

روش شبکه بولتزمن برای بررسی تاثیر لزجت تابع دما در جریان سیال غیرنیوتنی گرمایی از روی سیلندر مربعی

امین امیری دلویی*
رسول محبی
عبدالرحمن کردوانی

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران
استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بوشهر، بوشهر، ایران

چکیده

در مطالعه حاضر، مساله جریان سیال غیرنیوتنی با لزجت تابع دما از روی یک سیلندر مربعی غیرهمدما بررسی شده است. مدل سیال کاربو-یاسودا برای شبیه سازی خواص غیرنیوتنی سیال بکار گرفته شده است. از روش شبکه بولتزمن غیرنیوتنی، با ویژگی محاسبات محلی، برای شبیه سازی عددی معادلات مومنوم و انرژی بهره گرفته شده است. تحلیل شبکه و صحت سنجی نتایج با موفقیت انجام پذیرفته است. شبیه سازیها برای محدوده وسیعی از پارامترهای مساله شامل عدد رینولدز $10 < Re < 50$ ، شاخص غیرنیوتنی $0.3 < n < 1$ و شاخص باریک شوندگی دمایی $0 < b < 0.5$ انجام شده است. شبیه سازیها نشان می دهند که روش پیشنهادی به خوبی می تواند خواص تابع نرخ برش و دما را در جریان سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا پیش بینی نماید. نتایج نشان می دهند که با افزایش شاخص باریک شوندگی دمایی، ضریب پسا و عدد ناسلت متوسط به ترتیب کاهش و افزایش خواهند یافت. **واژه های کلیدی:** سیال غیرنیوتنی، مدل کاربو-یاسودا، روش شبکه بولتزمن، مانع مربعی.

Investigation of Temperature-dependent Viscosity Effect on Thermal Non-Newtonian Fluid Flow over a Square Cylinder by Lattice Boltzmann Method

A. Amiri Delouei

Department of Mechanical Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran

R. Mohebbi

School of Engineering, Damghan University, Damghan, Iran

A.H.Kordavani

Mechanical Engineering Department, Azad University of Booshehr, Booshehr, Iran

Abstract

In the present study, the non-Newtonian fluid flow with the temperature-dependent viscosity over a non-isothermal square cylinder is investigated. Carreau-Yasuda model is utilized to simulate the non-Newtonian properties of the fluid. Non-Newtonian Lattice Boltzmann method, with local computing features, is used to numerical simulate of momentum and energy equations. Grid analysis and validation of results have been successfully completed. Simulations are accomplished for a wide range of parameters including Reynolds number $10 < Re < 50$, Non-Newtonian index $0.3 < n < 1$, and temperature-thinning index $0 < b < 0.5$. Simulations show that the proposed method is able to predict the shear- and temperature-dependent properties of Carreau-Yasuda non-Newtonian fluid flow. The results show that increasing of temperature-thinning index leads to reduction and increment of the drag coefficient and Nusselt number, respectively.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, Non-Newtonian Fluid, Carreau-Yasuda, Square Cylinder.

نیازی به حل معادلات دیفرانسیل نبوده و تمامی محاسبات به صورت صریح صورت می پذیرند. به همین دلیل قابلیت موازی سازی در این روش بسیار بالا بوده و یکی از مزایای این روش به حساب می آید. همچنین سهولت اعمال شرایط مرزی عدم لغزش در این روش سبب شده است که مدل سازی حرکت سیال در هندسه های پیچیده نظیر اجسام متخلخل با سادگی چشمگیری نسبت به روش های متداول در دینامیک سیالات محاسباتی صورت پذیرد. تاکنون عمده تحقیقات انجام گرفته در این خصوص، بر جریان های خارجی حول سیلندر دایره ای شکل متمرکز بوده و در زمینه جریان حول مانع مربعی و شناخت تأثیرات دیواره های محدودکننده جریان، مطالعات کمی صورت گرفته است [۱-۳].

مقدمه

حل عددی معادلات حرکت جریان سیال از اهمیت ویژه ای در مسائل علمی و صنعتی برخوردار است. این امر نه تنها در مسائل صنعتی سبب تسریع در امر طراحی و تحلیل اثرات جریان و نهایتاً کاهش هزینه ها می گردد، که از نقطه نظر تئوری نیز برای رسیدن به درک صحیحی از جزئیات سینماتیکی و دینامیکی جریان سیال حائز اهمیت است. روش عددی شبکه بولتزمن یکی از روش های نسبتاً جدید برای حل معادلات جریان سیال است که علیرغم جوان بودن و گذشت زمان نسبتاً کوتاه از پیدایش و مورد استفاده قرار گرفتن آن، موفقیت های چشمگیری را در حل جریان های پیچیده با دقت بالا بدست آورده است. با توجه به ماهیت و نظریه روش شبکه بولتزمن در این روش

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: a.a.delouei@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۱/۰۹

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۴/۱۱

در صنعت، کاربردهای متعددی می‌توان مشاهده نمود. از جمله کاربردهای عملی این نوع جریان می‌توان به جریان حول دودکش‌ها، ساختمان‌ها و سازه‌های بلند، سازه‌های دریایی، پل‌های معلق، برج‌ها، دکل‌ها و وسایل اندازه‌گیری جریان اشاره کرد. عدم تقارن جریان گردابه‌ای نزدیک جسم در طول زمان، موجب تولید نیروهای برآ و پسیا نوسانی شده که می‌تواند باعث ارتعاش در جسم شود. به همین علت سازه‌ها بایستی بگونه‌ای طراحی شوند تا از قدرت فاجعه آمیز نوسانات تولید شده جریان در امان بمانند. طراحی مجموعه ساختمان‌ها و آسمان خراش‌ها بگونه‌ای صورت می‌گیرد که اتلاف گرما و ته نشینی گرد و غبار حداقل شود. در دهه‌های اخیر روش شبکه بولتزن برای شبیه‌سازی جریان سیال و انتقال گرما مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. بر خلاف روش‌های مرسوم (CFD)، روش شبکه بولتزن بر پایه مدل میکروسکوپی و معادله جنبشی مزوسکوپی استوار است که در آن رفتار مجموعه ذرات یک سیستم برای شبیه‌سازی مکانیک پیوسته آن به کار گرفته می‌شود.

کارهای زیادی در خصوص بررسی جریان سیال با استفاده از روش شبکه بولتزن انجام شده است اما در اکثر این کارها از سیال نیوتنی و یا سیال غیرنیوتنی توانی ساده برای شبیه‌سازی عددی استفاده شده است. اورتگا و همکارانش [۴] در سال ۲۰۰۰ جریان لایه‌ای ناپایدار را در عبور از موانع مربعی واقع در کانال بررسی نموده‌اند. ایشان عدد ناسلت متوسط و هم‌چنین خواص آیرودینامیکی مانند ضریب پسا، ضریب فشار و عدد استروهال را محاسبه کرده و به این نتیجه رسیدند که اعداد ناسلت و استروهال با نزدیک شدن مانع به دیواره‌های کانال کاهش می‌یابند. بتچرایا و میتی [۵] در سال ۲۰۰۴ جریان اطراف یک مانع مربعی را که موازی با دیواره و در داخل لایه مرزی قرار گرفته بود را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق جریان لایه‌ای فرض شده و سیلندر در فواصل مختلف از صفحه واقع شده است. نتایج حاکی از کاهش عدد استروهال و افزایش نیروی پسا با کاهش فاصله مانع تا صفحه است. ژو و همکارانش [۶] در سال ۲۰۰۴ جریان تراکم‌ناپذیر لایه‌ای در اطراف یک سیلندر مربعی واقع در مرکز کانال را برای رینولدزهای مختلف (۱۵۰، ۳۰۰ و ۱۵۰۰) بررسی کرده‌اند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که با افزایش فاصله دیواره‌ها از مانع، ضریب پسا نیز افزایش می‌یابد. گابانیلی و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۵ با استفاده از مدل توانی، سیال غیرنیوتنی را درون هندسه دوبعدی مشخصی شبیه سازی کرده و پروفیل سرعت و خطوط جریان را نشان داده‌اند. بوید و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۶ در تحقیق خود سیال غیرنیوتنی را با مدل توانی درون یک کانال دوبعدی شبیه‌سازی کرده و پروفیل سرعت درون کانال را برای چند اندیس توانی نشان داده‌اند.

اعتماد و همکاران [۹] جریان ترکیبی سیال غیرنیوتنی مدل توانی را بین دو صفحه افقی تحت شرایط مرزی دما ثابت و شار گرمایی ثابت به روش عددی المان محدود بررسی کرده‌اند. شین و چو [۱۰] جریان داخل کانال با سطح مقطع مستطیل شکل را برای سیالات غیرنیوتنی با در نظر گرفتن تغییرات لزجت نسبت به دما در حالت یک بعدی بررسی نموده‌اند. اشرفی زاده و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۹ با مدل‌های غیر نیوتنی $k-\epsilon$ ، کاسن و کاربو-یاسودا جریان خون درون کانال را شبیه سازی کرده‌اند. اما پرکاربردترین این مدل‌ها، مدل توانی است که قابلیت

شبیه سازی جریان سیال غیر نیوتنی به صورت سیال مستقل از زمان را دارد.

با توجه مطالعات انجام شده، فرض توانی بودن رفتار غیرنیوتنی سیال خصوصاً در نرخ‌های برش پایین با واقعیت‌های تجربی همخوانی ندارد. مدل سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا از جمله مدل‌هایی است که برای پاسخگویی به این مشکل ارایه شده است. شبیه‌سازی عددی جریان لایه‌ای سیال غیرنیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری با استفاده از مدل کاربو-یاسودا توسط شاهمردان و همکاران [۱۲] انجام گردیده است. این نویسندگان اثر کاهش توانی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج آنان نشان می‌دهد با کاهش توانی طول گردابه در ناحیه تغییر سطح مقطع و توسعه یافته جریان افزایش و افت فشار جریان کاهش می‌یابد.

اگر چه سیلندر مربعی هندسه‌ای ساده‌ای دارد اما جریان و انتقال گرما حول آن بسیار پیچیده است. بررسی جریان اطراف سیلندر و داخل کانال از هندسه‌های پرکاربرد در بسیاری از فرایندهای صنعتی است. از جمله کاربردهای صنعتی آن می‌توان از سیستم‌های خنک کننده در فرایندهای شیمیایی و تابلوهای الکترونیکی نام برد. عمرانی و همکاران [۱۳] در مطالعات خود به بررسی مدل‌سازی جابجایی طبیعی سیالات غیرنیوتنی توانی در محفظه مربعی به روش شبکه بولتزن پرداخته‌اند. نتایج بدست آمده دقت بالای روش شبکه بولتزن را در تجزیه و تحلیل جابجایی طبیعی سیالات غیرنیوتنی توانی نشان می‌دهند. آستانینا و همکاران [۱۴] روی جابجایی طبیعی ناپایدار با لزجت وابسته به دما در یک حفره مربعی برای محیط متخلخل تحقیق کردند و نتایج حاکی از آن بود که تشدید جریان همرفتی و انتقال گرما با افزایش پارامتر لزجت تابع دما برای محیط متخلخل، اثر مخالف دارد. پرومال و همکاران [۱۵] به مطالعه شبیه‌سازی جریان لزج روی یک سیلندر مربعی با استفاده از روش شبکه بولتزن پرداختند. هومان و همکاران [۱۶] تأثیر لزجت وابسته به دما را روی انتقال گرمای جابجایی بنارد در یک محیط متخلخل با استفاده از مدل غیرداریسی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین ولی‌پور و همکاران [۱۷] به مطالعه شبیه‌سازی عددی انتقال گرمای جابجایی اطراف یک سیلندر مربعی با استفاده از نانوسیال $AL_2O_3-H_2O$ پرداخته‌اند و نتیجه گرفته‌اند که با افزایش کسر حجمی نانو ذرات، ضریب پسا، ناسلت متوسط و ضریب فشار افزایش پیدا می‌کند. لی و همکاران [۱۸] نیز جریان سیال توانی در حفره مربعی دوبعدی را با استفاده از روش شبکه بولتزن با زمان آسودگی چندگانه شبیه‌سازی کرده‌اند.

در مطالعه حاضر به بررسی جریان سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا از روی یک مانع مربعی پرداخته شده است. استفاده از روش شبکه بولتزن برای شبیه‌سازی جریان در هندسه‌های غیرداریوی و برای سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا از جمله نقاط قوت کار حاضر است. همچنین بررسی اثرات لزجت تابع دما بر جریان سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا با توجه به خواص محلی روش شبکه بولتزن با دقت بالا صورت پذیرفته است. پس از تحلیل شبکه، نتایج به خوبی صحت‌سنجی شده است. نتایج حاصل از مطالعه حاکی از توانایی بالای این روش برای بررسی جریان سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا با خواص تابع دما است.

$$\rho \bar{u} = \sum_{i=0}^8 e_i f_i \quad (7)$$

معادله شبکه بولتزمن انتقال گرما

همانند بخش قبل می‌توان معادله گرمایی شبکه بولتزمن را نیز بیان کرد [۱۹] طبق نتایج هی و همکاران [۲۱] رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$g_i(\bar{x} + e_i \delta t, t + \delta t) - g_i(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau_g} [g_i(\bar{x}, t) - g_i^{eq}(\bar{x}, t)] \quad (8)$$

در این رابطه $g_i(x, t)$ و $g_i^{eq}(x, t)$ به ترتیب بیانگر تابع توزیع چگالی دمای ذره و تابع توزیع تعادلی آن هستند. τ_g نیز زمان رهایی مربوط به معادله انرژی بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_g = 3 \frac{k}{(\rho c p)_f C^2 \delta t} + \frac{1}{2} \quad (9)$$

k رسانایی گرمایی، ρ چگالی و $c p$ گرمای ویژه در فشار ثابت هستند که در این تحقیق با در نظر گرفتن $Pr = 0.71$ و مقدار $\alpha = \frac{k}{\rho c p} = \frac{\nu}{Pr}$ محاسبه شده است. در رابطه (۸) مقدار $g_i^{eq}(x, t)$ نیز از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۲]:

$$g_i^{eq} = w_i T \left[1 + \frac{3}{c^2} e_i \cdot \bar{u} \right], \quad i = 0 \dots 8 \quad (10)$$

دمای محلی از رابطه زیر بدست خواهد آمد [۲۲]:

$$T = \sum_{i=0}^8 g_i \quad (11)$$

مدل غیرنیوتنی کاریو-یاسودا

رابطه تنش و نرخ برش در سیالات نیوتنی به صورت خطی است ولی در مورد سیالات غیرنیوتنی این رابطه غیرخطی است. در سیالات غیرنیوتنی لزجت وابسته به نرخ برش بوده که توسط مدل‌های مختلفی تحت عنوان مدل‌های غیرنیوتنی مطرح می‌شوند. یکی از پرکاربرترین و ساده‌ترین این مدل‌ها، مدل سیال غیرنیوتنی توانی [۲۳] است. اما همانطور که گفته شد، این مدل خصوصاً در نرخ‌های برش پایین تطابق کمی با داده‌های تجربی نشان می‌دهد. یکی دیگر از مدل‌های غیرنیوتنی، مدل کاریو-یاسودا است که توسط رابطه (۱۲) نشان داده شده است و به طور متداول جهت نشان دادن رفتار رقیق برشی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{-\frac{n-1}{a}} \quad (12)$$

η_∞ لزجت در نرخ برش بی‌نهایت، η_0 لزجت در نرخ برشی صفر، λ ثابت زمانی، n شاخص کاریو-یاسودا و a پارامتر بی بعدی است که ناحیه انتقال بین نرخ برش صفر و ناحیه نمایی را بیان می‌کند. معکوس λ نشان دهنده نرخ برش بحرانی است که در آن لزجت با افزایش نرخ برش شروع به کاهش می‌کند. در اغلب محلول‌های پلیمری مقدار η_0 بسیار بزرگتر از η_∞ است. لذا مقدار η_∞ در برخی کاربردهای مهندسی برابر صفر در نظر گرفته شده است. در مدل کاریو-یاسودا با قرار دادن مقدار n برابر یک، مدل به سیال نیوتنی تبدیل می‌شود. در مدل کاریو برای نرخ‌های برشی بزرگتر 10^4 لزجت η_∞ ثابت

روش شبکه بولتزمن

همان گونه که اشاره شد، روش شبکه بولتزمن یک روش عددی نوین است که در شبیه‌سازی جریان سیال و پدیده‌های انتقال گرما مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۹]. در ادامه روابط بولتزمن مربوط به معادلات جریان سیال و انتقال گرما بیان خواهد شد.

معادله شبکه بولتزمن جریان سیال

روش شبکه بولتزمن براساس نظریه جنبشی، جریان سیال را با دنبال کردن سیر تکاملی توزیع چگالی ذره، شبیه‌سازی می‌کند. در این تحقیق، از مدل شبکه بولتزمن دو بعدی با نه مولفه سرعت محلی Q_2 استفاده شده است. e_i سرعت محلی تک ذره است که مقدار آن در هر جهت طبق رابطه زیر مشخص می‌شود [۲۰]:

$$e_i = \begin{cases} (0, 0) & i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c & i = 1, 2, 3, 4 \\ (\sqrt{2}(\cos[(i-5)\pi/2 + \pi/4], \sin[(i-5)\pi/2 + \pi/4])c & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (1)$$

اندیس i بیانگر جهت سرعت تک ذره و c سرعت شبکه است که معمولاً یک در نظر می‌شود. اگر $f_i(x, t)$ و $f_i^{eq}(x, t)$ به ترتیب بیانگر تابع توزیع چگالی ذره و تابع توزیع تعادلی آن باشد، معادله تکاملی در میدان سرعت به صورت زیر بیان خواهد شد [۲۰]:

$$f_i(\bar{x} + e_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau_f} [f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)] \quad (2)$$

این معادله با تعیین سیر تکاملی میدان چگالی و سرعت، بقای جرم و مومنتم را بیان می‌کند. معادله (۲) را می‌توان از معادله پیوسته بولتزمن نیز بدست آورد [۲۱]. در این معادله، δt گام زمانی و τ_f زمان رهایی مربوط به معادله مومنتم است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_f = 3\nu + 1/2 \quad (3)$$

که ν ویسکوزیته سینماتیک سیال است. تابع توزیع تعادلی ذره به میزان چگالی محلی و سرعت سیال وابسته بوده و به صورت زیر بیان می‌شود [۲۰]:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + \frac{3}{c^2} e_i \cdot \bar{u} + \frac{9}{2c^4} (e_i \cdot \bar{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \bar{u}^2 \right] \quad i = 0 \dots 8 \quad (4)$$

که در رابطه (۴)، تابع وزنی w_i دارای مقادیر زیر است:

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & i = 0 \\ \frac{1}{9} & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{36} & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (5)$$

همچنین چگالی و سرعت‌های ماکروسکوپی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (6)$$

است [۲۴]. نرخ برش در مدل‌های غیرنیوتنی به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (۱۳)$$

$$D_{II} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \quad (۱۴)$$

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{D_{II}} \quad (۱۵)$$

در روابط بالا S تانسور نرخ کرنش، u مولفه سرعت محلی سیال، D_{II} مانای دوم تانسور نرخ کرنش و $\dot{\gamma}$ نرخ برش هستند. تانسور نرخ کرنش با استفاده از سرعت‌های ماکروسکوپی (معادله ۱۳) تعیین گردیده‌اند. شایان ذکر است مشتقات معرفی شده در معادله (۱۳) به صورت مرکزی محاسبه شده است (به جز در نقاط روی مرز کانال). هنگام استفاده معادله (۱۴) باید توجه داشت که سیال به صورت تراکم ناپذیر فرض شده است. فرم باز شده معادلات فوق در پیوست مقاله ذکر گردیده است. قابل ذکر است عدد رینولدز و عدد پراتل به ترتیب از روابط ذیل محاسبه می‌گردد:

$$Re = \frac{\rho u_0 D}{\eta_0} \quad (۱۶)$$

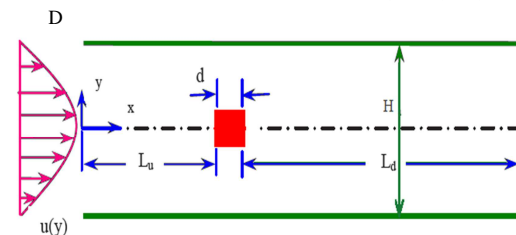
$$Pr = \frac{\eta_0}{\rho \alpha} \quad (۱۷)$$

مشخصات مساله مورد مطالعه

در این بخش مشخصات هندسی و شرایط مرزی مساله مورد مطالعه بیان می‌شود.

مشخصات هندسی

در این مساله یک مانع مربعی روی خط میانی کانال واقع شده است. فاصله‌ی مانع تا صفحات کانال در این هندسه برحسب، $\beta = d/H$ ، که نسبت انسداد است، بیان می‌گردد. شکل ۱ نمایی از هندسه‌ی بکار برده شده را نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود طول ضلع مانع مربعی d و عرض کانال H در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- مشخصات هندسه‌ی مساله

به منظور کاهش تاثیر شرایط مرزی ورودی و خروجی بر حل میدان جریان، نسبت طول کانال به طول مانع برابر ۴۲ قرار داده شده است. فواصل بالادست (ورودی کانال تا مانع) و پایین دست (ازمانع مربعی تا خروجی کانال) به ترتیب $L_d = 30d$ و $L_u = 11d$ فرض شده‌اند. مکان مانع مربعی بر اساس کارهای قبلی انجام شده، انتخاب شده است تا بتوان مقایسه‌ای با کارهای قبلی (در حالت سیال نیوتنی) داشت.

همچنین جریان غیرنیوتنی سیال به صورت لایه‌ای، تراکم ناپذیر و پایدار در نظر گرفته شده است. سرعت ورودی کانال ثابت و جریان توسعه یافته فرض شده و با استفاده از مدل زو و هی [۲۵] مدل شده است. در خروجی نیز شرط مرزی گرادیان سرعت ثابت اعمال شده است. برای دیواره‌های بالا و پایین نیز از مدل بازگشت به عقب [۲۶] برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش استفاده شده است. همچنین شرط مرزی دما ثابت برای دیواره بالایی، پایینی و ورودی جریان و شرط گرادیان دما ثابت برای خروجی در نظر گرفته شده است. از مدل کاریو-یاسودا برای بیان رفتار رقیق برشی سیال استفاده شده است. الگوریتم حل با توجه به روش شبکه بولتزمن صورت می‌گیرد. ضرایب مدل کاریو-یاسودا، معادله ۱۲، برای جریان سیال، در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- ضرایب مدل کاریو یاسودا

η_∞	λ	a	n	U_∞
0.005	3.131	2	0.3-1	0.05

تحلیل شبکه

در این قسمت، استقلال روش عددی از شبکه بررسی شده است. به طور کلی ریز کردن اندازه شبکه از یک سو، سبب دقیق‌تر شدن مقادیر عددی شده و از سوی دیگر هزینه محاسباتی را افزایش می‌دهد. از این رو محدوده حل با شبکه‌های مختلفی بررسی شده است تا حداقل اندازه مطلوب شبکه تعیین گردد.

جدول ۲، مشخصات شبکه‌های مورد استفاده در حل عددی این جریان را مشخص می‌نماید. در این جدول از پنج نوع شبکه به منظور دستیابی به دقت بهتر استفاده شده است. تعداد نقاط شبکه روی هر ضلع مانع مربعی از ۱۰ تا ۵۰ نقطه است. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که درصد تغییرات ضریب پسا با افزایش اندازه شبکه کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج میزان درصد تغییرات ضریب پسا با تغییر اندازه شبکه از M4 به M5 تنها ۱/۲٪ بوده است و لذا با در نظر گرفتن هزینه‌های محاسباتی و دقت حل شبکه M4 به عنوان شبکه محاسباتی انتخاب شده است. نتایج محاسبات برای نسبت انسداد ۱ به ۶، شاخص پاورلو ۰/۸ و عدد رینولدز ۴۰ ارائه شده است.

شایان ذکر است که مقادیر ضریب پسا محاسبه شده مطابقت قابل قبولی با نتایج ارائه شده توسط دیمان و همکاران [۲۷] و همچنین نتایج آخیلیش و همکاران [۲۸] دارد که در بخش آینده به تفصیل بحث خواهد شد.

جدول ۲- تحلیل شبکه برای دستیابی به اندازه مناسب شبکه

شبکه مورد بررسی	ابعاد شبکه در کل میدان جریان	ابعاد شبکه در روی سیلندر	درصد تغییرات ضریب پسا
M1	420×60	10×10	11٪
M2	840×120	20×20	5.5٪
M3	1260×180	30×30	4.3٪
M4	1680×240	40×40	2.1٪
M5	2100×300	50×50	---

بولتزمن در شکل ۲ نشان داده شده است. برای حل معادله انرژی نیز از یک روند مشابه استفاده شده است.

جدول ۳- نتایج محاسبات ضریب پسا

Cd	منبع	Re	β	n
1.6206	ترکی و همکاران [28]			
1.5441	آخیلیش و همکاران [27]	150	$\frac{1}{4}$	1
1.6134	کار حاضر			
1.8429	دیمان و همکاران [26]			
1.8442	آخیلیش و همکاران [28]	40	$\frac{1}{6}$	0.8
1.8929	کار حاضر			
2.0238	دیمان و همکاران [27]			
2.0551	آخیلیش و همکاران [28]	40	$\frac{1}{6}$	1.4
2.1778	کار حاضر			

صحت سنجی

در این قسمت، صحت نتایج حاصل از حل عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای منظور اعداد بی‌بعد ضریب پسا [۲۹] و ناسلت متوسط [۲۳] به ترتیب به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho u_{\infty}^2 d} \quad (18)$$

$$Nu = - \frac{D_h \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_w - T_b} \quad (19)$$

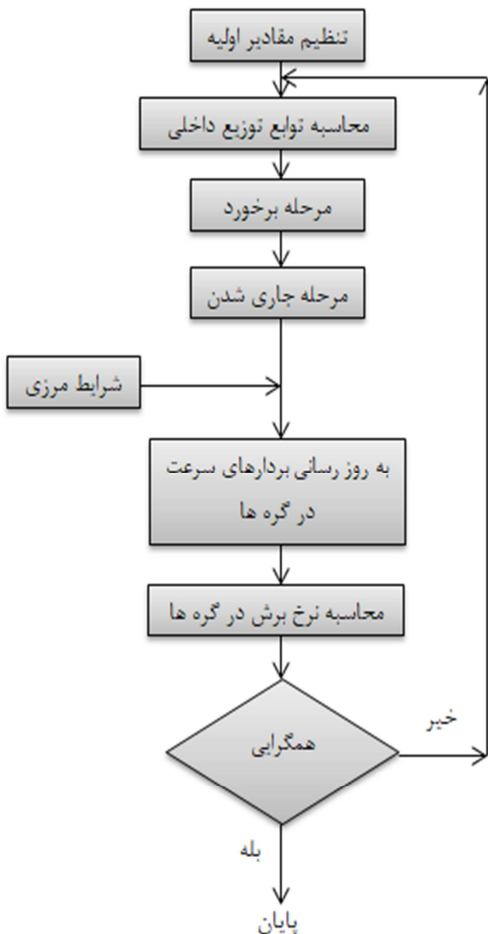
که F_D نیروی پسا، چگالی، u_{∞} سرعت جریان آزاد و d ابعاد سیلندر مربعی است و در رابطه ناسلت متوسط نیز T_b دمای توده بوده و با استفاده از رابطه زیر [۲۳] قابل محاسبه است:

$$T_b = \frac{\int_0^H u \cdot T dy}{\int_0^H u dy} \quad (20)$$

با توجه به مطالعات بسیار کمی که در زمینه سیالات غیرنیوتنی کاریو-یاسودا انجام شده است، از سیال غیرنیوتنی توانی برای صحت سنجی تحقیق حاضر استفاده شده است. همان طور که در جدول ۳ نشان داده شده است، نتایج محاسبات ضریب پسا با نتایج محاسبات دیمان و همکاران [۲۷] و آخیلیش و همکاران [۲۸] با نسبت انسداد ۱ به ۶ و شاخص توانی ۰/۸ و ۱/۴ و رینولدز ۴۰ و همچنین با نتایج محاسبات ترکی و همکاران [۳۰] و آخیلیش و همکاران [۲۸] با نسبت انسداد ۱ به ۴ و شاخص توانی یک (نیوتنی) و رینولدز ۱۵۰ مقایسه شده و تطابق قابل قبولی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده شد مقدار خطا بین نتایج حاضر و نتایج دیمان و همکاران [۲۷] در رینولدز ۴۰ و نسبت انسداد ۱ به ۶ و شاخص پاور لو ۰/۸ تقریباً ۳ درصد و برای شاخص پاور لو ۱/۴ تقریباً ۵ درصد می‌باشد. همچنین مقدار خطا بین نتایج حاضر و نتایج ترکی و همکاران [۳۰] با نسبت انسداد ۱ به ۴، شاخص توانی یک (نیوتنی) و رینولدز ۱۵۰ تقریباً زیر ۱ درصد است. به منظور بررسی صحت مدل گرمایی شبکه بولتزمن، عدد ناسلت متوسط در این روش عددی با نتایج محاسبات قبلی مقایسه شده است. نتایج محاسبات ناسلت متوسط در این تحقیق که برای نسبت انسداد ۱ به ۴، رینولدز ۴۰ و عدد پرانتل ۰/۷۱ انجام شده است برابر با ۳/۱۰۶۹ است که با نتایج محاسبات دیمان و همکاران [۳۱] که برابر با ۳/۰۶۶۷ است، تطابق مناسبی را نشان می‌دهد. این نتایج خصوصاً برای یک شبیه‌سازی غیرخطی غیرنیوتنی بسیار مطلوب است. لازم به ذکر است که با توجه به ناپایداری‌های شدیدی که در n های پایین به دلیل خواص رقیق برشی جریان بوجود می‌آید، حداکثر رینولدز قابل بررسی در حدود ۱۵۰ بوده است.

الگوریتم حل

انتخاب یک الگوریتم مناسب به منظور حل مسئله اشاره شده و دستیابی به نتایج صحیح، بسیار حائز اهمیت است. یک الگوریتم نامطلوب، روند حل مسئله را طولانی کرده و ممکن است باعث واگرا شدن نتایج شود. در روش شبکه بولتزمن غیرنیوتنی، الگوریتم حل به گونه‌های مختلفی بیان می‌شود. الگوریتم حل مساله به روش شبکه



شکل ۲- فلوچارت مراحل انجام الگوریتم روش شبکه بولتزمن غیرنیوتنی

نتایج

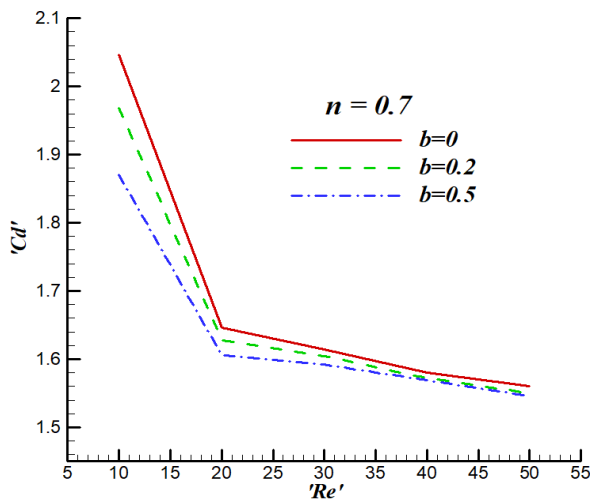
در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی غیرهم‌دما از روی یک مانع مربعی با استفاده از روش شبکه بولتزمن غیرنیوتنی بیان می‌گردد.

برای بدست آوردن نتایج از برنامه فرترن جهت کدنویسی استفاده شده است. قابل ذکر است که از یک پردازنده Intel i5 X990 3.47 GHz با حافظه 8 GB و زمان کل تقریبی ۹۲۰ ساعت برای شبیه‌سازی حاضر استفاده شده است. لازم به توضیح است که مقادیر اولیه مربوط به لزجت محاسباتی در حالت هیدرودینامیک و گرمایی به ترتیب برابر $1/0.772$ و $0/140.8$ تنظیم گردیده است که به ترتیب معادل با زمان آسایش 0.5323 و 0.7113 است.

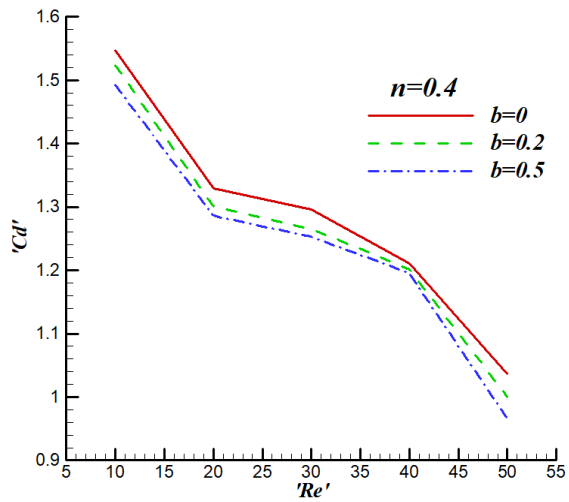
در شکل ۳ تغییرات ضریب پسا بر حسب عدد رینولدز در چهار سیال مختلف با مشخصات n برابر با 0.4 ، 0.7 ، 0.9 و 1 ترسیم شده

است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، ضریب پسا با افزایش عدد رینولدز به علت افزایش نیروی اینرسی در مقابل نیروی لزجی، کاهش می‌یابد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که با افزایش شاخص باریک شونده دمایی (b) از 0 تا 0.5 ، ضریب پسا کاهش پیدا می‌کند. به علاوه در یک عدد رینولدز ثابت، با افزایش شاخص مدل کاریو-یاسودا (n)، ضریب پسا به علت افزایش لزجت سیال و به تبع آن افزایش نیروی پسی اصطکاکی، افزایش می‌یابد. (شکل ۴).

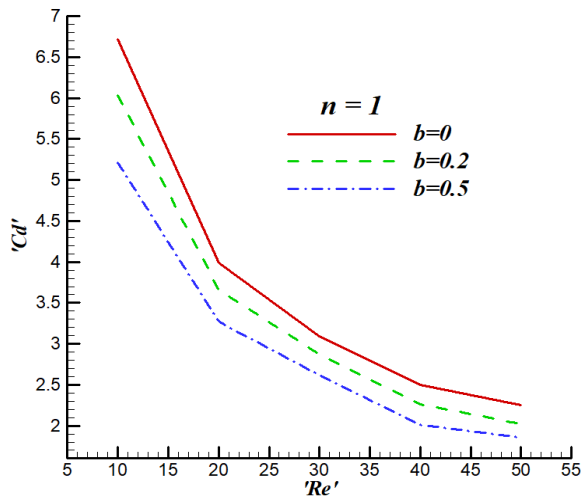
شایان ذکر است به دلیل افزایش بسیار زیاد خواص رقیق برشی در nهای کمتر از 0.2 کد کامپیوتری نوشته شده واگرا خواهد شد. این مشکل برای اکثر کدهای نوشته شده با روش شبکه بولتزمن که قبلاً برای مدل غیرنیوتنی ساده‌تر توانی نیز نوشته شده بود، مشاهده می‌گردد که ناشی از زیاد لزجت محلی و نزدیک شدن زمان آسایش روش شبکه بولتزمن به مقدار ناپایدار 0.5 است.



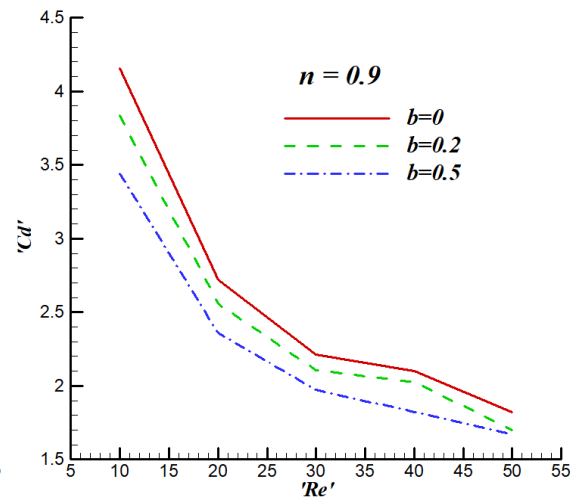
(ب)



(الف)



(د)

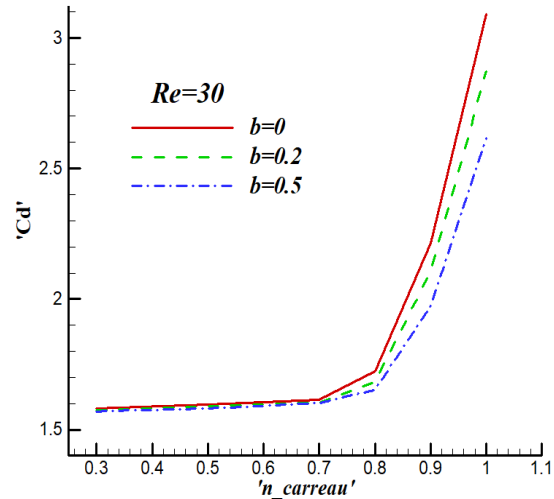


(ج)

شکل ۳- تغییرات ضریب پسا (Cd) بر حسب Re و b ، برای الف) $n=0.7$ ، ب) $n=0.8$ ، ج) $n=0.9$ و د) $n=1$

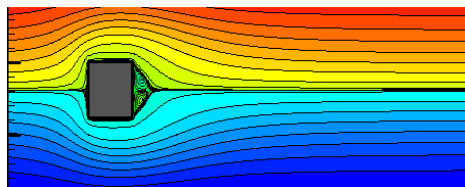
نیروی لزجتی، جدایش سیال از روی استوانه رخ نمی‌دهد اما با افزایش عدد رینولدز، جریان سیال از روی استوانه به تدریج جدا شده و دو گردابه در پشت استوانه شروع به تشکیل شدن می‌کند. این گردابه‌ها با تغییر خواص سیال از سیال نیوتنی ($n=1$) به سیال غیر نیوتنی باریک شونده ($n<1$)، به علت کاهش لزجت سیال و کمتر شدن اثرات نیروی اصطکاک در مقابل نیروی اینرسی، شروع به بزرگ شدن می‌کنند. علاوه بر این همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز در یک شاخص غیرنیوتنی ثابت، طول گردابه‌های تولید شده افزایش یافته و نقطه جدایش در زاویه کمتری نسبت به نقطه سکون اتفاق می‌افتد.

شکل ۷ تغییرات عدد ناسلت متوسط را با عدد رینولدز نمایش می‌دهد. همان گونه که مشاهده می‌شود با تغییر شاخص غیرنیوتنی توانی در مدل کاریو-یاسودا از 0.7 تا 1 ، که موجب افزایش نیروهای اینرسی در مقایسه با نیروی اصطکاک می‌شود، عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد. از طرفی مطابق شکل ۷، با افزایش شاخص باریک شوندگی دمایی از 0 تا 0.5 در هر کدام از شاخص‌های کاریو-یاسودا، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. همچنین نمودار منحنی ناسلت متوسط بر حسب شاخص کاریو-یاسودا در یک عدد رینولدز مشخص مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود با افزایش شاخص کاریو-یاسودا، عدد ناسلت متوسط نیز کاهش پیدا می‌کند.

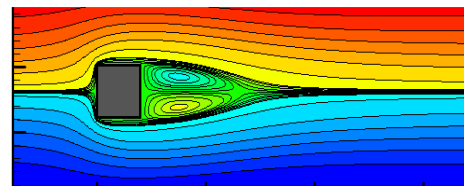


شکل ۴- تغییرات ضریب پسا (Cd) بر حسب n و b، در رینولدز ۳۰

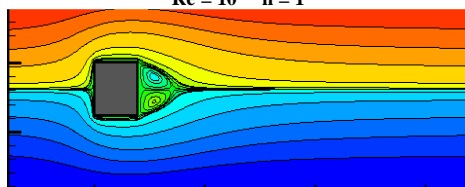
در شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب خطوط جریان سیال غیرنیوتنی ($n=0.7$) و نیوتنی ($n=1$) با شرط لزجت تابع دما در شاخص باریک شوندگی دمایی 0.2 و در رینولدزهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در اعداد رینولدز کم ($Re=10$)، در سیال نیوتنی ($n=1$)، به علت کم بودن اثرات نیروی اینرسی در مقابل



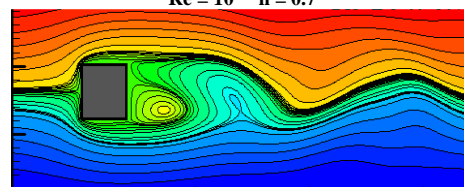
Re = 10 n = 1



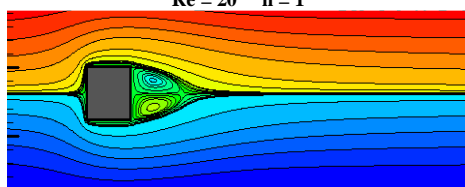
Re = 10 n = 0.7



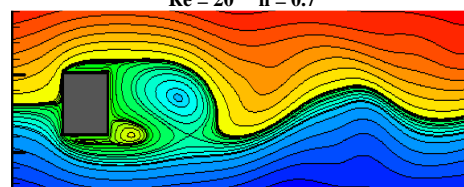
Re = 20 n = 1



Re = 20 n = 0.7



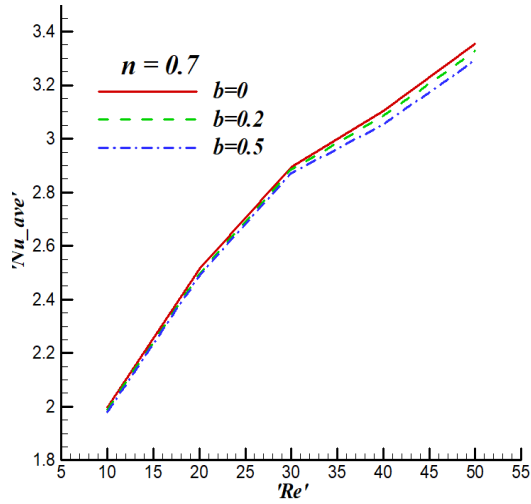
Re = 30 n = 1



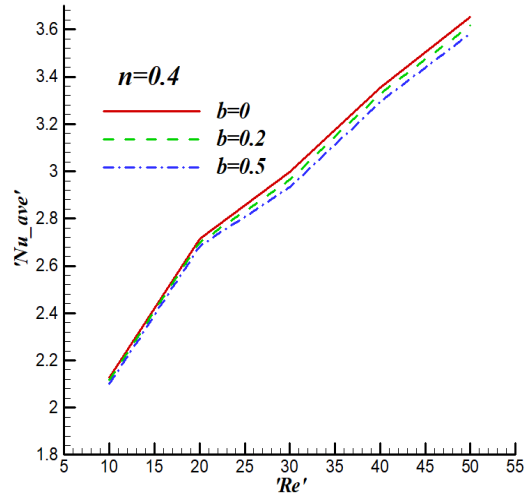
Re = 30 n = 0.7

شکل ۶- خطوط جریان سیال نیوتنی در n برابر با ۱ و b برابر 0.2 در رینولدزهای مختلف

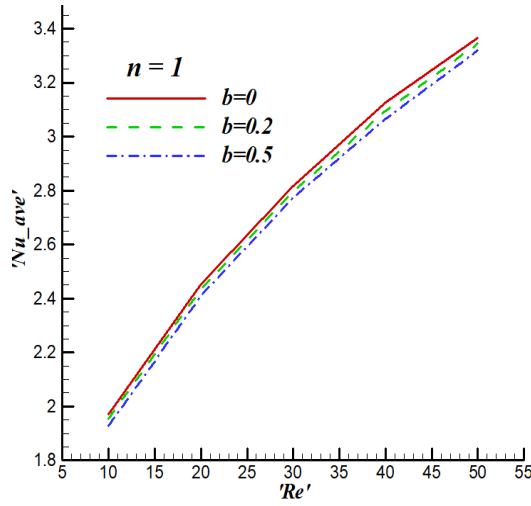
شکل ۵- خطوط جریان سیال غیر نیوتنی در n برابر با 0.7 و b برابر 0.2 در رینولدزهای مختلف (۱۰۰۰۰ تکرار)



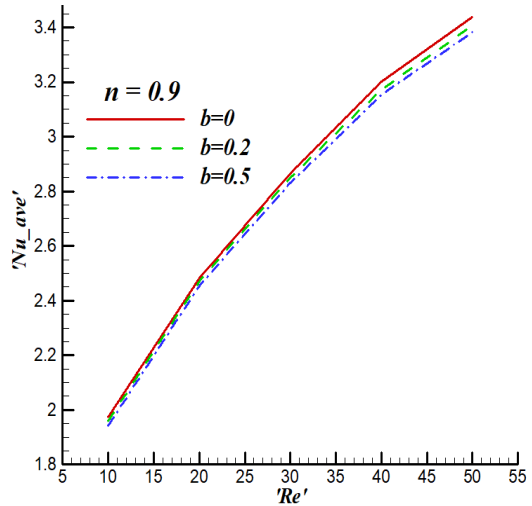
(ب)



(الف)

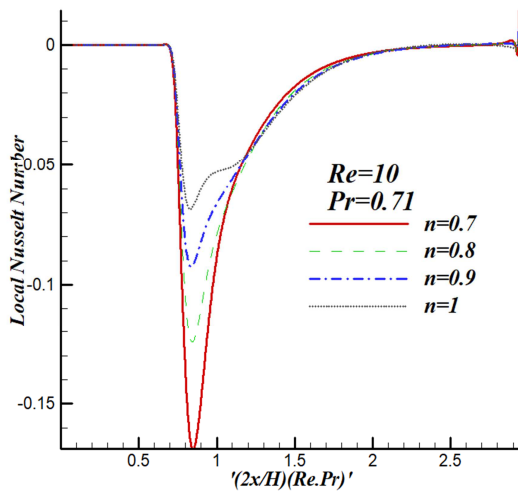


(د)



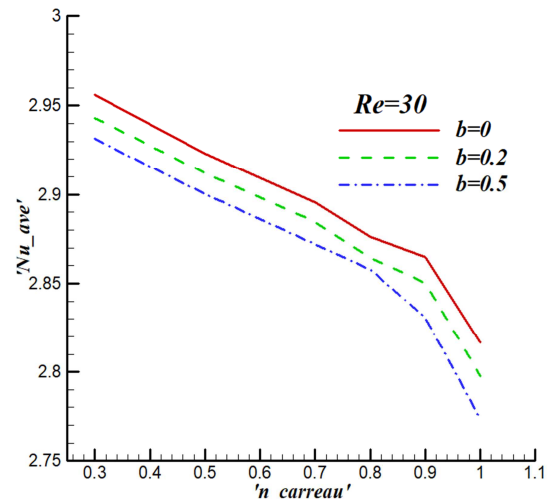
(ج)

شکل ۷- تغییرات عدد ناسلت متوسط کل بر حسب Re و b ، برای الف) $n=0.7$ ، ب) $n=0.8$ ، ج) $n=0.9$ و د) $n=1$



شکل ۹- نمودار عدد ناسلت محلی بر حسب مختصات طولی

بی بعد



شکل ۸- تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب شاخص کاریو-

یاسودا در b از ۰ تا ۰/۵ در رینولدز ۳۰

جمله مهمترین نتایج کار حاضر به موارد زیر می توان اشاره کرد:

- روش شبکه بولتزمن غیرنیوتنی به خوبی می تواند جریان سیال غیرنیوتنی کاریو یاسودا با لزجت تابع دما را شبیه سازی نماید.
 - بررسی تغییرات ضریب پسا بر حسب پارامترهای عدد رینولدز و ضریب باریک شونده دمای، با وجود لزجت تابع دما، یک رفتار کاهشی را نشان می دهد.
 - اما تغییرات ضریب پسا بر حسب شاخص توانی در مدل کاریو-یاسودا کاملاً صعودی است.
 - نتایج تغییرات عدد ناسلت بر حسب پارامترهای مختلف مورد بررسی نشان می دهند که عدد ناسلت با افزایش عدد رینولدز و افزایش شاخص باریک شونده دمای افزایش خواهد یافت.
 - با افزایش شاخص غیرنیوتنی در تمامی ضرایب باریک شونده دمای با کاهش عدد ناسلت مواجه خواهیم بود.
 - افزایش شاخص باریک شونده دمای باعث افزایش میزان انتقال گرما از مانع مربعی می گردد.
- مشاهدات انجام شده از رسم کانتورهای جریان و دما در شاخص های باریک شونده دمای مختلف نیز موید نتایج بالاست.

پيوست

فرم باز شده معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) به صورت زیر خواهد بود:

نرخ کرنش (معادله ۱۳):

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial y_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

$$S_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), S_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

مانای دوم تانسور نرخ کرنش (معادله ۱۴):

$$D_{II} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = S_{11}^2 + 2S_{12}^2 + S_{22}^2$$

نرخ برش (معادله ۱۵):

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{D_{II}} = \sqrt{2(S_{11}^2 + 2S_{12}^2 + S_{22}^2)}$$

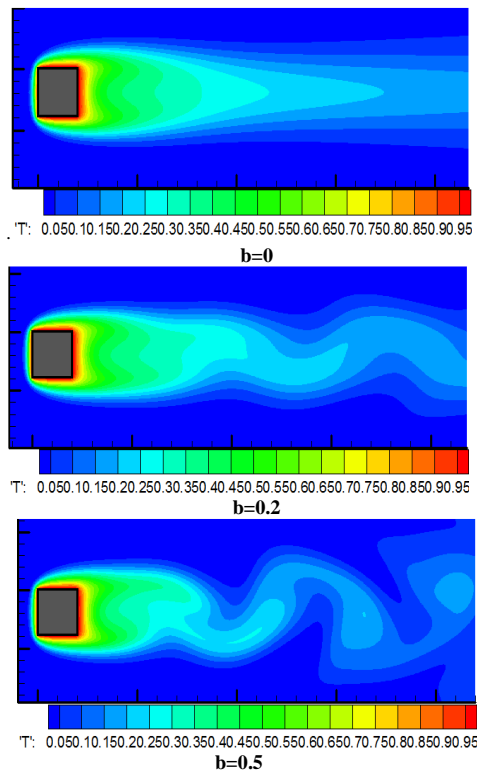
مراجع

[1] Sohankar A., Norberg C. and Davidson L., Numerical Simulaion of Unsteady Flow Around a Square Two-Dimensional Cylinder. In. Proc. 12th Australasian Fluid Mechanics Conference, pp.517-520, The University of Sydney, Australia, 1995.

[2] Bosch G., and Rodi W., Simulation of Vortex Shedding past a Square Cylinder Near a Wall. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 267-275, 1996.

[3] Zhou L., Cheng M. and Hung K. C., Suppression of Fluid Force on a Square Cylinder by Flow Control. *J. of Fluids and Structures*, Vol. 21, pp. 151-167, 2005.

[4] Ortega A. and Rosales J. L., "A numerical investigation of the convective heat transfer in unsteady laminar flow in a channel," *Vol.1, Heisphere, Newyork*, 2000.



شکل ۱۰- خطوط دما روی مانع مربعی در رینولدز ۳۰ و شاخص غیرنیوتنی ۰/۸ در شاخص های باریک شونده دمای مختلف

نمودار عدد ناسلت محلی بر حسب پارامتر بدون بعد $(2x/H)/(RePr)$ است که در شکل (۹) نشان داده شده است. در شکل (۱۰) الگوی توزیع دمای جریان در نواحی اطراف سیلندر برای عدد رینولدز ۳۰، شاخص کاریو یاسودا ۰/۸ و ضرایب باریک شونده دمای مختلف نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش شاخص باریک شونده دمای از ۰ تا ۰/۵، تقارن الگوی دما در پشت سیلندر از بین رفته و تراکم خطوط هم دما در دیوارهای سیلندر افزایش می یابد. افزایش تراکم خطوط هم دما به منزله افزایش گردادیان دما و افزایش انتقال گرما از دیواره های گرم سیلندر خواهد بود.

بررسی نتایج بدست آمده برای ضریب پسا و عدد ناسلت به ازاء ضرایب λ مختلف نشان داد که تاثیر تغییرات ضریب λ روی جریان و انتقال گرما سیال بسیار ناچیز و عملاً قابل صرف نظر کردن است. در واقع ناحیه مربوط به نرخ برش بحرانی (عکس ضریب λ) آنقدر کوچک است که تاثیر آن باعث تغییرات بسیار کم در جریان و انتقال گرما سیال دارد.

نتیجه گیری

در این مقاله شبیه سازی عددی جریان سیال غیرنیوتنی در یک کانال دو بعدی شامل یک مانع مربعی، با استفاده از روش شبکه بولتزمن انجام شده است. از مدل غیرنیوتنی کاریو-یاسودا به منظور تحلیل جریان بهره گرفته است. تحلیل شبکه برای اطمینان از دقت نتایج عددی انجام شده است. نتایج حاصل از این تحقیق با کارهای مشابه انجام شده مقایسه و با موفقیت صحت سنجی گردیده اند. از

- [22] Wang J. K., Wang M. R. and Li Z. X., A Lattice Boltzmann Algorithm for Fluid-Solid Conjugate Heat Transfer. *Int. J. Thermal Sci.*, Vol. 46, No.3, pp. 228-234, 2007.
- [23] Nazari M., Mohebbi R. and Kayhani M. H., Power-law fluid flow and heat transfer in a channel with a built-in porous square cylinder: Lattice Boltzmann simulation, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 204, pp.38-49, 2014.
- [24] Carreau P. G., Rhology equations from molecular network theories, *Journal of Rheology*, Vol. 16, No.1, pp.127, 1972.
- [25] Zou Q. S. and He X.Y., On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 6, pp. 1591-1598, 1997.
- [26] Inamuro T., Yoshino M. and Ogino, F., A Non- Slip Boundary Condition for Lattice Boltzmann Simulations. *Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 12, pp. 2928-2930, 1995.
- [27] Dhiman, A. K., Chhabra, R. P. and Eswaran, V., Steady flow across a confined square cylinder: effects of power-law index and of blockage ratio. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 48, pp. 141-150, 2008.
- [28] Sahu A. K., Chhabra, R. P. and Eswaran, V., Two-dimensional laminar flow of a power-law fluid across a confined square cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.165, pp. 752-763, 2010.
- [29] Bharti R. P., Chhabra R. and Eswaran V., Two-dimensional steady Poiseuille flow of power-law fluids across a circular cylinder in a plane confined channel: wall effects and drag coefficients, *Industrial & engineering chemistry research*, Vol. 46, No. 11, pp. 3820-3840, 2007.
- [30] Turki, S., Abbasi, H. and Nasrallah, S. B., Effect of the blockage ratio on the flow in a channel with a built-in square cylinder. *Comput. Mech.*, Vol. 33, pp. 22-29, 2003.
- [31] Dhiman, A. K., Chhabra, R. P., Eswaran, V., Flow and heat transfer across a confined square cylinder in the steady flow regime: Effect of Peclet number. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 4598-4614, 2005.
- [5] Battacharyya S. and Maiti D. k., Shear flow past a square cylinder near a wall. *International Journal of Engineering Science*, Vol.42, No.19-20, pp. 2119-2134, 2004.
- [6] Roy R. L. and Tatsutani, R. T., Numerical simulation of laminar and turbulent flows around a square cylinder. *Int. J. Methods Fluids*, Vol. 15, pp. 999-1012, 2004.
- [7] Gabbanelli S., Drazer G. and Koplik J., Lattice Boltzmann method for non-Newtonian (power-law) fluids. *Journal of Physical Review E*, Vol.72, pp. 046312, 2005.
- [8] Boyd J., Buick J. and Green S., A Second-Order Accurate Lattice Boltzmann Non-Newtonian Flow Model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 39, pp. 14241-14247, 2006.
- [9] Etemad S. Gh., Mujumadar A. S. and huang B., viscous dissipation effects in entrance region heat transfer for a power law fluid flowing between parallel plates. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 15, No. 2, 1994.
- [10] Shin S. and Cho Y. I., laminar heat transfer in a rectangular duct with a non-Newtonian fluid with temperature-dependent viscosity. *Int. J. Heat Mass transfer*, Vol. 37, No. 1, pp. 19-30, 1994.
- [11] Ashrafizaadeh M., Bakhshaei H., A Comparison of Non-Newtonian Models for Lattice Boltzmann Blood Flow Simulations. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No.5, pp.1045-1054, 2009.
- [۱۲] شاه مردان م. م. محمود نوروزی م. و مسیبی درچه س. جریان آرام سیال غیر نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری. *مجله علمی و پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*، د. ۱، ش. ۳، ص. ۶۹-۷۹، ۱۳۹۰.
- [۱۳] عمرانی م. ع. و ماموریان م. مدل سازی جابجایی طبیعی سیالات غیر نیوتنی پیرو قانون توانی در محفظه مربعی به روش شبکه بولتزمن. *اولین همایش ملی جریان سیال انتقال حرارت و جرم، اصفهان، ایران*، ۱۳۹۳.
- [14] Astanina M. S., Sheremet M. A. and Umavathi J. C., Unsteady Natural Convection with Temperature-Dependent Viscosity in a Square Cavity Filled with a Porous Medium. *Transp Porous Med.* Vol. 110, pp. 113-126, 2015.
- [15] Perumal D. A., Kumar, G. V. S. and Dass, A. K., Numerical Simulation of Viscous Flow over a Square Cylinder Using Lattice Boltzmann Method. *International Scholarly Research Network ISRN Mathematical Physics*, Vol. 2012, Article ID 630801, 2012.
- [16] Hooman K. and Gurgenci H., "Effects of temperature dependent viscosity on Bénard convection in a porous medium using a non-Darcy model, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 51, No. 5-6, pp. 1139-1149, 2008.
- [17] Valipour M. S., Masoodi R., Rashidi S., Bovand M. and Mirhosseini M., A numerical study on convection around a square cylinder using AL2O3-H2O nanofluid. *Thermal Science*, Vol. 18, No. 4, pp. 1305-1314, 2014.
- [18] Li Q., Hong N., Shi B. and Chai Z., Simulation of Power-Law Fluid Flows in Two-Dimensional Square Cavity Using Multi-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Method, *Commun. Comput. Phys.* Vol. 15, No. 1, pp. 265-284, 2014.
- [۱۹] کیهانی م. ح. و محبی ر. بررسی عددی جریان سیال و انتقال حرارت در محیط متخلخل بین دو صفحه موازی با استفاده از روش شبکه بولتزمن. *فصلنامه مکانیک هوافضا (انتقال حرارت)*، د. ۹، ش. ۱، ص. ۶۳ الی ۷۶، ۱۳۹۲.
- [20] Peng Y., Shu C. and Chew Y.T., Simplified Thermal Lattice Boltzmann Model for Incompressible Thermal Flows, *Physical Review E* Vol. 68, pp. 026701, 2003.
- [21] He X.Y. and Luo L. S., A Priori Derivation of the Lattice Boltzmann Equation. *Physical Review E*, Vol. 55, pp. 6333, 1997.