

تحلیل ناپایداری توکشی استاتیکی زیست حسگر به روش تجزیه آدومیان پیراسته

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

فاطمه شیخ‌ممو

حمید محمدصدیقی*

محمد شیشه‌ساز

چکیده

در مطالعه حاضر، با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده به بررسی رفتار زیست‌حسگر پرداخته شده است. زیست‌حسگر تحت تحریک الکترواستاتیک و همچنین غوطه‌ور در سیال است. برخلاف پژوهش‌های پیشین، در مطالعه حاضر اثر پارامترهای اندازه، وجود لایه سطحی و نیروی بین‌مولکولی کازیمیر به‌طور همزمان در نظر گرفته می‌شود. به‌منظور حل معادله استاتیکی غیرخطی، از روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده و روش عددی استفاده شده است. در نهایت میزان تأثیر پارامترهای اندازه طول ماده، اثر تنش سطحی بر ولتاژ توکشی نانو زیست‌حسگر مورد مطالعه قرار گرفته است. مقایسه نتایج حاصل از روش حل تحلیلی آدومیان با روش عددی و مراجع نشان می‌دهد که این روش از دقت بسیار بالایی برخوردار بوده و می‌تواند به عنوان روشی مؤثر و کارآمد برای تحلیل پایداری نانو زیست‌حسگرها مورد استفاده قرار گیرد. نتایج حاکی از آن است که با در نظر گرفتن اثر لایه سطحی و افزایش پارامتر اثر اندازه، ولتاژ توکشی در هر دو حالت عددی و تحلیلی بیشتر از حالتی است که از اثر سطح صرف‌نظر می‌شود. علاوه بر این با حضور لایه سطحی و افزایش نیروی کازیمیر، ولتاژ توکشی کاهش می‌یابد. **واژه‌های کلیدی:** زیست‌حسگر، نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده، ناپایداری توکشی، روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده، اثر سطحی.

Investigating the Static Pull-in Instability of Biosensors Using Modified Adomian Decomposition Method (MAD)

F. Sheikmmamoo

Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

H. Mohammad-Sedighi

Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

M. Shishesaz

Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this study, the behaviour of biosensors is investigated by using the modified coupled stress theory. The biosensor is electrostatically stimulated and also immersed in the fluid. Unlike previous studies, in the present study, the size effect parameters, surface layer, and intermolecular Casimir force are considered simultaneously. In order to solve the nonlinear static equation, the Modified Adomian Decomposition (MAD) method and the numerical method are used. Finally, the effect of the length of the material and also the effect of stress on the pull-in voltage is studied as well. Comparing the results of the Adomian analytical solution with numerical methods and reported results in the literature, show that the method has high accuracy and can be used as an effective and efficient method for analyzing the stability of Nano-bio sensors. The results indicate that by considering the surface effect and also increasing the size effect parameter, the pull-in voltage in both numerical and analytical modes is more than the situation which surface effect is neglected. In addition, with the presence of the surface layer and the increase of the Casimir force, the pull-in voltage is reduced.

Keywords: Bio-Sensor, Modified Couple Stress Theory, Pull In Instability, Modified Adomian Decomposition, Surface Effect.

الکتروود ثابت و الکتروود متحرک که در ابتدا با فاصله مشخصی از هم قرار گرفته‌اند، می‌باشد. هنگامی که ولتاژ اعمال شده از یک مقدار بحرانی بیشتر شود، الکتروود متحرک که در واقع همان نانوتیر است به سمت الکتروود ثابت خم می‌شود و سیستم پایداری خود را از دست می‌دهد و وارد محدوده‌ی ناپایداری می‌شود که عملاً به این پدیده، پدیده‌ی ناپایداری توکشی^۳ گفته می‌شود. به ولتاژی که این پدیده در آن رخ می‌دهد، ولتاژ توکشی^۴ گفته می‌شود. از این‌رو تعیین و محاسبه ولتاژ توکشی در طراحی این نوع از سیستم‌ها امری ضروری است. در

۱- مقدمه

سیستم‌های نانوالکترومکانیکی مجموعه‌ای از حسگرها^۱ و محرک‌ها^۲ هستند که در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند. این ریزساختارها بر اساس نوع مکانیزم تحریکشان طبقه‌بندی می‌شوند. یکی از مهم‌ترین مکانیزم‌های تحریک این ساختارها، تحریک الکترواستاتیک می‌باشد. اساس کار سیستم‌هایی که با این نوع از تحریک راه‌اندازی می‌شوند چنان است که با قرار دادن سیستم در معرض میدان‌های الکتریکی با استفاده از اعمال ولتاژ بین

³ Pull-In Instability

⁴ Pull- In Voltage

¹ Sensor

² Actuators

سال‌های اخیر محققان، مطالعات گسترده‌ای پیرامون ناپایداری در سیستم‌های نانوالکترومکانیک به دلیل کاربردهای فراوانی که در طراحی نانوحسگرها و محرک‌ها دارند، انجام داده‌اند. همچنین از آنجاکه رفتار مواد در ابعاد نانو، می‌تواند متفاوت از رفتار آن‌ها در حد ماکرو باشد، لذا استفاده از نظریه پیوسته کلاسیک در مطالعه رفتار ساختارهای میکرو و نانو از دقت کافی برخوردار نخواهد بود. از این رو به منظور مدل‌سازی دقیق‌تر ریزساختارها، نظریه‌های مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک ارائه شده‌اند. این نظریه‌ها دارای پارامتر مقیاس طول می‌باشند و در نتیجه می‌توانند اثر اندازه را نیز لحاظ نمایند که از آن جمله می‌توان به نظریه‌های گرادیان کرنش^۱ [۱]، تنش کوپل اصلاح‌شده^۲ [۲]، نظریه الاستیسیته غیرمحلی^۳ [۳]، نظریه تنش کوپل^۴ [۴] نظریه گرادیان کرنش اصلاح‌شده^۵ [۵] و غیره اشاره کرد. در نظریه تنش کوپل و شکل اصلاح شده آن علاوه بر سادگی روابط ارائه شده، دقت بالایی نیز در ارائه پاسخ انواع سیستم‌های مورد مطالعه در پدیده‌های گوناگون مکانیکی مشاهده شده است. در نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده نسبت به دیگر نظریه‌ها، علاوه بر دو ثابت لامه، تنها به یک پارامتر مقیاس طول برای بیان وابستگی رفتار ماده به ابعاد آن نیاز است. این ثابت از خواص مکانیکی ماده است و به صورت تجربی و آزمایشگاهی تعیین می‌شود [۶].

عبدالرحمن و همکاران [۷] یک مدل غیرخطی از یک میکرو تیر تحت تحریک الکترواستاتیک را ارائه دادند. در این مدل اثر کشیدگی صفحه میانی لحاظ شده است. آن‌ها جابجایی میکرو تیر را به صورت مجموع جابجایی استاتیکی و دینامیکی در نظر گرفتند و به کمک روش‌های عددی مسائل مقدار ویژه مرزی معادله استاتیکی را حل و جابجایی استاتیکی را به دست آوردند. سپس با حل مسئله مقدار ویژه که توصیف‌کننده ارتعاشات سیستم حول موقعیت استاتیکی است، شکل مود و فرکانس‌های طبیعی سیستم را استخراج کردند. لی بین و همکاران [۸] اثر اندازه را با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده بر رفتار میکرو محرک‌های الکترواستاتیک مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که میکرو تیر دارای ضخامت کم، عملکردی با انحراف بحرانی کمتر و ولتاژ بحرانی بیشتری خواهد داشت. از این رو اگر ضخامت تیر در مقایسه با پارامتر مقیاس طول ماده قابل توجه باشد در این صورت اثر اندازه اهمیت پیدا می‌کند. رهایی فرد و همکاران [۹] خیز و ناپایداری استاتیکی میکرو تیرهای یکسرگیردار سیلیکونی را بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده ارائه دادند. آن‌ها در این مطالعه اثرات نیروهای بین‌مولکولی را نادیده گرفتند و تنها اثر نیروی الکترواستاتیک را در معادلات خود اعمال نمودند. کانگ و همکاران [۱۰] با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده به بررسی اثرات اندازه بر تغییر شکل استاتیکی در میکرو تیر اویلر برنولی پرداختند و همچنین به صورت آزمایشگاهی نشان دادند که اندازه بر خصوصیات مکانیکی مؤثر است کانگ و چن [۱۱] برای اولین بار در سال ۲۰۰۵ برای بررسی و تحلیل معادلات حاکم بر یک کلید میکروالکترواستاتیک از روش تجزیه

آدومیان اصلاح‌شده^۶ که از روش‌های نوین در حل معادلات غیرخطی است، استفاده کردند و دقت روش تحلیلی مورد استفاده را مورد بحث قرار دادند. طادی بنی و همکاران [۱۲] با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده و روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده، به مطالعه و بررسی رفتار استاتیکی نانو تیرهای الکترواستاتیک با شرایط مرزی الاستیک تحت تأثیر نیروی بین‌مولکولی کازیمیر پرداختند. حاصل تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که نیروی بین‌مولکولی باعث کاهش ولتاژ توکشی می‌شود و اثر اندازه باعث افزایش ولتاژ و جابجایی توکشی می‌شود. سروش و همکاران [۱۳] با استفاده از روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده به بررسی اثر نیروهای کازیمیر و واندوالس بر ناپایداری نانو محرک‌های یکسرگیردار پرداختند. در این پژوهش مشاهده شد که حضور نیروهای بین‌مولکولی سبب کاهش خیز تیر می‌شود. کوچی و همکاران [۱۴] رفتار استاتیکی نانو محرک یکسرگیرداری را تحت اثر نیروی کازیمیر و با در نظر گرفتن اثرات سطحی (تنش باقی‌مانده سطح و الاستیسیته سطح) مورد بررسی قرار دادند. جهت حل معادله حاکم بر سیستم از روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده استفاده کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد اثرات سطحی برای محرک‌های با ضخامت کم از اهمیت بیشتری برخوردار خواهد بود. نقره‌آبادی و همکاران [۱۵] با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده و حل تحلیلی آدومیان اصلاح‌شده به بررسی رفتار نانو کلیدهای الکترواستاتیکی دو سرگیردار غوطه‌ور در سیال الکترولیت پرداختند. حاصل تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که افزایش غلظت یونی باعث افزایش ولتاژ پولین کلید می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر اثر اندازه، ولتاژ توکشی زیاد می‌شود. آن‌ها در پژوهش خود ادعا کردند که نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده نسبت به نظریه کلاسیک، ولتاژ توکشی بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. قلم‌باز و همکاران [۱۶] نانو کلید یکسر گیرداری را با حضور نیروی کازیمیر به روش تحلیلی سری توانی حل کرده و نتایج خود را با روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده مقایسه کردند.

با بررسی پژوهش‌های پیشین مشاهده می‌شود که بررسی پدیده توکشی با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک، لایه سطحی و با حضور نیروهای بین‌مولکولی به روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده تاکنون مورد توجه محققین نبوده است. لذا به منظور توسعه مدل‌های پیشین، اثرات همزمان لایه سطحی و اندازه در نظر گرفته شده است. بدین منظور در پژوهش حاضر، با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی بر مبنای نظریه گورتین^۷ و مورداک^۸ و اثرات وابسته به اندازه بر مبنای نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده به بررسی تأثیر پدیده اثر سطحی بر ناپایداری توکشی نانو زیست‌حسگر می‌پردازیم. زیست‌حسگر از یک نانوتیر یکسرگیردار تشکیل می‌شود که در انتهای گیردار، یک ولتاژ الکتریکی اعمال شده است. جهت مدل‌سازی نانو زیست‌حسگر از نظریه تیر اویلر برنولی استفاده می‌شود. برای حل معادله استاتیکی از روش تحلیلی تجزیه آدومیان اصلاح‌شده استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده از روش حل تحلیلی با روش عددی و مرجع [۱۴]، مقایسه شده و تأیید می‌شود.

¹ Strain Gradient Theory

² Modified Couple Stress Theory

³ Nonlocal Elasticity Theory

⁴ Couple Stress Theory

⁵ Modified Strain Gradient Theory

⁶ Modified Adomian Decomposition Method

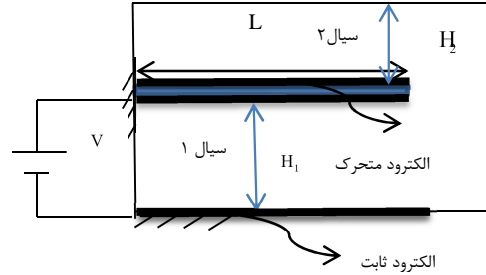
⁷ Gurtin

⁸ Murdoch

۲- فرمول‌بندی مسئله

۲-۱- مدل‌سازی مسئله

شکل ۱ نمایشی از یک زیست‌حسگر یکسرگیردار را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود جهت مدل‌سازی نانو زیست‌حسگر مورد نظر از نظریه تیر اویلر برنولی استفاده شده است. تیر یکسرگیردار به طول L ، ضخامت h و یک الکتروود ساکن تشکیل شده است. تیر در یک فاصله اولیه H_1 از الکتروود ساکن قرار دارد. با اعمال ولتاژ الکتریکی بین تیر و الکتروود ساکن، نیروی الکترواستاتیکی بوجود می‌آید.



شکل ۱- نمایشی از نانو زیست‌حسگر با حضور لایه سطحی.

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2} \text{curl}(\bar{u}) \quad (7)$$

نظریه‌های بسیاری برای توضیح چگونگی رفتار سازه‌هایی از نوع تیر وجود دارد. قدیمی‌ترین و شناخته‌شده‌ترین نظریه تیر، نظریه اویلر برنولی یا نظریه کلاسیک تیر می‌باشد. این نظریه برای تیرهایی که نسبت طول آن‌ها به دیگر ابعاد زیاد است مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق این نظریه، میدان جابجایی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۷].

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ u_2(x, z, t) &= 0 \\ u_3(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (8)$$

در جایی که u_1, u_2, u_3 میدان جابجایی در راستاهای x, y, z بوده و w جابجایی عرضی نقطه‌ای از تیر بر محور خنثی می‌باشد. با جایگذاری مؤلفه‌های میدان جابجایی از رابطه (۸) در رابطه (۳)، مؤلفه‌های کرنش به‌صورت زیر نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

همچنین از روابط (۷) و (۸) مؤلفه‌های بردار چرخشی به‌صورت زیر نتیجه می‌شوند.

$$\theta_x = \theta_z = 0, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (10)$$

مؤلفه غیرصفر تانسور انحنا و تانسور تنش کوپل به‌صورت معادلات (۱۱) و (۱۲) بیان می‌شوند:

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$m_{xy} = -\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (12)$$

بدین ترتیب با استفاده از رابطه (۲) و کرنش‌های بدست آمده در رابطه (۹)، اعضای تانسور تنش کلاسیک را می‌توان در روابط (۱۳) تا (۱۵) ارائه نمود.

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0 \quad (15)$$

برای یک تیر باریک ($b < 5h$) با نسبت منظری بزرگ، اثر پواسون ناچیز است و می‌توان به‌منظور ساده‌سازی فرمول‌ها در نظریه تیر ساده نادیده گرفته شود [۱۸]. در نتیجه معادلات بالا در قالب رابطه (۱۶) نوشته می‌شوند.

$$\sigma_{xx} = E \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (16)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

بنابراین با توجه به روابط فوق، انرژی کرنشی نانو تیر براساس نظریه

۲-۲- معادلات

۳-۲- مروری بر نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده

نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده یک نظریه غیرکلاسیک پیوسته است. این نظریه قادر به محاسبه اثرات اندازه در مقیاس کوچک، در رفتار مکانیکی نانو ساختارها می‌باشد. براساس این نظریه، تانسور تنش کوپل متقارن بوده و تنها شامل یک پارامتر مقیاس طول می‌باشد. در این نظریه انرژی کرنش تابعی از هر دو تانسور کرنش (مربوط به تانسور تنش) و انحنا (مربوط به تانسور تنش کوپل) می‌باشد. بر اساس این نظریه، انرژی کرنشی U برای یک ماده الاستیک همگن که فضای V را اشغال می‌کند عبارت است از [۲]:

$$U_b = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (1)$$

در جایی که ϵ_{ij} تانسور کرنش، σ_{ij} تانسور تنش کوشی، χ_{ij} تانسور متقارن انحنا و m_{ij} بخش عرضی تانسور تنش کوپل بوده که طبق روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\epsilon) \delta_{ij} \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (5)$$

λ, μ ثوابت لامه که برحسب مدول یانگ و ضریب پواسون به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

l پارامتر مقیاس طول و خاصیتی از ماده می‌باشد که در مقایسه با ابعاد جسم کوچک می‌باشد. u بردار جابجایی و θ بردار چرخشی می‌باشند که از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشند.

تنش کوپل اصلاح شده عبارتست از:

$$T_{\text{surface layer}} = \frac{1}{2} \int_0^L \int \int \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 ds dx \quad (26)$$

با در نظر گرفتن نیروهای خارجی بر طول واحد تیر، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w_{\text{ext}} = \int_0^L q(x) w(x) dx \quad (27)$$

در معادله بالا $q(x)$ ، مجموع نیروهای خارجی موثر می‌باشند که عبارتند از:

$$q(x) = q_{\text{elec}} + q_{\text{cas}} + q_{\text{damp}} \quad (28)$$

این نیروها شامل نیروی الکترواستاتیک، نیروی بین‌مولکولی کازیمیر و نیروی میرایی سیال می‌باشد که به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند.

اعمال ولتاژ بین الکتروود متحرک و ثابت سبب اعمال نیرو و در نتیجه خم شدن الکتروود متحرک به سمت پایین می‌شود. حال با در نظر گرفتن ضریب اثر میدان‌لبه و اثر دی‌الکتریک سیال، نیروی الکترواستاتیک بر طول واحد نانو تیر به صورت زیر بازنویسی می‌شود [20].

$$f_{\text{elec}} = \frac{K \epsilon_0 b V^2}{2(H_1 - w(x,t))^2} \left(1 + 0.65 \frac{(H_1 - w)}{b} \right) \quad (29)$$

که H_1 فاصله اولیه بین تیر و الکتروود ثابت، ϵ_0 ثابت دی‌الکتریک محیط بین دو الکتروود و $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$ ضریب گذردهی خلا می‌باشد. در معادله بالا K ضریب ثابت دی‌الکتریک سیال می‌باشد.

با انتقال ساختارها به فضای میکرو و نانو، نیروهایی همچون نیروی کازیمیر اثرات خود را بر ساختارها می‌گذارند. مقدار نیروی بین مولکولی کازیمیر بر واحد طول نانو تیر، برای دو صفحه رسانای موازی که در فاصله بیش از 20 نانومتر از یکدیگر قرار گرفته‌اند به صورت زیر به دست می‌آید [21].

$$F_c = \frac{\pi^2 \hbar c b}{240 (H_1 - w(x,t))^4} \quad (30)$$

در رابطه بالا، $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ثابت پلانک تقسیم بر 2π و $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ سرعت نور می‌باشد. این رابطه فقط برای نانو تیرهای که نسبت $\frac{H_1}{b} \leq 1$ برقرار است قابل استفاده می‌باشد.

لازم به ذکر است که مایع اطراف نانولوله می‌تواند بر ویژگی‌های ارتعاشی نانوتیر تأثیرگذار باشد. نیروی اصلی مایع اطراف به صورت نیروی میرایی ظاهر می‌شود. این تأثیر با یک ضریب میرایی معادل C بر طول واحد تقریب زده می‌شود [22]. در نتیجه نیروی میرایی معادل سیال به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$F_d = -C \frac{\partial w}{\partial t} \quad (31)$$

C ضریب معادل میرایی بر طول واحد می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود [22].

$$C = \left(\frac{\mu_1 b^3}{H_1^3} + \frac{\mu_2 b^3}{H_2^3} \right) \quad (32)$$

μ_1, μ_2 به ترتیب لزجت سیال و عرض تیر می‌باشند.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \int \int (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + 2m_{xy} \chi_{xy}) dA dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^L (M_x + Y_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (EI + \mu AI^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی بر مبنای نظریه گورتین و مورداک، معادلات ساختاری برای لایه‌های سطحی به صورت زیر بیان می‌شوند [19].

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_0 \delta_{\alpha\beta} + (\lambda_0 + \tau_0) \epsilon_{pp}^s \delta_{\alpha\beta} + 2(\mu_0 - \tau_0) \epsilon_{\alpha\beta}^s + \tau_0 u_{\alpha,\beta}^s \quad (18)$$

$$\tau_{\alpha k} = \tau_0 u_{k,\alpha}^s$$

α, β نشان دهنده مختصات دکارتی درون صفحه و k مشخصه کارترین برون صفحه‌ای است. با جایگذاری معادله (9) در معادله (18)، مؤلفه‌های غیر صفر تنش‌های سطحی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\tau_{xx} = \tau_0 + E_0 \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (19)$$

$$\tau_{zx} = \tau_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$

در معادله بالا E_0 مدول الاستیسیته لایه سطحی، λ_0, μ_0 ثوابت لامه لایه سطحی می‌باشد.

$$E_0 = \lambda_0 + 2\mu_0 \quad (20)$$

انرژی کرنشی لایه سطحی با ضخامت صفر به صورت زیر نوشته می‌شود [19]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int \int (\tau_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \tau_{k\alpha} u_{k,\alpha}) ds dx \quad (21)$$

با قراردادن معادلات (18) و (19) در معادله (21) به معادله زیر می‌رسیم:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int \int \left[\left(\tau_0 + E_0 \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \tau_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] ds dx \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\tau_0 S_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + E_0 I_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx$$

برای مقاطع مستطیلی پارامترهای I_0, S_0 به صورت زیر تعریف می‌شوند [19].

$$I_0 = \int z^2 ds = \frac{bh^3}{2} + \frac{h^3}{6} \quad (23)$$

$$S_0 = 2b$$

از معادلات (22) و (17) انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت رابطه (24) خواهد بود.

$$U_T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[(EI + \mu AI^2 + E_0 I_0) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (\tau_0 S_0) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (24)$$

انرژی جنبشی نانولوله (مدل تیر اویلر برنولی) و لایه سطحی را می‌توان به صورت روابط (25) و (26) بیان نمود:

$$T_{\text{beam}} = \frac{1}{2} \int_0^L \int \int \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA dx \quad (25)$$

جایجا می‌شود، سپس حول خیز استاتیکی به وجود آمده $W_s(X)$ خیز دینامیکی $W_d(X, \tau)$ ایجاد می‌شود. نهایتاً خیز کلی تیر به صورت مجموع خیز استاتیکی و دینامیکی به صورت زیر می‌باشد.

$$W(X, \tau) = W_s(X) + W_d(X, \tau) \quad (39)$$

در مقاله حاضر، جهت بررسی ناپایداری توکشی استاتیکی زیست‌حسگر، از آثار اینرسی و استهلاک چشم‌پوشی می‌شود و تغییرات ولتاژ به آرامی صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر تنها معادله استاتیکی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. با جایگذاری رابطه (39) در معادله (34)، معادله غیرخطی استاتیکی نانوتیر با حذف جملات وابسته به زمان در معادله (34) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$(1+\delta) \frac{\partial^4 W_s}{\partial X^4} - \phi \frac{\partial^2 W_s}{\partial X^2} = \frac{\beta}{(1-W_s)^2} + \frac{\gamma\beta}{(1-W_s)} + \frac{\alpha}{(1-W_s)^4} \quad (40)$$

$$W(0, \tau) = W'(0, \tau) = 0$$

$$W''(L, \tau) = 0$$

$$\left(1 + \frac{\mu A I^2}{EI} + \frac{E_0 I_0}{EI}\right) W''(L, \tau) - \frac{2\tau_0 b L^2}{EI} W'(L, \tau) = 0 \quad (41)$$

۲-۴- حل معادله استاتیکی به روش تجزیه‌ی آدومیان

اصلاح‌شده:

از آنجاکه نیروی الکترواستاتیک و کازیمیر ماهیت غیرخطی دارند، حل معادله استاتیکی پیچیده و زمان‌بر خواهد بود. از این رو از روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده که یک روش قدرتمند برای حل معادلات غیرخطی است استفاده می‌شود. در این روش جواب به صورت یک سری نامتناهی به دست می‌آید که با افزایش تعداد جملات سری به جواب دقیق معادله همگرا می‌شود. با تقسیم طرفین معادله (40) بر ترم بی‌بعد $(1+\delta)$ و با جایگذاری $y(x) = 1 - W_s(x)$ در نهایت معادله استاتیکی به صورت رابطه (42) بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \psi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{(1+\delta)} \left(\frac{\alpha}{y(x)^4} + \frac{\beta}{y(x)^2} + \frac{\beta\gamma}{y(x)} \right) \quad (42)$$

$$\psi = \frac{\phi}{1+\delta} \quad (43)$$

مفاهیم اساسی روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده را می‌توان در پیوست مطالعه نمود.

با استفاده از روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده، پاسخ معادله (40) را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$W_s(x) = 1 - y(x) \quad (44)$$

جهت استخراج معادلات حاکم بر حرکت سیستم از اصل همیلتون^۱ استفاده می‌شود، که به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود [۱۷]

$$\int_0^t (\delta T - (\delta U_b + \delta U_s) + \delta w_{ext}) dt = 0 \quad (33)$$

پس از جایگذاری معادلات (24) تا (31) در معادله (33) و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر جابه‌جایی عرضی زیست‌حسگر به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta w = 0 \rightarrow [EI + \mu A I^2 + E_0 I_0] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\rho A + \rho_0 S_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - \tau_0 S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \left(\frac{\mu b^3}{H_1^3} + \frac{\mu b^3}{H_2^3} \right) \frac{\partial w}{\partial t} \\ + \frac{K \epsilon_0 b V^2}{2(H_1 - w(x, t))^2} \left(1 + 0.65 \frac{(H_1 - w(x, t))}{b} \right) + \frac{\pi^2 \hbar c b}{240(H_1 - w(x, t))} \end{aligned} \quad (34)$$

شرایط مرزی تیر یکسرگیردار در $x=0, x=L$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w(0, t) = w'(0, t) = 0$$

$$w''(L, t) = 0$$

$$(EI + \mu A I^2 + E_0 I_0) w'''(L, t) - (2\tau_0 b) w'(L, t) = 0 \quad (35)$$

در معادله (34) به صورت واضح دیده می‌شود که سفتی خمشی تیر از سه قسمت تشکیل می‌شود. EI سفتی خمشی نظریه کلاسیک تیر، $\mu A I^2$ در ارتباط با نظریه تنش کوپل اصلاح شده و $E_0 I_0$ سفتی خمشی لایه سطحی می‌باشد. در این معادله پارامتر مشخصه طولی^۱ رفتار وابسته به اندازه نانو تیر را بیان می‌کند.

بی‌بعد سازی معادله حاکم سبب ایجاد مفاهیم جدید، ساده‌سازی و توضیح بهتر پدیده‌های فیزیکی می‌شود در نتیجه از تغییر متغیرهای زیر، جهت بی‌بعدسازی معادلات و شرایط مرزی حاکم بر مسئله استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{L}, \quad W = \frac{w}{H_1}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad t^* = \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}} \\ \eta = \frac{\rho_0 S_0^*}{\rho A}, \quad \phi = \frac{\tau_0 S_0^* L^2}{EI}, \quad \delta_1 = \frac{\mu A I^2}{EI}, \quad \delta_2 = \frac{E_0 I_0}{EI} \end{aligned} \quad (36)$$

$$c = \frac{L^4}{EI t^*} \left(\frac{\mu_1 b^3}{H_1^3} + \frac{\mu_2 b^3}{H_2^3} \right) \\ \gamma = \frac{0.65 H_1}{b}, \quad \beta = \frac{K \epsilon_0 b L^4 V^2}{2 H_1^3 EI}, \quad \alpha = \frac{\pi^2 \hbar c b L^4}{240 E I H_1^5}$$

معادله بی‌بعد شده حاکم و شرایط مرزی بی‌بعد به صورت زیر بیان می‌شوند. لازم به ذکر است که پارامتر δ در معادله (37) به صورت $\delta = \delta_1 + \delta_2$ معرفی می‌شود.

$$(1+\delta) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (1+\eta) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \phi \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = c \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\beta}{(1-W)^2} (1+\gamma(1-W)) + \frac{\alpha}{(1-W)^4} \quad (37)$$

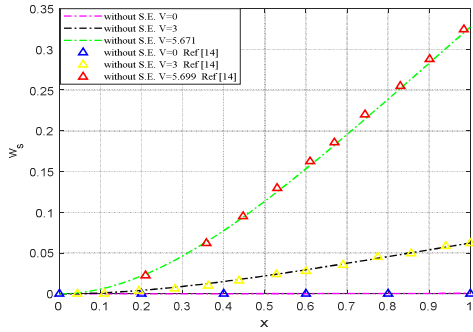
$$W(0, \tau) = W'(0, \tau) = 0$$

$$W''(L, \tau) = 0 \quad (38)$$

$$(1+\delta) W'''(L, \tau) - \phi W'(L, \tau) = 0$$

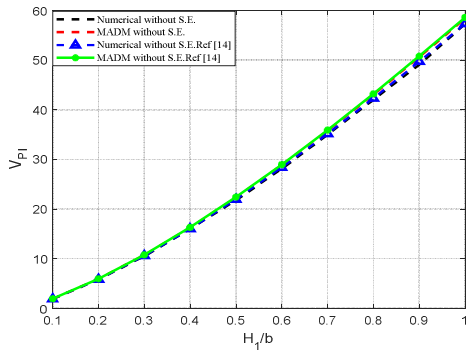
فرض می‌شود که نانوتیر تحت ولتاژ مستقیم V تحریک شده و

¹ Hamilton principle



شکل ۳- تغییر مکان استاتیکی به ازای ولتاژهای مختلف به روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده $\tau_0 = E_0 = 0$

شکل ۴ اثر میدان لبه را بر ولتاژ توکشی سیستم نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است نتیجه می‌شود که با افزایش نسبت H_1/b ، سیستم در ولتاژهای بالاتری وارد محدوده ناپایداری می‌شود.



شکل ۴- اثر پارامتر میدان لبه بر ولتاژ توکشی به روش عددی و تجزیه آدومیان اصلاح‌شده

همان‌گونه که از شکل‌های ۲، ۳ و ۴ مشاهده می‌شود می‌توان نتیجه گرفت که میان پژوهش حاضر و مرجع [۱۴] تطابق خوبی برقرار است. در جدول ۱ به اعتبارسنجی و مقایسه ولتاژ توکشی به دو روش عددی و تجزیه آدومیان اصلاح‌شده با مرجع [۱۴] پرداخته شده‌است. لازم به‌ذکر است که نتایج در این جدول بدون در نظر گرفتن اثر اندازه حاصل شده‌است. از مقایسه نتایج مشاهده می‌شود که نتایج ارائه‌شده دارای دقت خوبی با مرجع مورد نظر می‌باشد.

جدول ۱- ولتاژ توکشی کار حاضر و مرجع [۱۴]

پارامتر	کار حاضر	مرجع [۱۴]
ولتاژ توکشی تحلیلی	۵/۶۷۱	۵/۶۹۹
ولتاژ توکشی عددی	۵/۳۹۳	۵/۴۲۴

۴- بحث و نتایج

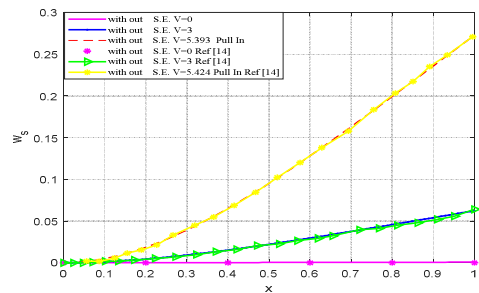
به‌منظور بررسی ناپایداری استاتیکی زیست‌حسگر، رابطه (۴۰)، با روش تحلیلی تجزیه آدومیان اصلاح‌شده، حل شده و تاثیر پارامترهای $\beta, \tau_0, H_1/b, h$ بررسی شده است. ابعاد و مشخصات فیزیکی مدل مورد نظر در جدول زیر آمده است.

$$\begin{aligned}
 W(x) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 - y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - \dots \\
 w(x) &= \frac{1}{2}(c_1 + \psi)k^2 - \frac{1}{3}c_2k^3 \\
 & - \frac{1}{4!} \left[(c_1\psi + \psi^2) - \frac{1}{1+\delta}(\alpha\beta + \beta^2) \right] k^4 - \frac{1}{3!}c_2\psi k^5 \\
 & - \frac{1}{6!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[(c_1 + \psi)(4\alpha + 3\beta + \beta^2) - \psi(\alpha\beta + \beta^2) + (c_1\psi + \psi^2) \right] \right] k^6 \\
 & - \frac{1}{7!} \left[\frac{1}{1+\delta} (4\alpha + 3\beta + \beta^2) c_2 + c_1\psi^2 \right] k^7 \\
 & - \frac{1}{8!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[-c_1 + \psi^2 \right] (10\alpha + 3\beta + \beta^2) + 2(c_1 + \psi)(4\alpha + 3\beta + \beta^2) \right] k^8 \\
 & - \frac{1}{8!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[-\psi^2(\alpha\beta + \beta^2) - \frac{1}{1+\delta} (4\alpha + 3\beta + \beta^2)(\alpha\beta + \beta^2) \right] \right] k^9 \\
 & - \frac{1}{9!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[2\psi(4\alpha + 3\beta + \beta^2) - 2\psi(c_1 + \psi)(10\alpha + 3\beta + \beta^2) \right] \right] k^{10} \\
 & - \frac{1}{10!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[-2c_1\psi(10\alpha + 3\beta + \beta^2) \right] \right] k^{11} \\
 & - \frac{1}{10!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[(4\alpha + 3\beta + \beta^2)^2 (c_1 + \psi) - 2\psi(4\alpha + 3\beta + \beta^2)(\alpha\beta + \beta^2) + 3\psi(c_1 + \psi)(10\alpha + 3\beta + \beta^2)(\alpha\beta + \beta^2) \right] \right] k^{12} \\
 & - \frac{1}{11!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[(4\alpha + 3\beta + \beta^2)^2 c_2 + 7c_1(10\alpha + 3\beta + \beta^2)(\alpha\beta + \beta^2) \right] \right] k^{13} \\
 & + \frac{1}{12!} \left[\frac{1}{1+\delta} \left[(4\alpha + 3\beta + \beta^2)^2 (\alpha\beta + \beta^2) + 7\psi(10\alpha + 3\beta + \beta^2)(\alpha\beta + \beta^2) \right] \right] k^{14} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

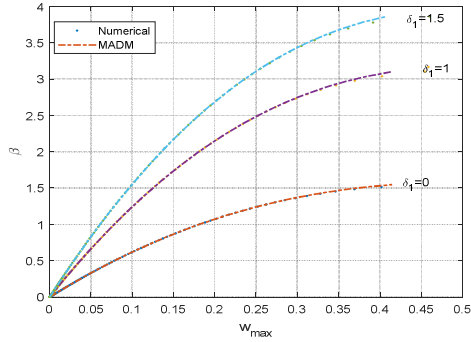
اکنون جهت محاسبه دو ضریب مجهول C_1, C_2 ، ابتدا باید به پارامترهای بی‌بعد در رابطه (۴۵) مقادیر مناسبی اختصاص داده شود. سپس به ازای شرایط مرزی آزاد در انتهای تیر، دو معادله به‌دست می‌آید که با حل دستگاه دو معادله دو مجهول ایجاد شده، ضرایب C_1, C_2 به‌دست می‌آیند.

۳- اعتبارسنجی

به‌منظور اعتبارسنجی روش حل ارائه شده در این مقاله، نتایج مبتنی بر نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده و روش حل تجزیه آدومیان اصلاح‌شده با نتایج موجود در مرجع [۱۴] مقایسه شده‌اند. شکل‌های ۲ و ۳ در واقع تغییر مکان سیستم را برای ولتاژهای اعمالی از مقدار اولیه صفر تا مقدار توکشی در دو حالت عددی و روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده نشان می‌دهد. محور افقی طول بی‌بعد سیستم است و محور عمودی تغییر مکان استاتیکی سیستم را تحت نیروهای الکترواستاتیکی و کازیمیر نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشخص می‌شود که با افزایش ولتاژ اعمالی به سیستم، تغییر مکان استاتیکی سیستم افزایش می‌یابد.

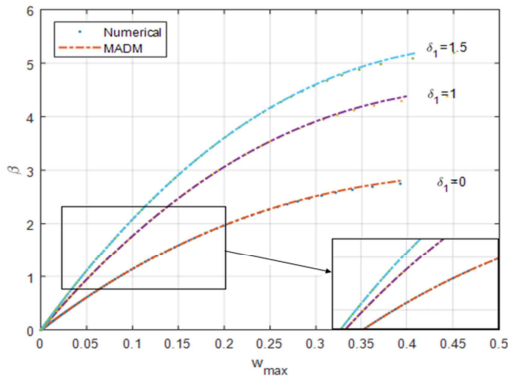


شکل ۲- تغییر مکان استاتیکی به ازای ولتاژهای مختلف به روش عددی $\tau_0 = 0, E_0 = 0$



شکل ۶- تاثیر پارامتر اثر اندازه بر پارامتر بی‌بعد ولتاژ بدون در نظر گرفتن اثر سطح در دو حالت عددی و تجزیه آدومیان اصلاح‌شده. ($\delta_1 = 0, 1, 1.5, \tau_0 = 0, E_0 = 0$)

به‌منظور مطالعه تاثیر پدیده اثر سطح بر رفتار زیست‌حسگر، مدول الاستیسیته سطح و تنش سطحی را به‌ترتیب $1/22$ و $0/89$ در نظر می‌گیریم و معادله (۴۰) برای مقادیر مختلف اثر اندازه حل می‌شود. این شکل در واقع تکمیل‌کننده شکل ۶ می‌باشد. نتیجه حاصل نشان می‌دهد با در نظر گرفتن اثر سطح و افزایش پارامتر اثر اندازه ولتاژ توکشی در هر دو حالت عددی و تحلیلی بیشتر از حالتی است که از اثر سطح صرف‌نظر می‌شود.



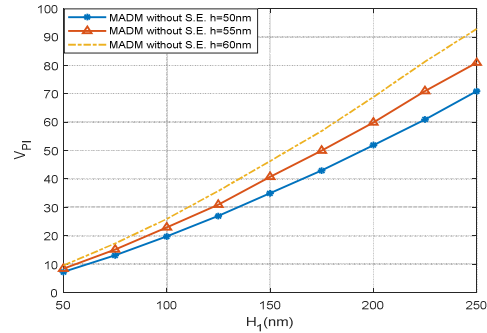
شکل ۷- تاثیر پارامتر اثر اندازه بر پارامتر بی‌بعد ولتاژ توکشی با در نظر گرفتن اثر سطح در دو حالت عددی و تجزیه آدومیان اصلاح‌شده. ($\delta_1 = 0, 1, 1.5, \tau_0 = 0.89, E_0 = 1.22$)

شکل ۸ اثر لایه سطحی و نیروی کازیمیر را بر پارامتر ولتاژ بی‌بعد نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، افزایش نیروی کازیمیر سبب کاهش پارامتر ولتاژ بی‌بعد می‌شود. از طرف دیگر وجود لایه سطحی در کنار نیروی کازیمیر باعث می‌شود پارامتر ولتاژ بی‌بعد بیشتر از حالتی باشد که از وجود لایه سطحی صرف‌نظر می‌شود. به عبارت دیگر با وجود لایه سطحی نانو زیست‌حسگر دیرتر وضعیت پایداری خود را از دست دهد.

جدول ۲- مشخصات هندسی و فیزیکی نانو زیست‌حسگر

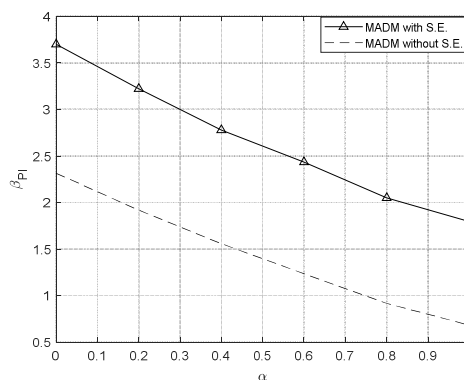
مقدار	پارامتر
۱۰۰۰ (nm)	طول (L)
۲۵۰ (nm)	عرض (b)
۵۰ (nm)	ضخامت (h)
۵۰ (nm)	فاصلیه اولیه دو الکتروود (H_1)
۷۶ Gpa	مدول الاستیسیته (E)
۰/۳۷	نسبت پواسون (ν)
۰/۸۹	تنش سطحی (τ_0)
۱/۲۲	مدول الاستیسیته سطح (E_0)
۱	ثابت دی الکتریک (K)

برای نشان دادن تاثیر فاصله بین دو الکتروود بر پایداری نانو زیست‌حسگر مورد مطالعه، ولتاژ توکشی با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده محاسبه می‌شود. با توجه به شکل ۵، به ازاء یک ضخامت مشخص، با افزایش فاصله بین دو الکتروود، ولتاژ توکشی افزایش می‌یابد.



شکل ۵- تغییر ولتاژ توکشی با فاصله اولیه بین دو الکتروود به ازاء ضخامت های متفاوت ($\delta_1 = 0.5, \tau_0 = 0, E_0 = 0$)

شکل ۶ نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر اثر اندازه $\left(\frac{\mu Al^2}{EI}\right)$ ، ولتاژ توکشی زیاد می‌شود که این موضوع بیانگر سخت‌تر شدن رفتار نانو زیست‌حسگر می‌باشد. همان‌طور که از شکل مشخص است، نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده $\left(\frac{\mu Al^2}{EI}\right) \neq 0$ نسبت به نظریه کلاسیک $\left(\frac{\mu Al^2}{EI}\right) = 0$ ولتاژ توکشی بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. نتیجه حاصل بیان می‌کند که برای عملکرد حسگرها در ولتاژهای بالاتر، می‌توان از حسگری با اثر اندازه بیشتری استفاده کرد.



شکل ۸- تاثیر نیروی کازیمیر و لایه سطحی بر ولتاژ توكشی
($\delta_1 = 0.5, \tau_0 = 0.89, E_0 = 1.22$)

همچنین ملاحظه شد با در نظر گرفتن اثر لایه سطحی و افزایش پارامتر اثر اندازه، ولتاژ توكشی در هر دو حالت عددی و تحلیلی بیشتر از حالتی است که از اثر لایه سطحی صرفنظر می‌شود. هنگامیکه اثر اندازه بدون در نظر گرفتن اثر لایه سطحی بررسی می‌شود به ازاء یک ضخامت مشخص، با افزایش فاصله بین دو الکتروود، ولتاژ توكشی افزایش می‌یابد. یکی دیگر از نتایجی که می‌توان به آن اشاره کرد این است که حضور لایه سطحی در کنار نیروی کازیمیر باعث می‌شود پارامتر ولتاژ بی‌بعد بیشتر از حالتی باشد که از وجود لایه سطحی صرفنظر می‌شود. همچنین با افزایش طول نانو زیست‌حسگر اختلاف بین دو نظریه کلاسیک و تنش کوپل اصلاح‌شده کاهش می‌یابد.

۶- پیوست

معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \psi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{(1+\delta)} \left(\frac{\alpha}{y(x)^4} + \frac{\beta}{y(x)} + \frac{\beta y}{y(x)} \right) \quad (الف-۱)$$

$$\psi = \frac{\phi}{1+\delta} \quad (الف-۲)$$

عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$L^{(n)} = \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} \quad () \quad \text{عملگر دیفرانسیلی}$$

$$L^{(-n)} = \int_0^x \dots \int_0^x () dx \dots dx \quad \text{عملگر معکوس}$$

در این صورت معادله (الف-۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$L^4 [y_n(x)] = \psi L^2 [y_n(x)] + N(x, y(x)) \quad (الف-۳)$$

جملات شامل نیروهای خارجی کازیمیر و نیروی الکترواستاتیک

به صورت تابع غیرخطی $N(x, y(x))$ مفروض است [۲۳].

$$Ny(x, y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{v=1}^n C(v, n) h_v(y_0) \quad (الف-۴)$$

عملگر $L^{(-n)}$ باید به گونه‌ای انتخاب شود که با اعمال آن بر L ، تابع $y(x)$ آزاد شود. A_n چندجمله‌ای‌هایی بر حسب y_0, y_1, y_2, \dots که به چندجمله‌های آدامین معروفند و از روابط زیر به دست می‌آیند [۲۵]-[۲۴].

$$C(v, n) = \sum_{p_1=1}^v \prod_{i=1}^v \frac{1}{k_i!} y_{p_i}^{k_i} \sum_{i=1}^v k_i p_i = n \quad (الف-۵)$$

$$n > 0 \quad 0 \leq i \leq n \quad 1 \leq p_i \leq n-v+1$$

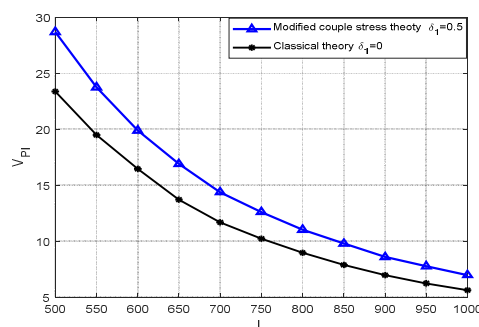
$$h_v(y_0) = \frac{d^v}{dy_0^v} (f(y_0)) \quad (الف-۶)$$

با چهار بار انتگرال‌گیری از سمت چپ رابطه (الف-۱)، معادله زیر نتیجه می‌شود.

$$\int \int \int \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx = y(x) + \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{1}{2!} c_1 x^2 + \frac{1}{3!} c_2 x^3 \quad (الف-۷)$$

با ادغام علامت منفی در ضرایب ثابت $\alpha_0, \alpha_1, c_1, c_2$ و اعمال عملگر معکوس به سمت راست رابطه (الف-۳)، معادله حاکم به صورت زیر نوشته می‌شود.

شکل ۹ نشان‌دهنده تأثیر نظریه‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح‌شده بر ولتاژ پولین به صورت تابعی از طول نانوتیر می‌باشد. تأثیر طول نانو زیست‌حسگر و اثر اندازه بر ولتاژ توكشی نشان داده شده است. بزرگتر شدن طول نانوتیر باعث می‌شود سیستم در ولتاژهای پایین‌تری به حالت ناپایداری برسد. همچنین با افزایش طول نانو زیست‌حسگر، تأثیر اثر اندازه بر ولتاژ توكشی یا به عبارت دیگر اختلاف بین دو نظریه کلاسیک و تنش کوپل اصلاح‌شده کاهش می‌یابد.



شکل ۹- تغییر ولتاژ توكشی با طول نانو زیست‌حسگر و اثر اندازه
($h = 50 \text{ (nm)}, \tau_0 = 0.89, E_0 = 1.22$)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله تغییر مکان استاتیکی وابسته به اندازه نانو زیست‌حسگر تحت نیروی الکترواستاتیک و نیروی کازیمیر و با در نظر گرفتن اثرات لایه سطحی با استفاده از روش عددی و روش تحلیلی تجزیه آدامین اصلاح‌شده بررسی شد. پارامتر اثر اندازه، ولتاژ توكشی الکترواستاتیک، اثرات لایه سطحی، اثر نیروی کازیمیر، طول نانوتیر و اثر میدان لبه در این پژوهش بررسی گردید. نتایج به دست آمده با مرجع [۱۴] مقایسه و نشان داده شد که نتایج استخراج شده از دقت خوبی برخوردار می‌باشد. در ادامه نتایج حاصل از پژوهش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

با توجه به نتایج مشخص شد که با افزایش پارامتر اثر اندازه، ولتاژ توكشی زیاد می‌شود که این موضوع بیانگر سخت‌تر شدن رفتار نانو زیست‌حسگر می‌باشد. به عبارت دیگر نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده نسبت به نظریه کلاسیک، ولتاژ توكشی بیشتری را نتیجه می‌دهد.

- elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No.8, pp. 1477-1508, 2003.
- [6] Askari, A. R., and Tahani, M. Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory. *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No.8, pp. 121-130, 2014.
- [7] Abdel-Rahman, E. M., Younis, M. I., and Nayfeh, A. H. Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, No.6, pp. 759-766, 2002.
- [8] Yin, L., Qian, Q., and Wang, L. Size effect on the static behavior of electrostatically actuated microbeams. *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 27, No.3, pp. 445-451, 2011.
- [9] Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, M. H., Asghari, M., and Ahmadian, M. T. Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory. *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 171, No.2, pp. 370-374, 2011.
- [10] Kong, S. L. Size effect on pull-in behaviors of electrostatically actuated cantilever micro-beams. *In Applied Mechanics and Materials*, Vol. 300, pp. 889-892, 2013.
- [11] Kuang, J. H., and Chen, C. J. Adomian decomposition method used for solving nonlinear pull-in behavior in electrostatic micro-actuators. *Mathematical and computer modelling*, Vol. 41, No.13, pp. 1479-1491, 2005.
- [12] Beni, Y. T., Koochi, A., and Abadyan, M. Theoretical study of the effect of Casimir force, elastic boundary conditions and size dependency on the pull-in instability of beam-type NEMS. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No.4, pp. 979-988, 2011.
- [13] Soroush, R., Koochi, A., Kazemi, A. S., Noghrehabadi, A., Haddadpour, H., and Abadyan, M. Investigating the effect of Casimir and van der Waals attractions on the electrostatic pull-in instability of nano-actuators. *Physica scripta*, Vol. 82, No.4, 2010.
- [14] Koochi, A., Kazemi, A., Khandani, F., and Abadyan, M. Influence of surface effects on size-dependent instability of nano-actuators in the presence of quantum vacuum fluctuations. *Physica Scripta*, Vol.85, No.3, 2012.
- [15] Noghrehabadi, A., and Eslami, M. Analytical study on size-dependent static pull-in analysis of clamped-clamped nano-actuators in liquid electrolytes. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No.4, pp. 3011-3028, 2016.
- [16] Ghalambaz, M., Noghrehabadi, A., Abadyan, M., Beni, Y. T., Abadi, A. R. N., and Abadi, M. N. A new power series solution on the electrostatic pull-in instability of nano cantilever actuators. *Procedia Engineering*, Vol. 10, pp. 3708-3716, 2011.
- [17] Reddy, J. N. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons, 2017.
- [18] Park, S. K., and Gao, X. L. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No.11, pp. 2355-2359, 2006.
- [19] Gurtin, M. E., and Murdoch, A. I. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No.6, pp. 431-440, 1978.
- [20] Huang, J. M., Liew, K. M., Wong, C. H., Rajendran, S., Tan, M. J., and Liu, A. Q. Mechanical design and optimization of capacitive micromachined switch. *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 93, No.3, 273-285, 2001.
- [21] Israelachvili, J. N. *Intermolecular and Surface Forces*, Academic, 1992.
- [22] Jabbari, G., Shabani, R., and Rezazadeh, G. Frequency response of an electrostatically actuated micro resonator in contact with incompressible fluid. *Microsystem Technologies*, Vol. 23, No.7, pp. 2381-2391, 2017.
- [23] Wazwaz, A. M. A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 102, No.1, pp. 77-86, 1999.

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{1}{2!} c_1 x^2 + \frac{1}{3!} c_2 x^3 + \psi L^{-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \right] + L^{-4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (\text{الف-۸})$$

با اعمال شرایط مرزی ابتدای تیر، می‌توان ضرایب ثابت α_0, α_1 را به‌فرم زیر به‌دست آورد:

$$y(0) = \alpha_0 = 1 \quad y'(0) = \alpha_1 = 0 \quad (\text{الف-۹})$$

در روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده، جملات سری به‌صورت زیر تخصیص داده می‌شوند [۲۵].

$$y_0 = \alpha_0 = 1 \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$y_1 = \frac{1}{2!} c_1 x^2 + \frac{1}{3!} c_2 x^3 + \psi L^{-2} [y_0] + L^{-4} [A_0] \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$y_n = \psi L^{-2} [y_{n-1}] + L^{-4} [A_{n-1}] \quad n \geq 2 \quad (\text{الف-۱۲})$$

مهم‌ترین قسمت روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده، محاسبه چندجمله‌ای‌های A_n است. این جمله‌ها به جمله‌های تابع اصلی وابسته است و با استفاده از روابط (الف-۴) و (الف-۵) به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند.

$$A_0 = N(y_0) \rightarrow N(y_0) = -\frac{1}{(1+\delta)} \left(\frac{\alpha}{y_0^4} + \frac{\beta}{y_0^2} + \frac{\beta\gamma}{y_0} \right) \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$A_1 = C(1,1)h_1(y_0) = y_1 N'(y_0) \quad (\text{الف-۱۴})$$

$$\rightarrow N'(y_0) = \frac{1}{(1+\delta)} (4\alpha y_0^{-5} + 2\beta y_0^{-3} + \beta\gamma y_0^{-2})$$

$$A_2 = C(1,2)h_1(y_0) + C(2,2)h_2(y_0) = y_2 N''(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 N''(y_0) \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$\rightarrow N''(y_0) = -\frac{1}{(1+\delta)} (20\alpha y_0^{-6} + 6\beta y_0^{-4} + 2\beta\gamma y_0^{-3})$$

$$A_3 = C(1,3)h_1(y_0) + C(2,3)h_2(y_0) + C(3,3)h_3(y_0)$$

$$= y_3 N'(y_0) + y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 N'''(y_0) \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$\rightarrow N'''(y_0) = \frac{1}{(1+\delta)} (120\alpha y_0^{-7} + 24\beta y_0^{-5} + 6\beta\gamma y_0^{-4})$$

حال با استفاده از روابط جملات سری آدومیان، مجموعه روابط (الف-۱۳) تا (الف-۱۶) و مجموع جملات سری تابع $y(x)$ می‌توان پاسخ معادله استاتیکی را به‌دست آورد.

۷- تشکر و قدردانی

نویسندگان بدینوسیله از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه (GN: SCU.EM98.98) در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نمایند.

۸- مراجع

- [1] Aifantis, E. C. Strain gradient interpretation of size effects. *In Fracture Scaling*, pp. 299-314, 1999.
- [2] Yang, F. A. C. M., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., and Tong, P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No.10, pp. 2731-2743, 2002.
- [3] Eringen, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, Vol. 54, No.9, pp. 4703-4710, 1983.
- [4] Toupin, R. A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No.1, pp. 385-414, 1962.
- [5] Lam, D. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J., and Tong, P. Experiments and theory in strain gradient

- [24] Rach, R. A convenient computational form for the Adomian polynomials. *Journal of mathematical analysis and applications*, Vol. 102, No.2, pp. 415-419, 1984.
- [25] Wazwaz, A. M. The numerical solution of sixth-order boundary value problems by the modified decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 118, No.2, pp. 311-325, 2001.