

تحلیل خمش ورق قطاعی حلقوی نازک بر روی بستر وینکلر غیرخطی تحت بارگذاری‌های یکنواخت و غیریکنواخت با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته

احمد مامندی*

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

سیدعبدالرضا قاسمی پور ماسوله

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

چکیده

در این مقاله، تحلیل خمش ورقی دایروی نازک به شکل یک قطاع دایروی (دارای شعاع داخلی و خارجی) از جنس ماده همگن و همسانگرد با شرایط مرزی مختلف در لبه‌های داخلی و خارجی شامل لبه‌های گیردار و ساده، تحت بارگذاری یکنواخت و غیر یکنواخت بر روی بستر وینکلر (الاستیک) غیرخطی مطالعه شده است. در این راستا، برای تحلیل خمشی ورق قطاعی نازک تحت بارگذاری یکنواخت و غیر یکنواخت به کمک ترکیب روش کانتروویچ توسعه یافته (EKM) و بهره‌گیری از روش باقیمانده وزنی، معادله دیفرانسیل پاره‌ای (PDE) از مرتبه چهار حاکم بر خمش ورق برحسب مختصات قطبی r و θ حل شده است. همچنین، برای صحت‌سنجی، خیز ورق با نتایج شبیه‌سازی انجام شده از روش المان محدود (FEM) و نتایج موجود در منابع در حالت‌های خاص مسئله، مقایسه و بررسی می‌گردد. در ادامه، اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی ورق، سفتی خطی و غیرخطی بستر وینکلر، شرایط مرزی مختلف و نوع بارگذاری‌های یکنواخت و غیر یکنواخت در شکل پاسخ خمشی خیز ورق مورد بررسی قرار می‌گیرند. **واژه‌های کلیدی:** تحلیل خمش، ورق دایروی قطاعی نازک، بستر وینکلر، روش کانتروویچ توسعه یافته.

Bending Analysis of a Thin Annular Sector Plate Resting on a Nonlinear Winkler Foundation under Uniform and Nonuniform Loadings using Extended Kantorovich Method

A. Mamandi

Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

S. A. Ghasemipour Masooleh

Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

Abstract

In this paper, the bending analysis of a thin circular sector plate (with inner and outer radius) made of homogeneous material with various boundary conditions including simply support and clamped edges under the act of uniformly and non-uniformly loadings resting on a nonlinear Winkler foundations (elastic) is studied. To do this, for bending analysis of sector thin plate subjected to uniform and nonuniform loading a combination of the *Extended Kantorovich Method (EKM)* along with weighted residual method was employed to solve the fourth-order governing bending partial differential equation (PDE) of the plate in the polar coordinates of r and θ . The obtained results for bending deflection of the plate are compared with those from finite element method (FEM) and also with the literature in special cases. Also, the effect of changes in different parameters including geometry of the plate, linear and nonlinear stiffnesses of Winkler foundation, types of various boundary conditions and uniform and nonuniform loading in the bending response of the plate is investigated.

Keywords: Bending analysis, Thin annular sector plate, Winkler foundation, Extended Kantorovich Method.

۱- مقدمه

اشکال ورق در مسائل طراحی بوده و دارای اهمیت خاصی در کاربردهای صنعتی می‌باشند. این ورق‌های گرد توپر و یا حلقوی می‌توانند تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای و یا درون صفحه‌ای باشند. در اثر بارگذاری شکل ورق گرد تغییر می‌یابد و نیروها و گشتاورهای درون صفحه‌ای در آن ایجاد می‌گردد. بنابراین بررسی رفتار خمشی ورق از دیدگاه سازه‌ای برای بررسی وضعیت تنش‌ی آن در طراحی دارای اهمیت می‌باشد. در زیر به تعدادی از مقالات چاپ شده که به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌ها بر روی بستر و یا بدون بستر پرداخته‌اند اشاره شده است.

کر [۱]، در سال ۱۹۶۸، با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته^۱

ورق‌ها المان‌هایی هستند که در سازه‌های مختلف کاربردهای بسیاری دارند. ورق‌ها شکل اولیه‌شان تخت و ضخامت آنها بسیار کوچکتر از دو بعد دیگر می‌باشد. ورق‌ها می‌توانند با اشکال مختلفی مانند چندضلعی (مانند چهار گوش) و یا دایروی ساخته شوند. از نمونه‌های کاربرد ورق‌های گرد در سازه‌ها می‌توان در صفحه میزها، ورق‌های سقف‌ها، ورق‌های کف مخازن و ورق‌های اتصال در سازه‌های فلزی، پانل‌های جانبی، دیسک‌های توربین، کف مخازن ذخیره اتمسفریک و تحت فشار، پد تقویتی دور نازل‌های مخازن و درپوش‌های سوراخ‌های آدم‌رو در کف خیابان را نام برد. بدلیل کاربرد فراوان ورق در سازه‌ها، بررسی و تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق با اشکال هندسی گوناگون و با شرایط مرزی متنوع دارای اهمیت می‌باشد. ورق‌های قرار گرفته بر روی بستر با مدل‌های ریاضی مانند الاستیک و ویسکوالاستیک یکی از پرکاربردترین

¹Extended Kantorovich method (EKM)

جواب فرم بسته بسیار دقیق در پیچش تیرهای منشوری با سطح مستطیلی را به دست آورد. روش کانتروویچ تعمیم یافته ابتدا توسط کر با استفاده از ایده روش معروف کانتروویچ برای به دست آوردن جوابی تخمینی به شکل بسته بسیار دقیق برای پیچش تیرهای منشوری با سطح مقطع مستطیلی معرفی شد [۲]. این روش ایده جدید کانتروویچ را برای تقلیل معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر یک مسئله الاستیسیته دوبعدی به یک دسته معادله دوگانه معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می‌گیرد. دالایی و کر [۳]، در سال ۱۹۹۶، تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات ارتوتروویچ مستطیلی با انتهای گیردار را مورد بررسی قرار دادند. کیم و چو [۴]، در سال ۲۰۰۰، تحلیل مقاومت در مواد کامپوزیتی لایه‌ای به وسیله روش کانتروویچ توسعه یافته را مورد بررسی قرار دادند. روش *EKM* به طور فزاینده‌ای برای مسائل الاستیسیته دوبعدی مختلف در دستگاه مختصات کارتزین مورد استفاده قرار گرفته است. در میان این کاربردها، می‌توان به کماتش ورق‌ها اشاره کرد [۵]. یوان و جین [۶]، در سال ۱۹۹۸، محاسبه بار کماتش الاستیک صفحات نازک مستطیلی به وسیله روش کانتروویچ توسعه یافته مورد را بررسی قرار دادند. فریبرز و پوربهلول [۷]، خمش ورق‌ها با ضخامت متغیر را با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته در سال ۱۹۸۹ بررسی کردند. یوان و ویلیامز [۸]، در سال ۱۹۹۸، تحلیل خمش ورق را با روش کانتروویچ توسعه یافته مورد بررسی قرار دادند. صالحی [۹]، در سال ۱۹۹۱، پاسخ تغییر شکل بزرگ الاستیک صفحات قطاعی حلقوی را با روش‌های تفاضل محدود، المان محدود و سایر روش‌های حل عددی مورد مطالعه قرار دادند. هریک [۱۰] تحلیل ارتعاشات آزاد قطاع ارتوتروویچ به روش تحلیلی در سال ۱۹۸۴ را مورد مطالعه قرار داد. چانگ و چان [۱۱]، تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات قطاعی نازک و ضخیم را به روش المان سطح در سال ۱۹۸۱ مورد بررسی قرار دادند. فلاحتگر و اقدام [۱۲]، در سال ۲۰۰۳، تحلیل خمش ورق‌های ضخیم را با روش کانتروویچ توسعه یافته انجام دادند. آناگورن و سینگاتانادگید [۱۳] آنالیز کماتش صفحات کامپوزیتی لایه‌ای متقارن را به وسیله روش کانتروویچ توسعه یافته در سال ۲۰۰۶ مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۰۷، اقدام و همکاران [۱۴]، تحلیل خمش قطاع دایروی را با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته مورد بررسی قرار دادند. بررسی ارتعاشات ورق‌های مستطیلی با ضخامت متغیر با استفاده از روش *EKM* توسط شوفرین و ایزنبرگر [۱۵]، در سال ۲۰۰۶ انجام شده‌است. علیجانی و اقدام [۱۶]، در سال ۲۰۰۷، کاربرد روش کانتروویچ توسعه یافته را برای خمش پانل‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار دادند. صالحی و شهیدی [۱۷]، در سال ۱۹۹۴، تغییر شکل بزرگ صفحه میانی قطاع الاستیک را با روش کانتروویچ مورد مطالعه قرار دادند. صالحی و توری [۱۸]، تحلیل تغییر شکل بزرگ صفحات قطاعی را در سال ۱۹۹۰ بررسی کردند. لوینسون [۱۹]، در سال ۱۹۸۵، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی ساده را با استفاده از نظریه الاستیسیته سه‌بعدی برای ورقی با ضخامت متغیر تحلیل کرد. حل دقیق ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم دایروی با تکیه‌گاه‌های ساده توسط مکجی [۲۰] از نظریه میندلین در سال ۱۹۹۵ مورد بررسی قرار گرفت. سیانگ [۲۱]، در سال ۲۰۰۲، حل دقیق ارتعاشات آزاد ورق‌های دایروی بر روی تکیه‌گاه‌های هم محور حلقوی شکل را ارائه کرد. سیانگ و همکارش [۲۲]، در سال ۲۰۰۹، به بررسی ارتعاشات آزاد

ورق‌های نازک مستطیلی ارتوتروویچ در شرایط تکیه‌گاهی مختلف به روش دقیق پرداختند. آن‌ها به روش دقیق ارتعاشات آزاد درون صفحه صفحات مستطیلی را نیز حساب کردند. سپس حل دقیق ارتعاشات آزاد صفحات ارتوتروویچ مستطیلی با استفاده از نظریه میندلین را توسعه دادند. از بررسی کارهای انجام شده مشاهده می‌گردد که تاکنون تحقیقی که در برگزیده تحلیل غیرخطی خمش قطاع حلقوی نازک بر روی بستر وینکلر غیرخطی با شرایط مرزی مختلف در پیرامون آن تحت بارگذاری‌های استاتیکی یکنواخت و غیریکنواخت با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته و سپس بررسی پارامترهای موثر در تحلیل باشد انجام نشده که این دو جنبه را می‌توان نوآوری در ارائه نتایج پژوهش کنونی دانست.

در این مقاله، تحلیل خمش ورقی دایروی نازک به شکل یک قطاع دایروی (دارای شعاع داخلی و خارجی) از جنس ماده همگن و همسانگرد با شرایط مرزی مختلف در لبه‌های داخلی و خارجی شامل لبه‌های گیردار و ساده، تحت بارگذاری یکنواخت و غیر یکنواخت بر روی بسترهای وینکلر (الاستیک) غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، معادلات الاستیسیته دوبعدی در سیستم مختصات قطبی حاکم بر میدان تنش-کرنش ورق، با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته برای به دست آوردن جوابی به شکل بسته استفاده تحلیل می‌گردد. برای تحلیل خمشی ورق قطاعی نازک با شرایط مرزی مختلف و تحت بارگذاری یکنواخت و غیریکنواخت به کمک ترکیب روش کانتروویچ توسعه یافته با روش باقیمانده وزنی، معادله دیفرانسیل پاره‌ای (*PDE*) از مرتبه چهار حاکم بر دینامیک ورق به دو معادله دیفرانسیل معمولی (*ODE*) برحسب مختصات قطبی r و θ تبدیل می‌گردد. سپس، دو معادله *ODE* به روش کانتروویچ توسعه یافته (*EKM*) حل شده و پس از رسیدن به همگرایی حل در کد کامپیوتری نوشته شده در محیط برنامه ریاضی *MATLAB* پاسخ استاتیکی خیز ورق در برابر بارگذاری های یکنواخت و غیریکنواخت استخراج می‌گردند. همچنین، جهت صحت سنجی، خیز ورق با نتایج شبیه‌سازی انجام شده از روش المان محدود (*FEM*) به کمک نرم‌افزار *ABAQUS* نتایج تحلیل در دو روش انجام شده در این پژوهش با نتایج موجود در منابع در حالت‌های خاص مسئله، مقایسه و بررسی می‌گردند. در ادامه، اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی و مشخصات مکانیکی ورق، پارامترهای سفتی خطی و غیرخطی بستر وینکلر و نوع بارگذاری‌های یکنواخت و غیریکنواخت در شکل پاسخ خمشی خیز ورق مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲- مدل‌سازی ریاضی و تحلیل خمش قطاع حلقوی نازک بر روی بستر وینکلر غیرخطی تحت بارگذاری‌های یکنواخت و غیر یکنواخت با استفاده از روش کانتروویچ تعمیم یافته

در شکل ۱، یک ورق حلقوی نازک به ضخامت h و شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o و زاویه قطاع 2α نشان داده شده‌است. این ورق بر روی بستر وینکلر با سفتی‌های خطی و غیرخطی بترتیب k_1 و k_2 قرار دارد. مرکز مختصات قطبی $r\theta$ در مرکز قطاع دایروی قرار گرفته‌است. مبدا سنجش زوایا نسبت به خط تقارن محوری قطاع دایروی (خط

$$w(r, \theta) = w_{ij}(r, \theta) \equiv f_i(r) g_j(\theta) \quad (3)$$

که در آن، $f_i(r)$ و $g_j(\theta)$ توابعی نامعلوم می‌باشند. زیر نویس‌های i و j اعداد مشخص کننده تکرار برای محاسبه $f_i(r)$ و $g_j(\theta)$ هستند. مطابق روش باقیمانده وزنی، برای تابع $w(r, \theta)$ معادله گالریکین عبارت است از

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{r_i}^{r_o} \left(D \nabla^4 w(r, \theta) + \frac{1}{r^4} (k_1 w(r, \theta) + k_2 w(r, \theta)^3) - p(r, \theta) \right) \delta w r dr d\theta = 0 \quad (4)$$

با پیش‌بینی فرضی اولیه برای تابع $g_j(\theta)$ که $\delta w_{,j} = 0$ به صورت زیر بیان می‌گردد

$$\delta w = g_j(\theta) \delta f_i \quad (5)$$

با جایگذاری رابطه (3) در (4) و ترکیب با رابطه (5) نتیجه می‌دهد که

$$\int_{r_i}^{r_o} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(D \nabla^4 (f_i g_j) + \frac{1}{r^4} (k_1 (f_i g_j) + k_2 (f_i g_j)^3) - p(r, \theta) g_j \right) \delta f_i r dr d\theta = 0 \quad (6)$$

بر مبنای اصل تغییرات، اگر عبارت داخل کروشه برابر صفر شود، معادله (6) ارضا می‌گردد. بنابراین

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(D \nabla^4 (f_i g_j) + \frac{k_1 (f_i g_j)}{r^4} + \frac{k_2 (f_i g_j)^3}{r^4} - p(r, \theta) g_j \right) d\theta = 0 \quad (7)$$

با استفاده از فرض اولیه برای تابع $g_j(\theta)$ که $\delta w_{,j} = 0$ به عنوان حدس اولیه و تکرار نسبت به θ معادله (7) در معادله ODE مرتبه چهارم به شکل زیر نوشته می‌شود

$$A_1 \frac{d^4 f_i(r)}{dr^4} + 2A_1 \frac{1}{r} \frac{d^3 f_i(r)}{dr^3} + A_2 \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f_i(r)}{dr^2} - A_2 \frac{1}{r^3} \frac{df_i(r)}{dr} + A_3 \frac{1}{r^4} f_i(r) + \frac{1}{r^4} A_4 (k_1 f_i(r) + k_2 f_i(r)^3) = E(r) \quad (8)$$

که ثابت‌های A_i و $E(r)$ عبارتند از

$$A_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j^2 d\theta, A_2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(2 \frac{d^2 g_j}{d\theta^2} - g_j \right) g_j d\theta, A_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{d^4 g_j}{d\theta^4} + 4 \frac{d^2 g_j}{d\theta^2} \right) g_j d\theta, A_4 = \frac{A_1}{D} \quad (9)$$

$$E(r) = \frac{1}{D} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(r, \theta) g_j d\theta$$

با توجه به شرایط مرزی در رابطه (2)، توابع مجزا شده به صورت زیر بازنویسی گردند

$$f_i = \frac{df_i}{dr} = 0; \text{ for } r = r_i \text{ and } r = r_o \quad (10)$$

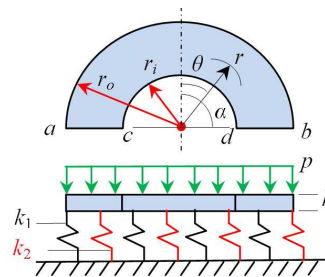
$$g_j = \frac{dg_j}{d\theta} = 0; \text{ for } \theta = \pm\alpha$$

حل معادله (8) در ترکیب با سری اول داده‌های به‌دست آمده از رابطه (9)، به دستیابی به اولین تقریب برای تابع $f_i(r)$ که $i=1$ می‌انجامد. به همین گونه، بعد از تشخیص تابع اولیه $f_i(r)$ امکان ادامه روند تکرار با معرفی تابع به‌دست آمده از رابطه (4) وجود دارد. این نتیجه تا رسیدن به یک شکل جدید برای δw در معادله گالریکین به صورت زیر ادامه می‌یابد

$$\delta w = f_i(r) \delta g_j \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{r_i}^{r_o} \left(D \nabla^4 (f_i g_j) + \frac{k_1 (f_i g_j)}{r^4} + \frac{k_2 (f_i g_j)^3}{r^4} - p(r, \theta) f_i \right) \delta g_j r dr d\theta = 0 \quad (11)$$

مجدداً، برای ارضای معادله (10)، عبارت داخل کروشه باید صفر شود. استفاده از تابع به‌دست آمده $f_i(r)$ که $i=1$ برای جایگذاری در داخل کروشه و انتگرال‌گیری نسبت به r به دستیابی به دومین ODE مرتبه چهارم در ترم $g(\theta)$ به شکل زیر کمک می‌نماید

تقارن از مرکز قطاع) در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- ورق حلقوی نازک بر روی بستر وینکلر با سفتی خطی k_1 و سفتی غیرخطی k_2 تحت بارگذاری p

در این مقاله در نتایج ارائه شده از تحلیل‌ها دو نوع بارگذاری برای ورق حلقوی در نظر گرفته شده که شامل: الف- بارگذاری یکنواخت p و ب- بارگذاری غیریکنواخت p (که با مقدار صفر بر روی کمان داخلی cd در شعاع r_i به مقدار بیشینه بر روی کمان بیرونی ab به شعاع r_o می‌رسد) می‌باشد. همچنین، سه نوع شرط مرزی (تکیه‌گاهی) برای ورق حلقوی در نظر گرفته شده‌است که شامل: الف- ورق حلقوی با شرایط مرزی چهار تکیه‌گاه گیردار در پیرامون آن (به اختصار (cc) ، ب- ورق حلقوی با چهار تکیه‌گاه ساده در پیرامون آن (به اختصار (ss)) و پ- ورق حلقوی با دو تکیه‌گاه گیردار در کمان‌های ab و cd و دو تکیه‌گاه ساده در مرزهای ac و bd (به اختصار (cs))، می‌باشند.

معادلات حاکم برای ورق قطاعی نازک از جنس ماده همگن و همسانگرد که بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی قرار دارد عبارت است از:

$$D \nabla^4 w(r, \theta) + k_1 w(r, \theta) + k_2 w^3(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w(r, \theta) + \frac{1}{r^4} (k_1 w(r, \theta) + k_2 w^3(r, \theta)) = p(r, \theta)$$

که در آن $w(r, \theta)$ تغییر شکل خمشی ورق، $p(r, \theta)$ توزیع بار، $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ سفتی خمشی ورق است که در آن E مدول یانگ، ν نسبت پواسون ورق می‌باشند. برای ورق با شرایط مرزی گیردار در تمام لبه‌های آن

$$w = \frac{dw}{dr} = 0; \text{ for } r = r_i \text{ and } r = r_o, \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad (2)$$

$$w = \frac{dw}{d\theta} = 0; \text{ for } \theta = \pm\alpha, \quad r_i \leq r \leq r_o,$$

۲-۱- حل معادله حاکم بر خمشی ورق با استفاده از روش EKM

در روش حل کانترویچ، تغییر شکل خمشی ورق به صورت توابع چند جمله‌ای مجزا از دو متغیر r و θ فرض می‌گردد. مطابق الگوریتم روش حل EKM، فرض دو تابع مجزای تک جمله‌ای برای تغییر شکل خمشی بعد از چند تکرار، نتایج دقیقی را برای تابع پاسخ به‌دست می‌دهد. بنابراین، با استفاده از جداسازی متغیرها، تغییر شکل ورق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$r_i = 0.3m, r_o = 0.5m, h = 0.002m, \alpha = 30^\circ, \\ E = 207GPa, \nu = 0.3, p(r, \theta) = 50kPa, \\ k_1 = 10^6 N/m^3, k_2 = 10^6 N/m^5,$$

فرض شده است که $g_0(\theta) = \frac{\theta}{\alpha} \sin(\frac{\theta}{\alpha} \pi)$ [۱۴] در این حالت تقریب

برای حل دقیق معادلات ODE در معادلات (۸) و (۱۱) به شکل زیر به دست می آید

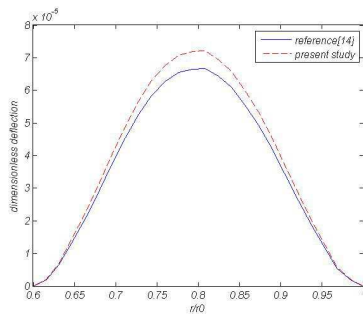
$$f_i = C_{1i}r^{m_{1i}} + C_{2i}r^{m_{2i}} + C_{3i}r^{m_{3i}} + C_{4i}r^{m_{4i}} + C_{5i}r^4, \quad (18)$$

$$g_j = D_{1j}e^{a_{1j}\theta} \cos b_{1j}\theta + D_{2j}e^{a_{2j}\theta} \sin b_{1j}\theta \\ + D_{3j}e^{a_{2j}\theta} \cos b_{2j}\theta + D_{4j}e^{a_{2j}\theta} \sin b_{2j}\theta + D_{5j}, \quad (19)$$

در تحلیل‌ها شرایط مرزی ورق در پیرامون آن گیردار در نظر گرفته شده است مگر آنکه بصورت دیگری ذکر شده باشد. همچنین، بارگذاری غیر یکنواخت به صورت $p(r, \theta) = 10^4(r - r_i)^2(e^{-\theta} + e^{-2\theta})Pa$ در نظر گرفته شده است [۱۴].

۳-۱- صحت‌سنجی نتایج و تحلیل خمش ورق قطاعی نازک بر روی بستر وینکلر

در شکل ۳، برای صحت‌سنجی مقایسه‌ای بین تغییرات خیز بی‌بعد در امتداد محور تقارن ورق ($w(r, 0)$) برحسب نسبت بی‌بعد شعاع به شعاع بیرونی ورق حلقوی (r/r_o) برای حالت بدون بستر ($k_1=k_2=0$) در بارگذاری یکنواخت با استفاده از روش کانتروویچ در پژوهش کنونی و نتایج حاصل از مرجع [۱۴] ارائه شده است. در این شکل، خیز بی‌بعد از مقدار صفر در شعاع داخلی تا نسبت شعاع بی‌بعد 0.8 افزایش یافته و به بیشترین مقدار خود یعنی 7×10^{-5} می‌رسد. سپس، پس از این نسبت شعاع، خیز بی‌بعد کاهش می‌یابد تا در شعاع بیرونی به مقدار صفر می‌رسد. همانطور که شکل نشان می‌دهد روند تغییرات و مقدار بزرگی خیز ورق در هر دو نمودار از هر دو روش بسیار به یکدیگر نزدیک هستند به طوری که بیشترین درصد اختلاف بین دو نمودار برابر با ۷ درصد می‌باشد.



شکل ۳- خیز بی‌بعد برحسب نسبت بی‌بعد شعاع به شعاع بیرونی ورق برای حالت بدون بستر ($k_1=k_2=0$) در پژوهش کنونی و مرجع [۱۴].

در شکل ۳، خیز بی‌بعد در امتداد کمان مرکزی ورق حلقوی ($(r_i+r_o)/2$) برحسب نسبت بی‌بعد زاویه قوس به زاویه بیرونی ورق (θ/α) در حالت خاص بدون بستر وینکلر ($k_1=k_2=0$) تحت بار یکنواخت در پژوهش کنونی با مرجع [۱۴] مقایسه و صحت‌سنجی گردیده است. از زاویه نسبی بی‌بعد ۱- (زاویه شروع قطاع) تا نسبت زاویه بی‌بعد 0.5 - (زاویه ربع قطاع)، شکل منحنی رفتار صعودی داشته و دارای شیب

$$B_1 \frac{d^4 g_j(\theta)}{d\theta^4} + B_2 \frac{d^2 g_j(\theta)}{d\theta^2} + B_3 g_j(\theta) \\ + B_4 (k_1 g_j(\theta) + k_2 g_j(\theta)^3) = F(\theta) \quad (12)$$

که ثابت‌های B_i و $F(\theta)$ عبارتند از

$$B_1 = \int_{-r_i}^r \frac{f_i^2}{r^5} dr, B_2 = \int_{-r_i}^r (2 \frac{d^2 f_i}{dr^2} - 2 \frac{df_i}{r^2 dr} + 4 \frac{f_i^2}{r^3}) f_i dr, \\ B_3 = \int_{-r_i}^r (r \frac{d^4 f_i}{dr^4} + 2 \frac{d^3 f_i}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 f_i}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{df_i}{dr}) f_i dr, B_4 = \frac{B_1}{D}, \quad (13)$$

$F(\theta) = \frac{1}{D} \int_{-r_i}^r p(r, \theta) f_i r dr$, فرایند به وسیله حل ODE (رابطه (۱۱)) با سری دوم داده‌های معادله (۹) و به دست آوردن حدس جدید برای $g_j(\theta)$, $j=1$ به پایان بخشیدن به تکرار اول جهت به دست آوردن تغییر شکل خمشی ورق می‌انجامد. معادلات (۸) و (۱۱) باید مکرراً حل شوند و تقریب‌های جدید برای توابع $f(r)$ و $g_j(\theta)$ به دست آیند. تکرار باید به همین روش ادامه یابد تا به سطح همگرایی پیش بینی شده مطلوبی دست یافت. در ادامه به حل دقیق معادلات حاکم بر خمش ورق گرد حلقوی با استفاده از روش EKM پرداخته می‌شود. شکل حل دقیق برای معادله (۸) و معادله (۱۱) به صورت زیر می‌باشد

$$f_i(r) = \sum_{k=1}^4 C_{ik} r^{m_{ik}} + f_{ip}(r), g_j(\theta) = \sum_{l=1}^4 D_{jl} r^{m_{jl}} + g_{jp}(\theta), \quad (14)$$

که در آن C_{ik} و D_{jl} ثابت‌های مرکب مختلطی هستند که با استفاده از شرایط مرزی در معادله (۱۰) به دست می‌آیند. m و n از حل معادله

$$m^4 - 4m^3 + (\frac{A_2}{A_1} + 5)m^2 - 2(\frac{A_2}{A_1} + 5)m + \frac{A_3 + (k_1 + k_2)A_4}{A_1} = 0, \quad (15) \\ n^4 (\frac{B_2}{B_1})n^2 + \frac{B_3 + (k_1 + k_2)B_4}{B_1} = 0,$$

حل خصوصی برای معادلات (۸) و (۱۲) وابسته به بار خارجی اعمالی بر روی ورق می‌باشد. به عنوان نمونه، برای حل خصوصی برای بارگذاری گسترده غیر یکنواخت

$$f_{ip}(r) = C_5 r^4, g_{jp}(\theta) = D_5, \quad (16)$$

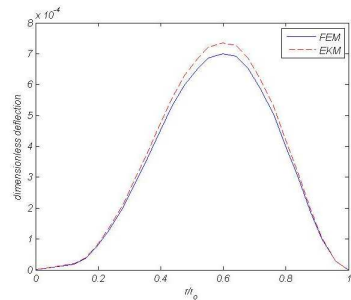
که در آن C_5 و D_5 ثوابتی هستند که با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند

$$C_5 = \left(\frac{E}{72A_1 + 8A_2 + A_3 + (k_1 + k_2)A_4} \right), \quad (17) \\ D_5 = \left(\frac{F}{B_3 + (k_1 + k_2)B_4} \right),$$

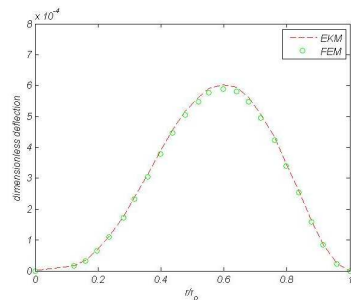
۳- تحلیل نتایج و بحث در آنها

در این بخش نتایج مربوط به تحلیل خمش ورق قطاعی حلقوی نازک بر روی بستر الاستیک با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته ارائه می‌گردد. نتایج به دست آمده از تحلیل با نتایج موجود در مراجع در حالت بدون بستر و نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسئله با استفاده از نرم‌افزار آباکوس (ABAQUS) مقایسه و صحت‌سنجی می‌گردد. سپس، اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی ورق، سفتی‌های خطی k_1 و غیرخطی k_2 بستر وینکلر، نوع بارگذاری و تاثیر شرایط مرزی در پاسخ خمشی ورق حلقوی مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی آباکوس محدود ورق از آلمان درجه دوم (SSR) Quadratic در مش‌بندی استفاده شده است. مشخصه‌های هندسی و فیزیکی ورق قطاعی به صورت زیر در نظر گرفته شده است

برحسب نسبت بی‌بعد شعاع به شعاع بیرونی برای قطاع دایروی توپر (ورق توپر بصورت یک ربع دایره با زاویه قطاع $\alpha=90^\circ$ و شعاع داخلی $r_i=0.01\text{ mm}$) به ترتیب برای ورق بدون بستر ($k_1=0$) و ورق بر روی بستر وینکلر ($k_1=10^6$) تحت بار یکنواخت با استفاده از روش EKM و FEM با هم مقایسه شده‌اند. در این حالت نیز دو روش نتیجه نزدیکی به دست می‌دهند. بیشترین درصد اختلاف در این نمودارها بترتیب ۷ درصد و ۳ درصد می‌باشد. در این دو شکل خیز ورق از مقدار صفر تا مقدار $7/2 \times 10^{-4}$ در شکل ۵-الف و مقدار 6×10^{-4} در شکل ۵-ب در نسبت $r/r_i=1/6$ افزایش یافته و سپس در شعاع بیرونی به مقدار صفر کاهش می‌یابد.



(الف)

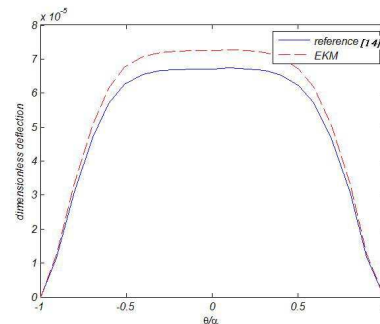


(ب)

شکل ۵- خیز بی‌بعد برحسب نسبت شعاع به شعاع بیرونی برای ورق توپر، (الف) - بدون بستر ($k_1=0$) و (ب) - بستر وینکلر با $k_1=10^6$

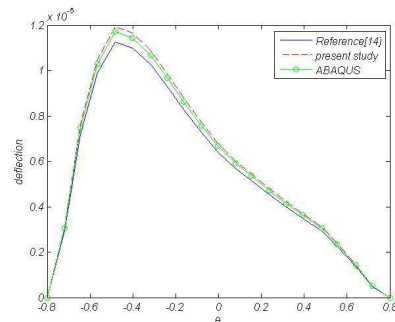
در شکل ۶-الف و ۶-ب تغییرات خیز بی‌بعد ورق توپر برحسب نسبت بی‌بعد زاویه بیرونی (θ/α) تحت بارگذاری یکنواخت بترتیب برای ورق بدون بستر ($k_1=0$) و ورق بر روی بستر با $k_1=10^6$ نشان داده شده‌است. نتایج به دست آمده نشان دهنده انطباق خوب بین دو روش کانتروویچ توسعه یافته و روش المان محدود می‌باشد. مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن بستر الاستیک، خیز بی‌بعد کاهش می‌یابد. همچنین ماکزیمم خیز بی‌بعد در حالت با بستر الاستیک کمتر از ماکزیمم خیز بی‌بعد در حالت بدون بستر است. بیشترین درصد اختلاف بین نتایج دو روش در شکل ۶-الف برابر با ۷ درصد و در شکل ۶-ب برابر با ۵ درصد می‌باشد.

مثبت زیادی است و خیز بی‌بعد دارای حداکثر مقدار می‌باشد. در نسبت زوایای $-1/5$ (زاویه ربع قطاع) تا $1/5$ (زاویه سه چهارم قطاع) خیز بی‌بعد تقریباً ثابت بوده و شیب منحنی صفر می‌باشد. پس از نسبت زاویه $1/5$ تا نسبت ۱ (زاویه انتهای قطاع) خیز به شدت افت کرده و نمودار دارای شیب منفی زیادی می‌باشد. همانطور که شکل نشان می‌دهد روند تغییرات و مقدار بزرگی خیز ورق در هر دو نمودار بسیار به هم نزدیک هستند که این امر نشان دهنده نزدیک بودن نتایج حاصل از روش تحلیلی EKM در این پژوهش و نتایج گزارش شده در مرجع می‌باشد. بیشترین درصد اختلاف نتایج بین دو نمودار برابر ۸ درصد می‌باشد.



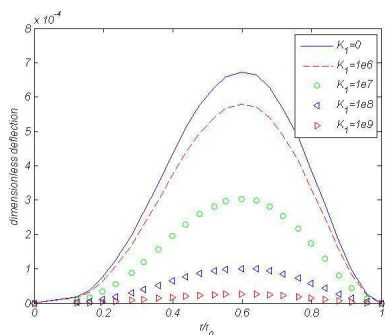
شکل ۳- خیز بی‌بعد برحسب نسبت بی‌بعد زاویه قوس به زاویه بیرونی ورق برای حالت بدون بستر ($k_1=k_2=0$) در پژوهش کنونی (EKM) و مرجع [۱۴].

در شکل ۴، نتایج تحلیل برای تغییرات خیز ورق حلقوی (w) در امتداد کمان مرکزی ورق $(r_i+r_o)/2$ برحسب زاویه (θ) در حالت بدون بستر ($k_1=k_2=0$) تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM و FEM و نتایج داده شده در مرجع [۱۴] نشان داده شده‌است. با افزایش زاویه θ ، خیز با شیب مثبت زیادی افزایش می‌یابد. در زاویه $\theta = -1/4$ خیز ورق به مقدار بیشینه خود یعنی $1/22 \times 10^{-5} m$ می‌رسد سپس با افزایش θ از $1/4$ تا $1/8$ خیز به تدریج کاهش یافته و شیب نمودار منفی شده و در نهایت به مقدار صفر کاهش می‌یابد. روند تغییرات و مقدار بزرگی خیز ورق در هر دو روش بسیار به هم نزدیک هستند. بیشترین درصد اختلاف بین نتایج روش EKM با روش FEM و مرجع [۱۴] بترتیب برابر با ۶ درصد و ۹ درصد می‌باشد.



شکل ۴- خیز ورق حلقوی (w) برحسب زاویه ورق (θ) برای ورق تحت بارگذاری غیریکنواخت بدون بستر ($k_1=k_2=0$) با استفاده از روش‌های EKM و FEM و نتایج داده شده در مرجع [۱۴]

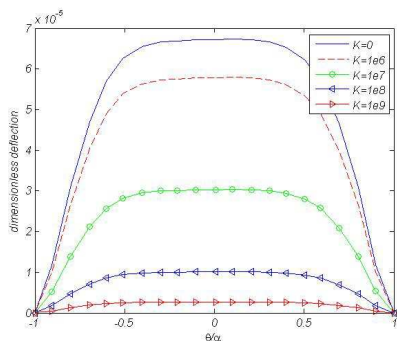
در شکل ۵-الف و ۵-ب تغییرات خیز بی‌بعد در امتداد خط تقارن ورق



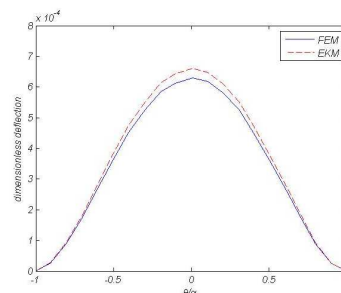
(ب)

شکل ۷- خیز بی بعد ورق بر حسب r/r_0 برای ضرایب مختلف سفتی خطی بستر الاستیک k_1 در بارگذاری یکنواخت، (الف) - ورق حلقوی با زاویه قطاع $\alpha=60^\circ$ و (ب) - ورق توپر با زاویه قطاع $\alpha=90^\circ$

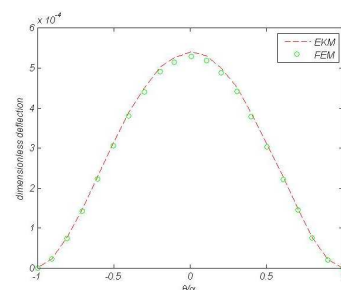
در شکل ۸-الف و ۸-ب، خیز بی بعد ورق بر حسب نسبت بی بعد θ/α (زاویه به زاویه بیرونی ورق) برای مقادیر مختلف ضریب سفتی خطی بستر الاستیک k_1 در بارگذاری یکنواخت بترتیب برای ورق حلقوی با $r_0=0.3\text{ m}$ (با زاویه قطاع $\alpha=60^\circ$) و ورق توپر (با زاویه قطاع $\alpha=90^\circ$) نشان داده شده است. در شکل ۸-الف خیز بی بعد ورق از مقدار صفر در $\theta/\alpha=1$ تا مقدار بیشینه در $\theta/\alpha=0.5$ افزایش یافته و سپس تا نسبت زاویه بی بعد $\theta/\alpha=0.5$ ثابت مانده و پس از آن در زاویه پایانی قطاع ورق در $\theta/\alpha=1$ در لبه آن به مقدار صفر کاهش می یابد. در شکل ۸-ب با افزایش نسبت بی بعد θ/α خیز بی بعد از مقدار صفر در $\theta/\alpha=1$ تا مقدار بیشینه در $\theta/\alpha=0$ افزایش یافته و پس از آن در $\theta/\alpha=1$ در لبه آن به مقدار صفر کاهش می یابد. همچنین با توجه به شکل مشاهده می گردد که با افزایش ضریب سفتی خطی بستر الاستیک (k_1) مقدار خیز خمشی ورق کاهش می یابد.



(الف)



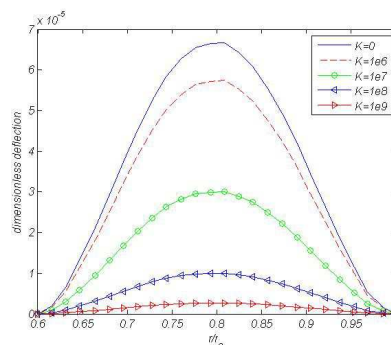
(الف)



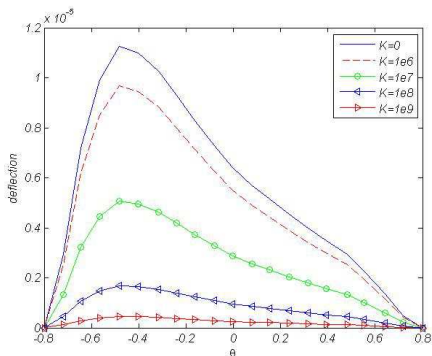
(ب)

شکل ۶- خیز بی بعد بر حسب نسبت بی بعد زاویه به زاویه بیرونی (θ/α) برای ورق توپر، (الف) - بدون بستر $k_1=0$ و (ب) - بستر با $k_1=10^6$

در شکل ۷-الف و ۷-ب تغییرات خیز بی بعد بر حسب نسبت بی بعد شعاع به شعاع بیرونی ورق برای مقادیر مختلف سفتی خطی بستر الاستیک k_1 ($k_2=0$) در بارگذاری یکنواخت بترتیب برای ورق حلقوی با $r_0=0.3\text{ m}$ (با زاویه قطاع $\alpha=60^\circ$) و ورق توپر (با زاویه قطاع $\alpha=90^\circ$) نشان داده شده است. خیز از مقدار صفر در شعاع درونی به سمت مرکز ورق افزایش یافته و سپس از مرکز ورق به سمت شعاع بیرونی خیز خمشی کاهش یافته تا در شعاع بیرونی به مقدار صفر برسد. با توجه به شکل مشاهده می گردد که با افزایش ضریب سفتی خطی بستر الاستیک (k_1) مقدار خیز خمشی ورق کاهش می یابد. مقدار بیشینه خیز بی بعد به ازای تمامی سفتی های خطی بستر در شکل ۷-الف در نسبت شعاع ۸/ و در شکل ۷-ب در نسبت شعاع ۶/ اتفاق افتاده است.

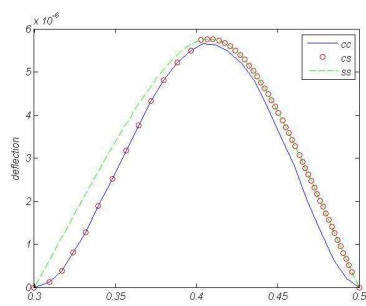


(الف)

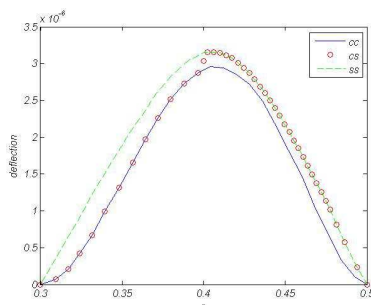


شکل ۱۰، خیز ورق (w) برحسب زاویه (θ) برای مقادیر مختلف ضریب سفتی خطی بستر الاستیک k_1 در بارگذاری غیریکنواخت برای ورق حلقوی با $r_1=0.3\text{ m}$ (با زاویه قطاع $\alpha=60^\circ$) با استفاده از روش EKM

در شکل ۱۱-الف و ۱۱-ب تغییرات خیز ورق حلقوی بر حسب شعاع در بارگذاری خطی برای سه نوع شرط مرزی شامل چهار لبه گیردار (cc)، چهار لبه مفصلی (ss) و دو لبه گیردار و دو لبه مفصلی (cs) بترتیب به ازای سفتی خطی بستر الاستیک (k_1) در حالت $k_1=10^6$ و $k_1=10^7$ ارائه شده است. همانطور که از شکلها مشاهده می شود برای ورق با شرط مرزی چهار لبه مفصلی خیز ناشی از خمش بیشتری نسبت به ورق با شرط مرزی چهار لبه گیردار دارد. برای ورق با شرط مرزی دو لبه گیردار و دو لبه مفصلی خیز بینابینی نسبت به دو شرط مرزی دیگر دارد.

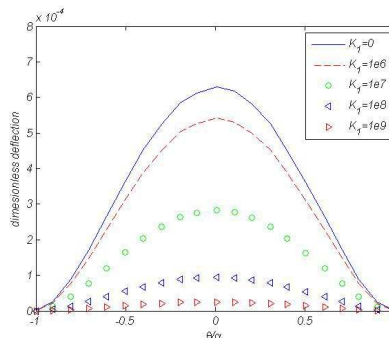


(الف)



(ب)

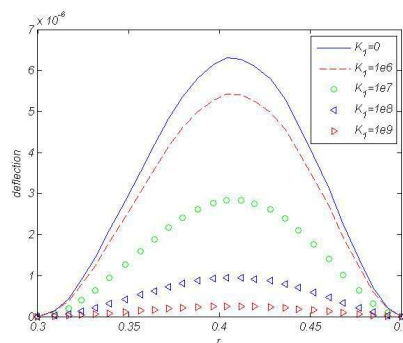
شکل ۱۱- خیز برحسب شعاع برای ورق حلقوی برای باگذاری یکنواخت با سه نوع شرط مرزی شامل چهار لبه گیردار (cc)، چهار لبه مفصلی (ss) و دو لبه گیردار و دو لبه مفصلی (cs) بر روی بستر الاستیک با سفتی خطی، (الف) - $k_1=10^6$ و (ب) - $k_1=10^7$



(ب)

شکل ۸- خیز بی بعد ورق برحسب θ/α به ازای تغییرات ضریب سفتی خطی بستر الاستیک k_1 ($k_2=0$) در بارگذاری یکنواخت، (الف) - ورق حلقوی با زاویه قطاع $\alpha=60^\circ$ و (ب) - برای ورق توپر با زاویه قطاع $\alpha=90^\circ$

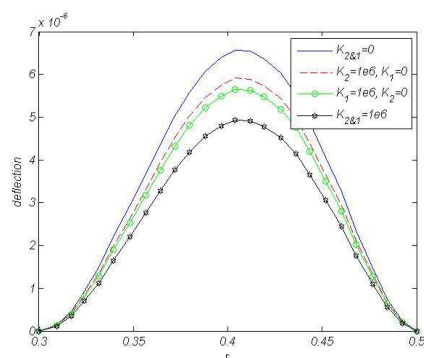
در شکل ۹، تغییرات خیز ورق حلقوی برحسب شعاع r برای مقادیر مختلف k_1 برای بارگذاری غیریکنواخت نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می شود که خیز در قوس درونی و قوس بیرونی ورق صفر بوده و در ناحیه قوس میانی ورق دارای مقدار بیشینه می باشد. لازم به ذکر این مطلب است که در این حالت مقدار بیشینه خیز خمشی دقیقاً در مرکز ورق ($r=0.45\text{ m}$) اتفاق نمی افتد بلکه بسته به توزیع بارگذاری خطی محل ایجاد خیز بیشینه در مقطعی به فاصله شعاعی پس از آن ($0.4\text{ m} < r < 0.45\text{ m}$) اتفاق می افتد. همچنین، با افزایش ضریب بستر الاستیک (k_1) مقدار خیز خمشی ورق کاهش می یابد.



شکل ۹- خیز ورق حلقوی برحسب شعاع به ازای مقادیر مختلف ضریب سفتی بستر الاستیک (k_1) در بارگذاری غیریکنواخت

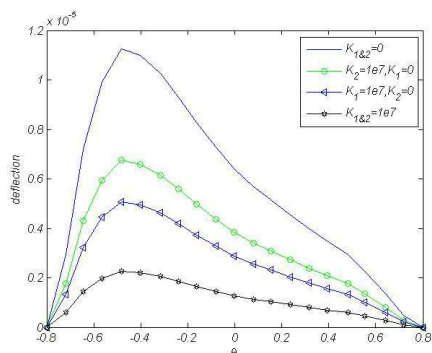
در شکل ۱۰، خیز ورق حلقوی (w) برحسب زاویه (θ) برای مقادیر مختلف ضریب سفتی خطی بستر الاستیک k_1 در بارگذاری غیریکنواخت با $r_1=0.3\text{ m}$ (زاویه قطاع $\alpha=60^\circ$) با استفاده از روش EKM نشان داده شده است. خیز در لبه های ورق صفر بوده و در نقطه های روی ورق که بستگی به توزیع بارگذاری دارد، بیشینه می باشد. همچنین، با افزایش ضریب سفتی خطی بستر وینکلر (k_1) مقدار خیز کاهش می یابد. کمترین خیز ماکزیمم مربوط به بستر با $k_1=10^9$ است. در تمامی نمودارها با افزایش زاویه تا $1/4$ - خیز افزایش یافته و به مقدار بیشینه خود در این نقطه می رسد. از این نقطه به بعد با افزایش زاویه، خیز کاهش می یابد.

غیرخطی k_1 و k_2 مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM نشان داده شده است. در این شکل خیز تا شعاع $r=0.4 \text{ m}$ روندی صعودی دارد و در این نقطه به مقدار بیشینه خود رسیده و از این نقطه به بعد شروع به کاهش می کند. همچنین مشاهده می شود که با افزایش ضریب سفتی غیرخطی بستر وینکلر، مقدار بیشینه خیز و همچنین خیز کلی ورق کاهش می یابد. مشاهده می شود که ورق که دارای بستر وینکلر غیرخطی با ضرایب سفتی خطی و غیرخطی k_1 و k_2 است نسبت به ورقی که فقط دارای بستر وینکلر خطی با سفتی k_1 و یا غیرخطی با سفتی k_2 است دارای خیز بیشینه کمتر و به طور کلی خیز کمتری است که نشان دهنده تاثیر بستر کاملاً غیرخطی می باشد. نموداری که در پایین ترین محل قرار دارد نموداری است که متعلق به بستر وینکلر غیرخطی بوده که ضرایب سفتی خطی و غیر خطی k_1 و k_2 الاستیک در آن موجود می باشد.



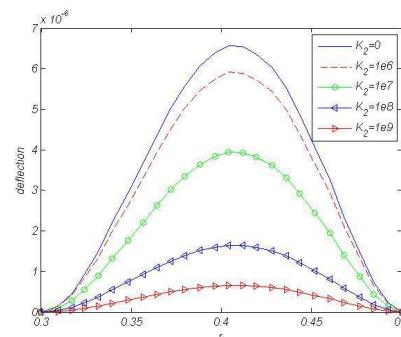
شکل ۱۲- خیز ورق حلقوی (w) برحسب فاصله شعاعی (r) بر روی بستر وینکلر به ازای ترکیبی از سفتی های خطی و غیرخطی k_1 و k_2 مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM

در شکل ۱۵، تغییرات خیز ورق حلقوی (w) برحسب زاویه (θ) بر روی بستر وینکلر به ازای ترکیبی از سفتی های خطی و غیرخطی k_1 و k_2 مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM نشان داده شده است. در این شکل خیز تا شعاع $\theta=0.5$ روندی صعودی دارد و در این نقطه به مقدار بیشینه می رسد و از این نقطه به بعد شروع به کاهش می کند. همچنین، مشاهده می شود که با افزایش ضریب سفتی غیرخطی بستر وینکلر، مقدار بیشینه خیز و همچنین خیز کلی ورق کاهش می یابد.



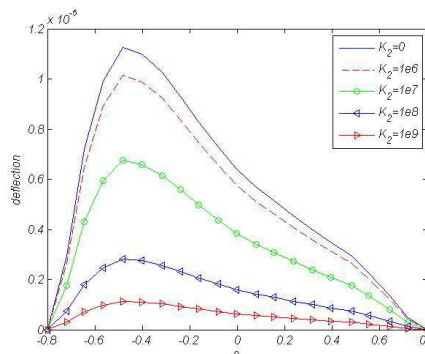
شکل ۱۳- خیز ورق حلقوی (w) برحسب زاویه (θ) بر روی بستر وینکلر به ازای ترکیبی از سفتی های خطی و غیرخطی k_1 و k_2 مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM

در شکل ۱۲، تغییرات خیز ورق حلقوی (w) برحسب فاصله شعاعی (r) بر روی بستر وینکلر به ازای سفتی غیرخطی k_2 ($k_1=0$) مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می گردد که با افزایش ضریب سفتی غیرخطی بستر الاستیک (k_2) مقدار خیز برای تمامی نمودارها کاهش می یابد. مشاهده می گردد که خیز از مقدار صفر در شعاع درونی به مقدار بیشینه در شعاع m ۴ می رسد و پس از آن با افزایش شعاع به سمت شعاع بیرونی به مقدار صفر کاهش می یابد.



شکل ۱۲- خیز ورق حلقوی (w) برحسب فاصله شعاعی (r) بر روی بستر الاستیک با سفتی غیرخطی k_2 ($k_1=0$) مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM

در شکل ۱۳، تغییرات خیز ورق حلقوی (w) برحسب زاویه (θ) بر روی بستر الاستیک با سفتی غیرخطی k_2 ($k_1=0$) مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM نشان داده شده است. خیز در لبه های ورق صفر بوده و در نقطه ای بر روی ورق که بستگی به توزیع بارگذاری دارد، بیشینه می باشد. با توجه به شکل با افزایش ضریب سفتی غیرخطی بستر (k_2) مقدار تغییر شکل خمشی کاهش می یابد. مشاهده می گردد که با افزایش زاویه θ تا مقدار $\theta=0.5$ مقدار خیز بصورت صعودی افزایش می یابد و پس از این زاویه شیب نمودار خیز منفی شده و کاهش می یابد. همچنین، با افزایش ضریب سفتی غیرخطی بستر وینکلر مقدار بیشینه خیز (و به طور کلی خیز) کاهش می یابد.



شکل ۱۳- خیز ورق حلقوی (w) برحسب زاویه (θ) بر روی بستر الاستیک با سفتی غیرخطی k_2 ($k_1=0$) مختلف تحت بارگذاری غیریکنواخت با استفاده از روش EKM

در شکل ۱۴، تغییرات خیز ورق حلقوی (w) برحسب فاصله شعاعی (r) بر روی بستر وینکلر به ازای ترکیبی از سفتی های خطی و

- [12] Aghdam M.M. and Falahatgar, S.R., Bending analysis of thick laminated plates using extended Kantorovich method, Computers and Structures, Vol. 62, No. 3, pp. 279-283, 2003.
- [13] Ungbhakorn, V. and Singhatanadgid, P., Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method, Computers and Structures, Vol. 73, No.1, pp. 120-128, 2006.
- [14] Aghdam, M.M., Mohammadi, M. and V. Erfanian, Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method, Thin-Walled Structures, Vol. 45, pp. 983-990, 2007.
- [15] Shufrin, I. and Eisenberger, M., Vibration of shear deformable plates with variable thickness first-order and higher-order analyses, Journal of Sound Vibration, Vol. 290, No. 1, pp. 465-489, 2006.
- [16] Alijani, F., Aghdam M.M. and Abouhamze, M., Application of the extended Kantorovich method to the bending of clamped cylindrical panels, European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 27, No. 3, pp. 378-388, 2007.
- [17] Salehi, M. and Shahidi, A., "Large deflection analysis of elastic sector Mindlin plates, Computers and Structures, Vol. 52, No. 5, pp. 987-998, 1994.
- [18] Turvey G.J. and Salehi M.D.R., Large deflection analysis of sector plates, Computers and Structures, Vol. 34, No. 1, pp. 101-112, 1990.
- [19] Levinson, M., Free vibrations of a simply supported, rectangular plate: an exact elasticity solution, Journal of Sound and Vibration, Vol. 98, pp. 289-298, 1985.
- [20] McGee, O.G., Huang, C.S., and Leissa, A.W., Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 37, pp. 537-566, 1995.
- [21] Xiang, Y., Exact vibration solutions for circular mindlin plates with multiple concentric ring supports, International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, pp. 6081-6102, 2002.
- [22] Xing, Y.F., and Liu, B., Exact Solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 51, pp. 246-255, 2009.

۴ نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل خمش ورق قطاعی دایروی با شرایط مرزی مختلف بر روی بستر وینکلر غیرخطی تحت بارگذاری‌های یکنواخت و غیریکنواخت با استفاده از روش کانترووویج توسعه یافته (*EKM*) و روش المان محدود (*FEM*) انجام شد. بررسی پارامتری بر روی کمیت‌های بستر بررسی گردید. خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده عبارتند از:

۱- خمش ناشی از خمش در وسط ورق (فاصله شعاعی) ماکزیمم می‌باشد. یعنی از شعاع درونی به سمت مرکز ورق ابتدا خمش افزایش و سپس از مرکز ورق به سمت شعاع بیرونی خمش کاهش می‌یابد تا در نهایت در شعاع بیرونی دوباره به صفر برسد. با افزایش ضریب سفتی خطی بستر وینکلر (k_1) مقدار خمش کاهش می‌یابد.

۲- از زوایه ابتدایی به سمت مرکز ورق ابتدا خمش افزایش و سپس از مرکز ورق به سمت زوایه انتهایی خمش کاهش می‌یابد تا در نهایت در لبه بیرونی دوباره به صفر برسد.

۳- ورق حلقوی با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده خمش بیشتری نسبت به ورق با شرط مرزی با لبه گیردار دارد. در شرط مرزی که دو لبه گیردار و دو لبه مفصلی هستند مقدار خمش ایجاد شده مابین دو شرط مرزی دیگر ورق می‌باشد.

۴- میزان کاهش خمش خطی در حالتی که ورق روی بستر وینکلر غیرخطی قرار دارد بیشتر از حالتی است که ورق روی بستر وینکلر خطی قرار دارد.

۵ منابع

- [1] Kerr, A.D., An extension of the Kantorovich method, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 26, pp. 219-229, 1968.
- [2] Kerr A.D., An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems, International Journal of Solids Structures, Vol. 5, No. 6, pp. 559-572, 1969.
- [3] Dalaei, M. and Kerr, A.D., Natural vibration analysis of clamped rectangular orthotropic plates, Journal of Sound Vibration, Vol. 189, No.3, pp. 399-406, 1996.
- [4] Kim H.S., Cho, M. and Kim, G.I., Free-edge strength analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method, Composite Structures, Vol. 49, No. 2, pp. 229-235, 2000.
- [5] Aghdam M.M., Shakeri M., Fariborz S.J., Solution to the Reissner plate with clamped edges, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 122, No. 7, pp. 679-682, 1996.
- [6] Yuan, S. and Jin, Y., Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method, Computers and Structures, Vol. 66, No. 6, pp. 861-867, 1998.
- [7] Fariborz, S.J. and Pourbohloul, A., Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates, Computers and Structures, Vol. 31, pp. 957-965, 1989.
- [8] Yuan, S., Yan, J. And Williams F.W., Bending analysis of Mindlin plates by the extended Kantorovich method, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 124, pp. 1339-1345, 1998.
- [9] Salehi, M. and Turvey, G.J., Elastic large deflection response of annular sector plates—a comparison of DR finite difference, finite element and other numerical solutions, Computers and Structures, Vol. 40, No. 5, pp. 1267-1278, 1991.
- [10] Harik, I.E., Analytical solution to orthotropic sector, Proceeding of ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, pp. 554-568, 1984.
- [11] Cheung, M.S. and Chan M.Y.T., Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method, Computers and Structures, Vol. 14, No. 1, pp. 79-88, 1981.