ارائه مدل پیوسته برای آنالیز ارتعاشات آزاد تیر با یک ترک خستگی

موسی رضائی دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
رضا حسن‌نژاد دانشجوی دکترای دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

چکیده

در تحقیق حاضر ترک به صورت ترک خستگی و با رفتار باز و بسته شدن مدل شده است، بدین منظور سفتی موضعی در محل ترک به صورت تابعی غیرخطی از دامنه ارتعاش تیر در نظر گرفته شده است طوریکه با تغییر دامنه تیر برحسب زمان، سفتی آن تغییر یافته و موجب تغییر پیوسته فرکانس و شکل مود تیر برحسب زمان می‌شود. بعلاوه با استناد به نتایج تجربی نشان داده شده است که سفتی تیر در محل ترک بین دو مقدار متناظر با حالت بسته شدن و باز شدن کامل ترک تغییر می‌کند و بسته به عمق ترک، نسبت سفتی تیر در محل ترک در حالت بسته شدن کامل ترک به حالت باز شدن کامل ترک مقدار ثابتی است. در روش پیشنهادی، پاسخ دینامیکی تیر ترک‌دار با استفاده از محاسبه انرژی مکانیکی بر مبنای پارامترهای مودال تیر در هر لحظه، بدست می‌آید. نتایج به دست آمده حاکی است که با ثابت بودن عمق نسبی ترک, هر چه طول تیر کوتاهتر می‌شود و در نتیجه موقعیت ترک به محل تکیه گاه نزدیکتر می‌شود، فرکانس اصلی تیر کاهش بیشتری از خود نشان می دهد. به منظور صحه گذاری نتایج, مقایسه‌ای بین تغییرات نسبت فرکانسی تیر ترک‌دار به ازای شدت‌های مختلف ترک با نتایج تجربی, انجام گرفته است.

کلمات کلیدی: **ارتعاشات آزاد, ترک خستگی غیرخطی، سفتی موضعی تابع دامنه، سوپرهارمونیک، شکل مود تابع زمان**

A continuous model for free vibration analysis of a beam with a breathing crack

M. Rezaee Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

R. Hassannejad PHD Student, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

Abstract

In this paper, a new approach to free vibration analysis of a cracked cantilever beam is proposed. By considering the effect of opening and closing the crack during the beam vibration, it is modeled as a fatigue crack. Also, local stiffness changes at the crack location are considered to be a nonlinear amplitude-dependent function and it is assumed that during one half a cycle, the frequencies and mode shapes of the beam varies continuously with time. In addition, by using the experimental tests, it is shown that the local stiffness at the crack location varies continuously between the two extreme values corresponding to the fully closed and the fully open cases of the crack. Then, by using the mechanical energy balance the dynamic response of the cracked beam is obtained at every time instant. The results show that for a specific crack depth, by approaching the crack location to the fixed end of the beam, more reduction in the fundamental frequency occurs. Furthermore, for a specific crack location, the fundamental frequency diminishes and the nonlinearity of the system increases by increasing the crack depth. In order to validate the results, the variations of the fundamental frequency ratio against the crack location are compared with experimental results.

Keywords: Free vibration, Nonlinear fatigue crack, Amplitude-dependent local stiffness, Superharmonic, Time-dependent mode shape

۱- مقدمه

پاسخ دینامیکی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای یک سازه وابسته به میرائی و توزیع جرم و سفتی در سازه می‌باشد و هرگونه تغییر در پارامترهای یاد شده سبب تغییر در رفتار دینامیکی آن خواهد شد. سفتی یک سازه مرتعش دارای ترک خستگی به طور پیوسته در مدت ارتعاش سازه تغییر می‌کند، که این امر سبب بروز رفتار غیرخطی در سازه می‌گردد. میزان غیرخطی بودن آن نیز شدیداً متاثر از پارامترهای ترک (عمق و موقعیت) می‌باشد. از آنجا که آنالیز رفتار دینامیکی تیرهای ترک‌دار اهمیت ویژه‌ای در مسائل مهندسی دارد از اینرو در سه دهه گذشته مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌های ترک‌دار و مدل‌سازی آنها مورد توجه بسیاری از محققین واقع شده است. در این راستا برخی از محققان از یک مدل پیوسته خطی که در آن ترک به صورت یک فنر پیچشی خطی بدون جرم با ضریب سفتی ثابت که به هندسه سطح مقطع تیر و عمق ترک وابسته است, استفاده کرده‌اند و برای مطالعه رفتار ارتعاشی تیر, معادله حرکت تیر را با روش های عددی حل کرده‌اند[۳-۱]. چنین مدل‌های خطی قادر به شبیه سازی رفتار دینامیکی غیرخطی ترک و نشان دادن سوپرهارمونیک‌ها در پاسخ دینامیکی تیر نمی‌باشند. از این رو محققان به دنبال مدل‌هائی برای ترک بوده اند که بتوانند کاهش سفتی تیر به واسطه وجود ترک در هنگام باز و بسته شدن آن را بطور دقیق مدل کنند. Friswell و Penny [۴] رفتار غیرخطی تیر ترک‌دار تحت تحریک هارمونیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها در تحلیل خود از یک مدل با یک درجه آزادی استفاده کرده‌اند و با در نظر گرفتن یک سفتی دوخطی برای مدل کردن ترک, رفتار غیرخطی تیر ترک‌دار تحت تحریک اجباری را شبیه سازی کرده‌اند و سپس با حل عددی معادله حاکم بر مساله نشان داده‌اند که سوپرهارمونیک‌های فرکانس تحریک در پاسخ ظاهر می‌شود. چنین مدلی فقط دو حالت باز و بسته شدن کامل ترک را در نظر می‌گیرد و حالتهای بینابین را منظور نمی‌کند. چنین مدل‌های سفتی دوخطی برای ترک, در ماتریس سفتی مدل‌های المان محدود نیز برای شبیه‌سازی اثر ترک در رفتار دینامیکی تیر ترک‌دار توسط برخی محققان مورد استفاده قرار گرفته است[۵ و۶]. Krawczuk و Ostachowicz [۷] در بررسی ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار با منظور کردن سفتی متغیر با زمان برای مدل تیر, حالتهای جزئی باز و بسته شدن ترک را نیز در نظر گرفته‌اند. سپس معادله حرکت تیر را با بکارگیری روش تعادل هارمونیک حل کرده‌اند. Abraham و Brandon [۸] نیز برای مطالعه ارتعاشات تیر ترک‌دار، تغییرات پیوسته سفتی تیر در هنگام باز و بسته شدن ترک را با بکارگیری جملات بیشتری از سری فوریه، شبیه سازی کردند. در این حالت تغییرات سفتی تیر بین دو مقدار سفتی متناظر با ترک کاملاً باز و تیر سالم در نظر گرفته می‌شود. Cheng و همکارانش [۹] تیر یکسرگیردار پیوسته را به صورت یک سیستم یک درجه آزادی در نظر گرفته‌اند که در آن تغییرات سفتی تیر یکسرگیردار ناشی از باز و بسته شدن ترک با یک تابع زمانی هارمونیک ساده مدل شده است. این محققان پاسخ ارتعاشات اجباری تیر را با روش عددی رانگ-کوتا بدست آورده‌اند. آنها همچنین اعلام کرده‌اند که آشکارسازی ترک براساس پاسخ فرکانسی آن با استفاده از مدل‌های خطی ترک باز از دقت کافی برخوردار نمی‌باشد و چنین مدلی شدت ترک را کمتر از حد واقعی آن نشان می‌دهد.

در تحقیق حاضر, یک روش جدید برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار با یک ترک خستگی غیرخطی ارائه شده است. برای مدل کردن تغییرات سفتی موضعی در محل ترک, یک تابع هارمونیک که به دامنه ارتعاش تیر وابسته است، معرفی شده است. بازه سفتی موضعی در محل ترک در بین دو مقدار سفتی متناظر با حالت ترک کاملاً باز و ترک کاملاً بسته تغییر می‌کند. محدوده این بازه با انجام تست‌های تجربی تعیین می‌گردد. برای بدست آوردن پاسخ ارتعاشات آزاد تیر نیز، انرژی مکانیکی تیر در لحظه حرکت برحسب دامنه نقطه معلومی از تیر تعیین می‌شود. سپس زمان رسیدن از این نقطه به یک نقطه معلوم دیگر، با برابر قرار دادن انرژی مکانیکی در لحظه حرکت با انرژی مکانیکی تیر در نقطه معلوم بعدی محاسبه می‌گردد. بدین ترتیب زمان جابجائی تیر بین دامنه‌های متوالی دیگر و در نتیجه پاسخ ارتعاشات آزاد تیر بدست می‌آید. طیف فرکانسی پاسخ دینامیکی بدست آمده، سوپرهارمونیک‌های فرکانس اصلی را نشان می‌دهد که ناشی از وجود ترک خستگی در سیستم ارتعاشی می‌باشد. دامنه این سوپرهارمونیک‌ها وابسته به پارامترهای ترک است. به منظور صحه‌گذاری نتایج، تغییرات فرکانس سیستم به ازای ترک با شدت و موقعیت مشخص با نتایج حاصل از تست تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲- مدل‌سازی ریاضی تیر با ترک عرضی

تیر یکسرگیردار ترک‌دار به طول L نشان داده شده در شکل ۱-الف را در نظر بگیرید. ترک دارای عمق a است و به فاصله L_0 از انتهای گیردار تیر قرار دارد, پهنا و ارتفاع سطح مقطع تیر به ترتیب w و h می‌باشد. ترک مورد نظر به صورت ترک خستگی با سفتی غیرخطی مدل می‌شود. بنابراین سفتی تیر در حین ارتعاش

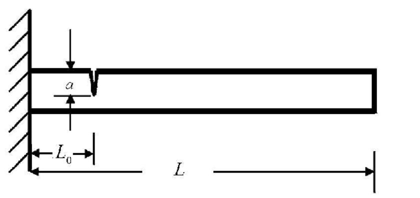
عرضی تیر در اثر باز و بسته شدن ترک تابعی از زمان بوده و متعاقباً رفتار دینامیکی تیر متاثر از تغییرات سفتی خواهد بود. Cheng و همکارانش [۹] با در نظر گرفتن مدل ساده یک درجه آزادی برای تیر ترک¬دار، سفتی معادل کل تیر ترک¬دار را به صورت یک تابع هارمونیک ساده در نظر گرفتند:

$$k(t) = k_1 + k_2(t) = k_o + k_{\Delta C}\left[1+\cos \omega t\right] \quad (۱)$$

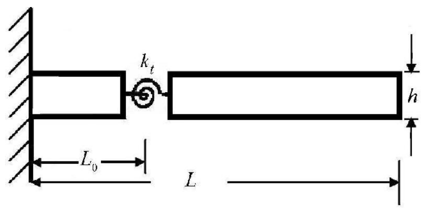
که در آن k_o متناظر با سفتی معادل تیر ترک‌دار متناظر با مدل یک درجه آزادی در حالت ترک کاملاً باز است و $k_{\Delta C}$ بیانگر دامنه تغییرات سفتی معادل سیستم یک درجه آزادی است و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$k_{\Delta C} = \frac{1}{2}(k_c - k_o) \quad (۲)$$

ω در رابطه (۱) نشان دهنده فرکانس نوسانات سیستم یک درجه آزادی مورد نظر می‌باشد.



(الف)



ب)

شکل ۱- الف) تیر یکسرگیردار ترک‌دار ب) مدل ریاضی تیرترک-دار.

در تحقیق حاضر، برخلاف مدل ارائه شده توسط Cheng و همکارانش [۹]، تیر ترک‌دار به صورت یک سیستم پیوسته در نظر گرفته می‌شود که سفتی موضعی آن در محل ترک وابسته به دامنه ارتعاش سیستم می‌باشد. اگر سفتی موضعی محل ترک در حالتی که دهانه ترک کاملاً بسته است k_c و دامنه ارتعاشی متناظر تیر A_c در نظر گرفته شود و به طریق مشابه اگر سفتی موضعی محل ترک در حالتی که دهانه ترک کاملاً باز است k_o و دامنه ارتعاشی متناظر تیر A_o در نظر گرفته شود, با تغییر دامنه ارتعاش تیر در بازه $A_c \le A \le A_o$ سفتی موضعی در محل ترک نیز به صورت پیوسته در بازه $k_o \le k \le k_c$ تغییر خواهد کرد. اگر تغییرات سفتی موضعی محل ترک برحسب دامنه ارتعاش، تابعی هارمونیک درنظر گرفته شود، با اقتباس از رابطه (۱)، رابطه سفتی موضعی در محل ترک برحسب دامنه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$k_A = k_o + \left(\frac{k_c - k_o}{2}\right)\left\{1+\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{A_o^{\,2}+A_c^{\,2}}{A_oA_c(A_o-A_c)}A+\frac{A_o+A_c}{A_oA_c(A_o-A_c)}A^2\right)\right]\right\} \quad (۳)$$

برخلاف رابطه (۱) که سفتی معادل تیر ترک‌دار در مدل یک درجه آزادی را برحسب زمان ارائه می‌دهد، رابطه فوق سفتی موضعی در محل ترک را بر حسب دامنه ارتعاش تیر ارائه می‌دهد و در مورد تطابق رابطه اخیر با نتایج تجربی، در بخش ۶ بحث خواهد شد.

۳- معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر یکسرگیردار ترک‌دار با مدل غیرخطی ترک

بواسطه اثر موضعی ترک، تیر مورد نظر به صورت دو بخش سالم که به وسیله یک فنر پیچشی بدون جرم با رفتار غیرخطی بهم متصل شده‌اند، مدل شده است. تغییرات دامنه تیر سبب باز وبسته شدن ترک در مدت ارتعاش تیر می‌گردد. از اینرو در مدل ریاضی استفاده شده در شکل ۱-ب، سفتی فنر پیچشی به صورت پیوسته با تغییر دامنه تیر تغییر می‌کند. بنابراین سفتی خمشی تیر نیز تغییر می‌کند. در نتیجه با توجه به مدل ریاضی در نظر گرفته شده، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات عرضی هر بخش از تیر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$EI\frac{\partial^4 W_1(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 W_1(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad 0<x<L_0 \quad (\text{۴-الف})$$

$$EI\frac{\partial^4 W_2(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 W_2(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad L_0<x<L$$ (۴-ب)

که در آن EI سفتی خمشی تیر، m جرم واحد طول تیر و W_1 و W_2 توابع خیز تیر در طرفین ترک هستند. اگر تیر در مود اول نوسان کند, با توجه به اینکه سفتی موضعی در محل ترک به صورت پیوسته با دامنه تغییر می‌کند، بنابراین فرکانس ارتعاش تیر نیز به طور پیوسته تغییر خواهد کرد. از اینرو پاسخ سیستم را می-توان به صورت حاصل ضرب شکل مود وابسته به دامنه $\phi_1(x,A(t))$ در دامنه وابسته به زمان، $A(t)$، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$W_1(x,A(t))=A(t)\phi_1(x,A(t)) \qquad 0<x<L_0$$ (الف-۵)

$$W_2(x,A(t))=A(t)\phi_2(x,A(t)) \qquad L_0<x<L$$ (ب-۵)

که در آن $\phi_1(x,A(t))$ و $\phi_2(x,A(t))$ شکل مود وابسته به دامنه تیر به ترتیب در سمت چپ و راست ترک می‌باشد، $A(t)$ نیز معرف دامنه است. با جایگذاری روابط (۵-الف) و (۵-ب) به ترتیب در روابط (۵-الف) و (۵-ب), $\phi_1(x,A(t))$ و $\phi_2(x,A(t))$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\phi_1(x,A(t))=c_1\cosh\lambda x +c_2\sinh\lambda x +c_3\cos\lambda x +c_4\sin\lambda x$$ (۶-الف)

$$\phi_2(x,A(t))=c_5\cosh\lambda x +c_6\sinh\lambda x + c_7\cos\lambda x +c_8\sin\lambda x$$ (۶-ب)

در معادلات اخیر $\lambda^4=\frac{m\omega^2}{EI}$ می‌باشد, که ω فرکانس ارتعاشات عرضی تیر است و λ و ω هر دو تابعی از زمان هستند. با اعمال شرایط مرزی و بین مرزی تیر, می‌توان ضرایب مجهول c_i، $i=1,2,...,8$ در روابط فوق و فرکانس متغیر با زمان تیر را بدست آورد. شرایط مرزی مسأله برای تیر یکسرگیردار چنین است:

- انتهای گیردار تیر:

$$\phi_1(0,A)=0$$ (۷-الف)

$$\frac{d\phi_1(0,A)}{dx}=0$$ (۷-ب)

-انتهای آزاد تیر:

$$EI\frac{d^2\phi_2(L,A)}{dx^2}=0$$ (۸-الف)

$$EI\frac{d^3\phi_2(L,A)}{dx^3}=0$$ (۸-ب)

همچنین شرایط بین مرزی در محل ترک ($L=L_0$) نیز چنین است:

$$\phi_1(L_0,A)=\phi_2(L_0,A)$$ (۹-الف)

$$\frac{d^2\phi_1(L_0,A)}{dx^2}=\frac{d^2\phi_2(L_0,A)}{dx^2}$$ (۹-ب)

$$\frac{d^3\phi_1(L_0,A)}{dx^3}=\frac{d^3\phi_2(L_0,A)}{dx^3}$$ (۹-ج)

رابطه بین شیب در طرفین ترک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$EI\frac{d^2\phi_1(L_0,A)}{dx^2}=k_A\left[\frac{d\phi_2(L_0,A)}{dx}-\frac{d\phi_1(L_0,A)}{dx}\right]$$ (۱۰)

با اعمال شرایط مرزی و بین مرزی اخیر دترمینان مشخصه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cosh \lambda L_0 & \sinh \lambda L_0 & -\cos \lambda L_0 & -\sin \lambda L_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sinh \lambda L_0 & \cosh \lambda L_0 & \sin \lambda L_0 & -\cos \lambda L_0 \\
\cosh \lambda L_0 & \sinh \lambda L_0 & \cos \lambda L_0 & \sin \lambda L_0 & -\cosh \lambda L_0 & -\sinh \lambda L_0 & -\cos \lambda L_0 & -\sin \lambda L_0 \\
\cosh \lambda L_0 & \sinh \lambda L_0 & -\cos \lambda L_0 & -\sin \lambda L_0 & -\cosh \lambda L_0 & -\sinh \lambda L_0 & \cos \lambda L_0 & \sin \lambda L_0 \\
\sinh \lambda L_0 & \cosh \lambda L_0 & \sin \lambda L_0 & -\cos \lambda L_0 & -\sinh \lambda L_0 & -\cosh \lambda L_0 & -\sin \lambda L_0 & \cos \lambda L_0 \\
\begin{matrix}\lambda \cosh \lambda L_0 \\ +\frac{k_A}{EI}\sinh \lambda L_0\end{matrix} & \begin{matrix}\lambda \sinh \lambda L_0 \\ +\frac{k_A}{EI}\cosh \lambda L_0\end{matrix} & \begin{matrix}-\lambda \cos \lambda L_0 \\ -\frac{k_A}{EI}\sin \lambda L_0\end{matrix} & \begin{matrix}-\lambda \sin \lambda L_0 \\ +\frac{k_A}{EI}\cos \lambda L_0\end{matrix} & -\frac{k_A}{EI}\sinh \lambda L_0 & -\frac{k_A}{EI}\cosh \lambda L_0 & \frac{k_A}{EI}\sin \lambda L_0 & -\frac{k_A}{EI}\cos \lambda L_0
\end{vmatrix}$$

که برای داشتن جواب غیربدیهی برای ضرایب c_i، دترمینان ضرایب معادله مشخصه باید صفر شود:

$$\left|\Delta\left(\omega, L_0, A(t)\right)\right| = 0 \qquad (۱۱)$$

با حل معادله مشخصه فوق, مقدار ویژه λ، $\phi_1(x, A(t))$ و $\phi_2(x, A(t))$ شکل مودهای تیر متناظر با دامنه $A(t)$ بدست می‌آیند، یعنی با در دست داشتن دامنه A، مقدار سفتی موضعی در محل ترک، فرکانس ارتعاش و شکل مود تیر مشخص می‌شوند. در نتیجه مقدار انرژی مکانیکی تیر هنگامی که تیر دارای دامنه A است مشخص می‌گردد. حال با تعیین فواصل زمانی عبور یک نقطه از تیر از موقعیت‌های متوالی مشخص، پاسخ ارتعاشات آزاد تیر بدست می‌آید.

۴- بدست آوردن پاسخ ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار با استفاده از روش انرژی

همچنانکه ذکر شد، پاسخ ارتعاشات آزاد، بدون دخالت دادن میرائی و با فرض ثابت بودن انرژی مکانیکی کل تیر ترک‌دار در طی ارتعاش بدست می‌آید. انرژی مکانیکی کل تیر ترک‌دار در هر لحظه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E = E_K + E_P + E_S \qquad (۱۲)$$

که در آن E_K انرژی جنبشی تیر, E_P انرژی کرنشی تیر ناشی از خیز آن و E_S انرژی ذخیره شده در محل ترک است. هنگامی که نقطه مشخصی از تیر ترک‌دار از موقعیت A_j به موقعیت A_{j+1} حرکت می‌کند، انرژی جنبشی تیر در لحظه‌ای که دامنه آن A_{j+1} است را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$E_{K_j} = \frac{m}{2}\times\left[\int_0^{L_0}\left(\frac{A_{j+1}\phi_1(x,A_{j+1}) - A_j\phi_1(x,A_j)}{\Delta t}\right)^2 dx\right] + \frac{m}{2}\times\left[\int_{L_0}^{L}\left(\frac{A_{j+1}\phi_2(x,A_{j+1}) - A_j\phi_2(x,A_j)}{\Delta t}\right)^2 dx\right] \qquad (۱۳)$$

در رابطه فوق Δt زمان لازم برای رسیدن دامنه تیر ترک‌دار از A_j به A_{j+1} می‌باشد. مقدار انرژی کرنشی E_P تیر را نیز در لحظه‌ای که دامنه آن A_j است می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$E_P = \frac{EI}{2}\left[\begin{array}{l}\int_0^{L_0}\left(A_j\phi_1''(x,A_j)\right)^2 dx\\ +\int_{L_0}^{L}\left(A_j\phi_2''(x,A_j)\right)^2 dx\end{array}\right] = A_j{}^2U_P\left(A\right) \qquad (۱۴)$$

مقدار انرژی ذخیره شده در فنر پیچشی غیرخطی در مدل ریاضی مورد استفاده، وابسته به میزان اختلاف شیب شکل مودهای تیر در دو طرف ترک است. این اختلاف شیب طرفین تیر در محل ترک از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta\left(A\right) = A\Theta\left(A\right) \qquad (۱۵)$$

که در آن $\Theta\left(A\right)=\left[\phi_2'(x,A)-\phi_1'(x,A)\right]$ می‌باشد. رابطه (۱۵) نشان می‌دهد که هر $\theta\left(A\right)$ متناظر با شکل مود مشخص $\phi_1(x,A)$ و $\phi_2(x,A)$, است و هر مود مشخص متناظر با یک k_A و هر k_A متعلق به یک دامنه A می‌باشد. در نتیجه در تیر یکسرگیرداری که مشخصات مکانیکی و پارامترهای ترک آن مشخص است, می‌توان منحنی تغییرات سفتی موضعی در محل ترک را در برابر تغییرات اختلاف شیب ناشی از شکستگی شکل مود تیر در محل ترک رسم کرد. مقدار گشتاور در محل ترک برابر است با:

$$M_s = k_A \;\; \theta(A) \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطه فوق می‌توان منحنی تغییرات گشتاور در محل ترک را که به صورت فنر پیچشی غیرخطی مدل شده است در برابر اختلاف شیب $\theta(A)$ رسم کرد. مساحت سطح زیر منحنی $M_s-\theta$ برابر مقدار انرژی ذخیره شده در محل ترک می‌باشد. بنابراین اگر اختلاف شیب طرفین تیر در محل ترک در بازه $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ تغییر کند, انرژی ذخیره شده در محل ترک به ازای θ مشخص برابر است با:

$$E_S = \int_0^{\theta} M_s d\theta \qquad (۱۷)$$

حال اگر منحنی تغییرات $M_s-\theta$ که از تجربه بدست می‌آید در بازه مشخص $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ رسم شود و سطح زیر منحنی $M_s-\theta$ محاسبه شود, می‌توان منحنی تغییرات انرژی ذخیره شده در محل ترک را در برابر تغییرات θ رسم کرد. به منظور اجتناب از انتگرال‌گیری مکرر، منحنی تغییرات E_s در برابر θ با برازش یک چند جمله‌ای از نقاط بدست آمده برای E_s با مقادیر مختلف θ، رابطه انرژی ذخیره شده در محل ترک با دقت بسیار خوبی به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$E_S = a_1\theta^5 + a_2\theta^4 + a_3\theta^3 + a_4\theta^2 + a_5\theta + a_6 \qquad (۱۸)$$

در رابطه فوق ضرایب a_1 تا a_6 ثابت‌های بدست آمده از برازش چند جمله‌ای می‌باشد که وابسته به منحنی تغییرات $M_s-\theta$ بدست آمده از تست‌های تجربی است. با استفاده از روابط (۱۳), (۱۴) و (۱۸) مقدار انرژی مکانیکی کل تیر متناظر با دامنه معلوم A، قابل محاسبه است.

اگر تیر یکسرگیردار در مود اول, طوری تحریک شود که در لحظه شروع حرکت، سرعت اولیه آن صفر و دامنه انتهای آزاد تیر در حالتی که دهانه ترک کاملاً بسته است، برابر مقدار معلوم A_c باشد مقدار $k_A = k_c$ خواهد بود. با در دست داشتن این مقدار سفتی موضعی تیر در محل ترک و قرار دادن آن در رابطه (۱۱), می‌توان مساله را به صورت یک مساله مقدار ویژه حل کرده و فرکانس طبیعی و شکل مود تیر متناظر با دامنه A_c و θ_c را بدست آورد و با بکارگیری روابط (۱۴) و (۱۸) مقدار کل انرژی تیر در این لحظه را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{array}{l}E_c = A_c{}^2\dfrac{EI}{2}\\ \left[\int_0^{L_0}\left(\phi_1''(x,A_c)\right)^2 dx + \int_{L_0}^{L}\left(\phi_2''(x,A_c)\right)^2 dx\right]\\ +a_1\theta_c{}^5 + a_2\theta_c{}^4 + a_3\theta_c{}^3 + a_4\theta_c{}^2 + a_5\theta_c + a_6\end{array} \qquad (۱۹)$$

همچنین در حالتی که دهانه ترک کاملاً باز باشد, مقدار $k_A = k_o$ است که به طریق مشابه و با حل مساله مقدار ویژه, فرکانس طبیعی و شکل مود تیر بدست می‌آید. با جایگذاری این مقادیر در معادله زیر دامنه نقطه مشخصی از تیر (مثلاً انتهای آزاد تیر) متناظر با حالتی که دهانه ترک کاملاً باز باشد, A_o، بدست می‌آید:

$$A_o^2 \frac{EI}{2} \left[\int_0^{L_0} \left(\phi_1''(x,A_o)\right)^2 dx + \int_{L_0}^{L} \left(\phi_2''(x,A_o)\right)^2 dx \right] + a_1\theta_o^5 + a_2\theta_o^4 + a_3\theta_o^3 + a_4\theta_o^2 + a_5\theta_o + a_6 - E_c = 0 \qquad (۲۰)$$

که در آن $\theta_o = A_o \Theta_o$ می‌باشد. حل معادله (۲۰) مقدار A_o را می‌دهد. حال با در دست داشتن مقادیر k_c و k_o از نتایج تجربی و جایگذاری مقادیر A_o و A_c بدست آمده در رابطه (۳)، می‌توان مقدار k_A را به ازای هر A دلخواه حساب کرد. شایان ذکر است که با توجه به ماهیت غیرخطی بودن مساله، $|A_c| \neq |A_o|$ خواهد بود.

برای بدست آوردن پاسخ ارتعاشات آزاد تیر در بازه $A_1 \le A_j \le A_{max}$, که در آن A_1 دامنه اولیه تیر در طرف بسته شدن ترک، ($A_1 \le A_c$)، و A_{max} ماکزیمم دامنه تیر در طرف باز شدن ترک ($A_{max} \le A_o$) است، به ازای مقادیر $A_j = A_1 + (j-1)\Delta A$ ($j = 1, 2, 3, ..., N$) که در آن ΔA تغییرات جزئی در دامنه تیر است، k_A متناظر با هر دامنه A_j محاسبه می‌شود و با جایگذاری آن در معادله فرکانسی (رابطه۱۰) مقدار ویژه و شکل مود تیر و در نتیجه ϕ_2'', ϕ_1'' و θ_j مربوطه نیز بدست می‌آید. اگر تیر بدون سرعت اولیه و با دامنه اولیه A_1 رها گردد, انرژی مکانیکی کلی تیر در این لحظه برابر E_1 فرض شود, با توجه به بقای انرژی، انرژی اولیه E_1 با انرژی مکانیکی کلی تیر در لحظه‌ای که دامنه آن در طرف باز شدن ترک به حداکثر مقدار خود می‌رسد، برابر خواهد بود، بدین طریق دامنه A_{max} قابل محاسبه است. اگر ماکزیمم دامنه در طرف باز شدن ترک با A_N نشان داده شود و فاصله A_1 تا A_N به $N-1$ فاصله مساوی تقسیم شود و A_{j-1} و A_j نشان دهنده دو دامنه متوالی دلخواه در بازه مذکور باشد با استفاده از بالانس انرژی می‌توان زمان لازم (Δt_j) برای رسیدن از دامنه A_{j-1} به دامنه A_j را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} &A_j^2 \frac{EI}{2} \left[\int_0^{L_0} \left(\phi_1''(x,A_j)\right)^2 dx + \int_{L_0}^{L} \left(\phi_2''(x,A_j)\right)^2 dx \right] \\ &+ a_1\theta_j^5 + a_2\theta_j^4 + a_3\theta_j^3 + a_4\theta_j^2 + a_5\theta_j + a_6 \\ &+ \frac{m}{2\Delta t_j^2} \{ A_j^2 \left[\int_0^{L_0} \phi_1^2(x,A_j)dx + \int_{L_0}^{L} \phi_2^2(x,A_j)dx \right] + \\ &A_{j-1}^2 \left[\int_0^{L_0} \phi_1^2(x,A_{j-1})dx + \int_{L_0}^{L} \phi_2^2(x,A_{j-1})dx \right] \\ &-2A_{j-1}A_j \left[\begin{array}{l} \int_0^{L_0} \phi_1(x,A_j)\phi_1(x,A_{j-1})dx + \\ \int_{L_0}^{L} \phi_2(x,A_j)\phi_2(x,A_{j-1})dx \end{array} \right] \} - E_1 = 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

از رابطه (۲۱) تنها مجهول Δt_j قابل محاسبه است. با تکرار روش مذکور، زمان لازم برای حرکت تیر در هر یک از بازه‌های مکانی A_1 تا A_2 و A_{N-1} تا A_N بدست می‌آید. بنابراین پریود نوسانات تیر را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\tau = 2\sum_{j=1}^{N-1} \Delta t_j \qquad (۲۲)$$

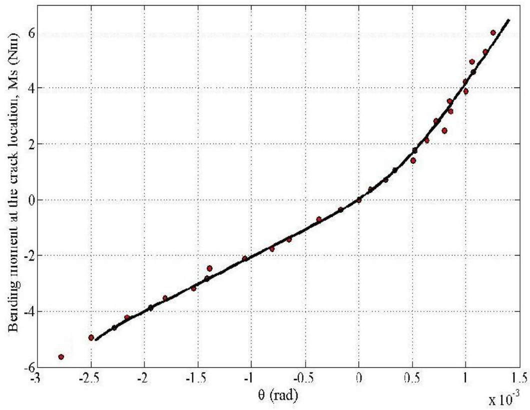
از آنجا که ارتعاشات نامیرای تیر مدنظر است, پاسخ ارتعاشی تیر در سیکل اول در سیکل‌های بعدی نیز عیناً تکرار خواهد شد. با رسم هر دامنه A_j در برابر $t_j = \sum_{i=2}^{j} \Delta t_{i-1}$ ،($j = 2,3,...,N$) پاسخ ارتعاشی تیر در سیکل اول و در نتیجه در سیکل‌های بعدی نیز بدست می‌آید. در تحقیق حاضر $N = 15000$ در نظر گرفته شده است.

۵- اندازه گیری سفتی موضعی تیر در محل ترک

اگر نمودار بار- جابجائی برای یک ترک خستگی ترسیم شود, مشتق بار نسبت به جابجائی، نشان دهنده تغییرات سفتی در سازه خواهد بود [۹و۱۰]:

$$k = \frac{dM_s}{d\theta} \qquad (۲۳)$$

در تحقیق حاضر، برای استخراج مشخصه‌های سفتی موضعی محل ترک در تیر، بر روی چند تیر فولادی با استفاده از دستگاه خستگی Amsler HA250 ساخت شرکت Zwick/Roell ترک‌های خستگی واقعی ایجاد گردید. سپس تغییرات شیب طرفین ترک بر روی تیر با اعمال گشتاور خمشی در محل ترک و با اندازه‌گیری‌های زاویه شعاعهای نوری لیزری در طرفین ترک برای بارگذاری‌های متعدد بدست آمد. نمونه‌ای از نتایج تجربی تغییرات گشتاور خمشی در محل ترک در برابر اختلاف شیب طرفین ترک برای تیر فولادی با مشخصات $h = 6.4\ mm$، $w = 3.9\ mm$ و $\alpha = \dfrac{a}{h} = 0.36$ در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- نقاط تجربی حاصل از آزمایش (●) و منحنی برازش شده (--) گشتاور خمشی- اختلاف شیب در محل ترک.

با بررسی تغییرات شیب منحنی $M_s - \theta$ مشخص می‌شود که برای نمونه مورد بحث، شیب منحنی در سمت بسته شدن ترک 2.85 برابر شیب آن در سمت باز شدن ترک می‌باشد. از آزمایش اخیر مقدار $k_o = 1954.2 \dfrac{N.m}{rad}$ بدست می‌آید. از طرف دیگر با استفاده از تئوری مکانیک شکست، سفتی موضعی تیر در محل ترک برای حالت ترک کاملاً باز از رابطه زیر بدست می‌آید[۱۱]:

$$k_o = \frac{EI}{6\pi\left(1-\nu^2\right)h}\frac{1}{J(a/h)} \qquad (۲۴)$$

که در آن $J(\alpha)$:

(۲۵)

$$J(\alpha) = 0.6272\alpha^2 - 0.4533\alpha^3 + 4.5948\alpha^4 - 9.9736\alpha^5 + 20.2948\alpha^6 - 33.0351\alpha^7 + 47.1063\alpha^8 - 40.7556\alpha^9 + 19.6\alpha^{10}$$

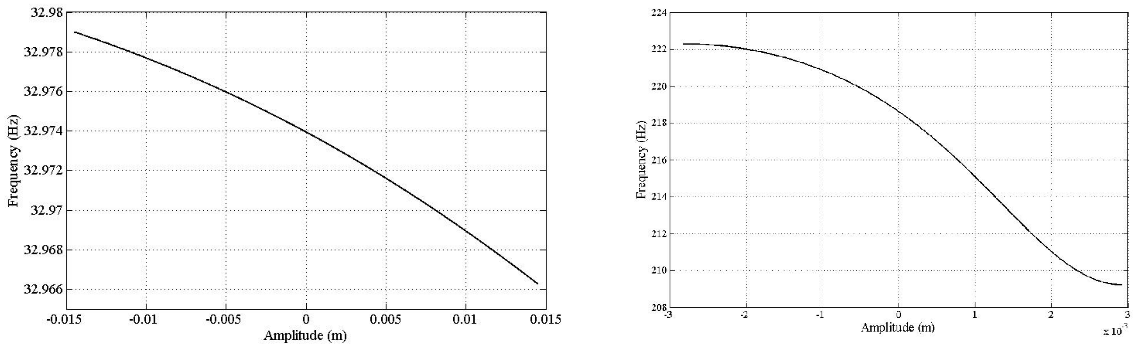
با استفاده از رابطه (۲۵) برای تیر مذکور مقدار $k_0 = 2061.8 \dfrac{N.m}{rad}$ بدست می‌آید که با مقدار بدست آمده حاصل از آزمایش حدوداً 5.2% اختلاف دارد.

۶- بررسی تاثیر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار

با استفاده از روش شرح داده شده در بخش ۴ به بررسی ارتعاشات آزاد یک نمونه واقعی تیر ترک‌دار یکسرگیردار پرداخته می‌شود. تیر ترک‌دار مورد بحث در بخش ۵ ($L = 15cm$، $k_c = 2.85k_o$ و $\alpha = 0.36$)، در نظر گرفته می‌شود، که ترک در موقعیت نسبی $\beta = \dfrac{L_c}{L} = 0.977$ قرار دارد. با داشتن k_o و k_c و مشخصات هندسی و مکانیکی تیر، دامنه ارتعاش تیر متناظر با حالت کاملاً بسته ترک $A_c = -2.8\ mm$ و دامنه ارتعاش تیر متناظر با حالت کاملاً باز ترک $A_o = 2.29\ mm$ است. حال اگر تیر در مود اول خود نوسان کند و بدون سرعت اولیه و با دامنه A_c رها شود، تغییرات فرکانسی آن بر حسب تغییرات دامنه ارتعاشی تیر مطابق شکل ۳-الف خواهد بود. در شکل ۳-ب بازه تغییرات فرکانسی برای تیر با طول و با عمق یکسان ترک (و)، رسم شده است. چنانچه در شکل ۳ نیز مشخص است، این بازه فرکانسی تابعی از عمق و موقعیت ترک می‌باشد. هرچه عمق ترک بیشتر و موقعیت آن به تکیه‌گاه نزدیکتر باشد، بازه تغییرات فرکانسی بزرگتر خواهد بود. همچنین هرچه دامنه اولیه تیر کوچکتر باشد این محدوده نیز کوچکتر می‌شود و تغییرات گشتاور موضعی در محل ترک در برابر اختلاف شیب طرفین ترک به حالت بینابینی محدود خواهد شد (شکل ۲).

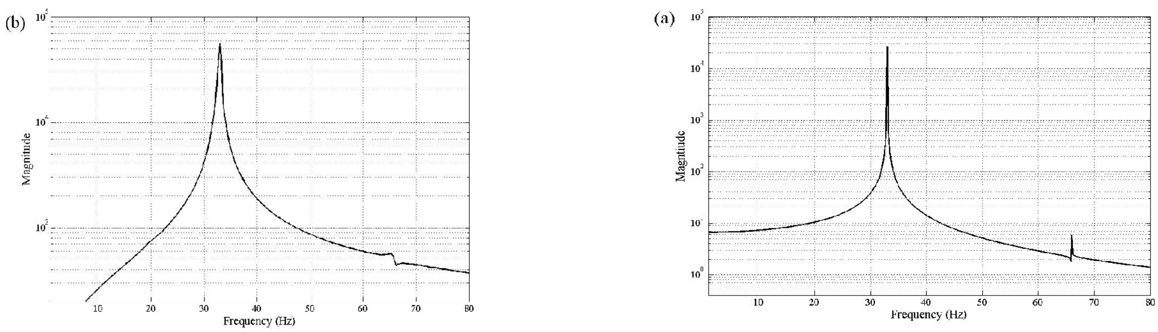
یکی از ویژگی‌های سیستم‌های غیرخطی ظاهر شدن سوپرهارمونیک‌های فرکانس اصلی ارتعاش در طیف فرکانسی پاسخ دینامیکی سیستم می‌باشد که با افزایش اثرات غیرخطی در سیستم، دامنه سوپرهارمونیک‌ها نیز افزایش می‌یابد. به منظور

مقایسه نتایج حاصل از تئوری با نتایج تست تجربی، طیف فرکانسی پاسخ ارتعاشی تیر حاصل از تست‌های آنالیز مودال تجربی و طیف فرکانسی پاسخ ارتعاشی حاصل از روش پیشنهادی در شکل‌های ۴-الف و ۴-ب داده شده است. برای بدست آوردن طیف فرکانس ارتعاش تیر، ابتدا پاسخ ارتعاشات آزاد تیر به صورت تجربی استخراج شده سپس طیف فرکانسی آن بدست آمده است. برای این کار از سرعت‌سنج لیزری مدل OMETRON VH300+ و دستگاه داده-برداری $B\,\&\,K$ مدل(Type 3109) استفاده شده است. شکل ۵ نمونه‌ای از آزمایش و تصویری از دستگاه آزمایش را نشان می‌دهد.



(ب) (الف)

شکل ۳- بازه تغییرات فرکانسی تیر یکسرگیردار ترک‌دار با عمق نسبی $\alpha = 0.36$ و در موقعیت نسبی: الف) $\beta = 0.977$، ب) $\beta = 0.366$.



(ب) (الف)

شکل۴- طیف فرکانسی پاسخ تیر ترک‌دار با ترک خستگی در موقعیت $\beta = 0.366$ و با عمق نسبی $\alpha = 0.36$ حاصل از: الف) روش تئوری پیشنهادی ب) تست آنالیز مودال تجربی.

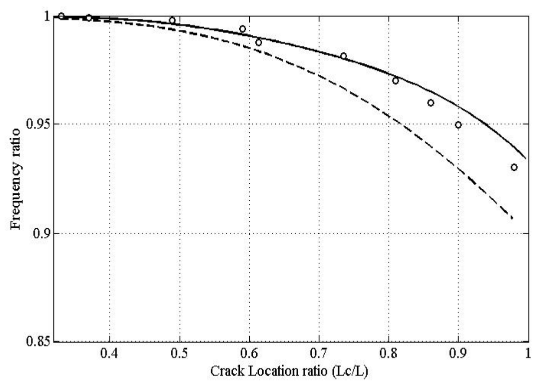
(الف)

(ب)

شکل۵- الف) استخراج پاسخ ارتعاش آزاد تیر فولادی با سرعت‌سنج لیزری ب) دستگاه داده‌برداری چهار کاناله مدل

(Type 3109) $B\ \& K$

در شکل ۶ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی ($\frac{\omega}{\omega_c}$) در برابر موقعیت نسبی ترک (β) به ازای شدت ترک $\alpha = 0.36$ بدست آمده از دو مدل ترک باز و ترک خستگی رسم شده است. منحنی پر مربوط به مدل خستگی، منحنی خط چین مربوط به مدل ترک باز و نقاط مشخص شده با علامت (**o**) مربوط به داده-های حاصل از تست‌های تجربی می‌باشد. از مقایسه منحنی پر (مدل ترک خستگی) با داده‌های حاصل از تست‌های تجربی، مشاهده می‌شود که نتایج روش تحلیلی ارائه شده با نتایج تجربی تطابق دارد. همچنین در این شکل دیده می‌شود که به ازای موقعیت و عمق نسبی مشخصی از ترک، نسبت فرکانسی حاصل برای مدل ترک باز کمتر از نسبت فرکانسی برای مدل ترک خستگی است. این نتیجه، با نتیجه ارائه شده در مراجع [۹ و۱۴] مطابقت دارد.



شکل ۶- مقایسه تغییرات نسبت فرکانسی برای تیر یکسرگیردار با ترک خستگی (__) و با ترک کاملاً باز (– – –) با نتایج تست‌های تجربی (o) در برابر موقعیت نسبی ترک با عمق نسبی $\alpha = 0.36$.

۷- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر روش جدیدی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار با ترک خستگی ارائه شد. در این روش از یک فنر پیچشی غیرخطی جهت نشان دادن کاهش سفتی در محل ترک استفاده شده است، بطوری که تغییرات سفتی موضعی در محل ترک ناشی از باز و بسته شدن آن بین دو مقدار k_c و k_o به صورت یک تابع غیرخطی از دامنه تغییر می‌کند. در این تحقیق با استفاده از تست‌های تجربی نشان داده شد که سفتی موضعی در محل ترک هنگام بسته شدن کامل دهانه ترک مقدار مشخصی دارد و نمی‌توان آنرا با سفتی موضعی تیر سالم برابر گرفت. چنین فرضی توسط برخی از محققان [۸ و۹و۱۲و۱۳] انجام گرفته بود.

از مزایای در نظر گرفتن چنین مدلی امکان بدست آوردن تغییرات پیوسته فرکانس ارتعاش و شکل مود تیر با تغییر دامنه ارتعاش می-باشد که امکان استخراج پاسخ ارتعاشات آزاد تیر در یک موقعیت مشخص را با استفاده از روش انرژی پیشنهادی فراهم می‌کند. در روش پیشنهادی با باز و بسته شدن ترک، اختلاف شیب شکل مودهای تیر در طرفین ترک تغییر می‌کند و باعث تغییر انرژی در مدل فنر پیچشی در نظر گرفته شده در محل ترک می‌گردد. از برابر قرار دادن انرژی دینامیکی تیر هنگامی که از یک موقعیت معین به یک موقعیت معین دیگر در همسایگی خود حرکت می-کند، زمان این حرکت بدست می‌آید و اینکار برای بدست آوردن زمان عبور تیر از دامنه‌های متوالی معین، تکرار می‌شود تا پاسخ ارتعاشات تیر بدست آید. برخی از محققین برای اجتناب از پیچیدگی مساله در تحلیل‌های خود، ترک را به صورت کاملاً باز در نظر گرفته‌اند یا از یک فرکانس دوخطی استفاده کرده‌اند. در حالیکه چنانچه نشان داده شد فرکانس تیر در مدت ارتعاش آن تغییرات پیوسته‌ای دارد.

از دیگر مزایای روش پیشنهادی ظهور سوپرهارمونیک‌ها در پاسخ دینامیکی تیر ترک‌دار می‌باشد که از ویژگی‌های رفتار غیرخطی سیستم است، که در آشکارسازی ترک در تیرها می‌توان از آن استفاده کرد. از طرف دیگر، طیف فرکانسی پاسخ ارتعاشی حاصل از روش تجربی برای ترکی با موقعیت و عمق نسبی مشخص بدست آمده است. مقایسه طیف‌های فرکانسی حاصل از تست تجربی با روش پیشنهادی نشان می‌دهد که روش مورد نظر تطابق خوبی با نتیجه بدست آمده از تست تجربی دارد.

علاوه بر این به منظور صحه‌گذاری بر نتایج روش پیشنهادی، منحنی تغییرات کاهش نسبت فرکانسی تیر ترک‌دار، با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی ترک، در برابر موقعیت نسبی ترک رسم شد. مقایسه منحنی اخیر با نتایج تست‌های تجربی حاکی از دقت روش پیشنهادی است. ضمناً همچنانکه در این شکل دیده می‌شود افت فرکانسی در مدل ترک باز بیش از افت فرکانسی بدست آمده از نتایج تجربی و مدل ارائه شده در تحقیق حاضر است، که نتیجه اخیر با نتایج ارائه شده در ادبیات فن مطابقت دارد.

مراجع

1- S.P. Lele and S.K. Maiti, Modeling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension, Journal of Sound and Vibration 257(3) (2002) 559-583.

2- G.M. Owolabi, A.S.J. Swamidas, R. Seshadri, Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions, Journal of Sound and Vibration 265 (2003) 1-22.

3- K. El Bikri, R. Benamar, M.M. Bennouna, Geometrically non-linear free vibrations of clamped–clamped beams with an edge crack, Computers and Structures 84 (2006) 485–502.

4- M.I. Friswell, J.E.T. Penny, A simple nonlinear model of a cracked beam, Proceedings 10th international modal analysis conference, San Diego, CA; (1992) 516–21.

5- A. P. Bovsunovsky, C. Surace, Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in the damping caused by the presence of the crack, Journal of Sound and Vibration 288 (2005) 865-886.

6- M. Kisa, J. Brandon, The effects of closure of cracks on the dynamics of a cracked cantilever beam, Journal of Sound and Vibration 238(1), (2000) 1-18.

7- M. Krawczuk, W.M. Ostachowicz, Forced vibrations of a cantilever Timoshenko beam with a closing crack, Proceedings of ISMA 19, Leuven, Belgium, vol. 3 (1994) 1067-78.

8- O. N. L. Abraham, J. A. Brandon, Modeling of the opening and closure of a crack, Journal of Vibration and Acoustics 117, (1995) 370-377.

9- S. M. Cheng, X. J. Wu and W. Wallace, Vibrational response of a beam with a breathing crack, Journal of Sound and Vibration 225(1) (1999) 201-208.

10- J. C. Newman JR. and W. Elber, Mechanics of Fatigue Crack Closure (J. E. Allison, R. C. Ku, and M. A. Pompetzki editors), A comparison of measurement methods and numerical procedures

for the experimental characterization of fatigue crack closure, (1988) 171-185.
11- T.G. Chondros, A.D. Dimarogonas, J. Yao, A continuous cracked beam vibration theory, Journal of Sound and Vibration 215(1) (1998) 17-34.
12- S. Loutridis, E. Douka, L.J. Hadjileontiadis, Forced vibration behavior and crack detection of cracked beams using instantaneous frequency, NDT&E International 38 (2005) 411-419.
13- E. Douka, L.J. Hadjileontiadis, Time-frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack, NDT&E International 38 (2005) 3-10.
14- T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao, vibration of a beam with a breathing crack, Journal of Sound and Vibration 239(1), (2001) 57-67.