

تحلیل ترموالاستیک دیسک کامپوزیتی دوار با استفاده از روش‌های تحلیلی و المان محدود

احمد مامندی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

محمد ابراهیمی

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

چکیده

در این مقاله، تحلیل تنش ترموالاستیک دیسک دوار کامپوزیتی لایه‌ای با استفاده از روش‌های تحلیلی و المان محدود (*FEM*) مطالعه می‌گردد. با بهره‌گیری از نظریه ورق‌های دایروی، معادلات حاکم بر حرکت دیسک دوار کامپوزیتی با استفاده از اصل کمینه انرژی پتانسیل استخراج شده‌اند. سپس، برای حل معادلات حاکم بر حرکت از روش تحلیلی دیفرانسیل مربعی تعمیم یافته (*DQM*) بهره گرفته شده‌است. همچنین، برای شبیه‌سازی عددی در روش المان محدود از نرم‌افزار *ABAQUS* استفاده شده‌است. در شبیه‌سازی‌های انجام شده برای دیسک کامپوزیتی توپر و توخالی دو حالت لایه چینی شامل الف- دیسک با لایه‌چینی به صورت لایه‌بندی یکسان در راستای طولی و چند لایه در راستای شعاعی و ب- دیسک با لایه‌چینی چندلایه در هر دو راستای طولی و شعاعی، در نظر گرفته شده‌اند. پس از بررسی همگرایی حل در دو روش *DQ* و المان محدود، نتایج به صورت توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی ارائه شده‌اند. نتایج بدست آمده از هر دو روش با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: دیسک کامپوزیتی دوار، دیسک توپر، دیسک توخالی، تنش گرمایی، روش *DQ*، روش المان محدود.

Thermoelastic Analysis of a Rotating Laminated Composite Disk using Analytical and FE Methods

A. Mamandi Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

M. Ebrahimi Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

Abstract

In this paper, thermoelastic stress analysis of a laminated composite rotating disk has been studied using analytical and finite element methods. The governing equations of motion for a composite rotating disk are derived based on circular disk theory of plates in conjunction with the minimum potential energy principle. The governed equations of motions are solved analytically using Differential Quadrature Method (DQM). Moreover, for the numerical simulations in FEM, ABAQUS software is used. Two models are considered in the numerical simulations for laminated solid and annular disks as, a) a disk with only one layer in longitudinal direction and layer wise in radial direction, b) a layer wise disk in both longitudinal and radial directions, respectively. After convergence study of the solutions, the results for stress distribution in radial and circumferential directions are obtained and then compared.

Keywords: Rotating composite disk, Solid disk, Annular disk, Thermal stress, DQ method, Finite Element Method.

۱- مقدمه

حالت جابجایی طولی و محیطی بکار می‌رود. نشیر و همکاران [۲]، در سال ۲۰۰۰، به بررسی معادله حاکم بر ورق راینز-میندلین پرداخته‌اند. در پژوهش آنها، راه حل‌های تحلیلی برای معادلات خمش ورق‌های قطاعی گرد چند لایه با شرایط مرزی مختلف و با لایه‌های ایزوتروپیک عرضی بدست آمده‌است. محمدی و همکاران [۳]، در سال ۲۰۰۰، به بررسی پدیده لایه مرزی در نظریه ورق راینز-میندلین برای قطاعی از ورق دایره‌ای چندلایه پرداختند. معادله لایه‌ای از نظریه صفحه راینز-میندلین، برای ورق‌های کامپوزیت چند لایه با لایه‌های عرضی ایزوتروپیک مورد مطالعه قرار گرفته‌است. نشیر و همکاران [۴]، در سال ۲۰۰۱، به مطالعه معادله حاکم در نظریه لایه‌ای ورق راینز-میندلین در خمش ورق‌های مستطیل شکل چند لایه پرداختند. معادلات خمش از نظریه راینز-میندلین ورق‌های چندلایه با لایه‌های ایزوتروپیک عرضی بر حسب لایه مرزی و توابع جابجایی محیطی مجدداً باز نویسی شده‌است. نجفی زاده و اسلامی [۵]، در سال ۲۰۰۲، به تحلیل مرتبه اول ورق گرد از مواد مدرج بر مبنای پایداری گرمایی پرداختند. معادلات غیرخطی و خطی تعادل با استفاده از فرمول‌نویسی از روش تغییرات بدست آمده‌است. تغییر دما در راستای شعاع ورق خطی در نظر گرفته شده‌است. خمش گرمایی ورق صلب گرد تحت

ورق‌های گرد کامپوزیتی در صنایع مختلف مانند صنایع هوافضایی و هسته‌ای، به عنوان بخشی از توربین‌ها و اجزاء ماشین‌های دوار پرتوان بسیار کاربرد دارند. از جمله این کاربردها می‌توان به دیسک دوار توربین گاز و ماشین‌های دوار گریز از مرکز اشاره نمود. این دیسک‌ها اغلب تحت گرادین‌های دمایی بالا و سرعت زاویه‌ای زیاد کار می‌کنند. سرعت زاویه‌ای بالا باعث ایجاد تنش‌های دینامیکی ناشی از نیروهای گریز از مرکز می‌گردد و همزمان با آن دمای بسیار زیاد منجر به کاهش مقاومت ماده دیسک می‌شود. در گذشته تحقیق بر روی ورق از جنس مواد کامپوزیتی تک لایه تحت تنش‌های گرمایی و مکانیکی انجام شده‌است. اما بررسی تنش‌های گرمایی ورق گرد دوار کامپوزیتی چند لایه با توزیع چیدمانی از لایه‌ها در راستاهای طولی و شعاعی مورد بررسی جدی قرار نگرفته‌است. با توجه به کاربردهای روز افزون دیسک‌های دوار در صنعت، به حداقل رساندن تنش‌های وارده به آن اهمیت فراوانی دارد. ژیاولیانگ [۱]، در سال ۱۹۹۴، از روش المان محدود برای تحلیل ورق راینز-میندلین استفاده نمود. مدل المان محدود برای ورق راینز-میندلین با بهره‌گیری از روش تغییرات استخراج شد. این روش مطابق با روش المان محدود خطی برای هر دو

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: am_2001h@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۴/۲۱

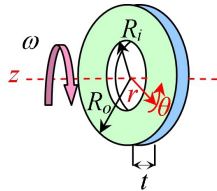
تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۷/۰۹

دمای یکنواخت باعث افزایش خیز در راستای ضخامت ورق می‌گردد. نعمت الله و خالد احمد [۶]، در سال ۲۰۰۲، تحلیل الاستوپلاستیک مواد مدرج دوبعدی تحت بارگذاری گرمایی را انجام دادند. لئو [۷]، در سال ۲۰۰۳، عکس‌العمل نامتقارن دیسک نازک دوار دارای خیز بزرگ را تحلیل کرده و راه حل تحلیلی غیرخطی برای حالت ارتعاش نامتقارن دیسک‌های دوار براساس نظریه ورق توسعه یافته به جای نظریه ورق فون کارمن ارائه داده‌است. گیوکاد و دشماک [۸]، در سال ۲۰۰۵، خمش گرمایی در مساله ترموالاستیک معکوس در یک ورق دایره‌ای ایزوتروپیک نازک را مورد بررسی قرار دادند. طحانی و همکاران [۹]، در سال ۲۰۰۵، در مورد تغییر شکل و تحلیل تنش محیطی دیسک‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف تحقیق کردند. آنها از نظریه لایه‌ای و اصل همیلتون برای تحلیل سه‌بعدی دیسک ارتوتروپیک استفاده کردند. کوبراگاد و دشماک [۱۰]، در سال ۲۰۰۵، تغییر شکل گرمایی یک ورق گرد نازک با توجه به منبع گرمایی جزئی توزیع شده را بررسی نمودند. نتایج به صورت سری برحسب توابع بسل بدست آمده‌است و به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته‌است. کلکارنی و دشماک [۱۱]، در سال ۲۰۰۷، تنش‌های گرمایی شبه استاتیکی در یک صفحه ضخیم دایره‌ای را بررسی کردند. التان و توپسو [۱۲]، در سال ۲۰۱۰ در مورد تحلیل تنش ترموالاستیک دیسک کامپوزیتی که تحت بارگذاری گرمایی قرار داشت، تحقیق کردند. کورسون و همکاران [۱۳]، در سال ۲۰۱۱ به تحلیل تنش دیسک از ماده مدرج تابعی دوبعدی و تحت بارهای گرمایی و مکانیکی پرداختند. در این مطالعه، تجزیه و تحلیل تنش الاستیک در دیسک‌های حلقوی (سوراخ‌دار) در معرض فشار یکنواخت بر روی سطح داخلی و توزیع دمای خطی انجام شده‌است. فلاح و نئیر [۱۴]، در سال ۲۰۱۲، رفتار غیرخطی ورق‌های دایره‌ای از ماده مدرج تابعی دوبعدی با شرایط تکیه‌گاهی مختلف تحت بارگذاری گرمایی- مکانیکی نامتقارن را مطالعه نمودند. جبارزاده و باغدار دلگشا [۱۵]، در سال ۲۰۱۳، تحلیل کمناش گرمایی ورق قطاعی از ماده مدرج تابعی با استفاده از روش تفاضل مربعات را انجام دادند. معادلات تعادل به کمک فرضیات غیرخطی فون کارمن و نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول بدست آمده‌است. برای گسسته‌سازی معادلات تعادل از روش DQ استفاده شده‌است. خندان و جبارزاده [۱۶]، در سال ۲۰۱۴، تحلیل غیرخطی ترموالاستیک دیسک‌های دوار توخالی از مواد مدرج تابعی با استفاده از نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم را انجام دادند. حسن کالوگو و همکاران [۱۷]، در سال ۲۰۱۵، تحلیل تنش الاستوپلاستیک دیسک دوار ساخته شده از مواد FG را بررسی کردند. با بررسی مقالات و منابع موجود مشاهده می‌گردد که تاکنون تحقیق مستقلی که دربرگیرنده روش تحلیلی برای حل معادلات حاکم بر حرکت دیسک دوار کامپوزیتی توپر و توخالی لایه‌ای با استفاده از روش DQ و شبیه‌سازی المان محدود مساله با بهره‌گیری از نرم‌افزارهای موجود برای مقایسه نتایج تحلیل ترموالاستیک باشد انجام نشده‌است. در این راستا، در این پژوهش به عنوان نوآوری در مدل لایه‌بندی دیسک نازک توخالی و توپر کامپوزیتی دو مدل در نظر گرفته شده‌است. این دو مدل برای دیسک کامپوزیتی در دو حالت لایه‌بندی شامل الف- دیسک با لایه‌چینی چندلایه در هر دو راستای طولی و شعاعی و ب- دیسک با لایه‌چینی به صورت تک لایه در راستای طولی و چند لایه در راستای شعاعی در نظر گرفته شده‌اند. نتایج تحلیل

شامل توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی در دیسک می‌باشند.

۲- تعریف مساله و استخراج معادلات حاکم برای دیسک نازک چرخان کامپوزیتی

در شکل ۱، یک دیسک (ورق گرد) نازک چرخان با شعاع‌های داخلی و خارجی بترتیب R_i و R_o و ضخامت t نشان داده شده‌است. محورهای اصلی (مختصات کلی) در راستاهای شعاعی، محیطی و طولی بترتیب r ، θ و z می‌باشند. سرعت دورانی یکنواخت دیسک پیرامون محور طولی آن ω است. فرض می‌گردد که دیسک در سطوح داخلی و خارجی تحت بارگذاری گرمایی قرار دارد.



شکل ۱- دیسک نازک چرخان و مختصات استوانه‌ای $r\theta z$

در ادامه، معادلات حاکم بر حرکت ورق گرد کامپوزیتی برای دو مدل لایه‌بندی شامل الف- مدل اول با لایه‌چینی در صفحه $r\theta$ و لایه‌بندی با زوایای دلخواه الیاف (نسبت به محور شعاعی) در راستای محور طولی z (عمود بر صفحه $r-\theta$) و ب- مدل دوم با لایه‌چینی در صفحه $r\theta$ (تقسیم‌بندی سطح دیسک در راستای شعاعی) و لایه‌بندی با زوایای یکسان الیاف (نسبت به محور شعاعی) در راستای محور طولی z استخراج شده‌است. لازم به ذکر است که در مدل اول فرض می‌گردد که دیسک در راستای ضخامت به چندین لایه تقسیم شده‌است و هر لایه در مختصات کلی $r\theta z$ دارای لایه‌چینی مربوط به خود در مختصات محلی می‌باشد در حالیکه در مدل دوم فرض می‌گردد که دیسک نازک در راستای ضخامت تنها دارای یک نوع لایه‌بندی با زاویه یکسان الیاف بوده و لایه‌چینی آن در صفحه $r\theta$ (در راستای شعاعی) انجام گرفته‌است.

۲-۱- معادلات حاکم در حالت لایه‌چینی در صفحه $r-\theta$ و تقسیم‌بندی ضخامت دیسک به چندین لایه با زاویه متفاوت الیاف

بر اساس نظریه کلاسیک ورق‌های گرد، روابط جابجایی در مختصات استوانه‌ای $(r\theta z)$ برای دیسک به صورت زیر می‌باشند

$$U = u(r, \theta) - z \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}, V = v(r, \theta) - z \frac{\partial w(r, \theta)}{r \partial \theta}, W = w(r, \theta) \quad (1)$$

که در آن، U ، V و W بترتیب جابجایی در راستای شعاعی (r) ، محیطی (θ) و طولی (z) می‌باشند. همچنین، روابط کرنش-جابجایی مکانیکی و گرمایی به صورت زیر تعریف می‌گردند

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \epsilon_r^T = -\alpha_r \Delta T, \epsilon_\theta^T = -\alpha_\theta \Delta T, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}, \gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}, \gamma_{\theta z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن، α_θ و α_r بترتیب ضریب انبساط گرمایی شعاعی و محیطی می‌باشند. با قرار دادن روابط (۱) در روابط (۲)، رابطه زیر بدست می‌آید

مؤلفه‌های تنش به صورت تانسوری زیر تعریف می‌گردند

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (11)$$

طبق رابطه هوک برای تک لایه ارتوتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای، تنش‌ها به شکل ماتریسی عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

که در آن، ماتریس Q_{ij} ماتریس سختی نامیده می‌شود و مؤلفه‌های آن برای تک لایه ارتوتروپیک به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (13)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

ماتریس سختی در این حالت شامل پنج ثابت مستقل می‌باشد. مؤلفه‌های ماتریس سختی انتقال یافته \bar{Q}_{ij} برای چند لایه کامپوزیتی به صورت زیر می‌باشد

$$[\bar{Q}] = [T][Q][T]^T \quad (14)$$

که در آن، $[T]$ ماتریس انتقال می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (15)$$

در ماتریس بالا، β ، زاویه الیاف کامپوزیت می‌باشد. همچنین با تعریف ماتریس‌های زیر

$$[A, B, D]_{ij} = \int \int [\bar{Q}_{ij}]_k \{1, z, z^2\} dA \quad (16)$$

که در آن، k شماره لایه مورد نظر برای مواد کامپوزیتی چند لایه می‌باشد. حال با جایگذاری روابط (16) در روابط (5) مؤلفه‌های نیروها و گشتاورهای لایه‌ای ورق به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} N_r &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial r} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + A_{12} \frac{u}{r} - \frac{B_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{B_{12}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - A_{11} \alpha_r \Delta T - A_{12} \alpha_\theta \Delta T, \\ M_r &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial r} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + B_{12} \frac{u}{r} - \frac{D_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{B_{12}}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{D_{12}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - B_{11} \alpha_r \Delta T - B_{12} \alpha_\theta \Delta T, \\ N_\theta &= A_{12} \frac{\partial u}{\partial r} - B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + A_{22} \frac{u}{r} - \frac{B_{22}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{A_{22}}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{B_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - A_{12} \alpha_r \Delta T - A_{22} \alpha_\theta \Delta T, \\ M_\theta &= B_{12} \frac{\partial u}{\partial r} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + B_{22} \frac{u}{r} - \frac{D_{22}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \\ &\quad + \frac{B_{22}}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{D_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - B_{12} \alpha_r \Delta T - B_{22} \alpha_\theta \Delta T, \\ N_{r\theta} &= \frac{A_{66}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2B_{66}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + A_{66} \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{B_{66}}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{A_{66}}{r} v, \\ M_{r\theta} &= \frac{B_{66}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2D_{66}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + B_{66} \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{D_{66}}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{B_{66}}{r} v, \end{aligned} \quad (17)$$

با قرار دادن روابط (17) در معادلات (10)، معادلات حاکم بر حرکت دیسک دوار کامپوزیتی در مدل اول (در حالت لایه‌چینی در

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \alpha_r \Delta T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - z \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - z \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \alpha_\theta \Delta T \quad (3)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} - 2z \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + 2z \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0$$

انرژی کرنشی و شکل تغییراتی آن به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_{r\theta} \gamma_{r\theta}) dv \\ \Rightarrow \delta U &= \int_V (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) dv = \int_V \left\{ \sigma_r \left[\frac{\partial \delta u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} - \alpha_r \delta \Delta T \right] + \right. \\ &\quad \left. \sigma_\theta \left[\frac{\delta u}{r} - z \frac{\partial \delta w}{r \partial r} + \frac{\partial \delta v}{r \partial \theta} - z \frac{\partial^2 \delta w}{r^2 \partial \theta^2} - \alpha_\theta \delta \Delta T \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{r\theta} \left[\frac{\partial \delta u}{r \partial \theta} - 2z \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial r \partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial r} - \frac{\delta v}{r} + 2z \frac{\partial \delta w}{r^2 \partial \theta} \right] \right\} r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (4)$$

که در آنها عبارت‌های مربوط به تنش گرمایی در مؤلفه‌های تنش لحاظ شده‌اند. مؤلفه‌های نیرو و گشتاور مکانیکی-گرمایی عبارتند از

$$\begin{aligned} (N_r, M_r) &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_r(1, z) + \sigma_r^T(1, z)] dz \\ (N_\theta, M_\theta) &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_\theta(1, z) + \sigma_\theta^T(1, z)] dz \end{aligned} \quad (5)$$

$$(N_{r\theta}, M_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta}(1, z) dz$$

با قرار دادن روابط (5) در رابطه (4)، بدست می‌آید که

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_\Omega \left\{ N_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} - M_r \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} + N_\theta \frac{\delta u}{r} - M_\theta \frac{\partial \delta w}{r \partial r} + N_\theta \frac{\partial \delta v}{r \partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - M_\theta \frac{\partial^2 \delta w}{r^2 \partial \theta^2} + N_{r\theta} \frac{\partial \delta u}{r \partial \theta} - 2M_{r\theta} \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial r \partial \theta} + N_{r\theta} \frac{\partial \delta v}{\partial r} - N_{r\theta} \frac{\delta v}{r} \right. \\ &\quad \left. + 2M_{r\theta} \frac{\partial \delta w}{r^2 \partial \theta} \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه (6)، مؤلفه‌های تنش شامل تنش‌های مکانیکی و گرمایی می‌باشند. کار نیروهای خارجی ناشی از دوران دیسک عبارت است از

$$V = \int_V (\rho r \omega^2 u) dv \quad (7)$$

که در آن، ρ چگالی دیسک می‌باشد. با تعریف $I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$ جایگذاری آن در رابطه (6)، شکل تغییراتی رابطه (7) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\delta V = \int_\Omega (I r \omega^2 \delta u) r dr d\theta \quad (8)$$

انرژی پتانسیل کل Π به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\begin{aligned} \Pi &= \delta U - \delta V \\ &= \int_\Omega \left\{ N_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} - M_r \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} + N_\theta \frac{\delta u}{r} - M_\theta \frac{\partial \delta w}{r \partial r} + N_\theta \frac{\partial \delta v}{r \partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - M_\theta \frac{\partial^2 \delta w}{r^2 \partial \theta^2} + N_{r\theta} \frac{\partial \delta u}{r \partial \theta} - 2M_{r\theta} \frac{\partial^2 \delta w}{r \partial r \partial \theta} + N_{r\theta} \frac{\partial \delta v}{\partial r} - N_{r\theta} \frac{\delta v}{r} \right. \\ &\quad \left. + 2M_{r\theta} \frac{\partial \delta w}{r^2 \partial \theta} \right\} r dr d\theta - \int_\Omega (I r \omega^2 \delta u) r dr d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

با ساده‌سازی رابطه (9) معادلات حاکم بر دیسک چرخان کامپوزیتی عبارتند از

$$\begin{aligned} \delta u = 0 &\Rightarrow -\frac{\partial N_r}{\partial r} - \frac{N_r}{r} + \frac{N_\theta}{r} - \frac{\partial N_{r\theta}}{r \partial \theta} - I r \omega^2 = 0 \\ \delta v = 0 &\Rightarrow -\frac{\partial N_\theta}{r \partial \theta} - 2 \frac{N_{r\theta}}{r} - \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} = 0 \\ \delta w = 0 &\Rightarrow 2 \frac{\partial M_r}{r \partial r} + \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{\partial M_\theta}{r \partial r} - \frac{\partial^2 M_\theta}{r^2 \partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial M_{r\theta}}{r^2 \partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از قانون هوک تعمیم یافته در نظریه الاستیسیته،

صفحه $r\theta$ ولی متفاوت در راستای z تحت گرادین دامایی برحسب مولفه‌های جابجایی از روابط (۱۸) تا (۲۰) بدست می‌آیند.

$$-A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + A_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{B_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{A_{22}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{A_{22}}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{A_{11}}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{B_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} + 2 \frac{D_{22}}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{D_{11}}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{D_{11}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{A_{11}}{r^2} u - \frac{A_{11}}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (18)$$

$$- \frac{B_{11}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{D_{22}}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{D_{11}}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{A_{22}}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (-A_{11} \alpha_r \Delta T - B_{11} \alpha_\theta \Delta T) - \frac{1}{r} (-A_{11} \alpha_r \Delta T - B_{11} \alpha_\theta \Delta T) + \frac{1}{r} (-B_{11} \alpha_r \Delta T - A_{11} \alpha_\theta \Delta T) = Ir \omega^2$$

$$\frac{2A_{33}}{r^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2} - \frac{2D_{22}}{r^2} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{B_{22}}{r^2} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{A_{22}}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{A_{22}}{r^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{A_{33}}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{D_{22}}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{4D_{33}}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + 3 \frac{D_{33}}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{B_{22}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2 \partial \theta} + 2 \frac{B_{22}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 4 \frac{D_{33}}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - 2 \frac{D_{22}}{r} \frac{\partial^3 v}{\partial r^2 \partial \theta} - 2 \frac{A_{33}}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + 2 \frac{A_{22}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{A_{22}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{A_{22}}{r^3} u + \frac{A_{33}}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{A_{33}}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} - 2 \frac{B_{33}}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{A_{33}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + A_{22} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} - \frac{D_{22}}{r^3} \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \frac{B_{33}}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3 \partial \theta^2} - 2 \frac{B_{33}}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - A_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{A_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-B_{11} \alpha_r \Delta T - A_{11} \alpha_\theta \Delta T) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{B_{11}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_{22}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{A_{11}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{A_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{A_{11}}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{A_{22}}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{D_{11}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{D_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{D_{11}}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{D_{11}}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + 2 \frac{D_{22}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - D_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-A_{22} \alpha_r \Delta T - B_{22} \alpha_\theta \Delta T) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (-A_{22} \alpha_r \Delta T - B_{22} \alpha_\theta \Delta T)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-B_{22} \alpha_r \Delta T - A_{22} \alpha_\theta \Delta T) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (-B_{22} \alpha_r \Delta T - A_{22} \alpha_\theta \Delta T) = 0 \quad (20)$$

۲-۲- معادلات حاکم در حالت لایه‌چینی در صفحه $r-\theta$ و لایه‌بندی یکسان در راستای ضخامت

در این حالت چون $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0$ بنابراین در روابط (۱)، $V = 0, W = w(r)$ و با استفاده از اصل کمینه انرژی پتانسیل و انجام عملیات ریاضی مانند حالت پیشین، معادلات حاکم به صورت زیر بدست می‌آیند

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + A_{12} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) - B_{12} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} \right) - A_{11} \alpha_r (\Delta T) - A_{12} \alpha_\theta \frac{\partial}{\partial r} (\Delta T) + A_{11} \frac{\partial u}{r \partial r} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} + A_{12} \frac{u}{r^2} - \frac{B_{12}}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{A_{11}}{r} \alpha_r \Delta T$$

$$- \frac{A_{12}}{r} \alpha_\theta \Delta T - A_{12} \frac{\partial u}{r \partial r} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} - A_{22} \frac{u}{r^2} + \frac{B_{22}}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \alpha_r \Delta T + \frac{A_{22}}{r} \alpha_\theta \Delta T + Ir \omega^2 = 0 \quad (21)$$

$$B_{12} \frac{\partial^2 u}{r \partial r^2} - D_{12} \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} + B_{22} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) - D_{22} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{B_{12}}{r} \alpha_r \frac{\partial}{\partial r} (\Delta T) - \frac{B_{22}}{r} \alpha_\theta \frac{\partial}{\partial r} (\Delta T) - \frac{2}{r} B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - 2 B_{12} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{D_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2 B_{11} \alpha_r \frac{\partial}{\partial r} (\Delta T) + \frac{2}{r} B_{12} \alpha_\theta \frac{\partial}{\partial r} (\Delta T) - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - B_{12} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{D_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + B_{11} \alpha_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta T) + B_{12} \alpha_\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta T) = 0 \quad (22)$$

$$+ B_{12} \alpha_\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta T) = 0$$

۳-۲- حل تحلیلی با استفاده از روش دیفرانسیل مربعی

در این بخش از روش دیفرانسیل مربعی (DQM) برای تحلیل ترموالاستیک دیسک کامپوزیتی چرخان استفاده می‌شود. با اعمال این روش، به عنوان نمونه معادلات حاکم بر حرکت (۲۱) و (۲۲) به صورت

مجموع معادلات جبری خطی به شکل زیر در می‌آیند

$$A_{11} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} u_j - B_{11} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} w_j + \frac{A_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j - \frac{A_{12}}{r^2} u_i + \frac{B_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} w_j - \frac{B_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j - A_{11} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j - A_{12} \alpha_\theta \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j + \frac{A_{11}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j - \frac{B_{11}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j + \frac{A_{12}}{r^2} u_i - \frac{B_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} w_j - \frac{A_{11}}{r} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j \quad (23)$$

$$- \frac{A_{12}}{r} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j - \frac{A_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j + \frac{B_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j - \frac{A_{22}}{r^2} u_i + \frac{B_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} w_j + \frac{A_{22}}{r} \alpha_r \Delta T_i + \frac{A_{22}}{r} \alpha_\theta \Delta T_i + Ir \omega^2 = 0$$

$$\frac{B_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} u_j - \frac{D_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} w_j + \frac{B_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j - \frac{B_{22}}{r^2} u_i + \frac{D_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} w_j - \frac{D_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j - \frac{B_{12}}{r} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j - \frac{B_{22}}{r} \alpha_\theta \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j - \frac{2}{r} B_{11} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} u_j + \frac{2}{r} D_{11} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} w_j - \frac{2B_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j + \frac{2B_{22}}{r^2} u_i - \frac{2D_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} w_j + \frac{2D_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j + \frac{2}{r} B_{11} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j + \frac{2}{r} B_{12} \alpha_\theta \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \Delta T_j - B_{11} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} u_j + D_{11} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} w_j - \frac{B_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} u_j + \frac{2B_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j - \frac{2B_{22}}{r^2} u_i + \frac{2D_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} w_j - \frac{2D_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j + \frac{D_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} w_j + B_{11} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \Delta T_j + B_{12} \alpha_\theta \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \Delta T_j = 0 \quad (24)$$

$$- \frac{2D_{12}}{r^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w_j + \frac{D_{12}}{r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} w_j + B_{11} \alpha_r \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \Delta T_j + B_{12} \alpha_\theta \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \Delta T_j = 0$$

در معادلات (۲۳) و (۲۴)، N تعداد گره‌ها در روش دیفرانسیل مربعی می‌باشد. به عنوان نمونه در معادلات حاکم برای مدل دوم (معادلات (۲۳) و (۲۴)) مجهولات مساله عبارتند از u و w که با اعمال روش دیفرانسیل مربعی هر کدام به N معادله و N مجهول تبدیل می‌شوند که در کل در $2N$ معادله تعداد $2N$ مجهول وجود دارد.

$$u = u_1, u_2, \dots, u_N, \quad w = w_1, w_2, \dots, w_N \quad (25)$$

از سوی دیگر، معادلات شرایط مرزی نیز در معادلات حاکم در مرزها جایگزین می‌شوند. با اعمال این روش حل، معادلات حاکم بر گره‌های ابتدایی و انتهایی حذف شده و به جای آنها معادلات شرایط مرزی مربوط به آن در معادله حاکم جایگذاری می‌شوند. برای محاسبه روابط حاکم، برنامه‌ای با استفاده از نرم‌افزار *MAPLE* نوشته شده‌است. لازم به ذکر است که شرایط مرزی آزاد برای دیسک توخالی در شعاع‌های داخلی و خارجی به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند

$$r = R_i \text{ and } R_o; N_r = M_r = \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta = 0 \quad (26)$$

و برای دیسک توپر شرایط مرزی عبارتند از

$$r = 0; u = w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0, r = R_o; N_r = M_r = \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta = 0 \quad (27)$$

۴-۲- تحلیل ترموالاستیک دیسک کامپوزیتی چرخان با استفاده از شبیه‌سازی المان محدود

برای تحلیل المان محدود دیسک دوار در نرم‌افزار *ABAQUS* المان کامپوزیتی *S4RT* استفاده شده‌است. این المان هشت گره‌ای برای تحلیل‌های سه‌بعدی تنش ترموالاستیک با کوپلینگ دما-جابجایی استفاده می‌گردد.

۴-۲-۱- مش‌بندی دیسک در مدل اول

در شکل ۲-الف، نمونه‌ای از لایه‌چینی انجام شده برای دیسک

۳- نتایج تحلیل تنش گرمایی دیسک دوار کامپوزیتی

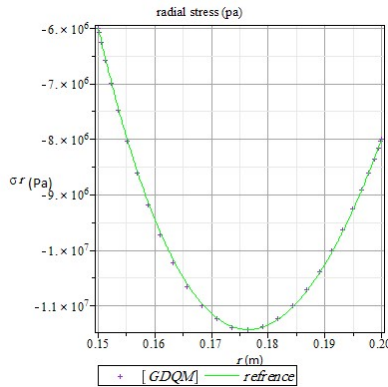
۱-۳- صحت‌سنجی نتایج

در این بخش به صحت‌سنجی نتایج حل تحلیلی و المان محدود در این مقاله با استفاده از برنامه‌های ریاضی نوشته‌شده در نرم‌افزار MAPLE و نرم‌افزار ABAQUS برای دیسک چرخان با نتایج گزارش شده در منابع در حالت‌های خاص و موجود پرداخته می‌شود.

۳-۱-۱- صحت‌سنجی نتایج تحلیل تنش گرمایی دیسک

چرخان توخالی کامپوزیتی و تحت فشار

برای صحت‌سنجی نتایج، مشخصات مواد در مرجع [۲] (کامپوزیت Nylon 6 as resin containing 45wt% carbon fiber) در نظر گرفته شده‌است. شعاع داخلی و خارجی دیسک دوار برابر با 0.15 m و 0.20 m. سرعت دورانی برابر $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ و فشار وارد بر سطوح در شعاع‌های داخلی و خارجی دیسک توخالی بترتیب 6 MPa و 8 MPa در نظر گرفته شده‌اند. همچنین، تابع پروفیل دما به صورت $T_i = q_1 r^2 + q_2 r^3$ که q_1 و q_2 ضرایب گرمایی و شرایط مرزی $\sigma_r|_{r=r_i} = -p_i$, $\sigma_r|_{r=r_o} = -p_o$ در نظر گرفته شده‌اند. در شکل ۴ مقایسه‌ای بین نتایج تنش شعاعی با استفاده از حل DQ در پژوهش کنونی و نتایج گزارش شده از روابط تحلیلی در مرجع [۲] نشان داده شده‌است. نتایج ارائه شده در شکل ۴ نشان دهنده درستی برنامه کامپیوتری نوشته شده در روش تحلیلی و دقت خوب نتایج بدست آمده می‌باشد به گونه‌ای که حداکثر مقدار اختلاف بین نتایج در حدود دو درصد می‌باشد.



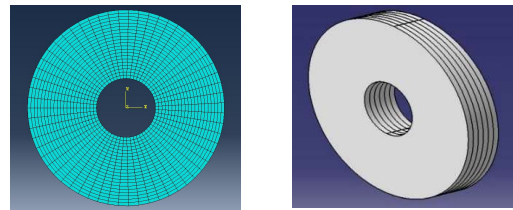
شکل ۴- توزیع تنش شعاعی برحسب فاصله شعاع برای دیسک چرخان کامپوزیتی تحت فشار و مرجع [۲]

۳-۱-۲- صحت‌سنجی نتایج تحلیل برای دیسک توخالی و

تحت حرارت

با توسعه برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده برای دیسک توخالی از ماده FG و در نظر گرفتن خواص ماده و مشخصات هندسی دیسک در مرجع [۱۹] نتایج مدل‌سازی و اعتبارسنجی با استفاده از روش تحلیلی DQ و المان محدود در پژوهش کنونی و مرجع مذکور در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. مقایسه نتایج تنش شعاعی و محیطی برحسب فاصله از سطح در شعاع داخلی نشان دهنده حداکثر اختلاف قابل قبولی در حدود ۱۰ درصد بین کد نوشته شده در روش تحلیلی و ۱۵ درصد بین

کامپوزیتی در مدل اول (لایه‌بندی با زاویه دلخواه الیاف (نسبت به محور شعاعی) در راستای طولی (یا ضخامت ورق) و در شکل ۲-ب) مش‌بندی دیسک در مدل اول نشان داده شده‌است.

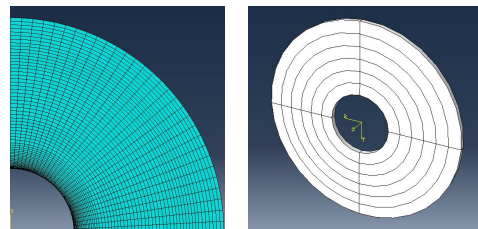


شکل ۲- (الف) لایه‌چینی دیسک و (ب) مش‌بندی دیسک در مدل اول

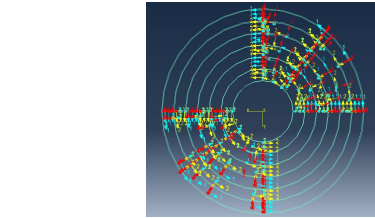
نرم‌افزار ABAQUS در

۲-۴-۲- مش‌بندی دیسک در مدل دوم

در شکل ۳-الف، مدل لایه‌بندی دیسک در صفحه $r\theta$ (تقسیم‌بندی در راستای شعاعی) و لایه بندی با زاویه یکسان الیاف در راستای ضخامت (جهت طولی) و در شکل ۳-ب مش‌بندی قطاعی از دیسک در مدل دوم نشان داده شده‌است. همچنین، در شکل ۳-پ جهت‌گیری‌های سیستم مختصات دیسک در مدل دوم نشان داده شده به طوری که در این شکل اعداد ۱ و ۲ نشان‌دهنده اعمال دو ست (set) بترتیب برای لایه‌هایی با زاویه صفر درجه و برای لایه‌های با زاویه نود درجه می‌باشند. لازم به ذکر است که در این پژوهش در شبیه‌سازی‌های المان محدود با توجه به ابعاد ورق گرد و با توجه بارگذاری و شرایط مرزی، اندازه المان‌ها در مش‌بندی جهت دستیابی به همگرایی حل مورد بررسی قرار گرفته‌است. همچنین، در حالت‌های خاص که پاسخ‌های تحلیلی در مقالات و مراجع در دسترس بوده‌اند با صحت‌سنجی نتایج، تایید همگرایی و استقلال از مش در حل با توجه به اندازه المان‌ها در مش‌بندی بدست آمده‌است. از سوی دیگر، در این مقاله، نتایج بدست آمده از روش تحلیلی و روش حل عددی المان محدود نیز تاییدی بر انتخاب مناسب مش‌بندی مورد استفاده می‌باشد.

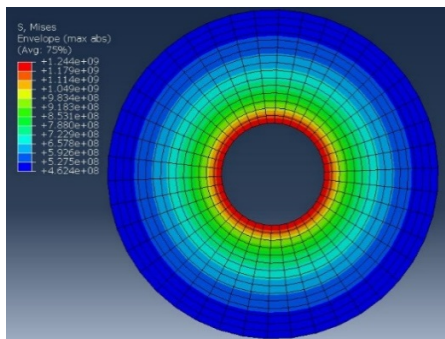


شکل ۳- (الف) لایه‌بندی دیسک، (ب) مش‌بندی و (پ) جهت‌گیری



شکل ۳- (الف) لایه‌بندی دیسک، (ب) مش‌بندی و (پ) جهت‌گیری

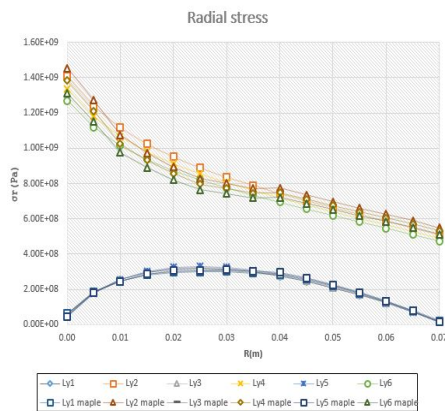
مواد در لایه‌چینی برای دیسک کامپوزیتی در مدل دوم در نرم‌افزار ABAQUS



شکل ۱۰- توزیع تنش *Von Mises* برای لایه بندی [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

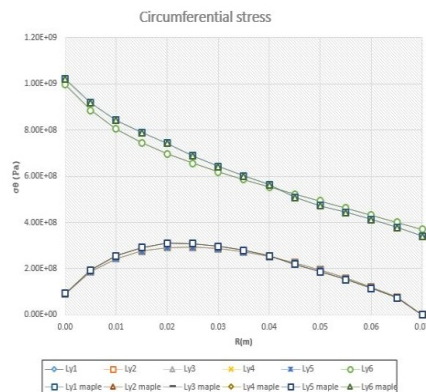
۳-۲- نتایج تحلیل برای دیسک دوار توخالی با توزیع جهات الیاف به صورت [۰/۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰]

در شکل ۱۱، نتایج توزیع تنش شعاعی (σ_r) برای دیسک دوار توخالی برحسب فاصله شعاعی از سطح داخلی دیسک با توزیع الیاف [۰/۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰] با استفاده از شبیه سازی عددی (المان محدود) و حل تحلیلی (روش *DQM*) ارائه شده است. با مشاهده شکل ۱۱ نتیجه گرفته می شود که به علت نامتقارن بودن جهات الیاف، نمودارهای تنش در لایه های مختلف متفاوت می باشند. همچنین مشاهده می شود که در لایه های صفر درجه در طول ضخامت دیسک مقدار تنش بیشینه است اما مقدار بیشینه تنش برای لایه های با زاویه نود درجه در سطح داخلی دیسک بوجود می آید. با مقایسه نتایج مشاهده می گردد که مقدار تنش شعاعی در لایه های نود درجه بیشتر از لایه های صفر درجه می باشد.



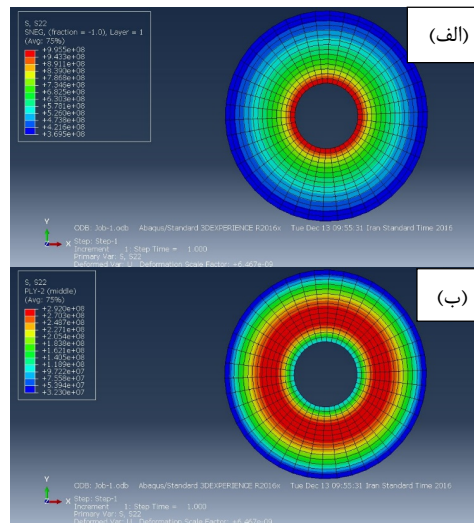
شکل ۱۱- توزیع تنش شعاعی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توخالی در لایه های مختلف با الیاف [۰/۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰]

در شکل ۱۲، نمودار توزیع تنش محیطی (σ_θ) برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توخالی با توزیع الیاف [۰/۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰] بدست آمده از شبیه سازی عددی (المان محدود) و حل تحلیلی (*DQM*) نشان داده شده است. به علت نامتقارن بودن جهات الیاف، نمودارهای تنش محیطی در لایه های مختلف فرق می کنند. همچنین مشاهده می شود که مقدار تنش بیشینه برای لایه های نود درجه در طول ضخامت دیسک است اما برای لایه های صفر درجه در سطح داخلی دیسک دارای کمترین مقدار می باشد. همچنین نتیجه گرفته می شود که مقدار تنش های محیطی در لایه های صفر درجه کمتر از لایه های نود درجه است.



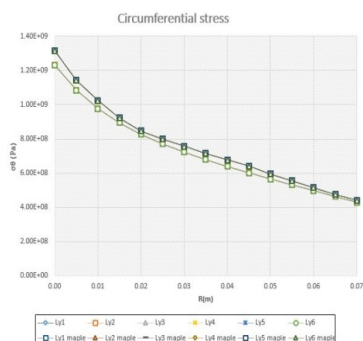
شکل ۸- توزیع تنش محیطی دیسک دوار توخالی در لایه های مختلف با الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

در شکل ۹، نتایج تحلیل المان محدود برای توزیع تنش محیطی در دیسک دوار توخالی در دو لایه اول و دوم نشان داده شده است. همانطور که از شکل های ۶ و ۸ مشاهده می گردد، در دیسک دوار توخالی کامپوزیتی با توزیع الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] تنش شعاعی و محیطی در شعاع داخلی دیسک از مقدار تنش در شعاع خارجی دیسک بیشتر است.

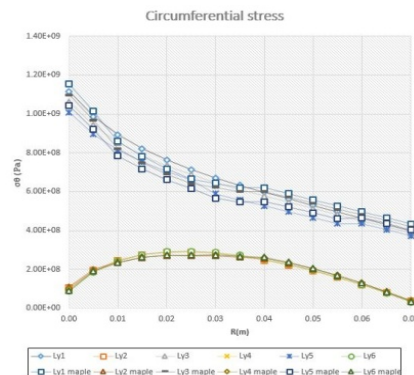


شکل ۹- توزیع تنش محیطی در دیسک دوار توخالی با الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] (الف): لایه اول و (ب): لایه دوم

در شکل ۱۰، توزیع تنش فون مایسز (*Von Mises*) در دیسک دوار توخالی کامپوزیتی با لایه چینی [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] نشان داده شده است. با بررسی شکل ۱۰ نتیجه گرفته می شود که تنش در شعاع داخلی دیسک از مقدار تنش در شعاع خارجی دیسک به مراتب بیشتر می باشد و مقدار بیشینه تنش فون میسز در سطح داخلی دیسک بوجود آمده است.



شکل ۱۴- توزیع تنش محیطی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توخالی در لایه‌های مختلف با توزیع الیاف تک جهته



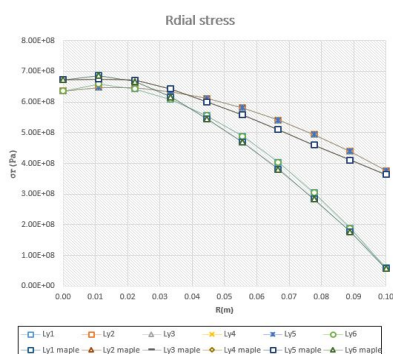
شکل ۱۲- توزیع تنش محیطی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توخالی در لایه‌های مختلف با الیاف [۰/۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰]

۳-۵- تحلیل دیسک دوار توپر برای مدل اول

۳-۵-۱- نتایج تحلیل دیسک دوار توپر با توزیع جهات

الیاف به صورت [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

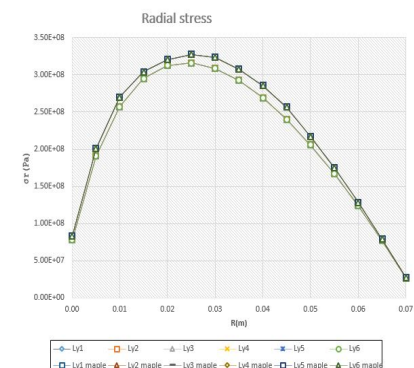
از شکل ۱۵ مشاهده می‌شود که تنش شعاعی (σ_r) در مرکز دیسک از مقدار تنش شعاعی در شعاع خارجی دیسک بیشتر است ولی بیشینه مقدار در کل دامنه نیست که این مورد به علت آن است که لایه‌هایی با جهتهای مختلف وجود دارند. همچنین در لایه‌های اول و ششم و در لایه‌های دوم تا پنجم که دارای زوایای یکسانی می‌باشند نمودارهای تنش بر روی هم منطبق شده‌اند. لازم به ذکر است که در دیسک کامپوزیتی توپر با توزیع الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] مقدار جابجایی شعاعی U در مرکز دیسک برابر صفر و در شعاع خارجی دیسک به مقدار بیشینه خود می‌رسد. همچنین، با مشاهده شکل‌های ۱۶ و ۱۷ نتیجه گرفته می‌شود که در دیسک کامپوزیتی توپر با توزیع الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] تنش محیطی در مرکز دیسک از مقدار تنش محیطی در شعاع خارجی دیسک بیشتر بوده و در لایه‌های اول و ششم و در لایه‌های دوم تا پنجم که دارای زوایای یکسانی می‌باشند نمودارهای تنش بر هم منطبق می‌باشند. در جدول ۲، نتایج تنش‌های محیطی و شعاعی بدست آمده از برنامه نوشته شده در نرم افزار *MAPLE* و نتایج بدست آمده از نرم‌افزار *ABAQUS* و میزان اختلاف بین آنها آورده شده‌است. از سوی دیگر، در شکل ۱۸ با بررسی نتایج بدست آمده برای تنش فون مایسز نتیجه گرفته می‌شود که بحرانی‌ترین ناحیه تنش، در مرکز دیسک توپر با لایه‌چینی [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] می‌باشد.



شکل ۱۵- توزیع تنش شعاعی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توپر در لایه‌های مختلف با توزیع متقارن الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

۳-۴- تحلیل دیسک دوار توخالی در مدل دوم

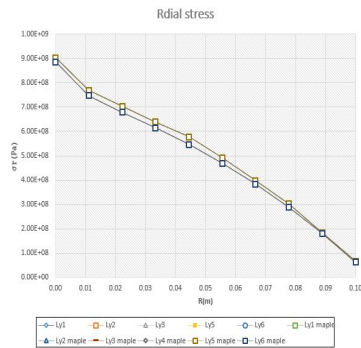
در شکل ۱۳، توزیع تنش شعاعی (σ_r) برای دیسک دوار توخالی برحسب فاصله شعاعی دیسک (فاصله از سطح داخلی) با استفاده از روش تحلیل عددی (روش المان محدود) و حل تحلیلی (*DQM*) نشان داده شده‌است. با مشاهده شکل ۱۳ نتیجه گرفته می‌شود که در دیسک دوار کامپوزیتی توخالی مقدار تنش شعاعی در سطح داخلی بیشتر از سطح خارجی است و همچنین بیشینه تنش شعاعی در مناطقی در میان ضخامت دیسک ایجاد می‌گردد نه در سطح داخلی و یا خارجی دیسک.



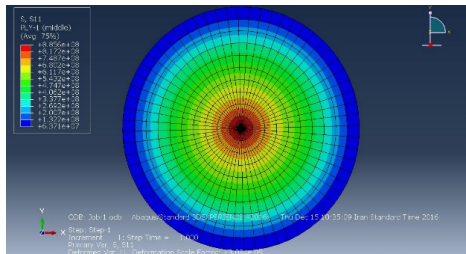
شکل ۱۳- توزیع تنش شعاعی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توخالی با استفاده از حل تحلیلی و المان محدود

در شکل ۱۴، نتایج بدست آمده از تحلیل تنش در شبیه‌سازی عددی (المان محدود) و حل تحلیلی (*DQM*) برای توزیع تنش محیطی (σ_θ) در دیسک دوار توخالی با لایه‌هایی در راستای طولی دیسک و توزیع الیاف تک جهته نشان داده شده‌است. با بررسی شکل ۱۴ نتیجه گرفته می‌شود که تنش محیطی در دیسک با یک روند نزولی در شعاع داخلی از مقدار بیشینه به مقدار کمینه در شعاع خارجی می‌رسد.

دیسک دوار توپر در دو لایه اول توسط نرم‌افزار *ABAQUS* نشان داده شده‌است. از شکل‌های ۱۹ و ۲۰ نتیجه گرفته می‌شود که در دیسک کامپوزیتی توپر، تنش شعاعی در مرکز دیسک دارای مقدار بیشینه و در شعاع خارجی دیسک به صفر می‌رسد. با توجه به اینکه نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران دیسک به صورت نیروی کششی بر دیسک اعمال می‌شود در نتیجه، در شعاع خارجی، تنش شعاعی برابر با مقدار صفر و در مرکز دیسک دارای مقدار بیشینه می‌باشد.

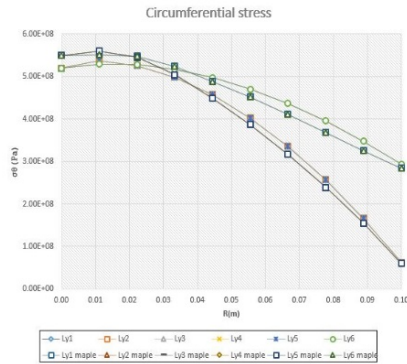


شکل ۱۶- توزیع تنش شعاعی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توپر در لایه‌های مختلف با توزیع الیاف تک جهته

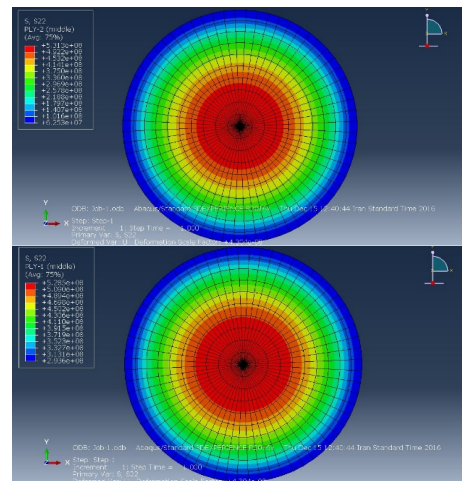


شکل ۱۷- توزیع تنش شعاعی در دیسک دوار توپر در لایه‌های مختلف با الیاف (الف): لایه اول و (ب): لایه دوم

لازم به ذکر است که جابجایی شعاعی دیسک دوار توپر در مرکز دیسک برابر با صفر و در شعاع خارجی دیسک به مقدار بیشینه خود می‌رسد. در شکل ۲۱، نتایج توزیع تنش محیطی (σ_θ) دیسک دوار توپر برحسب فاصله شعاعی با توزیع الیاف یکسان از هر دو روش تحلیلی و عددی نشان داده شده‌است. در شکل ۲۲، توزیع تنش محیطی در دیسک دوار توپر در دو لایه اول توسط نرم‌افزار *ABAQUS* نشان داده شده‌است. با مشاهده شکل‌های ۲۱ و ۲۲ نتیجه گرفته می‌شود که در دیسک کامپوزیتی با توزیع الیاف یکسان، تنش محیطی (σ_θ) در شعاع داخلی دیسک دارای مقدار بیشینه و در شعاع خارجی دیسک به مقدار کمینه خود می‌رسد.



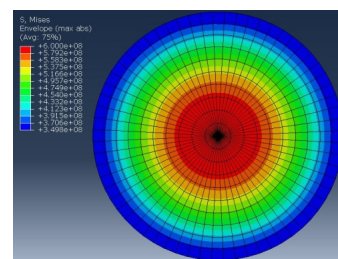
شکل ۱۸- توزیع تنش محیطی برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توپر در لایه‌های مختلف با توزیع متقارن الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]



شکل ۱۹- توزیع تنش محیطی در دیسک دوار توپر در لایه‌های مختلف با الیاف [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]. (الف): لایه اول و (ب): لایه دوم

جدول ۲- بیشینه تنش‌های شعاعی و محیطی برای [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

میزان اختلاف برحسب %	DQM (MAPLE)	FEM (ABAQUS)	تنش برحسب MPa
۴/۳٪	۶۸۷	۶۵۹	بیشینه تنش شعاعی
۵/۷٪	۵۵۰	۵۲۰	بیشینه تنش محیطی



شکل ۲۰- توزیع تنش *Von Mises* برای لایه چینی [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

۳-۶- تحلیل دیسک دوار توپر برای مدل دوم

در شکل ۱۹، توزیع تنش شعاعی (σ_r) برحسب فاصله شعاعی برای دیسک دوار توپر با توزیع الیاف تک جهته با استفاده از روش تحلیلی و روش عددی نشان داده شده‌است. در شکل ۲۰، توزیع تنش شعاعی در

phenomenon in Mindlin-Reissner plate theory for laminated circular sector plate, Acta Mechanica, Vol. 151, pp. 149-161, 2001.

[5] Najafizadeh M. M., and Eslami M. R., First-order-theory-based thermoelastic stability of functionally graded material circular plates, AIAA Journal, Vol. 40, No. 7, 2002.

[6] Nemat-Alla M., Khaled Ahmed I.E., and Hassab-Allah I., Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading, International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, pp. 2774-2786, 2009.

[7] Luo A.C.J., Asymmetric responses of rotating thin disks experiencing large deflections, Computers and Mathematical with Applications, Vol. 45, pp. 217-228, 2003.

[8] Gaikwad N., and Deshmukh K.C., Thermal deflection of an inverse thermoelastic problem in a thin isotropic circular plate, Applied Mathematical Modelling, Vol. 29, pp. 797-804, 2005.

[9] Tahani M., Nosier A., and Zebarjad S.M., Deformation and stress analysis of circumferentially fiber-reinforced composite disks, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, pp. 2741-2754, 2005.

[10] Khobragade N.L., and Deshmukh K.C., Thermal deformation in a thin circular plate due to a partially distributed heat supply, Sadhana, Vol. 30, No. 4, pp. 555-563, 2005.

[11] Kulkarni V.S., and Deshmukh K.C., Quasi-static thermal stresses in a thick circular plate, Applied Mathematical Modelling, Vol. 31, pp. 1479-1488, 2007.

[12] Altan G., and Topcu M., Thermo-elastic stress of a metal-matrix composite disc under linearly-increasing temperature loading by analytical and FEM analysis, Advances in Engineering Software, Vol. 41, pp. 604-610, 2010.

[13] Kursun A., Topcu M., and Tetic T., Stress analysis of functionally graded disc under thermal and mechanical loads, Procedia Engineering, Vol. 10, pp. 2949-2954, 2011.

[14] Fallah F., and Nosier A., Nonlinear behavior of functionally graded circular plates with various boundary supports under asymmetric thermo-mechanical loading, Composite Structures, Vol. 94, pp. 2834-2850, 2012.

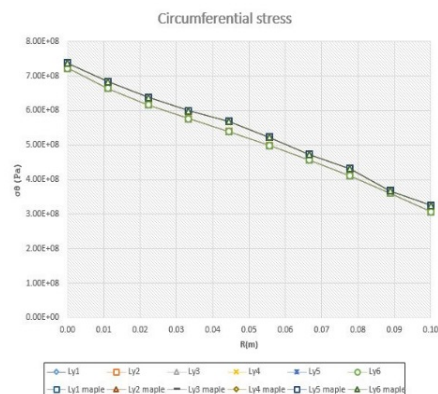
[15] Jabbarzadeh M., and Baghdar Delgosha M.K., Thermal buckling analysis of FGM sector plates using differential quadrature method, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 2, 2013.

[16] Ahmadi M., Nokhandan A., and Jabbarzadeh M., Nonlinear thermoelastic analysis of FGM annular rotating discs with FSDT and TSDT shear deformation plate theories, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 1, 2014.

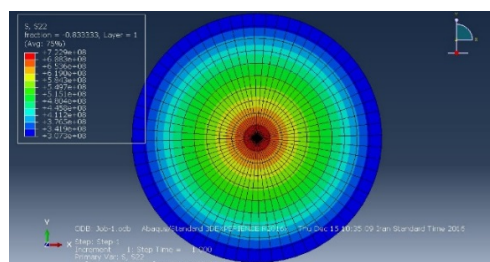
[17] Callhuglu H., Sayer M., and Demir E., Elastic-plastic stress analysis of rotating functionally graded discs, Thin-Walled Structures, Vol. 94, pp. 38-44, 2015.

[18] Kalogiannakis G., Hemelrijck D.V., Carbon/epoxy and glass/epoxy using modulated temperature differential scanning calorimetry, Journal of Composite Materials, Vol. 38, pp. 163, 2004.

[19] Sen F., and Aldas K., Elastic-plastic thermal stress analysis in a thermoplastic composite disc applied linear temperature loads via FEM, Advances in Engineering Software, Vol. 40, pp. 813-819, 2009.



شکل ۲۱- نمودار توزیع تنش محیطی دیسک دوار توپر در لایه‌های مختلف با توزیع الیاف تک جهته



شکل ۲۲- توزیع تنش محیطی در دیسک دوار توپر با لایه‌بندی الیاف به صورت تک جهته

۴- نتیجه‌گیری

- ۱- با بررسی نتایج بدست آمده برای دیسک دوار توپر نتیجه گرفته می‌شود که مناسب‌ترین حالت (از نظر تنش) برای دیسک توپر برای حالت تقارن محوری [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] و بحرانی‌ترین حالت (از نظر تنش) نیز برای لایه‌بندی با زاویه یکسان الیاف بدست می‌آید.
- ۲- با بررسی نتایج بدست آمده برای دیسک دوار تو خالی نتیجه گرفته می‌شود که بهترین حالت برای این نوع دیسک در توزیع لایه به صورت لایه‌بندی با زاویه یکسان الیاف و سپس برای حالت تقارن محوری با لایه‌چینی [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] و بحرانی‌ترین حالت (از نظر تنش) برای لایه‌چینی [۰/۹۰/۰/۹۰/۹۰/۰] بدست می‌آید.
- ۳- با بررسی نتایج بدست آمده از تنش فون مایسز برای دیسک دوار توپر (افزایش لایه در جهت شعاعی) نتیجه گرفته می‌شود که کمترین تنش برای لایه‌چینی‌های متقارن بوجود می‌آید و بیشترین آن برای لایه‌چینی نامتقارن بوجود می‌آید.

۵- مراجع

- [1] Xiaoliang C.A., Simple finite element method for the reissner-mindlin plate, Journal of Computational Mathematics, Vol. 12, No. 1, 1994.
- [2] Nosier .A, Yavari .A, and Sarkani S., Study of edge-zone equation of mindlin-reissner plate theory, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 126, No. 6, 2000.
- [3] Mohammadi F., Hadadian.A, and Singh Grewal J., Analytical solution of pressurized rotating composite disk under thermal loading, Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. 2, 2010.
- [4] Nosier.A ,Yavari.A, and Sarkani.S., On a boundary layer