

بررسی رفتار شکست شیشه‌های سیلیسی متحرک تحت تغییرات دمایی گذرا ناشی از سیال ناهمگن پیرامونی، با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته

سید دیاکو غفاری
سامرند رش احمدی*
هیوا غفاری

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران
دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران
دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده

در تحقیق حاضر، به منظور ارائه چارچوب فرمول‌بندی کلی برای مسائل رشد ترک گرمایی با مرز متحرک، با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته، یک ورق شیشه‌ای سیلیسی ترک‌دار که در سیالی ناهمگن در حال حرکت است، مورد بررسی قرار گرفته و اثر پارامترهای مؤثر در فرمول‌بندی عددی لحاظ شده است. بدین منظور انتقال گرمای رسانی گذرا با مرزهای متحرک و به طور همزمان جابجایی گرمایی مرزهای متحرک با سیال‌های متفاوت محیط، توسط اجزاء محدود توسعه یافته فرمول‌بندی شده و یک دستگاه معادله ماتریسی گرمای گذرا برای آن به دست آمده است. همچنین به منظور محاسبه دقیق میدان‌های دمایی، به وسیله اصلاح و انطباق شمای کرنک-نیکلسون و با استفاده از معیار پایداری فون-نیومن، در هر گام زمانی، راه‌حلی عددی برای دستگاه فوق‌الذکر ارائه شده است. تمامی مراحل فرمول‌بندی مسئله در MATLAB کدنویسی و به کار گرفته شده است. به منظور بررسی کارایی چارچوب فرمول‌بندی ارائه شده، با وارد کردن خواص مکانیکی و گرمایی برای شیشه سودالایم، نتایج بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی مقایسه و راستی‌آزمایی شده است. بعد از احراز دقت نتایج، فرایند مذکور برای سایر شیشه‌های سیلیسی پر کاربرد انجام شده و اثر خواص گرمایی و مکانیکی آن‌ها بر مد اول ضریب شدت تنش مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده است. **واژه‌های کلیدی:** مکانیک شکست ترموالاستیک، روش اجزاء محدود توسعه یافته، ورق شیشه‌ای سیلیسی ترک‌دار، تغییرات دمایی گذرا، مرز متحرک.

The Study of Fracture Behavior of Moving Silica Glasses under Transient Temperature Variations Arising from Heterogeneous Surrounding Fluid, Using XFEM

S. D. Ghaffari Mechanical Engineering Department, Urmia University, Urmia, Iran
S. Rash Ahmadi Mechanical Engineering Department, Urmia University, Urmia, Iran
H. Ghaffari Mechanical Engineering Department, Urmia University, Urmia, Iran

Abstract

In this study, to present a formulation framework for thermal crack growth problems with moving boundaries, a cracked silica glass plate moving in a heterogeneous fluid has been investigated, using the extended finite element method (XFEM). For this purpose, the transient heat conduction with moving boundaries and simultaneously, convective heat transfer of moving boundaries with different ambient fluids, is formulated using XFEM and a system of transient heat conducting matrix equation is obtained. Furthermore, to accurately compute the temperature fields, by adjusting the Crank-Nicolson scheme and using the Von Neumann stability criterion, a numerical solution has been presented for the above-mentioned system. The formulation procedure has been coded in Matlab and it has been employed. In order to analyze the performance of the presented formulation, giving the mechanical and thermal properties for the soda-lime glass, obtained results are compared and verified with the experimental ones. After accuracy verification of results, the aforementioned process has been accomplished for other common silica glasses and the effects of thermal and mechanical properties of them has been analyzed on mode I stress intensity factor.

Keywords

Thermoelastic fracture mechanics, Extended finite element method (XFEM), Cracked silica glass plate, Transient temperature variations, Moving boundary.

۱- مقدمه

ترموالاستیک^۱ بوده و در دو دهه اخیر کارهای آزمایشگاهی متعددی در این زمینه انجام شده است. روش اجزاء محدود^۲ علی‌رغم کاربرد وسیع در زمینه مکانیک شکست، دارای محدودیت‌های جدی می‌باشد. لزوم مطابقت مش اجزاء محدود با هندسه ترک، لزوم مش‌بندی مجدد با رشد ترک، کاهش دقت ناشی از نگاشت داده‌ها و عدم دقت کافی در تقریب تکینگی نوک ترک از مهمترین معایب این روش در مسائل مکانیک است [۳]. روش اجزاء محدود توسعه یافته^۳، روشی عددی است که امکان وارد کردن غنی‌سازی محلی^۴، برای تقریب محلی میدان‌های مختلف، را فراهم

بررسی رفتار ترک در شیشه‌ها، به عنوان یکی از مواد مهم و پرکاربرد در حوزه صنعت و تکنولوژی، از موضوعات کاربردی و حائز اهمیت در علم مکانیک شکست می‌باشد. در این راستا، پدیده رشد ترک گرمایی ورق‌های شیشه‌ای متحرک به علت ماهیت قابل کنترل بودن رشد ترک در آن [۱ و ۲]، از موضوعات جذاب حوزه مکانیک شکست

¹ Thermoelastic fracture mechanics

² Finite element method (FEM)

³ Extended finite element method (XFEM)

⁴ Local enrichment

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: s.rashahmadi@urmia.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۲/۳۰

تاریخ پذیرش: ۹۷/۱۲/۰۶

کرده و اضافه کردن توابع مختلف را از طریق مفهوم تقسیم واحد^۱ محقق می‌کند. همچنین غنی‌سازی اجازه مدل‌سازی هندسه‌های مختلف را مستقل از مش‌بندی می‌دهد^۲. این روش توسط بلیچکو و بلک [۴] بسط داده شد. اگرچه با این روش دیگر نیازی به مش‌بندی مجدد همراه با رشد ترک نبود، اما ترک‌های به شدت خمیده، نیازمند مش‌بندی مجدد در اطراف ریشه ترک^۳ بودند. بعداً، اصلاحیه‌ای برای این روش توسط دولبو و همکاران [۵] پیشنهاد شد. نسخه اصلاح شده نیاز به اصلاح کمینه مش‌بندی را حذف کرد. همراه شدن اجزاء محدود توسعه یافته با روش تعیین سطح^۴ [۶ و ۷] منجر به تکامل بیشتر این روش در کاربرد شد. روش تعیین سطح یک تکنیک عددی برای ردیابی ناپیوستگی‌ها است که توسط اوشر و ستین [۸] ابداع شد. دوفلوت [۹] با بررسی و مرور اجمالی این روش به ارائه تکنیک‌های جدیدتری برای تابع تعیین سطح در مسائل رشد ترک دوبعدی و سه‌بعدی پرداخت. اجزاء محدود توسعه یافته نیز توسط سوکومار و همکاران [۱۰] برای مسائل رشد ترک سه‌بعدی به کار گرفته شد. روش اجزاء محدود توسعه یافته به خوبی در حوزه‌های متفاوت مکانیک شکست، از جمله در مکانیک شکست ترموالاستیک به کار گرفته شده است. دوفلوت [۱۱]، برای اولین بار با استفاده از اجزاء محدود توسعه یافته حالت استاتیکی مکانیک شکست ترموالاستیک را مورد بررسی قرارداد و شرایط مرزی مختلف سطح ترک را در نظر گرفت. در ادامه، زمانی و اسلامی [۱۲] فرمول‌بندی اجزاء محدود توسعه یافته را برای حالت دینامیکی شکست ترموالاستیک بدست آوردند. آن‌ها ترک را به صورت ایستا و شروع شکست را ناشی از بارگذاری ترمومکانیکی ضربه‌ای در نظر گرفتند.

در فرآیند سرد کردن سریع^۵ پایدار یک ورق گرم شیشه‌ای ترک‌دار در یک حمام آب سرد، بسته به شدت اختلاف دمای موجود بین دمای اولیه ورق و دمای آب سرد و همچنین سرعت داخل شدن ورق به حمام، مسیرهای متفاوتی در رشد ترک نمایان می‌شود [۱۳]. بوجیندر و همکارانش [۱۴] نشان دادند که با کاهش سرعت ورود ورق به حمام، توزیع دما به صورت خطی خواهد بود. یونه‌یاما و همکاران [۱۵] با استفاده از فوتوالاستیسیت فاز پله‌ای لحظه‌ای^۶ میدان‌های تنش اطراف نوک ترک را در ورق شیشه‌ای سریع سرد شده مورد بررسی قرار دادند. در ادامه تغییرات میدان‌های تنش اطراف نوک ترک در حین رشد ترک برای همین مساله مورد مطالعه قرار گرفت [۱۶]. اخیراً آن‌ها از یک روش ترکیبی تجربی-عددی برای تحلیل میدان‌های تنش اطراف ترک مستقیم و ترک نوسانی در ورق شیشه‌ای ترک‌دار کوئنچ شده استفاده کردند [۱۷ و ۱۸]. آن‌ها در این کار نشان دادند که میدان‌هایی با تنش فشاری در اطراف تنش‌های کششی نوک ترک توزیع شده‌اند که منجر به بیشتر شدن مقادیر ضرایب شدت تنش^۷ و نوسانی شدن رشد ترک می‌شوند.

علی‌رغم حجم وسیع کارهای انجام گرفته در زمینه رشد ترک در ورق شیشه‌ای متحرک تحت بارهای گرمایی گذرا، هنوز تحقیقی جامع، کافی و رضایت‌بخش جهت تجزیه و تحلیل مناسب این پدیده با در نظر

گرفتن پارامترهای موثر و اصلی، انجام نگرفته است. در این مقاله ضمن مقایسه و راستی‌آزمایی بخشی از نتایج تحلیل عددی اجزاء محدود توسعه یافته با نتایج آزمایشگاهی، به ارائه چارچوب فرمول‌بندی کلی برای مسائل رشد ترک در ورق‌های متحرک تحت بارهای گرمایی گذرا، به کمک روش اجزاء محدود توسعه یافته پرداخته شده است. به‌علاوه تاثیر خواص مکانیکی و گرمایی سایر شیشه‌های سیلیسی پرکاربرد بر مد اول ضریب شدت تنش مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته شده است.

۲- مروری بر مفاهیم ضروری جهت مدل‌سازی مسئله

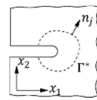
۲-۱- شکل دامنه‌ای انتگرال برهم‌کنش

انتگرال برهم‌کنش که با $I^{(1,2)}$ ویا $M^{(1,2)}$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر است [۱۷]:

$$I^{(1,2)} = M^{(1,2)} = \int_{\Gamma^*} \left[w^{(1,2)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma^* \quad (1)$$

در رابطه (۱)، بالانویس (۱) مربوط به حالت واقعی میدان‌های تنش و جابجایی بدست آمده از تحلیل اجزاء محدود توسعه یافته، بالانویس (۲) مربوط به حالت کمکی بدست آمده از معادلات تنش و جابجایی وسترگارد [۲۰] و ویلیامز [۲۱] است، همچنین Γ^* همان‌طور در شکل ۱ نشان داده شده، یک منحنی دلخواه پیرامون بریدگی یا ترک است که شامل هیچ ناپیوستگی دیگری نمی‌شود. $w^{(1,2)}$ چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش نامیده می‌شود و برابر است با [۱۷]:

$$w^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (2)$$



شکل ۱- مسیر انتگرال گیری حول یک بریدگی

رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش برای یک ماده همسانگرد الاستیک، در حالت مدهای آمیخته^۸ (برهم‌نهی مدهای اول و دوم شکست) و در شرایط تنش صفحه‌ای به صورت زیر خواهد بود [۲۶]:

$$K_I^{(1)} = \frac{E}{2} M^{(1,i)} \quad (3)$$

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E}{2} M^{(1,ii)} \quad (4)$$

در روابط (۳) و (۴)، K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش در مد اول و دوم هستند. همچنین عبارت i مربوط به حالت کمکی بصورت مد اول خالص شکست و عبارت ii مربوط به حالت کمکی بصورت مد دوم خالص شکست می‌باشند. در رابطه (۱) به منظور تسهیل در حل‌های عددی، بهتر است حوزه انتگرال‌گیری بصورت سطحی باشد. بدین‌منظور، مسیر بسته $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma^+ \cup \Gamma_1 \cup \Gamma^-$ به صورتی که در شکل ۲ نشان داده شده، در نظر گرفته می‌شود و همچنین تابع وزنی q ، که تابعی هموار است و مقدار آن در داخل مسیر بسته بین صفر (در Γ_0) و یک (در Γ_1) تغییر می‌کند، تعریف می‌شود و معادله (۱) با استفاده از دیورژانس بصورت زیر بازنویسی می‌شود [۲۶] (قابل ذکر است که سطوح ترک به- صورت کشش آزاد^۸ فرض شده‌اند):

¹ The notion of partition of unity (PoU)

² Crack root

³ Level set method (LSM)

⁴ Quenching process

⁵ Instantaneous phase-stepping photoelasticity

⁶ Stress intensity factors (SIFs)

⁷ Mixed-mode status

⁸ Traction free

$\{f_i(X)\}_{i=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\}$ (۱۰)
عبارت‌های معادله (۱۰)، توابع پایه میدان مجانبی اطراف نوک ترک را تشکیل می‌دهند و از آن‌ها جهت غنی‌سازی میدان اطراف نوک ترک استفاده می‌شود.

۲-۲-۲- تحلیل اجزاء محدود توسعه یافته

روش اجزاء محدود توسعه یافته به همراه روش تعیین سطح با استفاده از روش تقسیم واحد، به ناپیوستگی‌ها اجازه می‌دهند تا مستقل از مش-بندی اجزاء محدود ارائه و تعریف شوند [۲۴]. تابع پایه تقسیم واحد غنی-شده، $N_{ENR}(X)$ ، از حاصل ضرب تابع شکل اجزاء محدود، در تابع غنی-ساز، قابل محاسبه است [۲۲]:

$$N_{ENR}(X) = \sum_{i=1}^n N_i(X) E_i(X) \quad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱) $E(X)$ تابع غنی‌ساز، n تعداد گره‌های غنی‌شده، n^f تعداد توابع غنی‌ساز برای هر گره غنی‌شده است. تقریب عمومی روش اجزاء-محدود توسعه یافته به صورت زیر قابل بیان است:

$$u(X) = u_{STD}(X) + u_{ENR}(X) \quad (۱۲)$$

$$u(X) = \sum_{i \in \Omega} N_i(X) (u_i + \sum_{i \in \Omega_d} E(X) e_i) \quad (۱۳)$$

که در رابطه (۱۳)، Ω دامنه کل تعریف مسئله، Ω_d دامنه شامل ناپیوستگی، u_i و e_i به ترتیب درجات آزادی استاندارد و غنی‌شده هستند. توجه شود، جایی که $\Omega \cap \Omega_d = \emptyset$ باشد، تابع غنی‌ساز $E(X)$ صفر است. از آن جایی که ناپیوستگی‌ها به وسیله مش‌بندی اجزاء محدود تعریف نمی‌شوند، از روش تعیین سطح برای ردیابی ناپیوستگی‌ها استفاده می‌شود [6]. با جای گذاری X_i در رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$u(X_i) = u_i + E(X_i) e_i \quad (۱۴)$$

رابطه (۱۴) نشان می‌دهد که ویژگی درونیابی در رابطه (۱۳) ارضاء نمی‌شود، $u(X_k) \neq u_k$ ، که این مشکل مربوط به درجات آزادی غنی‌شده است. راه حل معمول برای ارضاء ویژگی درونیابی، انتقال دادن (شیفت) توابع غنی‌ساز است [۲۵]:

$$S_i(X) = E(X) - E_i(X) \quad (۱۵)$$

که در رابطه (۱۵)، $S_i(X)$ تابع غنی‌شده انتقال یافته برای گره i و مقدار $E(X)$ در گره i می‌باشد و رابطه (۱۳) بدین صورت اصلاح می‌شود:

$$u(X) = \sum_{i \in \Omega} N_i(X) (u_i + \sum_{i \in \Omega_d} S_i(X) e_i) \quad (۱۶)$$

به منظور تقریب میدان جابجایی برای ترک دوبعدی، با جایگزینی توابع غنی‌ساز انتقال یافته، در عبارت $S_i(X)$ موجود در معادله (۱۶)، بدست می‌آید:

$$u(X) = \sum_i N_i(X) (u_i + H_i(X) a_i + \sum_{j=1}^4 F_j(X) b_{ij}) \quad (۱۷)$$

که $H(X)$ و $F_j(X)$ توابع غنی‌ساز انتقال یافته هستند و رابطه نهایی برای حالت دوبعدی میدان جابجایی شبه استاتیکی به صورت زیر بدست می‌آید:

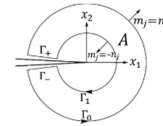
$$u(x, y) = \sum_{i \in \Omega} N_i(x, y) u_i + \sum_{i \in \Omega_d} N_i(x, y) H_i(x, y) a_i + \sum_{i \in \Omega_d} \sum_{j=1}^4 N_i(x, y) F_j(r, \theta) b_{ij} \quad (۱۸)$$

که در معادله (۱۸) u_i درجات آزادی استاندارد، a_i درجات آزادی افزوده مربوط به غنی‌سازی وجه ترک، b_{ij} درجات آزادی افزوده مربوط به غنی-سازی نوک ترک، n تعداد کل گره‌ها، n_d تعداد گره‌های غنی‌شده توسط تابع هویساید و n_c تعداد گره‌های غنی‌شده توسط توابع نوک ترک هستند.

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - w^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (۵)$$

که برای هر نقطه داخل ناحیه A از توابع شکل اجزاء محدود جهت بدست آوردن q استفاده می‌شود [۲۶]:

$$\sum_{i=1}^4 N_i q_i \quad (۶)$$



شکل ۲- مسیر بسته انتگرال برهم کنش در اطراف یک نوک ترک

۲-۲-۲- روش اجزاء محدود توسعه یافته

۲-۲-۱- توابع غنی‌ساز مورد استفاده

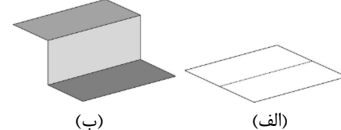
در تحلیل اجزاء محدود توسعه یافته، برای مدل سازی ترک دوبعدی در مواد همسانگرد، دو نوع از توابع غنی‌ساز مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲۲]: ۱- تابع هویساید (تابع پله) ۲- توابع نوک ترک مجانبی^۱ (بدست آمده از مکانیک شکست الاستیک خطی). المان‌هایی که به طور کامل توسط ترک قطع شده‌اند و ترک از آن‌ها عبور کرده، با تابع هویساید غنی سازی می‌شوند. قطع شدن کامل دامنه توسط ترک موجب پرش جابجایی می‌شود و تابع هویساید، رفتار مورد نظر جهت تقریب صحیح میدان را فراهم می‌کند (شکل ۳). تعریف ریاضی این تابع به صورت زیر است [۲۲]:

$$h(X) = \begin{cases} +1 & (X - X_F), n > 0 \\ -1 & (X - X_F), n < 0 \end{cases} \quad (۷)$$

در رابطه (۷)، X نقطه‌ای داخل دامنه ناپیوسته، X_F نزدیک ترین نقطه به X روی ترک، و n بردار یک عمود در نقطه X_F است. در نتیجه برای المان‌هایی که ترک از آن‌ها عبور کرده، در هر گره علاوه بر درجات آزادی استاندارد، یک درجه آزادی (ناشی از غنی‌سازی) در هر جهت، توسط این تابع اضافه می‌شود. تابع هویساید برای المان‌های کاملاً قطع شده، مناسب است، اما زمانی که نوک ترک در یک المان قرار دارد، بخشی از المان بریده شده و بخشی هم سالم باقی می‌ماند و بنابراین از تابع هویساید نمی‌توان استفاده کرد. در مکانیک شکست خطی، میدان‌های جابجایی در اطراف نوک ترک از روابط زیر محاسبه می‌شوند [۲۳]:

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (۸)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (۹)$$



شکل ۳- (الف): المان قطع شده (ب): مدل سازی میدان تابع هویساید

فلمنینگ و همکارانش [۲۳] نشان دادند که در میدان‌های جابجایی فوق، توابع پایه به صورت چهار تابع زیر هستند:

¹ Heaviside function (step function)

² Asymptotic crack-tip functions

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\phi}{\psi} \right) \quad (26)$$

همچنین به کمک توابع تعیین سطح، المان‌هایی که به‌طور کامل توسط ترک قطع شده‌اند و المان‌هایی که در آن‌ها نوک ترک وجود دارد به- ترتیب با دو معیار زیر تعیین می‌شوند [۶]:

$$\phi_{\max} * \phi_{\min} \leq 0 \text{ and } \psi_{\max} < 0 \quad (27)$$

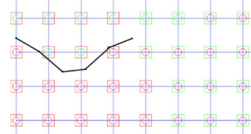
$$\phi_{\max} * \phi_{\min} \leq 0 \text{ and } \psi_{\max} * \psi_{\min} \leq 0 \quad (28)$$

کاربرد این دو معیار در شکل ۵ قابل مشاهده است.

۳- مدل‌سازی و تحلیل مسئله

۳-۱- توصیف مسئله و فرضیات مورد استفاده

یک ورق شیشه‌ای به ارتفاع H و عرض W ، دارای ترک اولیه به طول L_d در یک کوره قرار می‌گیرد تا به دمای ثابت T_H برسد. سپس بصورت عمودی با سرعت ثابت V از کوره به یک حمام آب سرد به دمای T_c ، انتقال داده می‌شود. ورق با سرعت ثابت وارد حمام می‌شود رشد ترک شروع می‌شود. جزئیات بیشتر در مورد مراحل و روند انجام فرایند در [۱۵] توضیح داده شده است.

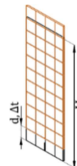


شکل ۵- ϕ با دایره و ψ با مربع مشخص شده و مقادیر مثبت و منفی آن‌ها به ترتیب با سبز و قرمز مشخص شده‌اند.

به علت رسانایی گرمایی پایین و ظرفیت گرمایی نسبتاً بالای شیشه، عامل غالب در خنک‌شدن ورق داخل حمام آب، جابجایی گرمایی مرزی است. بنابراین برای افزایش دقت مدل‌سازی، فرض شده‌است که هم سطوح و هم لبه‌های ورق در حمام و محیط بیرون دارای جابجایی گرمایی هستند. با این وجود چون فاصله بین کوره و حمام کمتر از ارتفاع ورق است، در زمانی که ورق وارد حمام می‌شود هنوز طرف دیگر آن در کوره باقی مانده است و دمای آن مساوی با دمای کوره در نظر گرفته می‌شود و بنابراین جابجایی گرمایی در این قسمت وجود ندارد. مش‌بندی اجزاء محدود مسئله به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده‌است که مسافت طی شده ورق در هر گام زمانی، با طول المان‌های مش برابر باشد (شکل ۶). در نتیجه زمان هر گام و زمان کل برای ورود کامل ورق به حمام، به- سادگی بدست می‌آیند:

$$\Delta t = \frac{d}{V} \quad \text{totalTime} = \frac{H}{V} \quad (29)$$

در رابطه (۲۹) طول المان‌های مش است (شکل ۶).



شکل ۶- میزان جابجایی ورق در هر گام زمانی

جنس ورق مورد استفاده در آزمایش همسانگرد و همگن فرض شده‌است. برای سهولت و خطی شدن رابطه (۳۷) و همچنین باتوجه به اختلاف نسبتاً پایین دمای حداقلی و حداکثری در ورق برای تغییر

۳-۲- توسعه یافتگی دمایی برای شکست ترموالاستیک

در مسائل مربوط به شکست گرمایی، استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته برای ناپیوستگی‌های دمایی امکان‌پذیر است. با فرض ترک بی‌دررو، برای پرش دمایی در المان‌هایی که به‌طور کامل توسط ترک قطع شده‌اند، استفاده از تابع هویساید مناسب است. جهت غنی‌سازی نوک ترک، تابع پایه میدان مجانبی دما بدین صورت قابل نوشتن است [۱۱]:

$$T = -\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) k رسانایی گرمایی است و K_T قدرت تکنیکی شار گرمایی در نوک ترک را فراهم می‌کند. بنابراین با توجه به رابطه (۱۹) برای غنی‌سازی نوک ترک تنها از اولین عبارت رابطه (۱۰) استفاده می‌شود. در نتیجه میدان دمای دوبعدی گسسته شده ناشی از تقریب اجزاء محدود توسعه یافته، به صورت زیر بدست می‌آید [۱۱]:

$$T(x, y, t) = \sum_{i \in \Gamma_n} N_i(x, y) T_i + \sum_{i \in \Gamma_n} N_i(x, y) H_i(x, y) A_i + \sum_{i \in \Gamma_c} N_i(x, y) F_1(r, \theta) B_i \quad (20)$$

که در رابطه (۲۰) T_i درجات آزادی دمایی استاندارد، A_i درجات آزادی دمایی افزوده مربوط به غنی‌سازی تابع هویساید برای وجه ترک و B_i درجات آزادی دمایی افزوده مربوط به غنی‌سازی تابع F_1 برای نوک ترک است که F_1 بصورت زیر می‌باشد:

$$F_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} - \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \quad (21)$$

۳-۲- روش تعیین سطح

روش تعیین سطح روشی جهت ردیابی ناپیوستگی‌های متحرک است که برای توصیف کامل ترک دو تابع تعیین سطح تعریف می‌کند: تابع تعیین سطح عمودی، ϕ و تابع تعیین سطح مماسی، ψ [۶]. هردو تابع به- عنوان توابع فاصله جهت‌دار تعریف می‌شوند. جهت این توابع در شکل ۴ تشریح شده‌اند. اکنون می‌توان نوک ترک را به وسیله تقاطع مقدار صفر توابع عمودی و مماسی تعیین سطح شناسایی نمود [۶]:

$$\begin{cases} \forall x \in \Gamma_c & \phi = 0 \text{ and } \psi \leq 0 \\ \forall x \in \Gamma_{\text{tip}} & \phi = 0 \text{ and } \psi = 0 \end{cases} \quad (22)$$

توابع تعیین سطح در یک المان با استفاده از توابع شکل استاندارد قابل درون‌یابی هستند:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= N_i(x) \phi_i \\ \psi(x) &= N_i(x) \psi_i \end{aligned} \quad (23)$$

به علاوه در چارچوب اجزاء محدود توسعه یافته از توابع تعیین سطح به- منظور تعیین توابع غنی‌ساز و انتخاب المان‌های ناپیوسته جهت غنی- سازی کمک گرفته می‌شود:

$$H = \text{sign}(\phi) = \begin{cases} +1 & \phi > 0 \\ -1 & \phi < 0 \end{cases} \quad (24)$$

$\psi < 0$	$\psi > 0$
$\phi > 0$	$\phi > 0$
Γ_c	$\psi = 0$
Γ_{tip}	$\phi = 0$
$\psi < 0$	$\psi > 0$
$\phi < 0$	$\phi < 0$

شکل ۴- توابع تعیین سطح برای یک ترک لبه‌ای

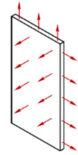
و برای بدست آوردن مؤلفه‌های توابع غنی‌ساز نوک ترک مجانبی:

$$r = \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \quad (25)$$

$$\forall (P, t) \in \Gamma_c(t) \rightarrow q_i n_i = h_c(T(P, t) - T_c)$$

که در روابط (۳۴) و h_a, h_c به ترتیب ضریب جابجایی گرمایی آب سرد، ضریب جابجایی گرمایی هوا و دمای هوا می‌باشد. جابجایی سطحی و لبه‌ای ورق در شکل ۸ نشان داده شده است و شرایط اولیه معادلات گرمایی عبارتند از:

$$T(x, y, 0) = T_h \text{ and } T_i(x, y, t + \frac{\Delta t}{n}) = T(x, y, t) \text{ in } \Omega \quad (35)$$



شکل ۸- جابجایی گرمایی سطحی و لبه‌ای فرض شده در فرمول‌بندی

با جایگذاری تقریب اجزاءمحدود توسعه‌یافته میدان‌های جابجایی و گرمایی (معادلات ۱۸ و ۲۰) در فرم ضعیف معادلات ادغام شده (۳۰) و (۳۲) و (۳۱)، اعمال شرایط مرزی، استفاده از روش گالرکین و برخی ساده‌سازی‌های دیگر، دستگاه معادلات گسسته خطی بدست خواهند آمد که می‌توان آن‌ها را به فرم اجزاءمحدودی زیر نوشت [۲۲ و ۲۷]:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (36)$$

$$[C^{th}]\{\dot{T}\} + [K^{th}]\{T\} = \{F^{th}\} \quad (37)$$

که $\{U\} = \{u_i^u, u_i^v, a_i^u, a_i^v, b_{ij}^u, b_{ij}^v\}^T$ بردار جابجایی مجهول گرہ‌ها (بالانویس‌های u و v به‌ترتیب مربوط به مؤلفه‌های افقی و عمودی جابجایی هستند) و $\{T\} = \{T_i, A_i, B_i\}^T$ بردار دماهای مجهول برای گرہ‌ها است. یادآوری می‌شود که در بدست‌آمدن این معادله، شرط مرزی دمایی اول اعمال نشده‌است (در بخش بعد این شرط اعمال خواهد شد). در معادله (۳۶)، $[K]$ ماتریس سختی کلی و $\{F\}$ بردار بارهای گرمایی معادل، مرتبط با تغییرات دما بر روی یک المان است [۲۸] که این ماتریس و بردار و عبارت‌های آن‌ها بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega = \iint_A [B]^T [C] [B] t dA \quad (38)$$

$$\{F\} = \int_{\Omega} [B]^T [C] \{\varepsilon^{th}\} d\Omega = \iint_A [B]^T [C] \{\varepsilon^{th}\} t dA \quad (39)$$

$$[B] = [B_u \quad B_a \quad B_b] \quad [C] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} N_{x,x} & 0 \\ 0 & N_{y,y} \\ N_{x,y} & N_{y,x} \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} (NH)_{,x} & 0 \\ 0 & (NH)_{,y} \\ (NH)_{,y} & (NH)_{,x} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$B_b = \begin{bmatrix} (NF)_{,x} & 0 \\ 0 & (NF)_{,y} \\ (NF)_{,y} & (NF)_{,x} \end{bmatrix}$$

t و A به‌ترتیب ضخامت و مساحت ورق هستند. $\{\varepsilon^{th}\}$ بردار کرنش گرمایی است که برای یک ماده همسانگرد درحالت تنش صفحه‌ای به-صورت زیر تعریف می‌شود [۲۹]:

$$\{\varepsilon^{th}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{th} \\ \varepsilon_{yy}^{th} \\ \varepsilon_{xy}^{th} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha \Delta T \quad (42)$$

در رابطه (۴۲) $\Delta T = T_t - T_{t-\Delta t}$ است که در بخش بعد محاسبه خواهد شد. در معادله (۳۷)، $[C^{th}]$ ماتریس ظرفیت کلی است که ماتریس و عبارت‌های آن این‌گونه تعریف می‌شوند [۳۰]:

خواص ترموفیزیکی مانند رسانایی گرمایی، گرمای مخصوص و چگالی، این خواص مستقل از دما درنظر گرفته شده‌اند. علاوه براین، چون ورق بسیار نازک است تمام عملیات و فرمول‌بندی‌ها در حالت تنش صفحه‌ای بدست آمده‌اند.

۲-۳- مدل‌سازی

مسئله در دامنه Ω و محدود به مرز Γ تعریف می‌شود. دامنه و مرز به‌صورت شکل ۷ تفکیک‌بندی می‌شود. در این شکل $\Omega_h(t)$ ناحیه گرم کوره، محدود به مرز $\Gamma_h(t)$ و با گذشت زمان کاهش می‌یابد، $\Omega_c(t)$ ناحیه سرد در حمام آب، محدود به مرز $\Gamma_c(t)$ و با گذشت زمان افزایش می‌یابد، $\Omega_a(t)$ ناحیه باقیمانده که در معرض هوا با دمای اتاق قرار گرفته و محدود به مرز $\Gamma_a(t)$ است و با گذشت زمان کاهش می‌یابد. $\Gamma_d(t)$ ترک اولیه است که با گذشت زمان افزایش می‌یابد و به‌صورت بی‌دررو فرض شده‌است و شامل دو مرز $\Gamma_d(t)^+$ و $\Gamma_d(t)^-$ می‌باشد.

معادلات حاکم بر مسئله شامل قانون دوم نیوتن و معادله عمومی انتقال گرمای رسانشی برای جامدات متحرک، مشتق شده از قانون اول ترمودینامیک می‌باشند که با درنظر گرفتن فرض‌های حل مساله (برای قانون دوم نیوتن: تنش صفحه‌ای، سرعت ثابت و عدم وجود نیروهای حجمی؛ برای قانون اول ترمودینامیک: ورق نازک همسانگرد، جابجایی گرمایی سطحی، بدون منبع گرمایی و حرکت با سرعت ثابت عمودی) در حالت دوبعدی به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۲۶ و ۲۷]:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (30)$$

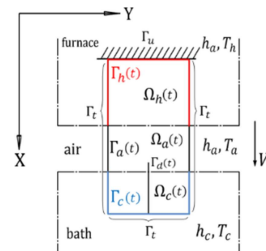
$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + 2h(T - T_{\infty}) = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (31)$$

σ_{ij} (تانسور تنش کوشی) از قانون هوک و q_i (بردار شار گرمایی) از قانون فوریه به‌دست می‌آیند که بصورت زیر هستند:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right\} - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2 \quad (32)$$

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2 \quad (33)$$

در روابط (۳۰) تا (۳۳) σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش کوشی، q_i مؤلفه‌های بردار شار گرمایی، c_p ظرفیت گرمایی مخصوص، h ضریب انتقال گرمای جابجایی، T_{∞} دمای سیال اطراف ورق، u_{x_1} سرعت ورق در راستای عمود، ρ چگالی، ΔT تغییرات دمای گرہ‌ها، ε_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش، E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، α ضریب انبساط گرمایی و k رسانایی گرمایی هستند.



شکل ۷- نحوه تفکیک دامنه و مرز مسئله

شرایط مرزی مربوطه به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \text{ on } \Gamma_t \quad u = 0 \text{ on } \Gamma_u \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ on } \Gamma_d^{\pm} \quad (34)$$

$$\forall (P, t) \in \Omega_h(t) \rightarrow T(P, t) = T_h \quad (34)$$

$$\forall (P, t) \in \Gamma_h(t) \rightarrow q_i n_i = 0$$

$$\forall (P, t) \in (\Gamma_d^+(t) \cup \Gamma_d^-(t)) \rightarrow q_i n_i = 0$$

۳-۳- حل عددی دستگاه معادله ماتریسی گرما

بیان شد که ماتریس رسانایی و بردار نیروی گرمایی دارای دامنه/مرز انتگرال گیری متغیر با زمان هستند، به طوری که در آن‌ها پارامترهای h و T_{∞} برای گره‌هایی که از مرزهای کوره، حمام و فضای مابین عبور می‌کنند، مرتب در حال تغییر هستند. بنابراین علاوه بر دما، ماتریس رسانایی و بردار نیروی گرمایی نیز با زمان تغییر می‌کنند. به علاوه در هر گام برای هر دو ماتریس ظرفیت و رسانایی و بردار نیروی گرمایی درایه‌های جدیدی ظاهر می‌شوند که ناشی از رشد ترک و درجات آزادی افزوده جهت غنی‌سازی طول اضافه شده ترک می‌باشند. این درایه‌های جدید در گام‌های زمانی پیشین، صفر در نظر گرفته می‌شوند تا در روند حل عددی مشکلی از لحاظ تغییر مرتبه ماتریس/بردار ایجاد نشود. برای اعمال شرط مرزی دمایی اول، معادله (۳۷) بصورت زیر تفکیک می‌شود:

$$\begin{bmatrix} C_{ss}^{th} & C_{su}^{th} \\ C_{us}^{th} & C_{uu}^{th} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_s \\ \dot{T}_u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss}^{th} & K_{su}^{th} \\ K_{us}^{th} & K_{uu}^{th} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_s \\ T_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s^{th} \\ F_u^{th} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

که در رابطه (۵۷) زیرنویس u مشخص‌کننده دماهای مجهول (متغیر) یا عبارات مربوط به دماهای مجهول و زیرنویس s مشخص‌کننده دماهای معلوم (ثابت) یا عبارات مربوط به دماهای معلوم می‌باشد. برای دماهای مجهول معادله (۵۷)، با اعمال شرط مرزی دمایی اول (نتیجتاً در نظر گرفتن $\dot{T}_s = 0$ و $T_s = T_h$) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$[C_{uu}^{th}]\{\dot{T}_u\} + [K_{uu}^{th}]\{T_u\} = \{F_u^{th}\} - [K_{us}^{th}]\{T_h\} \quad (58)$$

اکنون در معادله (۵۸) به صورت مناسب اثر دماهای معلوم به عنوان توابع نیرو (عبارت $-[K_{us}^{th}]\{T_h\}$) در نظر گرفته شده‌است. حال برای به دست آوردن دماهای گذرا در هر گام، از تقریب دوزنقه‌ای تعمیم یافته [۳۰] جهت انتگرال گیری عددی از معادله (۳۷) استفاده می‌شود. براساس این تکنیک، دماها در موقعیت زمانی $p + 1$ برابر هستند با:

$$\{T\}^{p+1} = \{T\}^p + [(1 - \theta)\{\dot{T}\}^p + \theta\{\dot{T}\}^{p+1}] \frac{\Delta t}{n} \quad (59)$$

در رابطه (۵۹) θ پارامتر زمانی است و مقداری بین صفر تا یک دارد، Δt همان گونه که قبلاً تعریف شد، زمان یک گام است که برابر با ورود المان‌های واقع در یک ردیف مش (ورق) به حمام می‌باشد و $\frac{\Delta t}{n}$ زمان یک زیرگام بین موقعیت‌های زمانی p و $p + 1$ است و واضح می‌باشد که n تعداد زیرگام‌ها در یک گام است. بازنویسی جداگانه معادله (۳۷) برای هر کدام از موقعیت‌های زمانی p و $p + 1$ ، به فرم معادله (۵۸) برای دماهای مجهول می‌دهد:

$$[C_{uu}^{th}]^p \{\dot{T}_u\}^p + [K_{uu}^{th}]^p \{T_u\}^p = \{F_u^{th}\}^p - ([K_{us}^{th}]\{T_h\})^p \quad (60)$$

$$[C_{uu}^{th}]^{p+1} \{\dot{T}_u\}^{p+1} + [K_{uu}^{th}]^{p+1} \{T_u\}^{p+1} = \{F_u^{th}\}^{p+1} - ([K_{us}^{th}]\{T_h\})^{p+1} \quad (61)$$

جایگذاری معادلات (۶۰) و (۶۱) در معادله (۵۹)، بعداز اندکی ساده سازی، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{\Delta t} [C_{uu}^{th}]^{p+1} + \theta [K_{uu}^{th}]^{p+1} \right) \{T_u\}^{p+1} = \left(\frac{n}{\Delta t} [C_{uu}^{th}]^p - \right. \\ & \left. (1 - \theta) [K_{uu}^{th}]^p \right) \{T_u\}^p + \theta (\{F_u^{th}\}^p - [K_{us}^{th}]\{T_h\})^{p+1} + \\ & (1 - \theta) (\{F_u^{th}\}^p - [K_{us}^{th}]\{T_h\})^p \end{aligned} \quad (62)$$

برای مقادیر مختلف θ ، شمای‌های گذرای مختلف ظاهر می‌گردد. با در نظر گرفتن پایداری و دقت نتایج و مقایسه آنها در شمای‌های مختلف (اولر پسرو و پیشرو، کرنک-نیکلسون و گالرکین)، شمای کرنک-نیکلسون بهترین انتخاب خواهد بود. همچنین مراجع [۱۲ و ۳۰ و ۳۱] اشاره کرده‌اند که برای بیشتر مسائل انتقال گرمای گذرا، از شمای کرنک-نیکلسون استفاده می‌گردد. برای $\theta = \frac{1}{2}$ ، شمای گذرای نیمه‌ضمنی کرنک

$$[C^{th}] = \int_{\Omega} \rho c_p [\Psi]^T [\Psi] d\Omega = \iint_A \rho c_p [\Psi]^T [\Psi] t dA \quad (43)$$

$$[\Psi] = [N_T \quad N_A \quad N_B \quad N_T] = [N] \quad N_A = [NH] \quad N_B = [NF_1] \quad (44)$$

$[K^{th}]$ ماتریس رسانایی کلی است و بصورت زیر قابل تعریف است:

$$[K^{th}] = [K_D] + [K_V] + [K_{hs}] + [K_{he}] \quad (45)$$

که این ماتریس‌ها بدین صورت هستند:

$$[K_D] = \int_{\Omega} [B^{th}]^T [D] [B^{th}] d\Omega = \iint_A [B^{th}]^T [D] [B^{th}] t dA \quad (46)$$

$$[K_V] = \int_{\Omega} [\Phi] [v^{th}] [B^{th}] d\Omega = \iint_A [\Phi] [v^{th}] [B^{th}] t dA \quad (47)$$

$$[K_{hs}] = \int_{\Omega} 2h [\Psi]^T [\Psi] d\Omega = \iint_{A_c(t)} 2h_c [\Psi]^T [\Psi] dA_c + \iint_{A_a(t)} 2h_a [\Psi]^T [\Psi] dA_a \quad (48)$$

$$[K_{he}] = \int_{\Gamma} h [\Psi]^T [\Psi] d\Gamma = \oint_{S_c(t)} h_c [\Psi]^T [\Psi] t dS_c + \oint_{S_a(t)} h_a [\Psi]^T [\Psi] t dS_a \quad (49)$$

که معادلات (۴۷)، (۴۸) و (۴۹) به ترتیب ناشی از حرکت انتقالی ورق، جابجایی گرمایی سطوح ورق و جابجایی گرمایی لبه‌های ورق می‌باشد. تعریف ماتریس‌های این معادلات به صورت زیر است:

$$[B^{th}] = [B_T^{th} \quad B_A^{th} \quad B_B^{th}] \quad B_T^{th} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} \quad B_A^{th} = \begin{bmatrix} (NH)_x \\ (NH)_y \end{bmatrix} \quad B_B^{th} = \begin{bmatrix} (NF_1)_x \\ (NF_1)_y \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \Phi = [\Psi^T \quad \Psi^T] \quad v^{th} = \begin{bmatrix} \rho c_p V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$\{F^{th}\}$ بردار نیروی گرمایی است که به صورت زیر قابل بیان است [۲۷]:

$$\{F^{th}\} = \{f_{hs}\} + \{f_{he}\} \quad (52)$$

که بردارهای این معادله بدین صورت هستند:

$$f_{hs} = \int_{\Omega} 2h T_{\infty} [\Psi]^T d\Omega = \iint_{A_c(t)} 2h_c T_c [\Psi]^T dA_c + \iint_{A_a(t)} 2h_a T_a [\Psi]^T dA_a \quad (53)$$

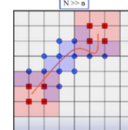
$$f_{he} = \int_{\Gamma} h T_{\infty} [\Psi]^T d\Gamma = \oint_{S_c(t)} h_c T_c [\Psi]^T t dS_c + \oint_{S_a(t)} h_a T_a [\Psi]^T t dS_a \quad (54)$$

مجدداً معادلات (۵۳) و (۵۴) به ترتیب ناشی از جابجایی گرمایی سطحی و لبه‌ای است.

شکل ۹ یک دامنه ترک‌دار مش‌بندی شده و نحوه انتخاب المان‌ها جهت غنی‌سازی را نشان می‌دهد. المان‌های صورتی و گره‌های مربعی آن‌ها، المان‌های نوک ترک هستند و توسط توابع مجانبی غنی‌سازی می‌شوند. المان‌های آبی کم‌رنگ و گره‌های دایره‌ای آن‌ها، المان‌های وجه ترک هستند و توسط تابع هویساید غنی‌سازی می‌گردند و در نهایت، المان‌های بنفش کم‌رنگ، آن‌هایی هستند که گره‌هایشان توسط هر دو نوع غنی‌سازی مذکور غنی می‌شود. بردار $\{F\}$ و ماتریس $[K]$ بر حسب المان‌هایشان برای شکل ۹ به صورت زیر هستند:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] \\ [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] \\ [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] \\ [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] \\ [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] \\ [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] & [K_{uu}^{uv}] \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\{F\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_u^u \\ F_u^v \end{Bmatrix}}_N \underbrace{\begin{Bmatrix} F_a^u \\ F_a^v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_b^u \\ F_b^v \end{Bmatrix}}_n \quad (56)$$



شکل ۹- نحوه غنی سازی دامنه ترک‌دار توسط توابع غنی‌ساز

نیکلسون بدست می‌آید:

$$\left(\frac{n}{\Delta t} [C_{uu}^{th}]^{p+1} + \frac{1}{2} [K_{uu}^{th}]^{p+1}\right) \{T_u\}^{p+1} = \left(\frac{n}{\Delta t} [C_{uu}^{th}]^p - \frac{1}{2} [K_{uu}^{th}]^p\right) \{T_u\}^p + \frac{1}{2} ((\{F_u^{th}\} - [K_{us}^{th}]\{T_h\})^{p+1} + (\{F_u^{th}\} - [K_{us}^{th}]\{T_h\})^p) \quad (63)$$

این روش بدون قید پایدار است. اما راه حل تقریبی می‌تواند نوسانات کاذبی از انتخاب نامناسب تعداد زیرگام‌های زمانی از خود نشان دهد [۳۰ و ۳۱]. به همین منظور، می‌توان از تحلیل پایداری فون- نیومن [۳۲] استفاده کرد:

$$\kappa \left(\frac{\Delta t}{d}\right) \leq \frac{1}{2} \quad (64)$$

که در رابطه (۶۴) رابطه κ پخشندگی گرمایی و d همان گونه که قبلاً تعریف شد، طول المان‌های مش است. استفاده از برابری معادله فوق، کمینه تعداد زیرگام‌های زمانی در یک گام بدست می‌آید:

$$n = \frac{2K\Delta t}{d^2} \quad (65)$$

در نهایت با جایگذاری معادله (۶۵) در معادله (۶۳)، دماهای گذرا برای موقعیت زمانی $p + 1$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\{T_u\}^{p+1} = [A]^{-1} \left([B]\{T_u\}^p + \frac{1}{2} (\{F\}^{p+1} + \{F\}^p) \right) \quad (66)$$

که در رابطه (۶۶):

$$[A] = \frac{2K}{d^2} [C_{uu}^{th}]^{p+1} + \frac{1}{2} [K_{uu}^{th}]^{p+1} \quad (67)$$

$$[B] = \frac{2K}{d^2} [C_{uu}^{th}]^p - \frac{1}{2} [K_{uu}^{th}]^p \quad (68)$$

$$\{F\} = \{F_u^{th}\} - [K_{us}^{th}]\{T_h\} \quad (69)$$

با اعمال شرایط اولیه (معادله ۳۵)، معادله (۶۶) بصورت زیر تکمیل می‌شود:

- برای اولین موقعیت‌های زمانی در گام اول، یعنی p و $p + 1$ ، در $t = 0$:

$$\{T_u\}^{p+1} = [A]^{-1} \left([B]\{T_h\} + \frac{1}{2} (\{F\}^{p+1} + \{F\}^p) \right) \Rightarrow \begin{cases} p \cong (t = 0) \\ p + 1 \cong \left(t = \frac{\Delta t}{n} \right) \end{cases} \quad (70)$$

رابطه (۷۰) اولین زیرگام برای به دست آوردن دماهای مجهول گام بعدی، $\{T_u(\Delta t)\}$ ، است.

- برای اولین موقعیت‌های زمانی در گام‌های دیگر، p و $p + 1$ ، در $t = t$:

$$\{T_u\}^{p+1} = [A]^{-1} \left([B]\{T_u(t)\} + \frac{1}{2} (\{F\}^{p+1} + \{F\}^p) \right) \Rightarrow \begin{cases} p \cong (t = t) \\ p + 1 \cong \left(t = t + \frac{\Delta t}{n} \right) \end{cases} \quad (71)$$

که در رابطه (۷۱) $\{T_u(t)\}$ دماهای نهایی بدست آمده گام قبلی است. رابطه (۷۱) اولین زیرگام برای به دست آوردن دماهای مجهول گام بعدی، $\{T_u(t + \Delta t)\}$ ، است.

۴- تجزیه و تحلیل نتایج

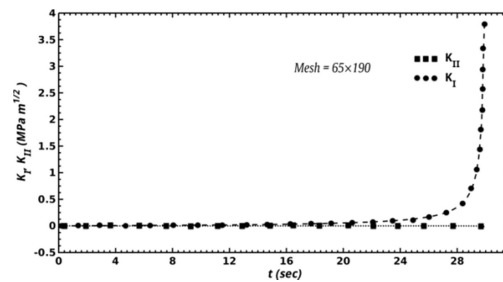
به منظور آزمودن کارایی چارچوب فرمول‌بندی ارائه شده، خواص مکانیکی و گرمای ورق شیشه سودالایم و همچنین خواص گرمای سیال- های محیط (جدول ۱) در فرمول‌بندی مسئله وارد شده‌اند.

از معیار بیشینه تنش محیطی برای پیش‌بینی مسیر رشد ترک استفاده شده است. به علاوه در چندین کار آزمایشگاهی گزارش شده که

سرعت رشد ترک مستقیم این مسئله تقریباً برابر با سرعت انتقالی ورق می‌باشد. از این رو برای شبیه‌سازی این پدیده، میزان افزایش رشد ترک در هر گام زمانی برابر با طول المان‌های مش در نظر گرفته شده‌است. قابل ذکر است که برای کلیه نتایج عددی، از المان مستطیلی استفاده شده و دقت مش‌بندی مسئله به گونه‌ای انتخاب شده که تعداد المان‌ها برابر با 65×190 باشد. در شکل ۱۰ تغییرات ضرایب شدت تنش در طول زمان رسم شده‌است. از شکل مشخص است که افزایش مقادیر K_I با گذشت زمان با شدت بسیار بیشتری رخ می‌دهد، زیرا به دلیل پایین بودن رسانایی گرمایی شیشه و ظرفیت گرمایی نسبتاً بالای آن، عامل غالب در خنک شدن شیشه، جابجایی گرمایی مرزها و سطوح ورق در حمام آب سرد است. بنابراین در زمان‌های اولیه ورود ورق به حمام، فرصت کافی برای تبادل گرما در داخل ورق وجود ندارد و گرادیان‌های دما نسبتاً کوچک هستند. اما با گذشت زمان و کاهش فاصله نقاط گرم و سرد از یکدیگر گرادیان‌های دما شدت خواهند گرفت که این، به نوبه خود، باعث افزایش جابجایی و در نتیجه، افزایش K_I می‌شود. نکته دیگر نمودار شکل ۱۰ ناچیز بودن مقادیر K_{II} در مقایسه با K_I است. به گونه‌ای که هرچند K_{II} در نموداری مجزاً مقادیری غیرصفر را نشان می‌دهد اما در مقایسه با مرتبه مقادیر K_I به صفر میل می‌کند و می‌توان از این نتیجه برای پیش‌بینی مسیر رشد ترک استفاده کرد. به کمک معیار بیشینه تنش محیطی و با میل دادن K_{II} به صفر، زاویه رشد ترک صفر بدست می‌آید و در نتیجه مسیر رشد ترک با فرض خوبی بصورت مستقیم پیش‌بینی می‌شود، همان‌طور که در کارهای آزمایشگاهی [۱۶] گزارش شده‌است (شکل ۱۱).

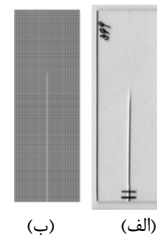
جدول ۱- خواص ورق شیشه سودالایم و سیال‌های محیط [۱۶]

نماد پارامتر	عنوان پارامتر	مقدار پارامتر
H	ارتفاع ورق	0.076 m
W	عرض ورق	0.026 m
t	ضخامت ورق	0.0009 m
L_d	طول ترک اولیه ورق	0.005 m
V	سرعت انتقالی ورق	0.0021 m/s
E	مدول یانگ	71.6 GPa
ν	ضریب پواسون	0.20
ρ	چگالی	2500 kg/m ³
k	رسانایی گرمایی	1.005 J/m s K
α	ضریب انبساط گرمایی	$8.7(10^{-6})$ 1/K
c_p	ظرفیت گرمایی مخصوص	921 J/kg K
κ	پخشندگی گرمایی	$4.36(10^{-7})$ m ² /s
h_w	ضریب جابجایی گرمایی آب	440 J/m ² s K
h_a	ضریب جابجایی گرمایی هوا	5 J/m ² s K
T_w	دمای آب سرد	290.2 K
T_a	دمای هوای محیط	298 K
T_h	دمای کوره	360 K



شکل ۱۰- تغییرات ضرایب شدت تنش شیشه سودالایم در طول زمان

در زمان خروج کامل ورق از کوره تعداد گام‌های زمانی برابر با $N_{TS} = 115$ می‌باشد. برای این زمان، در شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ کانتور و رویه سه‌بعدی مؤلفه‌های تنش، به‌منظور مشاهده و مقایسه دقیق مقادیر تنش اطراف ترک، نشان داده شده‌اند. شدت تمرکز تنش در میدان‌های اطراف نوک ترک به‌وضوح مشخص است و با فاصله گرفتن از نوک ترک مقادیر تنش کاهش می‌یابد. همچنین در کانتورهای مؤلفه‌های تنش مشاهده می‌شود که مناطقی با تنش فشاری در اطراف تنش کششی حیطه نوک ترک توزیع شده‌است که می‌تواند باعث افزایش مقدار K_I شود. این نتیجه و همچنین کانتورهای تنش، با نتایج آزمایشگاهی ارائه شده در مرجع [۱۸] در تطابق قابل‌قبولی قرار دارند.

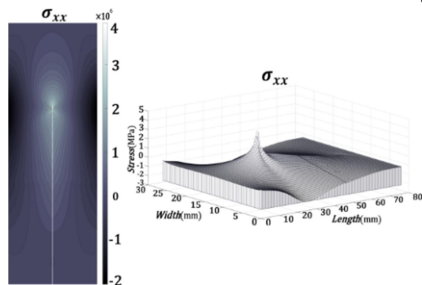


شکل ۱۱- مسیر رشد ترک در (الف): کار تجربی [۲۱] (ب): کار حاضر

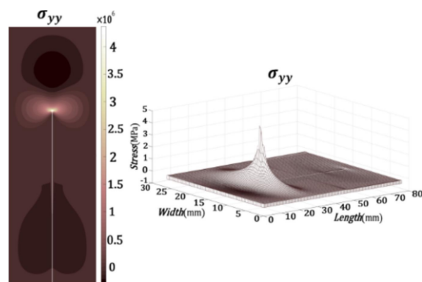
به‌منظور ارائه دقیق مقادیر عددی و نقطه‌به‌نقطه میدان‌های تنش و همچنین مقایسه کمی آن‌ها با یکدیگر، دستگاه مختصات (x, y) متصل به نوک ترک همانند شکل ۱۵ فرض شده است. نقاط A و B به ترتیب محل تقاطع محورهای x و y با مرزهای ورق است. شکل ۱۶ تغییرات مؤلفه‌های تنش در راستای محور عمودی را نشان می‌دهد. در این شکل، منحنی‌های کار حاضر با منحنی‌های مربوط به کار آزمایشگاهی [۱۸] در تطابق قابل‌قبولی قرار دارند. شکل‌های ۱۷ و ۱۸ به‌ترتیب تغییرات میدان‌های تنش در طول خطوط فرضی OA و OB در زمان خروج کامل ورق از کوره را نشان می‌دهند. با توجه به این نمودارها تنش σ_{xy} در راستای هر دو محور افقی و عمودی با فاصله گرفتن از نوک ترک به صفر میل می‌کند. به علاوه مقادیر تنش‌های σ_{xx} و σ_{yy} بر روی محورهای موازی با راستای آن‌ها کاملاً مثبت است و همچنین نسبت به به محورهای متعامد مقادیر بیشتری را دارند (σ_{xx} در راستای محور عمودی و σ_{yy} در راستای محور افقی می‌باشد). اما مقادیر آن‌ها بر روی محورهای عمود بر راستای آن‌ها (σ_{xx} بر روی OX و σ_{yy} بر روی OY) با فاصله گرفتن از نوک ترک منفی می‌شود. با این تفاوت که مقادیر منفی σ_{xx} بر روی OX با فاصله بیشتر از نوک ترک شدت بیشتری می‌گیرد اما مقادیر منفی σ_{yy} بر روی OY نهایتاً به صفر میل خواهد کرد.

بعد از مقایسه و راستی‌آزمایی و بدست آوردن خروجی‌های جدید، حال می‌توان به تعمیم مسئله برای مسائل مشابه و مرتبط دیگر پرداخت.

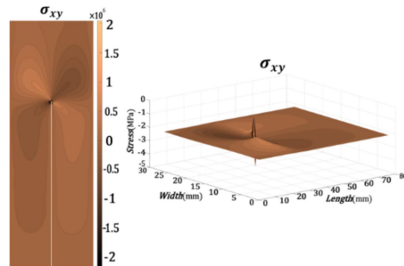
از این رو اثر پارامترهای جنس، ضخامت و سرعت ورق بر ضریب شدت تنش (به‌عنوان مهمترین پارامتر توصیف‌کننده شرایط اطراف نوک ترک) مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای بررسی اثر جنس، فرآیند مسئله برای دیگر شیشه‌های سیلیسی پرکاربرد، انجام می‌گیرد. در جدول ۲ خواص تعدادی از پرکاربردترین شیشه‌های سیلیسی نمایش داده شده‌است. شکل ۱۹ تغییرات K_I در طول زمان را، برای این شیشه‌ها و همچنین شیشه سودالایم نشان می‌دهد. جهت نمایش واضح‌تر مقادیر شدت تنش، که در بازه‌های زمانی پایانی رشد سریع تری داشته‌اند، از مقیاس لگاریتمی استفاده شده است.



شکل ۱۲- توزیع تنش σ_{xx} در هنگام خروج کامل ورق از کوره



شکل ۱۳- توزیع تنش σ_{yy} در هنگام خروج کامل ورق از کوره



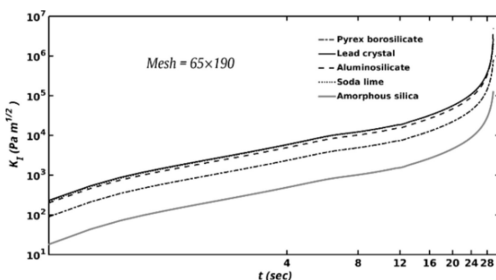
شکل ۱۴- توزیع تنش σ_{xy} در هنگام خروج کامل ورق از کوره

با مقایسه داده‌های جدول ۲ و نمودار شکل ۱۹ مشخص می‌شود که مهمترین عامل در افزایش K_I ، ضریب انبساط گرمایی است. به‌گونه‌ای که شیشه‌های با ضریب انبساط گرمایی بزرگتر، K_I بزرگتری نیز دارند. بعد از ضریب انبساط گرمایی، مدول یانگ و پخشندگی گرمایی از عوامل تاثیرگذار دیگر هستند. مثلاً آلومینوسیلیکات با وجود این‌که ضریب انبساط گرمایی بسیار پایین‌تری نسبت به کریستال سرب‌دار و سودالایم دارد. اما چون دارای مدول یانگ و پخشندگی گرمایی بزرگتری است، منحنی آن بسیار نزدیک به دو شیشه دیگر است و حتی در لحظات آخر ضریب شدت تنش آن بزرگتر از کریستال سرب‌دار می‌باشد. با مقایسه پیرکس بوروسیلیکات و آلومینوسیلیکات می‌توان به این نتیجه منطقی دست پیدا کرد که در لحظات ابتدایی مدول یانگ تاثیرگذارتر از

شیشه نسبت داد. همان طور که قبلا توضیح داده شد، قابل توجه بودن ظرفیت گرمایی و کم بودن رسانایی گرمایی شیشه باعث می شود که عامل غالب خنک شدن ورق در زمان های اولیه، جابجایی گرمایی مرزهای ورق باشد. بنابراین با کاهش سرعت ورق فرصت بیشتری برای جابجایی گرمایی مرزها و همچنین رسانایی گرمایی داخل ورق ایجاد می شود. از این رو با کاهش سرعت ورق، گرادیان های دمایی و بالتبع K_I در زمان کمتری افزایش می یابد.

جدول ۲- خواص تعدادی از پرکاربردترین شیشه های سیلیسی [۱۹]

خواص شیشه ها	سیلیس آمورف ^۱	پیرکس بوروسیلیکات ^۲	کریستال سرب دار ^۳	آلومینوسیلیکات ^۴
$E(GPa)$	۷۳	۶۴	۶۰	۸۹
ν	۰/۱۷	۰/۳۰	۰/۲۲	۰/۲۵
$\rho(kg/m^3)$	۲۲۰۰	۲۲۳۰	۳۱۰۰	۲۶۷۰
$k(J/m.s.K)$	۱/۳۸	۱/۱۴	۰/۹	۱/۲
$\alpha(10^{-6}/K)$	۰/۵۵	۳/۳	۹/۲	۴/۶
$c_p(J/kg.K)$	۷۴۰	۸۵۰	۶۶۰	۷۱۰
$\kappa(10^{-7}m^2/s)$	۸/۴۸	۶/۰۱	۴/۴	۶/۳۳

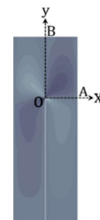


شکل ۱۹- تغییرات K_I شیشه های سیلیسی با زمان در مقیاس لگاریتمی

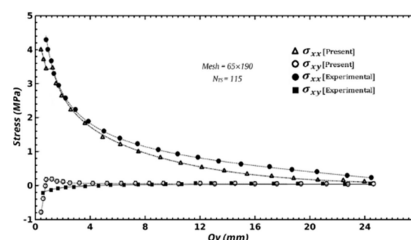
۵- نتیجه گیری

هدف از انجام این تحقیق، ارائه چارچوب فرمول بندی کلی برای مسائل رشد ترک در ورق های متحرک تحت بارهای گرمایی گذرا با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته می باشد. در این راستا، برای ورق های شیشه ای سیلیسی ترک دار، که دارای جابجایی گرمایی مرزی متحرک با محیط هایی با دماها و ضرایب جابجایی گرمایی متفاوتی هستند، فرمول بندی اجزاء محدود توسعه یافته ارائه شد. همچنین حل عددی دقیقی برای دستگاه معادله ماتریسی گرمای گذرا به کمک شمای نیمه ضمنی کرنک-نیکلسون و معیار پایداری فون-نیومن ارائه و بکار بسته شد. توانایی چارچوب فرمول بندی ارائه شده، از طریق مقایسه خروجی های مسئله برای شیشه سودالایم با نتایج آزمایشگاهی، سنجیده شد که مسیر رشد ترک در تطابق کامل با مراجع قرار داشت. سپس نحوه توزیع مؤلفه های تنش در اطراف ترک بصورت کانتور ارائه شد. در کانتور مؤلفه های تنش، مناطقی با تنش فشاری در اطراف تنش های کششی حیطه نوک ترک توزیع شده اند که می تواند دلیل اصلی افزایش قابل ملاحظه مد اول ضریب شدت تنش باشد. این نتیجه و همچنین کانتورهای تنش نیز در تطابق قابل قبولی با مراجع قرار دارند. در ادامه

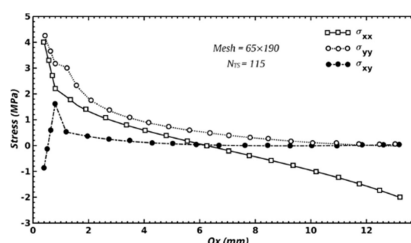
پخشندگی گرماییست و در ادامه تاثیرگذاری پخشندگی گرمایی از مدول یانگ بیشتر می شود. چرا که فاصله منحنی پیرکس بوروسیلیکات از منحنی آلومینوسیلیکات با گذشت زمان کاهش می یابد. همین نتیجه را از سیلیس آمورف، که دارای بیشینه پخشندگی گرمایی و کمینه ضریب انبساط گرمایی است، می توان استنباط کرد.



شکل ۱۵- دستگاه مختصات تعریف شده جهت مقایسه کمی تنش ها

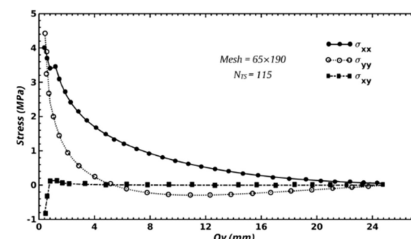


شکل ۱۶- تغییرات مؤلفه های تنش در طول محور عمودی Oy



شکل ۱۷- تغییرات میدان های تنش در طول محور افقی Ox

باتوجه به استفاده از نظریه ورق کیرشهف جهت بدست آوردن معادلات و براساس داده های مسئله نسبت ضخامت به ضلع کوچک ورق نباید بیشتر 0.05 باشد. بنابراین برای بررسی اثر ضخامت محدوده مناسب 0.5 میلی متر تا 1.3 میلی متر در نظر گرفته شده است. شکل ۲۰ اثر ضخامت ورق بر K_I را در گام زمانی پنجم نشان می دهد که با افزایش ضخامت K_I کاهش می یابد. همچنین هرچه ضخامت به مقدار بحرانی نزدیک تر می شود، سرعت تغییرات K_I کمتر می شود.



شکل ۱۸- تغییرات میدان های تنش در طول محور افقی Oy

شکل ۲۱ اثر سرعت انتقالی ورق بر K_I را در گام زمانی پنجم مشخص می کند. این نمودار نشان می دهد که با افزایش سرعت، K_I تقریباً بصورت خطی کاهش می یابد. دلیل این پدیده را می توان به جنس

¹ Amorphous silica

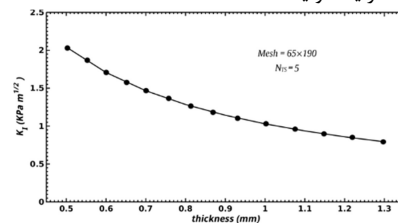
² Pyrex borosilicate

³ Lead crystal

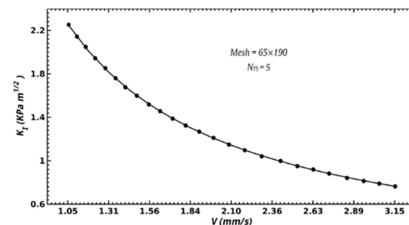
⁴ Aluminosilicate

- [10] Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T., Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, No. 11, pp. 1549–1570, 2000.
- [11] Duflo M., The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanic. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 5, pp. 827–847, 2008.
- [12] Zamani A., Eslami M. R., Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 10, pp. 1392–1404, 2010.
- [13] Yuse A., Sano M., Transition between crack patterns in quenched glass plates. *Nature*, Vol. 362, No. 6418, pp. 329–331, 1993.
- [14] Bouchbinder E., Hentschel H. G. E., Procaccia I., Dynamical instabilities of quasistatic crack propagation under thermal stress. *Physical Review E*, Vol. 68, No. 3, pp. 36601, 2003.
- [15] Yoneyama S., Kikuta H., Moriwaki K., Simultaneous observation of phase-stepped photoelastic fringes using a pixelated microretarder array. *Optical Engineering*, Vol. 45, No. 8, pp. 83604, 2006.
- [16] Sakaue K., Yoneyama S., Kikuta H., Takashi M., Evaluating crack tip stress field in a thin glass plate under thermal load. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 5, pp. 1015–1026, 2008.
- [17] Pais M., Kim N. H., Davis T., Reanalysis of the extended finite element method for crack initiation and propagation. In *Proceedings of AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2010.
- [18] Yoneyama S., Sakaue K., Experimental–numerical hybrid stress analysis for a curving crack in a thin glass plate under thermal load. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 131, pp. 514–524, 2014.
- [19] Bansal N. P., Doremus R. H., *Handbook of glass properties*, Elsevier, 2013.
- [20] Westergaard H. M., Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. A49–A53, 1939.
- [21] Williams M. L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No. 1, pp. 109–114, 1957.
- [22] Mohammadi S., *XFEM fracture analysis of composites*, John Wiley & Sons, 2012.
- [23] Fleming M., Chu Y. A., Moran B., Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L., Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 8, pp. 1483–1504, 1997.
- [24] Babuška I., Melenk J. M., The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 4, pp. 727–758, 1997.
- [25] Belytschko T., Moës N., Usui S., Parimi C., Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, No. 4, pp. 993–1013, 2001.
- [26] Bower A. F., *Applied mechanics of solids*, CRC press, pp. 49–73, 2009.
- [27] Hutton D. V., Wu J., *Fundamentals of finite element analysis*, pp. 131–285, McGraw-Hill, New York, 2004.
- [28] Astley R. J., *Finite elements in solids and structures, An introduction*, pp. 102–104, Chapman & Hall (Springer), 1992.
- [29] Goli E., Bayesteh H., Mohammadi S., Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the framework of partition of unity and the path-independent interaction integral. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 131, pp. 100–127, 2014.
- [30] Hetnarski R. B., *Encyclopedia of Thermal Stresses*, pp. 1611–1612, Springer Reference, 2014.
- [31] Moaveni S., *Finite element analysis: theory and application with ANSYS*, pp. 445–451, Pearson Education, India, 2003.
- [32] Charney J. G., Fjörtoft R., Neumann J. V., Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus A*, Vol. 2, No. 4, pp. 237–254, 1950.

به‌منظور مقایسه کمی مؤلفه‌های تنش با یکدیگر، مقادیر آن‌ها در مسیرهای موازی و عمود بر نوک ترک ارزیابی شده‌اند. در پایان فرآیند مسئله برای دیگر شیشه‌های سیلیسی پرکاربرد انجام شده‌است و اثر خواص گرمایی و مکانیکی آن‌ها بر مد اول ضریب شدت تنش مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده‌است. به‌علاوه با ارزیابی اثر سرعت و ضخامت مشخص شد که هر دو پارامتر با مد اول ضریب شدت تنش نسبت عکس دارند. باتوجه به دستاوردهای این تحقیق استفاده از روش اجزاءمحدود توسعه‌یافته برای فرآیند مذکور نتایج رضایت بخشی را به همراه داشته‌است و می‌توان از دستاوردهای این تحقیق جهت تحلیل فرآیندهای مرتبط و مشابه دیگر استفاده کرد. همچنین این چارچوب فرمول‌بندی، از طریق ارائه چشم‌اندازی بهتر و داده‌هایی دقیق‌تر درباره رفتار ترک در ورق‌های شیشه‌ای می‌تواند به شرکت‌های تولیدکننده، جهت بهبود فرآیند تولید، کمک کند.



شکل ۲۰- اثر ضخامت ورق در محدوده نظریه ورق کیرشیف بر K_I



شکل ۲۱- اثر سرعت انتقالی ورق بر K_I

۶- مراجع

- [1] Ronsin O., Perrin B., Dynamics of quasistatic directional crack growth. *Physical Review E*, Vol. 58, No. 6, pp. 7878, 1998.
- [2] Yang B., Ravi-Chandar K., Crack path instabilities in a quenched glass plate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 49, No. 1, pp. 91–130, 2001.
- [3] Yazid A., Abdelkader N., Abdelmadjid H., A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 12, pp. 4269–4282, 2009.
- [4] Belytschko T., Black T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1999.
- [5] Dolbow J., Belytschko T., A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 1, pp. 131–150, 1999.
- [6] Stolarska M., Chopp D. L., Moës N., Belytschko T., Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, No. 8, pp. 943–960, 2001.
- [7] Bordas S., *Extended finite element and level set methods with applications to growth of cracks and biofilms*, PhD Thesis, Northwestern University, 2003.
- [8] Osher S., Sethian J. A., Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, No. 1, pp. 12–49, 1988.
- [9] Duflo M., A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, No. 11, pp. 1261–1302, 2007.