گشودگی سه ضلعی در  $w$ های مختلف

جدول ۲- محدوده زاویه‌ی چرخش بهینه برای گشودگی سه ضلعی

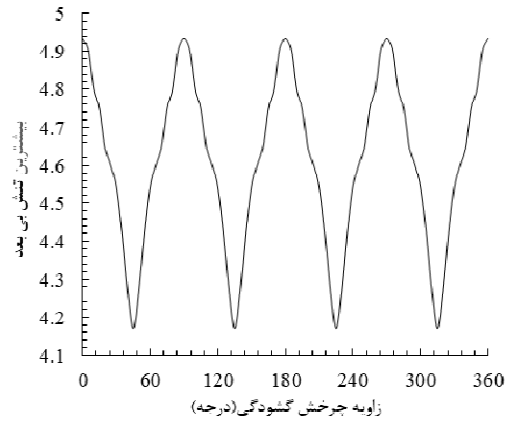
$w$	$\beta$	$w$	$\beta$	$w$	$\beta$
$0/03$	$0 < \beta < 19$	$0/04$	$0 < \beta < 23$	$0/05$	$0 < \beta < 25$

جدول ۳- مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی سه ضلعی در  $w$ های مختلف

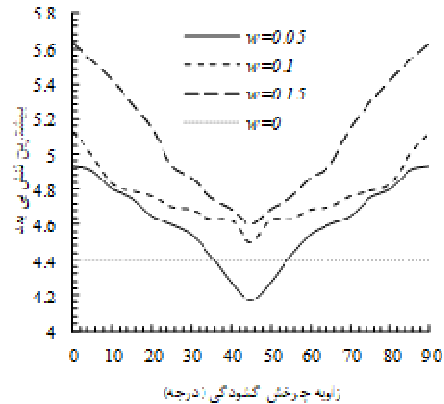
$w$	زاویه چرخش تنش مطلوب	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش نامطلوب
$0$	$0$	$4/402$	$0$	$0$
$0/03$	$0$	$4/329$	$60$	$4/66$
$0/05$	$0$	$4/138$	$60$	$4/719$
$0/1$	$0$	$4/588$	$60$	$4/966$

نتایج تنش مطلوب و نامطلوب در اثر تغییر  $w$  در گشودگی سه ضلعی به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ آورده شده است. همان‌طور که در شکل ۶ نشان داده شده است، برای گشودگی سه ضلعی، تنش مطلوب با افزایش  $w=0/03$  تا  $w=0/05$  کمتر از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) است؛ کمترین مقدار تنش در  $w=0/05$  برابر  $4/138$

کند. ولی مقدار این تنش‌ها در  $w$ های مختلف، متفاوت است.



شکل ۸- تأثیر زاویه چرخش بر روی بیشترین تنش بی‌بعد برای گشودگی چهارضلعی و  $w=0.05$



شکل ۹- تأثیر زاویه چرخش گشودگی چهارضلعی بر بیشترین تنش بی‌بعد در  $w$ های مختلف

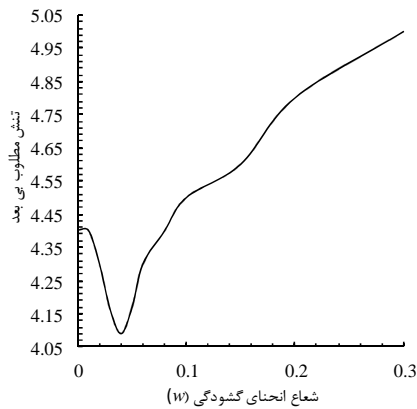
جدول ۴- مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی

چهارضلعی در $w$ های مختلف				
$w$	زاویه چرخش	مقدار تنش	زاویه چرخش	مقدار تنش
	تنش نامطلوب	مطلوب	تنش نامطلوب	نامطلوب
۰	-	۴/۴۰۲	-	۴/۴۰۲
۰/۰۲	۴۵	۴/۲۹۹	۰	۴/۵۵۲
۰/۰۴	۴۵	۴/۰۹	۰	۴/۶۹۷
۰/۰۵	۴۵	۴/۱۶	۰	۴/۹۳
۰/۱	۴۵	۴/۵	۰	۵/۱۲۸

جدول ۵- محدوده زاویه چرخش بهینه برای گشودگی چهارضلعی

$w$	$\beta$	$w$	$\beta$	$w$	$\beta$
۰/۰۲	$30 < \beta < 40$	۰/۰۴	$28 < \beta < 33$	۰/۰۵	$25 < \beta < 35$

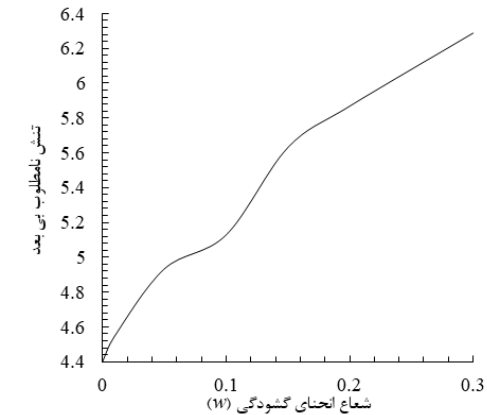
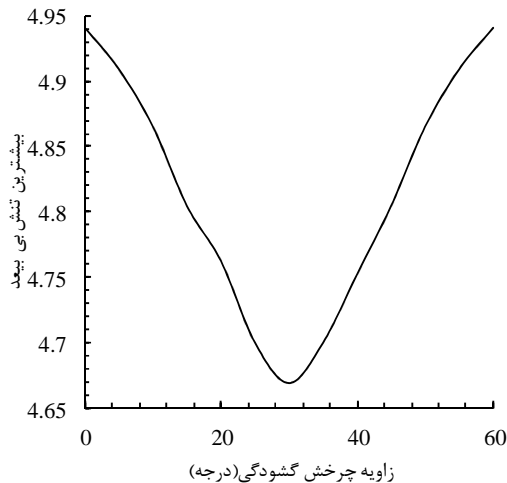
نتایج تنش مطلوب و نامطلوب در اثر تغییر  $w$  به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ آورده شده است. مطابق شکل ۱۰ برای گشودگی چهار ضلعی، تنش مطلوب بی‌بعد با افزایش  $w=0.1$  تا  $w=0.05$  کاهش می‌یابد و کمتر از تنش مطلوب در گشودگی دایروی است؛ همچنین با افزایش  $w$  از ۰/۰۵، تنش مطلوب بی‌بعد افزایش می‌یابد ولی در  $w=0.06$  همچنان از تنش در گشودگی دایره‌ای کمتر است. از طرفی با توجه به شکل ۱۱ برای گشودگی چهارضلعی تنش نامطلوب بی‌بعد با افزایش  $w$ ، افزایش می‌یابد. با توجه به شکل ۱۰ در یک  $w$  خاص تنش مطلوب کمترین مقدار خود را دارد. همانطور که مشاهده می‌شود، کمترین تنش مطلوب بی‌بعد در  $w=0.04$  برابر  $4.09$  می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت  $w=0$  یا گشودگی دایره‌ای، مقدار تنش بی‌بعد  $4.402$  می‌باشد.



شکل ۱۰- تأثیر شعاع انحنای گشودگی بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی چهارضلعی

در جدول ۴، مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی چهارضلعی نشان داده شده است. بر اساس نتایج نشان داده شده در این جدول، کمترین مقدار تنش مطلوب در  $w=0.04$  برابر  $4.09$  و بیشترین مقدار تنش نامطلوب در  $w=0.1$  برابر  $5.128$  می‌باشد. با توجه به نتایج ارائه شده، بسته به مقدار  $w$ ، در محدوده‌ی خاصی از زاویه چرخش تنش مربوط به گشودگی چهارضلعی کمتر از تنش مربوط به گشودگی دایره‌ای است. این محدوده در جدول ۵ مشخص شده است. زوایایی که تحت آن‌ها تنش مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهد، با تغییر  $w$ ، تغییر نمی‌کند، ولی مقدار این تنش‌ها در  $w$ های مختلف، متفاوت است. تغییرات تنش مطلوب همان‌طور که در جدول ۵ نشان داده شده است، پراکندگی کمتری نسبت به گشودگی سه ضلعی دارد.





شکل ۱۱- تأثیر شعاع انحنای گشودگی بر روی تنش نامطلوب بی- بعد برای گشودگی چهار ضلعی

### ۳-۴- گشودگی چند ضلعی

در گشودگی‌های چندضلعی مطابق با روندی که در ارائه‌ی نتایج گشودگی‌های سه‌ضلعی و چهارضلعی بکار برده شد، نتایج ارائه می‌شود. معمولاً رابطه‌ی دوره‌ی تناوب با تعداد اضلاع بصورت  $T=360/n$  می‌باشد. به همین دلیل نمودار بیشترین تنش بی‌بعد برای گشودگی پنج ضلعی از صفر تا ۷۲ درجه و برای گشودگی شش ضلعی از صفر تا ۶۰ درجه آورده شده است. برای گشودگی‌های پنج و شش ضلعی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی بیشترین تنش بی‌بعد برای  $w=0/05$  به ترتیب در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار تنش در گشودگی پنج ضلعی در زاویه چرخش حدوداً ۳۸ درجه و کمترین میزان تنش در گشودگی شش ضلعی در زاویه چرخش حدوداً ۳۰ درجه حاصل می‌گردد.

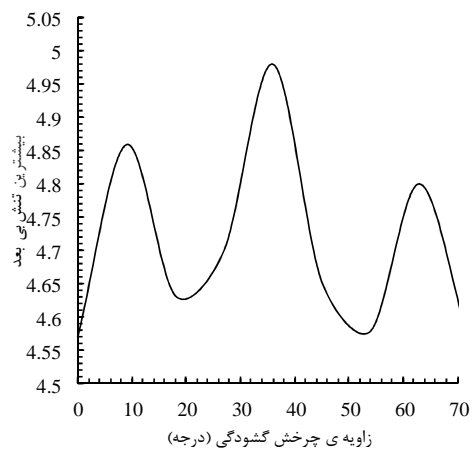
### شکل ۱۳- تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی بیشترین تنش بی- بعد برای گشودگی شش ضلعی و $w=0/05$

جدول ۶ مقدار تنش مطلوب و نامطلوب را برای گشودگی پنج ضلعی و شش ضلعی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در گشودگی پنج ضلعی مقدار تنش مطلوب برابر  $4/57$  در زاویه چرخش صفر درجه و مقدار تنش نامطلوب برابر  $4/98$  در زاویه چرخش ۳۶ درجه به دست می‌آید. این درحالی است که برای گشودگی شش ضلعی مقدار تنش مطلوب برابر  $4/6691$  در زاویه چرخش ۳۰ درجه و مقدار تنش نامطلوب آن در زاویه صفر درجه برابر  $4/94$  حاصل شده است.

### جدول ۶- تنش مطلوب و نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی‌های پنج- ضلعی و شش ضلعی در $w=0/05$

نوع گشودگی	زاویه چرخش تنش مطلوب	تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب	تنش نامطلوب
پنج ضلعی	۰	$4/57$	۳۶	$4/98$
شش ضلعی	۳۰	$4/6691$	۰	$4/94$

شکل‌های ۱۴ و ۱۵ به بررسی تأثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب بی‌بعد می‌پردازد. برای گشودگی پنج ضلعی با نرم‌تر شدن گشودگی یا کاهش  $w$ ، تنش بی‌بعد کاهش می‌یابد و تغییرات آن بسیار کم است و در هیچ حالتی تنش، کمتر از تنش در گشودگی دایره‌ای نمی‌باشد. زاویه‌ی صفر درجه، زاویه‌ای است که در آن کمترین بیشینه تنش بی‌بعد اتفاق می‌افتد. در گشودگی شش ضلعی، شعاع انحنای گشودگی که در آن کمترین بیشینه تنش بی‌بعد کمتر از تنش در گشودگی دایره‌ای گشودگی برای تنش مطلوب، ۳۰ درجه است. در این گشودگی نیز هیچ‌گاه بیشترین تنش بی‌بعد کمتر از تنش در گشودگی دایره‌ای نمی‌شود. همانطور که در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود، در گشودگی پنج- ضلعی با افزایش شعاع انحنای گوشه گشودگی مقدار بیشترین تنش بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد اما بر اساس شکل ۱۵، در گشودگی شش- ضلعی ابتدا با یک شیب ملایم مقدار تنش تا  $w=0/05$  افزایش یافته و پس از آن با یک سیر صعودی میسر خود را ادامه می‌دهد.

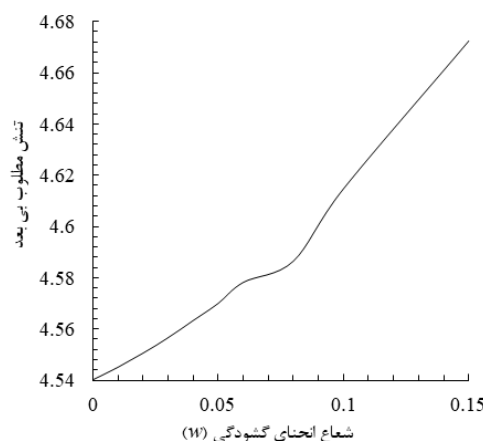


شکل ۱۲- تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی بیشترین تنش بی- بعد برای گشودگی پنج ضلعی و  $w=0/05$

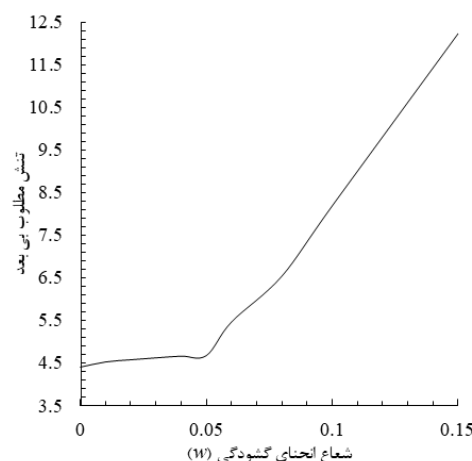
افتاد. حداکثر تنش در این حالت برابر ۴/۰۹ شد. این در حالی است، که حداکثر تنش در گشودگی دایره‌ای برابر ۴/۴ می‌باشد.

### ۶- مراجع

- [1] Florence AL, Goodier JN., Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.52, pp.293-294, 1959.
- [2] Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Second edition, Netherlands, Noordhoff, 1962.
- [3] Florence AL, Goodier JN., Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.27, pp. 635-639, 1960.
- [4] Chao CK, Chen FM, and Shen MH, An exact solution for thermal stresses in a three-phase composite cylinder under uniform heat flow. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.44, No. 3, pp.926-940, 2007.
- [5] Bhullar SK., Thermal stresses in a hexagonal region with an elliptical hole. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol.6, No.3, pp. 245-256, 2006.
- [6] Aseeri SA., Goursat functions for a problem of an isotropic plate with a curvilinear hole. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, Vol.1, No.3, pp.57-81, 2008.
- [7] Bhullar SK, Weger JL., Thermal stresses in a plate with hyperelliptical hole. *Journal of Applied Research and Technology*, Vol.1, No.8, pp.152-170, 2009.
- [8] Sharma DS, Stress distribution around polygonal holes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 65, No.1, pp. 115-124, 2012.
- [9] Jafari M., Bagher Nazari B., and Taheri Nasab A., Study of the effective parameters on stress distribution around triangular hole in metallic plates subjected to uniform heat flux, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 39, No. 3, pp. 333-344, 2016.
- [10] Hasebe N, Bucher C, Heuer R., Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.47, No.1, pp.138-147, 2010.
- [11] Hasebe N, Wang XF, Saito T, Sheng W., Interaction between a rigid inclusion and a line crack under uniform heat flux. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.44, No.1, pp. 2426-2441, 2007.
- [12] Jafari M, Nazari M, Taherinasab A., Thermal stress analysis of an infinite plate with non-circular cutouts subjected to a uniform heat flow. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol.59, No.1, pp.356-363, 2014.
- [13] Rasuli M, Jafari M., Thermal stress analysis of infinite anisotropic plate with elliptical hole under uniform heat flux. *Journal of Thermal Stresses*, Vol.39, No.11, pp.1341-1135, 2016.
- [14] Bayati Chaleshtari MH, Jafari M., Optimization of finite plates with polygonal cutout under in-plane loading by gray wolf optimizer. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol.52, No.6, pp.365-379, 2017.
- [15] Bayati Chaleshtari MH, Jafari M., Determination of optimum stress in finite metallic plates with polygonal cutouts by using particle swarm algorithm. *Tabriz Journal of Mechanical Engineering*, Vol.48, No.3, pp.19-28, 2018. (in Persian)



شکل ۱۴- تأثیر شعاع انحنای گشودگی (W) بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی



شکل ۱۵- تأثیر شعاع انحنای گشودگی (W) بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و با به کارگیری نگاشت همنوا و حل معادلات انتگرالی، تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی و زاویه‌ی چرخش گشودگی بر مقدار توزیع تنش در صفحه همسانگرد حاوی گشودگی غیر دایره‌ای با چشمه گرمایی نقطه‌ای ارائه شد. روش حل، بر پایه‌ی بسط روش گودیر و فلورنس است. برای استفاده از انتگرال کوشی، صفحه نامحدود شامل گشودگی، به ناحیه‌ی درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته شد. با بررسی نتایج به دست آمده در این مقاله، تعیین گردید که بیشترین تنش در محل قرارگیری چشمه حاصل می‌شود و تغییر پارامترهای گشودگی بر مقدار آن تأثیرگذار است. در انتها مقادیر تنش بیشینه با در نظر داشتن پارامترهای مهمی مانند: نوع گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی به دست آمد. از بین گشودگی‌های مختلف، گشودگی چهارضلعی با انتخاب زاویه‌ی چرخش و شعاع انحنای مناسب کمترین مقدار تنش به دست آمد. این کمترین مقدار با انتخاب شعاع انحنای گشودگی ۰/۰۴ و زاویه‌ی چرخش گشودگی ۴۵ درجه اتفاق