

بررسی انتشار امواج فراصوت در ورق‌های چند لایه

امین میرزاخانی‌نافچی

مری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران

عباس مرادی

مری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد، اهواز

چکیده

ماشین آلات، دستگاه‌ها و ابزارهایی که امروزه در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند بسیار پیچیده و گران قیمت هستند. لذا استفاده از روش‌های تولید و بازرسی که حداکثر قابلیت اطمینان را برای این تجهیزات تأمین نمایند امری لازم و ضروری است. آزمون‌های غیر مخرب از جمله روش‌های مورد استفاده برای بازرسی تجهیزات یاد شده هستند. یکی از آزمون‌های غیر مخرب که کاربرد صنعتی بسیار دارد، آزمون فراصوت می‌باشد. در این پژوهش به بررسی امواج هدایت شده فراصوت در ورق‌های همسانگرد دو لایه که به یکدیگر متصل هستند و شرایط مرزی در سطح‌های بالا و پایین ورق بدون تنش می‌باشد، پرداخته شده است. هدف از این تحقیق استخراج دیاگرام‌های طیف فرکانس (فرکانس بر حسب عدد موج)، سرعت فاز بر حسب فرکانس، سرعت گروه بر حسب فرکانس، زاویه تابش بر حسب فرکانس و در نهایت شکل مود و توزیع تنش در ورق‌های چند لایه می‌باشد. با توجه به منحنی-های پراکندگی بدست آمده مشاهده می‌شود که با افزایش فرکانس تعداد مودهای بیشتری در جسم منتشر می‌شوند که هر کدام از این مودها دارای یک شکل مود و منحنی توزیع تنش خاصی می‌باشد. در ادامه به نحوه‌ی تحریک یک مود خاص در یک فرکانس پروب برای ورق دو لایه پرداخته می‌شود و نمودارهای زاویه تابش بر حسب فرکانس رسم می‌شوند.

کلمات اصلی: امواج هدایت شده فراصوت، منحنی پراکندگی، سرعت فاز و گروه، عدد موج، ورق‌های دو لایه

Investigations of Ultrasonic Waves Propagation in Multilayer Plates

A. Mirzakhani Nafchi

Lecturer, Department of Mechanical Engineering,
Payame Noor University, Tehran

A. Moradi

Lecturer, Department of Mechanical Engineering,
Islamic Azad University, Ahvaz

Abstract

These days machinery, devices and tools that are used in industry, are very complex and costly. Therefore using producing and inspecting methods with maximum reliability that supply equipments, are required. Non-destructive testing is one of those methods that are used to inspect equipment that already have been mentioned. One of the non-destructive testing, which has more industrial application, is ultrasonic test. In this paper, examine of the ultrasonic guided waves in laminated isotropic plates has been discussed. With the assumption that there is not space between layers and they are connected to each other and as boundary conditions, on the top and bottom of plate's surfaces, tension is zero. The purpose of this study are extracting diagrams of frequency spectrum (frequency depending on the wave number), phase velocity depending on frequency, group velocity depending on frequency and eventually the wave structure and stress distribution in a two-layers plate, the equations for multi-layer plates are solved and diagrams that discussed above are extracted. How to stimulate a particular mode at a probe frequency for two layers plate is investigated in continuance and graphs of radiation angle at frequency are plotted.

Keywords: Ultrasonic guided waves, Dispersion curve, Phase & group velocity, Wave number, Multilayer plates

۱- مقدمه

ایمینی قطعات صنعتی ایجاب می‌نماید که به نحوی در مورد سالم بودن قطعات ساخته شده آزمون‌هایی به عمل آید. یکی از آزمون‌های غیر مخربی که امروزه بسیار از آن استفاده می‌شود، تست امواج فراصوت می‌باشد.

در ورق‌هایی که دارای ضخامت ناچیز در مقایسه با طول موج می‌باشند، از تداخل بازگشت‌های متعددی که موج‌های طولی و عرضی از سطح آزاد ورق دارند موج‌های لمب^۱ یا هدایت شده و موج برشی افقی تشکیل می‌شود. امواج لمب و برشی افقی دارای خاصیت پراکندگی می‌باشند به طوری که سرعت فاز و سرعت گروه این امواج علاوه بر خصوصیات ماده به هندسه و مشخصات موج بستگی دارند. برای تحریک یک مود خاص در جسم نیاز به رسم منحنی‌های پراکندگی ناشی از انتشار موج در جسم می‌باشد. زیرا تأثیر عوامل مختلفی همچون ضخامت، فرکانس تحریک و زاویه تابش موج بر روی انتشار مودهای مختلف در منحنی پراکندگی نمایش داده می‌شوند. از آنجا که هر یک از نقاط منحنی پراکندگی می‌توانند برای انجام یک تست غیر مخرب فراصوت به کار گرفته شوند، لذا رسم منحنی‌های پراکندگی برای انجام یک تست فراصوت موفق در اجسام الزامی می‌باشد.

دمنکو و مازیکا [۱] به بررسی روش‌های رسم منحنی پراکندگی برای یک ورق تک لایه و چند لایه پرداختند. هنرور و همکاران [۲] یک روش جدیدی برای رسم منحنی پراکندگی ارائه دادند. در این روش حل معادله فرکانس به فرم منحنی پراکندگی، از نمایش سه بعدی معادله فرکانس استخراج می‌شود. استفان و همکاران [۳] برای رسم منحنی پراکندگی از روش المان محدود استفاده کردند. در این روش که بر پایه آنالیز مودال می‌باشد برای طول موج‌های مختلف، شکل مودها رسم شده است. یوزوکی و سوزوکی [۴] معادله پراکندگی مربوط به یک تیر تیموشینکو ویسکوالاستیک را استخراج کردند. سپس با رسم منحنی‌های پراکندگی سرعت فاز و سرعت گروه برای یک تیر تیموشینکو ویسکوالاستیک با سطح مقطع دایره‌ای، تأثیر ویسکوالاستیسیته تیر را مورد بررسی قرار دادند. اکبرف و همکاران [۵] روابط پراکندگی مربوط به انتشار موج پادمقارن برای یک سیلندر مرکب را بدست آوردند. آنها برای استخراج روابط پراکندگی، سیلندر مرکب را به صورت مدل همگن چند لایه در نظر گرفتند. چن و همکاران [۶] رفتار پراکندگی موج‌ها را در یک ورق ایزوتروپ که مشخصات ذرات آن در راستای

ضخامت تغییر می‌کرد (ورق FGM)^۲ مورد بررسی قرار دادند و منحنی پراکندگی مربوط به یک ورق FGM را رسم کردند. دسچامپس و همکاران [۷] پس از رسم منحنی پراکندگی یک ورق آلومینیومی به تفسیر این منحنی‌ها پرداختند. هو و ریس [۸] منحنی‌های پراکندگی و جابجایی شیشه‌های ایمینی را رسم کردند و با بررسی منحنی‌های پراکندگی و جابجایی، نتیجه گرفتند که مود S_0 در فرکانس ۵۰۰ کیلو هرتز بهترین مود برای بازرسی غیر مخرب شیشه‌های ایمینی می‌باشد. کریس و همکاران [۹] اهمیت موج‌های هدایت شده فراصوت در بازرسی خط لوله-ها، برای تشخیص خوردگی و معایب دیگر را مورد بررسی قرار دادند. همچنین این مقاله کارهای انجام شده در زمینه استفاده از منحنی پراکندگی برای تشخیص ترک و خوردگی در ریل آهن، پیل و غیره را بررسی کرده است. رز [۱۰] موارد استفاده از امواج هدایت شده فراصوت در صنعت، همچنین مزیت‌های استفاده از این امواج در بازرسی قطعات صنعتی را بیان کرد و منحنی پراکندگی سرعت فاز و سرعت گروه را برای سطح بالایی ریل آهن و ورق تک لایه رسم کرد.

در پژوهش‌های پیشین محققان تنها، به بررسی روش‌های رسم منحنی‌های پراکندگی و تفسیر این نمودارها پرداختند و چگونگی تحریک مودی خاص از امواج فراصوت در این نمودارها مورد بررسی قرار نگرفته است. در این پژوهش ابتدا به کمک روش DPM^3 معادلات مربوط به انتشار موج لمب و برشی افقی در ورق‌های دو لایه استخراج و با حل این معادلات به کمک الگوریتم بهبود یافته مربوط به ورق تک لایه، منحنی‌های پراکندگی و منحنی‌های توزیع تنش و جابجایی مربوط به ورق دو لایه رسم می‌شود. همچنین علاوه بر رسم منحنی‌های پراکندگی در ورق دو لایه به چگونگی تحریک مودی خاص در ورق دو لایه توسط روش آرایه‌ی فازی^۴ پرداخته شده و نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲- انتشار موج در ورق دو لایه

یک ورق دو لایه ایزوتروپ و همگن مطابق با شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. هر لایه توسط یک اندیس صحیح n ($n = 1 \text{ or } 2$) مشخص می‌شود. $n = 1$ مربوط به لایه بالایی و $n = 2$ مربوط به لایه پایینی می‌باشد. ضرایب لامه و چگالی لایه‌ی n توسط μ_n, λ_n, ρ_n و ضخامت توسط h_n نمایش داده می‌شود. همچنین h برابر با ضخامت کل لایه‌ها می‌باشد.

² Functionally Graded Material

³ Displacement of Potential Method

⁴ Phased Array

¹ Lamb waves

$\nabla \cdot \psi_n = 0$ می‌باشد. با قرار دادن میدان جابجایی از رابطه‌ی بالا در معادله‌ی ناویر رابطه (۶) بدست می‌آید [۱۲].

$$\nabla^2 \phi_n = \frac{1}{(c_{Ln})^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t^2} \quad (۶)$$

$$\nabla^2 \psi_n = \frac{1}{(c_{Tn})^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2}$$

در روابط بالا c_{Ln} و c_{Tn} به ترتیب بیانگر سرعت موج طولی و عرضی در لایه‌ی n ام می‌باشند و مطابق با روابط زیر بدست می‌آیند [۱۳].

$$c_{Ln} = \frac{2\mu_n + \lambda_n}{\rho_n} \quad \text{and} \quad c_{Tn} = \frac{\mu_n}{\rho_n} \quad (۷)$$

با فرض اینکه موج در راستای x_3 انتشار می‌یابد، میدان جابجایی با توجه به تجزیه هلمهلتز به صورت زیر استخراج می‌شود [۱۲].

$$u_{1(n)} = 0$$

$$u_{2(n)} = \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_3} \quad (۸)$$

$$u_{3(n)} = \frac{\partial \phi_n}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2}$$

با حل روابط (۶) توابع برداری و اسکالر ϕ_n و ψ_n به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \phi_n &= C_1^n \exp(ik_{Ln}[x_3 \sin(\theta_{Ln}) \\ &+ x_2 \cos(\theta_{Ln})]) \quad (۹) \\ &+ C_2^n \exp(ik_{Ln}[x_3 \sin(\theta_{Ln}) \\ &- x_2 \cos(\theta_{Ln})]) \end{aligned}$$

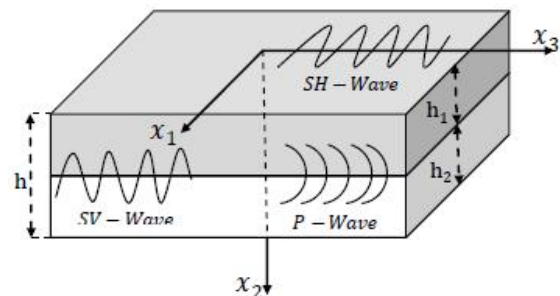
$$\begin{aligned} \psi_n &= C_3^n \exp(ik_{Tn}[x_3 \sin(\theta_{Tn}) \\ &+ x_2 \cos(\theta_{Tn})]) \quad (۱۰) \\ &+ C_4^n \exp(ik_{Tn}[x_3 \sin(\theta_{Tn}) \\ &- x_2 \cos(\theta_{Tn})]) \end{aligned}$$

در روابط بالا k_{Ln} و k_{Tn} به ترتیب بیانگر عدد موج طولی و عرضی در راستای انتشار موج در لایه‌ی n ام می‌باشند، و از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شوند [۱۳].

$$k_{Ln} = \frac{\omega}{c_{Ln}}, \quad k_{Tn} = \frac{\omega}{c_{Tn}} \quad (۱۱)$$

میدان جابجایی برای انتشار موج لمب برای دو لایه به صورت زیر می‌باشد [۱۲].

انتشار امواج فراصوت در ورق‌ها عموماً به دو شکل امواج طولی (P-Wave) و برشی (S-Wave) صورت می‌گیرد. در امواج طولی راستای انتقال انرژی موازی با جهت انتشار موج می‌باشد در حالیکه در امواج برشی راستای انتقال انرژی عمود بر جهت انتشار موج می‌باشد. موج‌های برشی مطابق با شکل ۱ می‌توانند به دو صورت موج برشی عمودی (SV-Wave) و افقی (SH-Wave) در ورق انتشار پیدا کنند. موج برشی که در آن جابجایی ذرات عمود بر صفحه‌ی ورق (در راستای x_2) باشد را موج برشی عمودی و موج برشی که در آن جابجایی ذرات موازی با صفحه‌ی ورق (در راستای x_3) باشد را موج برشی افقی گویند. موج‌های لمب از تداخل بازگشت‌های متعددی که موج‌های طولی و عرضی از سطح آزاد ورق دارند بوجود می‌آیند. به عبارت دیگر موج لمب ترکیبی از موج برشی قائم و موج طولی می‌باشد (SV+P) [۱۱].



شکل ۱ - انتشار موج در ورق دو لایه [۱۲]

۱-۲- تحلیل روابط موج

سه معادله‌ی حرکت، کرنش-جابجایی و هوک برای یک ورق دو لایه مطابق با روابط (۱) تا (۳) تعریف می‌شوند [۱۳]. با ترکیب این سه رابطه، در نهایت یک معادله‌ی حرکت واحد بر حسب تغییر مکان بدست می‌آید. این معادله را معادله‌ی ناویر^۱ گویند و برای لایه‌ی n ام به صورت رابطه‌ی (۴) نمایش داده می‌شود.

$$\sigma^n_{ij,j} + \rho^n f^n_i = \rho^n \dot{u}^n_i \quad (۱)$$

$$\epsilon^n_{ij} = \frac{1}{2} (u^n_{i,j} + u^n_{j,i}) \quad (۲)$$

$$\sigma^n_{ij} = \lambda^n \epsilon^n_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^n \epsilon^n_{ij} \quad (۳)$$

$$(\mu_n + \lambda_n) \nabla(\nabla \cdot u_n) + \mu_n \nabla^2 u_n = \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (۴)$$

در ورق دو لایه میدان جابجایی بر اساس تجزیه هلمهلتز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۳].

$$u_n = \nabla \phi_n + \nabla \times \psi_n \quad (۵)$$

در روابط بالا ϕ_n و ψ_n به ترتیب بیانگر توابع پتانسیل اسکالر و پتانسیل برداری لایه n ام هستند به نحویکه

^۱ Navier's Equation

شرایط مرزی روی سطح آزاد لایه‌ی دوم ($x_2 = h$) به صورت رابطه‌ی (۱۵) می‌باشند:

$$x_2 = h, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{32(2)} = \sigma_{22(2)} = 0 \quad (15)$$

شرایط پیوستگی میدان جابجایی و میدان تنش در فصل مشترک دو لایه ($x_2 = h_1$) به صورت زیر می‌باشند:

$$x_2 = h_1, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow u_{2(1)} = u_{2(2)}, u_{3(1)} = u_{3(2)} \quad (16)$$

$$x_2 = h_1, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{22(1)} = \sigma_{22(2)}, \sigma_{32(1)} = \sigma_{32(2)}$$

در روابط بالا k ، تصویر عدد موج طولی و عرضی در راستای انتشار موج (x_3) و p_n و q_n به ترتیب عبارتند از تصویر عدد موج طولی و عرضی در راستای ضخامت (x_2) می‌باشد و به صورت رابطه‌ی (۱۷) تعریف می‌شوند [۱۳].

$$k_{L_n} \sin(\theta_{L_n}) = k_{T_n} \sin(\theta_{T_n}) = k$$

$$k_{L_n} \cos(\theta_{L_n}) = p_n = \sqrt{k_{L_n}^2 - k^2} \quad (17)$$

$$k_{T_n} \cos(\theta_{T_n}) = q_n = \sqrt{k_{T_n}^2 - k^2}$$

با اعمال شرایط مرزی و پیوستگی یک دستگاه معادلات حاصل می‌شود که به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شود.

$$[A]_{8 \times 8} [Y_i]_{8 \times 1} = 0 \quad (18)$$

مقادیر درایه‌های ماتریس $[Y_i]$ و $[A_{ij}]$ در پیوست (الف) آورده شده است.

برای داشتن جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس $[A]_{8 \times 8}$ باید برابر با صفر باشد. در این حالت معادله فرکانسی موج لمب در ورق‌های دو لایه به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$|A(\omega, k, \lambda_n, \mu_n, h_n)| = 0 \quad (19)$$

۳- انتشار موج برشی افقی در ورق دو لایه

در موج برشی افقی، ارتعاشات ذرات ایجاد شده در هر لایه در صفحه‌ای موازی با سطوح لایه می‌باشند. شکل ۱ انتشار موج برشی افقی (SH-Wave) در یک ورق دو لایه را نشان می‌دهد. برای حالتی که موج برشی افقی در ورق دو لایه منتشر می‌شود تنها مؤلفه‌ی غیر صفر میدان جابجایی و تنش u_1 و σ_{13} می‌باشند که به صورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند.

$$u_{1(n)} = (A^n \sin(q_n x_2) + B^n \cos(q_n x_2)) \exp[i(kx_3 - \omega t)] \quad (20)$$

$$\sigma_{13(n)} = \mu_n (A^n q_n \cos(q_n x_2) - B^n q_n \sin(q_n x_2)) \exp[i(kx_3 - \omega t)]$$

$$u_{1(n)} = 0$$

$$u_{2(n)} = ik_{L_n} \cos(\theta_{L_n}) \{c_1^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] - c_2^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} ik_{T_n} \sin(\theta_{T_n})$$

$$\{c_3^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] - c_4^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\} \quad (12)$$

$$u_{3(n)} = ik_{L_n} \sin(\theta_{L_n}) \{c_1^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] + c_2^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} - ik_{T_n} \cos(\theta_{T_n}) \{c_3^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] - c_4^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\}$$

میدان تنش برای انتشار موج لمب برای دو لایه به صورت زیر می‌باشد [۱۲].

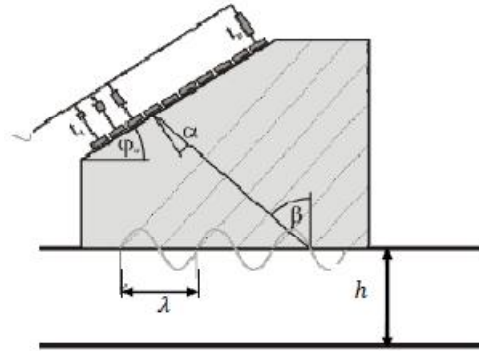
$$\sigma_{32(n)} = -2k_{L_n}^2 \mu_n \sin(2\theta_{L_n}) \{c_1^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] - c_2^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} + \mu_n k_{T_n}^2 \cos(2\theta_{T_n}) \{c_3^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] + c_4^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\} \quad (13)$$

$$\sigma_{22(n)} = -k_{L_n}^2 \mu_n [\lambda_n + 2\mu_n \cos(\theta_{L_n})^2] \{c_1^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] + c_2^n \exp[ik_{L_n}(x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} - 2\mu_n k_{T_n}^2 \sin(\theta_{T_n}) \cos(\theta_{T_n}) \{c_3^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] + c_4^n \exp[ik_{T_n}(x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\}$$

شرایط مرزی روی سطح آزاد لایه‌ی اول ($x_2 = 0$) به صورت زیر می‌باشند:

$$x_2 = 0, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{32(1)} = \sigma_{22(1)} = 0 \quad (14)$$

مجاور ورق قرار دارد، سیگنالی با زاویه‌ی کنترل پذیر α به داخل گوه می‌فرستد. این سیگنال با زاویه‌ی β به سطح پایه‌ی گوه برخورد می‌کند و باعث تولید یک نیروی عمودی بر روی سطح ورق می‌شود. نیروی ایجاد شده موجی با طول موج λ در سطح ورق ایجاد می‌کند.



شکل ۲- استفاده از روش آرایه‌ی فازی برای تحریک یک مود خاص در ورق [۱۴]

با استفاده از قانون اسنل^۴، رابطه‌ی بین زاویه تابش و سرعت فاز به صورت زیر بدست می‌آید [۱۴]:

$$c_w \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_p \sin(\beta) \rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{c_w}{c_p}\right) \quad (23)$$

در رابطه‌ی بالا c_p ، سرعت فاز موج لمب و با توجه به منحنی پراکندگی بدست می‌آید. c_w ، سرعت موج در گوه، β زاویه‌ی برخورد سیگنال به پایه‌ی گوه، ϕ_w زاویه سطح شیب دار گوه و در نهایت α زاویه‌ی بین خط عمود بر سطح شیب دار گوه و سیگنال تابیده شده از تراگذر می‌باشد. بنابراین برای تحریک مودی خاص جهت بازرسی، ابتدا با استفاده از منحنی پراکندگی سرعت فاز، سرعت c_p مربوط به مود مورد نظر را اندازه گرفته، سپس با استفاده از معادله‌ی (۲۳) می‌توان زاویه β را محاسبه کرده و با استفاده از رابطه زیر زاویه تابش مورد نیاز برای تحریک این مود را بدست آورد.

$$\alpha = \beta + \phi_w \quad (24)$$

قبل از رسم منحنی‌های پراکندگی مربوط به ورق دو لایه ابتدا صحت کد نوشته شده را با رسم منحنی‌های پراکندگی سرعت فاز و گروه برای یک ورق تک لایه آلومینیومی که مشخصات آن در جدول ۲ مشخص شده و همچنین با مقایسه نتایج رز [۱۰] مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با اعمال شرایط مرزی و پیوستگی در سطح‌های خارجی و مشترک دو لایه که همان صفر بودن تنش برشی در لایه‌های خارجی و برابر بودن میدان تنش و جابجایی در مرز مشترک می‌باشد، یک دستگاه معادله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$[B]_{4 \times 4} [F_i]_{4 \times 1} = 0 \quad (21)$$

مقادیر درایه‌های ماتریس $[F_i]$ و $[B_{ij}]$ در پیوست (ب) آورده شده است.

برای داشتن جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس $[B]_{4 \times 4}$ باید برابر با صفر باشد. در این حالت معادله فرکانسی موج برشی افقی در ورق‌های دو لایه به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$|B(\omega, k, \lambda_n, \mu_n, h_n)| = 0 \quad (22)$$

برای یک ورق دولایه با جنس مشخص (λ_n, μ_n) و هندسه مشخص (h_n) ، دترمینان ضرایب B برحسب فرکانس (ω) و عدد موج (k) می‌باشد.

با بدست آوردن ریشه‌های معادله‌ی مشخصه، منحنی‌های پراکندگی و میدان‌های تنش و جابجایی قابل رسم می‌باشند.

۴- تحریک مود انتخابی از موج لمب در ورق دو لایه

از موج‌های لمب، بیشتر از موج‌های برشی افقی در تشخیص عیوب استفاده می‌کنند. لذا در این قسمت تحریک یک مود خاص از موج لمب جهت بازرسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هنگامیکه یک ضربه به صورت هارمونیک بر روی سطح ورق نواخته شود تمامی مودها در فرکانس تحریک اعمال شده در ورق منتشر می‌شوند. رفتار پراکندگی مودهای منتشر شده در ورق باعث می‌شود که مودها در زمان‌های مختلفی به عیب برخورد کنند. در این حالت به علت پراکندگی سیگنال‌های منعکس شده که ناشی از انعکاس موج‌ها در مرز عیب می‌باشند، استخراج اطلاعات مورد نیاز کار مشکلی می‌باشد. برای غلبه بر این مشکل نیاز است تا فقط یک مود خاص از موج لمب در ورق منتشر شود تا تنها یک جبهه‌ی موج به سطح ناپیوستگی برخورد کند و منعکس شود. با این شیوه استخراج اطلاعات مورد نیاز جهت بازرسی بسیار ساده‌تر می‌باشد.

برای تحریک مود انتخابی باید از منحنی پراکندگی استفاده شود و فرکانس تحریک (فرکانس پروب^۱) را با توجه به این نمودار مشخص کرد. یکی از تکنیک‌های مورد استفاده برای مود انتخابی روش آرایه‌ی فازی^۲ می‌باشد، که در شکل ۲ نمایش داده شده است. در این روش تراگذری^۳ که بر روی سطح گوه‌ی

1. Probe
2. Phased Array
3. Transducer

4. Snell law

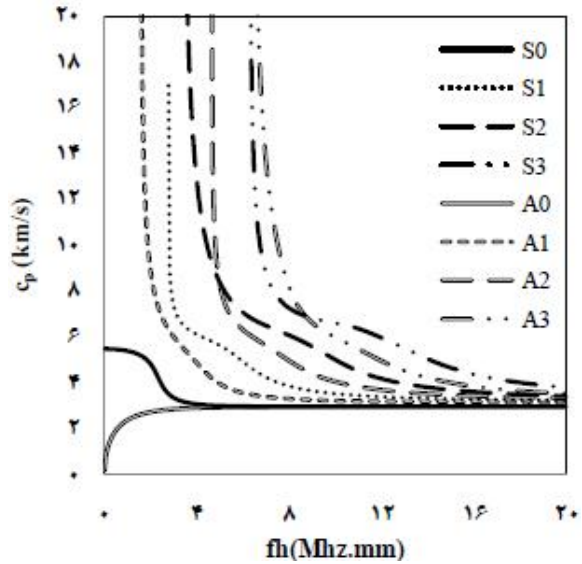
۵- رسم منحنی‌های پراکندگی ورق دو لایه

در این قسمت نمودارهای پراکندگی مربوط به یک ورق دو لایه آلومینیوم-فولاد با مشخصات زیر رسم می‌شود.

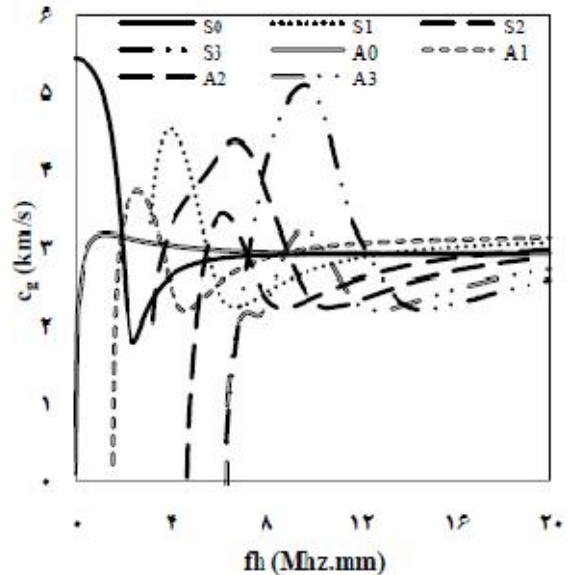
جدول ۲- مشخصات مربوط به انتشار موج در ورق دو لایه

شماره لایه (n)	جنس ورق	$C_{L,n} (\frac{km}{s})$	$C_{T,n} (\frac{km}{s})$	$h_n (mm)$
n=۱	فولاد	۵۹	۳,۱۹	۱,۲
n=۲	آلومینیوم	۶,۳۵	۳,۱۳	۰,۴

برای رسم منحنی‌های پراکندگی باید ریشه‌های مربوط به معادله‌ی پراکندگی (۱۹) که بر حسب دو متغیر $\bar{f} = fh$ (حاصلضرب فرکانس در ضخامت کل ورق دو لایه) و $\bar{k} = kh$ (حاصلضرب عدد موج در ضخامت کل ورق دو لایه) می‌باشد را استخراج کرد. استخراج ریشه‌ها در نواحی مختلفی از فرکانس و عدد موج کار پیچیده‌ای می‌باشد به نحوی که ریشه‌های معادله‌ی (۱۹) را باید در نواحی مختلفی از عدد موج و فرکانس به صورت جداگانه محاسبه کرد [۱۱]. رابطه‌های پراکندگی (۱۹) و (۲۲) تابع‌های غیر جبری‌ای می‌باشند که در آنها رابطه‌ی بین \bar{k} و \bar{f} مستقیم نمی‌باشد. لذا بدست آوردن ریشه‌های \bar{k} در یک فرکانس مشخص کار ساده‌ای نیست. برای بدست آوردن ریشه‌ها باید از یک روش عددی جستجوی ریشه استفاده کرد تا بتوان \bar{k} ‌های درست در یک فرکانس \bar{f} را استخراج نمود. در حالت کلی ریشه‌ها به صورت مختلط می‌باشند ولی اگر هدف تنها، موج‌های منتشر شونده باشد باید از قسمت موهومی ریشه‌ها صرف نظر کرد [۱۵]. منحنی‌های طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه حاصل از انتشار موج لمب در ورق دو لایه با مشخصات ذکر شده در جدول ۲ در شکل‌های ۵ تا ۷ نمایش داده شده است. با توجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود که برای هر مود بعد از یک عدد موج خاصی رابطه‌ی بین فرکانس زاویه‌ای و عدد موج خطی می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه‌ی سرعت فاز ($c_p = \frac{\omega}{k}$) انتظار می‌رود که با افزایش فرکانس در هر مود سرعت فاز به یک مقدار ثابت میل کند این موضوع با توجه به نمودار سرعت فاز بر حسب فرکانس در شکل ۶ قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی سرعت گروه ($c_g = \frac{d\omega}{dk}$) انتظار می‌رود برای هر مود از فرکانسی که رابطه‌ی بین عدد موج و فرکانس زاویه‌ای خطی شود منحنی-های سرعت گروه برای آن مود مقداری ثابت شود که این پدیده در شکل ۷ قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که با افزایش فرکانس تعداد مودهای قابل انتشار در ورق دو لایه افزایش پیدا می‌کنند. همچنین در محدوده‌ی فرکانس‌های پایین که این محدوده‌ی فرکانس برای ورق دو لایه فولاد-آلومینیوم برابر با $\bar{f} \leq 1.8$ می‌باشد تنها، دو مود در ورق دو لایه



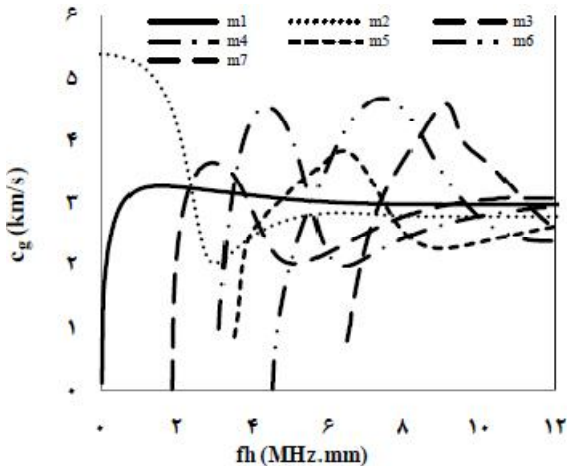
شکل ۳- منحنی سرعت فاز بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق تک لایه



شکل ۴- منحنی سرعت گروه بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق تک لایه

جدول ۱- مقایسه نتایج بدست آمده برای انتشار موج لمب در ورق تک لایه با نتایج رز [۱۰]

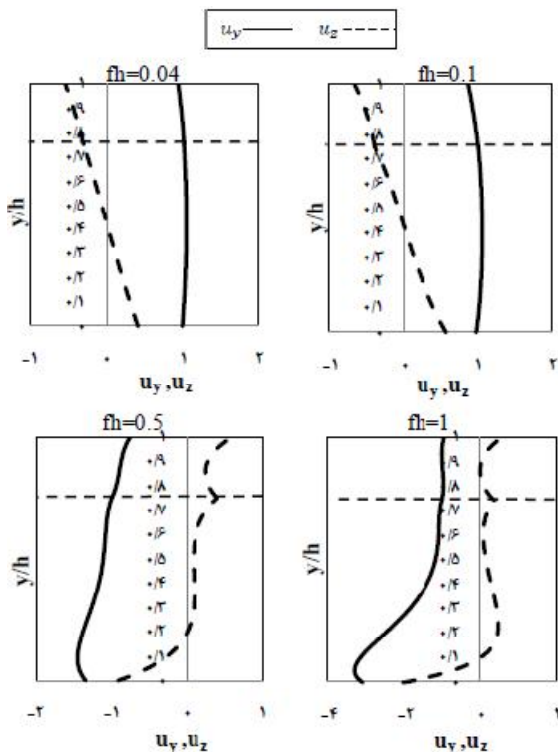
سرعت فاز و سرعت گروه	مود A_0	مود S_0	مود A_1	مود S_1
$c_p (\frac{km}{s})$ الگوریتم متلب	۲,۹	۳	۴,۹	۶
$c_p (\frac{km}{s})$ [۱۲]	۲,۹	۳	۴,۹	۶
$c_g (\frac{km}{s})$ الگوریتم متلب	۳	۲,۶	۲,۵	۴,۵
$c_g (\frac{km}{s})$ [۱۲]	۳	۲,۶	۲,۵	۴,۵



شکل ۷- منحنی سرعت گروه بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق دو لایه

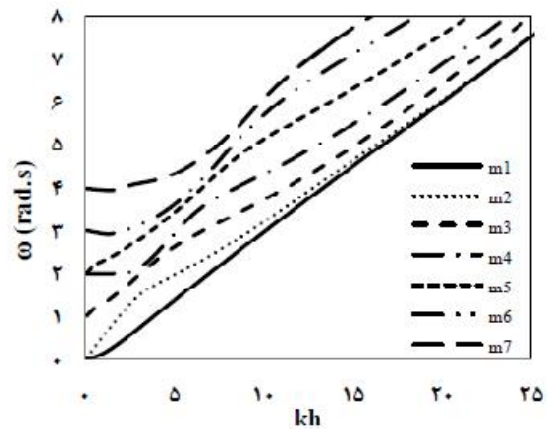
نمودارهای ۸ و ۹ شکل مود برای مدهای اول و دوم در فرکانسهای مختلف را نشان می‌دهند. خطهای توپر ساختار موج در راستای z ، u_y ، و خطهای نقطه‌چین ساختار موج در راستای z ، u_z ، را نشان می‌دهد.

چون در بازه $fh=[0-1]$ Mhz-mm، تعداد مود کمتری پراکنده می‌شود، بنابراین این بازه یک بازه مناسب جهت بازرسی غیر مخرب می‌باشد. لذا نمودارهای توزیع تنش و جابجایی در این بازه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

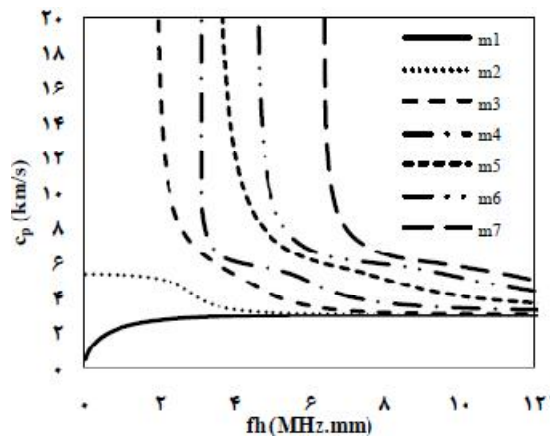


شکل ۸- ساختار موج برای مود اول در فرکانسهای مختلف

انتشار پیدا می‌کنند. لذا در این محدوده فرکانس به علت انتشار مود کمتر پراکندگی کمتر می‌باشد. برای انتشار بقیه مدها نیاز است تا فرکانس تحریک افزایش پیدا کند تا حدی که این فرکانس بیشتر از فرکانس قطع مود مربوطه شود. فرکانس قطع هر مود، حداقل فرکانس مورد نیاز برای تحریک آن مود می‌باشد. با افزایش فرکانس منحنی سرعت فاز بر حسب فرکانس برای مدهای مختلف به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کنند. این مقدار ثابت برابر با سرعت موج ریلی^۱ می‌باشد. این نتیجه به این دلیل توجیه پذیر است که معادله پراکندگی در فرکانسهای بسیار زیاد همانند معادله پراکندگی موج ریلی در یک محیط نیمه بی‌نهایت می‌باشد. در فرکانسهای زیاد، طول موج بسیار کوچک می‌باشد به نحویکه ضخامت ورق نازک در برابر این طول موج بسیار بزرگ می‌باشد. لذا در فرکانسهای بالا ورق نازک به صورت یک محیط نیمه بی‌نهایت می‌باشد و موج در ناحیهی نزدیک به سطح ورق انتشار پیدا می‌کند.



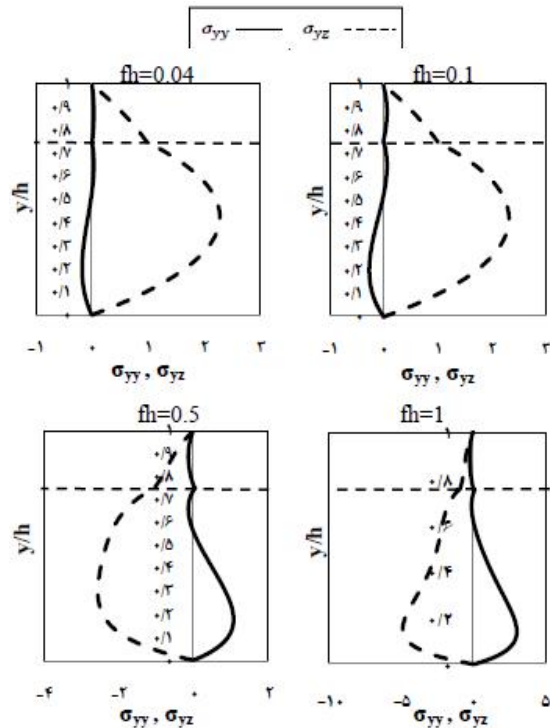
شکل ۵- منحنی فرکانس بر حسب عدد موج برای انتشار موج لمب در ورق دو لایه



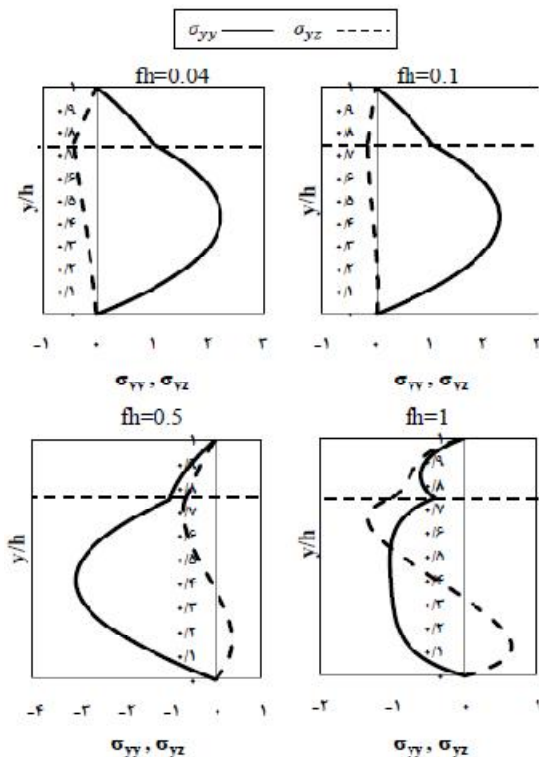
شکل ۶- منحنی سرعت فاز بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق دو لایه

¹ Rayleigh wave

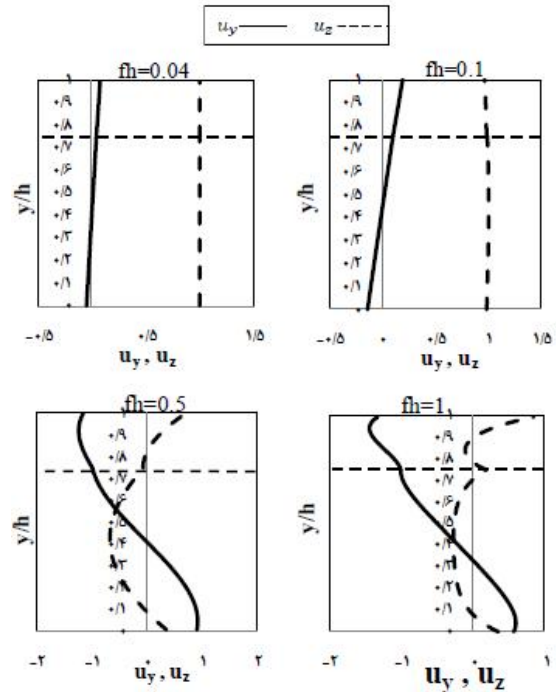
گرفت که در فرکانس‌های پایین مقدار تنش σ_{yz} در تمام نقاط نسبت به تنش σ_{yy} دارای مقدار کوچکی می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که تنش‌های ایجاد شده در لایه آلومینیومی بیشتر از لایه فولادی می‌باشد.



شکل ۱۰- توزیع تنش برای مود اول در فرکانس‌های مختلف



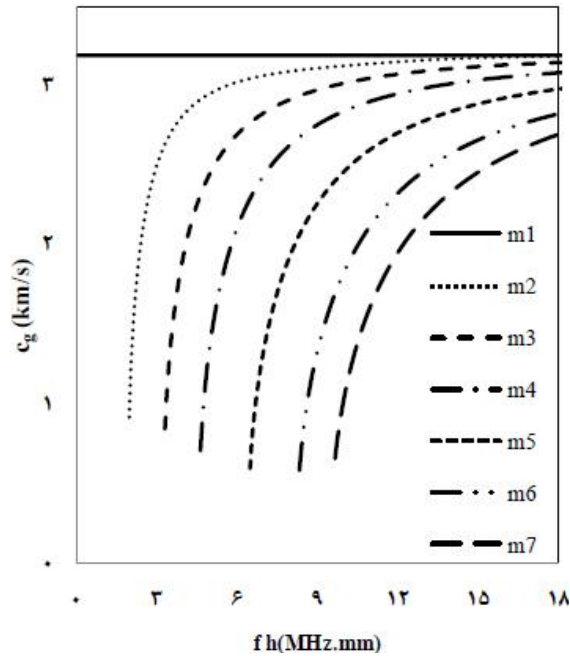
شکل ۱۱- توزیع تنش برای مود دوم در فرکانس‌های مختلف



شکل ۹ - ساختار موج برای مود دوم در فرکانس‌های مختلف

مطابق با شکل ۸ مشاهده می‌شود در فرکانس‌های پایین پروفیل ساختار موج برون صفحه‌ای (u_y) در تمام نقاط هر دو لایه تقریباً یکسان می‌باشد ولی در این فرکانس‌ها مقدار جابجایی درون صفحه‌ای (u_z) در هر لایه، بر روی صفحات خارجی دارای بیشترین مقدار خود می‌باشد. با افزایش فرکانس مقدار جابجایی ایجاد شده در لایه دوم نسبت به لایه اول بیشتر می‌شود. از بررسی شکل ۹ می‌توان نتیجه گرفت که در فرکانس‌های پایین مقدار جابجایی درون صفحه‌ای (u_z) در تمام نقاط هر دو لایه تقریباً یکسان می‌باشد ولی مقدار جابجایی برون صفحه‌ای (u_y) بر روی مرزهای دو لایه دارای مقدار ماکزیمم مقدار خود می‌باشند. با افزایش فرکانس مشاهده می‌شود که مقدار جابجایی درون صفحه‌ای دو لایه بر روی مرز مشترک و مرز خارجی دو لایه کاهش پیدا می‌کنند ولی مقدار جابجایی برون صفحه‌ای دو لایه بر روی مرز مشترک و مرز خارجی دو لایه افزایش پیدا می‌کنند.

شکل‌های ۱۰ و ۱۱ توزیع تنش برای مودهای اول و دوم را نمایش می‌دهند. خط‌های توپر بیانگر توزیع تنش σ_{yy} و خط‌های نقطه چین توزیع تنش σ_{yz} را نمایش می‌دهند. مطابق با شکل ۱۰ مشاهده می‌شود مقدار تنش σ_{yy} در فرکانس‌های پایین در تمام نقاط نسبت به تنش σ_{yz} دارای مقدار کوچکی می‌باشد. با افزایش فرکانس تنش‌های ایجاد شده در هر دو لایه افزایش پیدا می‌کنند. همچنین مطابق با شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که تنش‌های ایجاد شده در لایه آلومینیومی بیشتر از لایه فولادی می‌باشد. از بررسی شکل ۱۱ می‌توان نتیجه

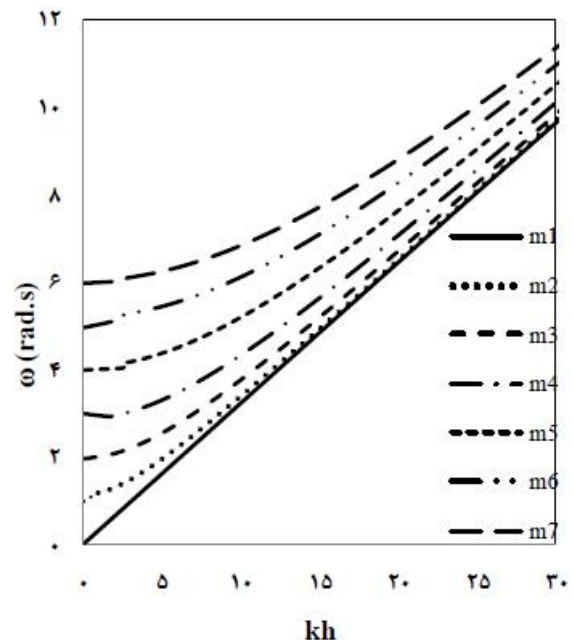


شکل ۱۴- نمودار سرعت گروه بر حسب فرکانس برای انتشار موج برشی افقی در ورق دو لایه

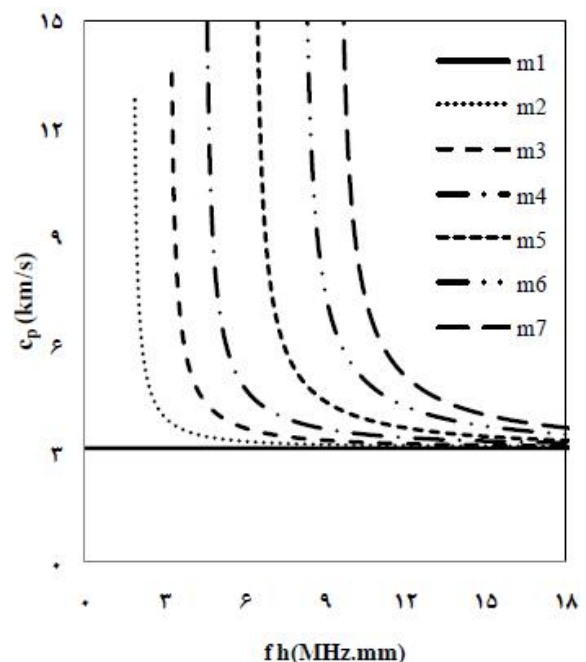
با توجه به نتیجه‌ی بدست آمده برای منحنی طیف فرکانس در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود که برای هر مود، بعد از یک عدد موج خاصی نمودار مربوط به آن مود به صورت خطی می‌شود به عبارت دیگر، رابطه‌ی بین فرکانس زاویه‌ای (ω) و عدد موج (k) خطی می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه‌ی سرعت فاز ($c_p = \frac{\omega}{k}$) انتظار می‌رود که با افزایش فرکانس در هر مود سرعت فاز به یک مقدار ثابت میل کند این موضوع با توجه به نمودار سرعت فاز بر حسب فرکانس در شکل ۱۳ قابل مشاهده می‌باشد. همچنین با توجه به رابطه‌ی سرعت گروه ($c_g = \frac{d\omega}{dk}$) انتظار می‌رود برای هر مود از فرکانسی که رابطه‌ی بین عدد موج و فرکانس زاویه‌ای خطی می‌شود، منحنی‌های سرعت گروه مقداری ثابت شود که این پدیده در شکل ۱۴ قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که با افزایش فرکانس تحریک تعداد مودهای قابل انتشار از موج برشی افقی در ورق دو لایه افزایش پیدا می‌کنند. همچنین در محدوده‌ی فرکانس‌های پایین، که این محدوده‌ی فرکانس برای ورق دو لایه فولاد-آلومینیوم برابر با $\bar{f} \leq 2.1$ می‌باشد تنها، یک مود در ورق دو لایه انتشار پیدا می‌کنند. لذا در این محدوده فرکانس به علت انتشار مود کمتر، پراکندگی کمتر می‌باشد. شکل ۱۵ ساختار موج در راستای x ، و شکل ۱۶ توزیع تنش σ_{xx} در موقعیت‌های مختلف برای مود چهارم که به صورت دلخواه انتخاب شده است، را نمایش می‌دهند.

۶- انتشار موج برشی افقی در ورق دو لایه

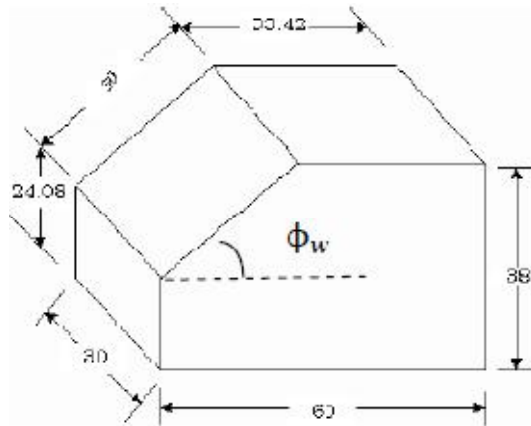
علاوه بر انتشار مودهای موج لمب در لایه‌های یک ورق دو لایه، موج برشی افقی نیز می‌تواند در جسم منتشر شود. برای رسم منحنی‌های پراکندگی باید ریشه‌های مربوط به معادله‌ی (۲۲) استخراج شوند. شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ نمودارهای پراکندگی را برای انتشار موج برشی افقی در ورق دو لایه نمایش می‌دهند.



شکل ۱۲- نمودار فرکانس بر حسب عدد موج برای انتشار موج برشی افقی در ورق دو لایه



شکل ۱۳- نمودار سرعت فاز بر حسب فرکانس برای انتشار موج برشی افقی در ورق دو لایه

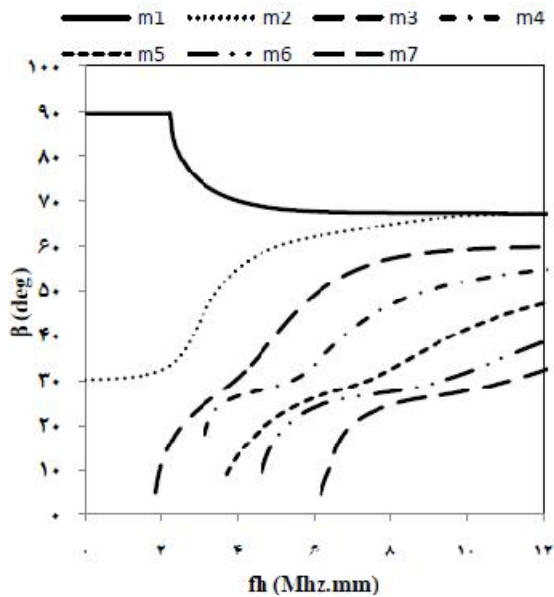


شکل ۱۷- هندسه‌ی گوه از جنس پرسپکس [۱۶]

با توجه به هندسه‌ی این گوه، شیب سطح شیبدار با استفاده از رابطه (۲۵) بدست می‌آید.

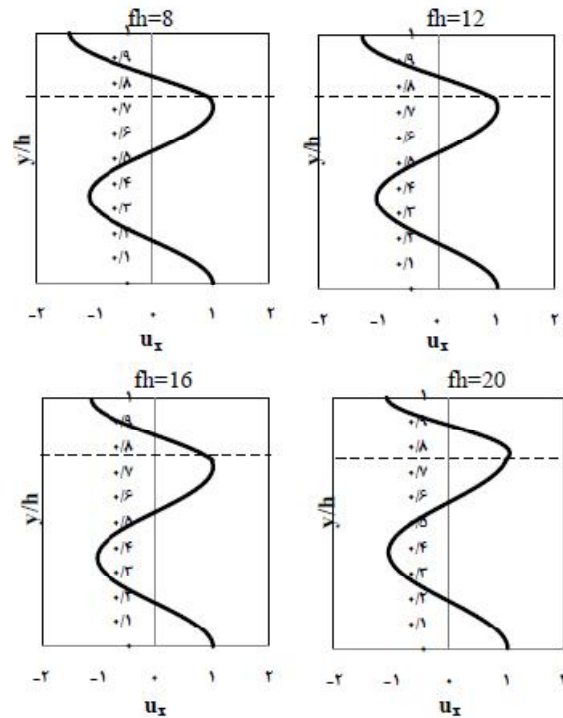
$$\phi_w = \tan^{-1} \left(\frac{30 - 24.08}{60 - 33.42} \right) = 28^\circ \quad (25)$$

در رابطه‌ی (۲۳)، سرعت فاز C_p مربوط به هر مود مطابق با منحنی پراکندگی ۶ بدست می‌آید. با توجه به رابطه‌ی (۲۳)، منحنی زاویه‌ی برخورد سیگنال به پایه‌ی گوه (β) بر حسب فرکانس پروب برای ورق دو لایه مطابق با شکل ۱۸ نمایش داده شده است.

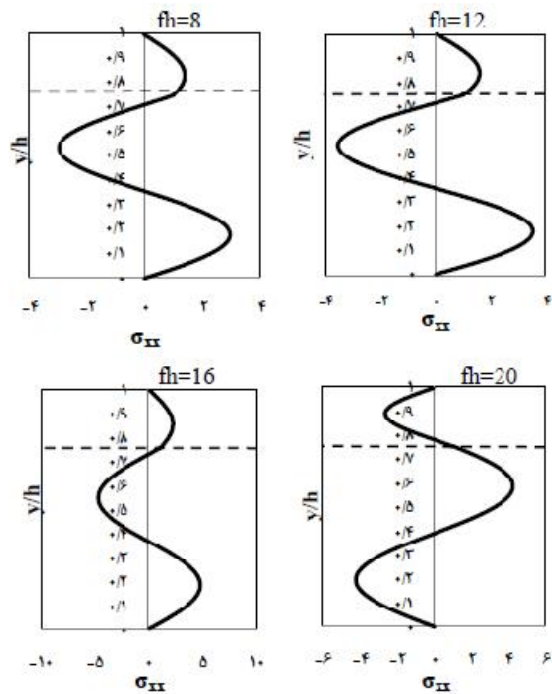


شکل ۱۸- زاویه تابش بر حسب فرکانس تحریک ورق دو لایه

هر گوه هندسه‌ی خاصی دارد لذا ϕ_w در هر گوه مقداری مشخص می‌باشد. ولی مقدار زاویه‌ی α با توجه به روش آرایه‌ی فازی می‌تواند به صورت الکتریکی برای هر گوه تنظیم شود. با تغییرات زاویه‌ی α ، زاویه‌ی β برای هر گوه قابل تغییر می‌باشد.



شکل ۱۵- منحنی شکل مود برای مود چهارم در راستای x



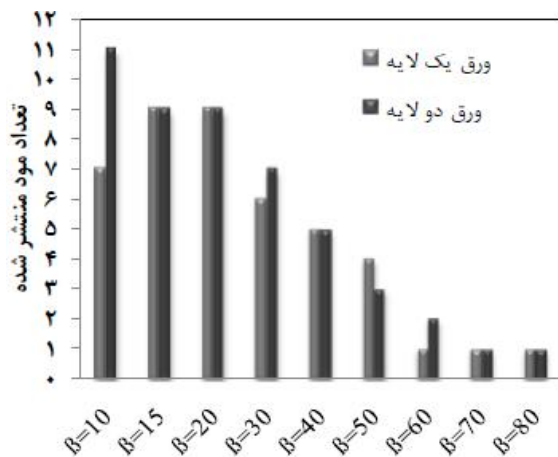
شکل ۱۶- منحنی توزیع تنش برای مود چهارم در راستای x

۷- تحریک مودی خاص از موج لمب توسط روش آرایه فازی

یک گوه از جنس پرسپکس با مشخصات هندسه‌ی در شکل ۱۷ نشان داده شده است. سرعت موج در این گوه برابر با $C_w = 2.73 \frac{\text{km}}{\mu\text{s}}$ و تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

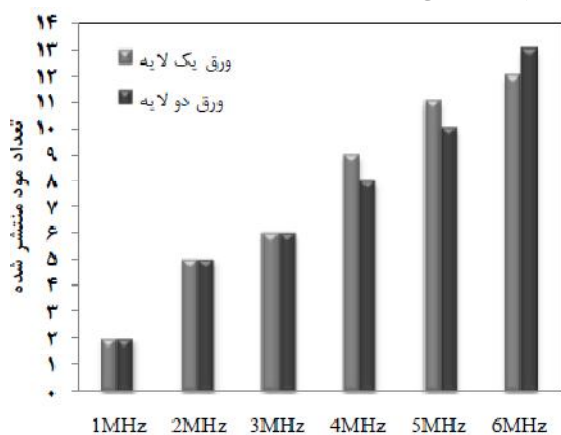
در شکل ۱۹، k_i ، A_i به ترتیب بیانگر آمین مود متقارن و پادمتقارن انتشار یافته در ورق تک لایه و m_i ، آمین مود انتشار یافته در ورق دو لایه می‌باشد. با توجه به شکل ۱۹ مشاهده می‌شود که برای تولید مودی خاص در یک زاویه تابش مشخص باید از پروبی با فرکانس بالاتر در ورق دو لایه نسبت به ورق یک لایه [۱۲] استفاده نمود.

شکل ۲۰ تعداد مودهای قابل انتشار در ورق دو لایه و یک لایه [۱۲] با ضخامت ۲ میلی‌متر را برای f های مختلف در بازه $0 < f \leq 7 \text{ Mhz}$ نشان می‌دهد. طبق شکل ۲۰ مشاهده می‌شود که در زوایای تابش کمتر تعداد مود بیشتری در جسم منتشر می‌شود.



شکل ۲۰- تعداد مود قابل انتشار در ورق یک لایه و دو لایه در زوایای تابش ثابت و فرکانس‌های متفاوت

شکل ۲۱ تعداد مودهای قابل انتشار در ورق دو لایه و یک لایه با ضخامت ۲ میلی‌متر را برای فرکانس‌های (f) مختلف پروب در بازه $0 \leq \beta \leq 90^\circ$ نشان می‌دهد. طبق این شکل مشاهده می‌شود که در فرکانس‌های بیشتر تعداد مود بیشتری در جسم منتشر می‌شود.



شکل ۲۱- تعداد مود قابل انتشار در ورق یک لایه و دو لایه در فرکانس ثابت و زوایای تابش متفاوت

مطابق با شکل ۱۸ مشاهده می‌شود که در f ها و فرکانس‌های مختلف مودهای متفاوتی در جسم می‌توانند منتشر شوند.

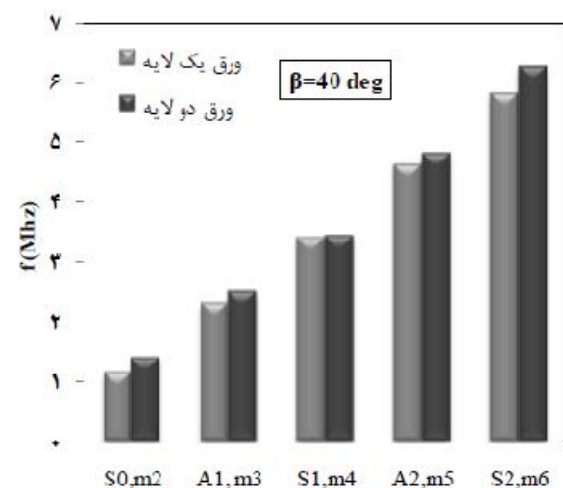
فرض می‌شود ضخامت کل ورق دو لایه برابر با ۲ میلی‌متر ($h = 2\text{mm}$) و فرکانس مرکزی پروب ۲ مگاهرتز ($f = 2\text{Mhz}$) باشد. با اندازه‌گیری سرعت فاز چهار مود اول در $fh = 4\text{Mhz. mm}$ مطابق با منحنی پراکندگی سرعت فاز در شکل ۶ و همچنین استفاده از گوه‌ای با مشخصات شکل ۱۷، می‌توان مقدار زاویه‌ی f برای تولید چهار مود اول در ورق دو لایه را مطابق با رابطه‌ی (۲۳) محاسبه کرد. نتایج مربوط به محاسبه‌ی زاویه‌ی f در جدول ۳ نمایش داده شده است.

جدول ۳- زاویه تابش مورد نیاز جهت تولید ۴ مود اول در ورق

دو لایه برای گوهی پرسپیکس

مود	λ_{trace}	C_p	β	α
m_1	۱,۴۵۲	۲,۹۰۴	۷۰	۴۲
m_2	۱,۶۶۷	۳,۳۳۴	۵۵	۲۷
m_3	۲,۶۹۴	۵,۳۸۷	۳۱	۳
m_4	۳,۰۵۸	۶,۱۱۶	۲۶	۲

با توجه به نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود برای تولید یک مود خاص در ورق دو لایه باید زاویه f به نحوی توسط اپراتور به صورت الکتریکی تنظیم شود که این سیگنال با زاویه‌ی f مربوط به همان مود خاص به سطح جسم برخورد کند. در یک حالت دیگر فرض می‌شود سیگنال با یک زاویه‌ی مشخص (α) به داخل گوه فرستاده می‌شود، بنابراین زاویه‌ی f مقداری مشخص می‌باشد. در شکل ۱۹ تعداد مودها و فرکانس پروب مورد نیاز برای تحریک این مودها در زاویه $\beta = 40$ و در بازه‌ی $0 < f \leq 7 \text{ Mhz}$ ، برای ورق تک لایه [۱۲] و دو لایه با ضخامت ۲ میلی‌متر مشخص شده است.



شکل ۱۹- فرکانس پروب مورد نیاز برای تحریک مود خاص در زاویه تابش ۴۰ درجه

۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مبانی نظری انتشار امواج فراصوت در ورق دو لایه الاستیک مورد مطالعه قرار گرفت. در این راستا انتشار موج-های لمب و برشی افقی در ورق دو لایه مورد بررسی و رابط پراکندگی استخراج شدند. در ادامه منحنی‌های پراکندگی طیف فرکانس، سرعت‌های فاز و گروه، تعداد مودهای قابل انتشار، شکل مود و توزیع تنش استخراج شدند. از بررسی‌های انجام شده در این پژوهش می‌توان نتایج زیر را عنوان نمود:

تأثیر ضخامت مربوط به هر لایه در اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن معادلات پراکندگی یعنی روابط (۱۴) الی (۱۶) کاملاً مشخص می‌باشد. همچنین جنس هر لایه بر روی پارامترهایی همچون چگالی، مدول یانگ، ضرایب لامه و سرعت موج عرضی و طولی که موثر در روابط پراکندگی همچون معادله ناویر می‌باشد، قابل مشاهده است. لذا ضخامت و جنس هر لایه تأثیر مستقیمی در رسم منحنی پراکندگی دارند.

با مقایسه منحنی‌های پراکندگی، نتیجه می‌شود که هر هندسه نمودارهای پراکندگی خاص خود را دارد.

با افزایش فرکانس، رابطه‌ی پراکندگی مربوط به انتشار موج لمب به رابطه‌ی انتشار موج رایلی تبدیل می‌شود. لذا در این فرکانس‌ها سرعت فاز به سرعت امواج رایلی میل می‌کند.

با افزایش فرکانس، تعداد مودهای بیشتری در جسم منتشر می‌شوند. بنابراین پراکندگی بیشتری در جسم رخ می‌دهد. این امر باعث می‌شود تراگذرهای گیرنده، مودهای بیشتری را دریافت کنند. در این حالت جداسازی مودها مشکل شده و باعث سخت شدن تفسیر نتایج دریافتی می‌شود.

با تغییر دادن در مودها و یا تغییر فرکانس‌ها، شکل مود متفاوتی بدست می‌آید. برای ایجاد جابجایی دلخواه در هر نقطه جهت بازرسی غیر مخرب به فرکانس و شکل مود انتشار منحصر به فردی نیاز است.

نمادها

E	مدول یانگ
u	میدان جابجایی
ρ	چگالی ماده
σ	تنش
ε	کرنش
δ	تابع دیراک

λ, μ	ضرایب لامه
∇'	گرادیان
$\nabla \times$	کرل
∇^2	لاپلاسی
c_L	موج طولی سرعت
c_T	موج عرضی سرعت
ϕ	تابع پتانسیل اسکالر
ψ	تابع پتانسیل برداری
h_1	ضخامت لایه اول
h	ضخامت کل ورق
k_T	عدد موج عرضی در راستای ضخامت
k_L	عدد موج طولی در راستای ضخامت
k	تصویر عدد موج طولی و عرضی در راستای انتشار موج
p_n	تصویر عدد موج طولی در راستای ضخامت
q_n	تصویر عدد موج عرضی در راستای ضخامت
ω	فرکانس طبیعی
θ_L	زاویه انتشار موج طولی نسبت به محور عمود بر ضخامت
θ_T	زاویه انتشار موج عرضی نسبت به محور عمود بر ضخامت
β	زاویه تابش موج از گوه به داخل ورق
α	زاویه تابش از تراگذر به داخل گوه
c_w	سرعت موج در گوه
c_p	سرعت فاز
c_g	سرعت گروه
f	فرکانس زاویه‌ای
\bar{f}	حاصلضرب فرکانس در ضخامت
\bar{k}	حاصلضرب عدد موج در ضخامت
u_x	جابجایی در راستای X
u_y	جابجایی در راستای Y
u_z	جابجایی در راستای Z
σ_{xx}	تنش عمودی در راستای X
σ_{yy}	تنش عمودی در راستای Y
σ_{yz}	تنش برشی در راستای Z

پیوست الف

مقادیر مربوط به ماتریس $[Y_i]$ و $[A_{ij}]$

$$\begin{aligned} Y_1 &= c_1^1 \\ Y_2 &= c_2^1 \\ Y_3 &= c_3^1 \\ Y_4 &= c_4^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_5 &= c_1^2 \\ Y_6 &= c_2^2 \\ Y_7 &= c_3^2 \\ Y_8 &= c_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu_1(q_1^2 - k^2), \quad A_{12} = \mu_1(q_1^2 - k^2) \\ A_{13} &= 2\mu_1 k q_1, \quad A_{14} = -2\mu_1 k q_1 \\ A_{1n} &= 0 \text{ for } 5 \leq n \leq 8 \\ A_{21} &= -2k\mu_1 p_1, \quad A_{22} = 2k\mu_1 p_1 \\ A_{23} &= \mu_1(q_1^2 - k^2), \quad A_{24} = \mu_1(q_1^2 - k^2) \\ A_{2n} &= 0 \text{ for } 5 \leq n \leq 8 \\ A_{31} &= p_1 \exp[ip_1 h_1] \\ A_{32} &= -p_1 \exp[-ip_1 h_1] \\ A_{33} &= k \exp[iq_1 h_1] \\ A_{34} &= k \exp[-iq_1 h_1] \\ A_{41} &= k \exp[ip_1 h_1] \\ A_{42} &= k \exp[-ip_1 h_1] \\ A_{43} &= -q_1 \exp[iq_1 h_1] \\ A_{44} &= q_1 \exp[-iq_1 h_1] \\ A_{51} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[ip_1 h_1] \\ A_{52} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[-ip_1 h_1] \\ A_{53} &= 2\mu_1 k q_1 \exp[iq_1 h_1] \\ A_{54} &= -2\mu_1 k q_1 \exp[-iq_1 h_1] \\ A_{61} &= -2kp_1 \mu_1 \exp[ip_1 h_1] \\ A_{62} &= 2kp_1 \mu_1 \exp[-ip_1 h_1] \\ A_{63} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[iq_1 h_1] \\ A_{64} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[-iq_1 h_1] \\ A_{7n} &= 0 \text{ for } 1 \leq n \leq 4 \\ A_{75} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[ip_2 h] \\ A_{76} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-ip_2 h] \\ A_{77} &= 2\mu_2 k q_2 \exp[iq_2 h] \\ A_{78} &= -2\mu_2 k q_2 \exp[-iq_2 h] \\ A_{8n} &= 0 \text{ for } 1 \leq n \leq 4 \\ A_{85} &= -2kp_2 \mu_2 \exp[ip_2 h] \\ A_{86} &= 2kp_2 \mu_2 \exp[-ip_2 h] \\ A_{87} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[iq_2 h] \\ A_{88} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-iq_2 h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{35} &= -p_2 \exp[ip_2 h_1] \\ A_{36} &= p_2 \exp[-ip_2 h_1] \\ A_{37} &= -k \exp[iq_2 h_1] \\ A_{38} &= -k \exp[-iq_2 h_1] \\ A_{45} &= -k \exp[ip_2 h_1] \\ A_{46} &= -k \exp[-ip_2 h_1] \\ A_{47} &= q_2 \exp[iq_2 h_1] \\ A_{48} &= -q_2 \exp[-iq_2 h_1] \\ A_{55} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[ip_2 h_1] \\ A_{56} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-ip_2 h_1] \\ A_{57} &= -2\mu_2 k q_2 \exp[iq_2 h_1] \\ A_{58} &= 2\mu_2 k q_2 \exp[-iq_2 h_1] \\ A_{65} &= 2kp_2 \mu_2 \exp[ip_2 h_1] \\ A_{66} &= -2kp_2 \mu_2 \exp[-ip_2 h_1] \\ A_{67} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[iq_2 h_1] \\ A_{68} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-iq_2 h_1] \end{aligned}$$

پیوست ب

مقادیر مربوط به ماتریس $[F_i]$ و $[B_{ij}]$

$$\begin{aligned} F_1 &= A^1 & F_3 &= F^2 & F_2 &= B^1 & F_4 &= B^2 \\ B_{11} &= \mu_1 q_1 & B_{13} &= 0 & B_{12} &= 0 & B_{14} &= 0 \\ B_{21} &= \sin(q_1 h_1) & B_{23} &= -\sin(q_2 h_1) & B_{22} &= \cos(q_1 h_1) & B_{24} &= -\cos(q_2 h_1) \\ B_{31} &= \mu_1 q_1 \cos(q_1 h_1) & B_{33} &= -\mu_2 q_2 \cos(q_2 h_1) & B_{32} &= -\mu_1 q_1 \sin(q_1 h_1) & B_{34} &= \mu_2 q_2 \sin(q_2 h_1) \\ B_{41} &= 0 & B_{43} &= q_2 \cos(q_2 h) & B_{42} &= 0 & B_{44} &= -q_2 \sin(q_2 h) \end{aligned}$$

waves using phased array technique," Progress, 5th International Workshop of NDT Experts, Prague 12-14 Oct, 2009.

[15] Achenbach, J. D., "Lamb waves as thickness vibration superimposed on a membrane carrier wave", J. Acoust. Soc. Am., vol. 103, pp. 2283-2286, Nr. 5 May, 1998.

[16] Sankar, B. N., Palanichamy, P., Jayakumar, T., Kalyanasundaram, P., Baldev R., "Study of Cold Worked Austenitic Stainless Steel using LCR Waves," Progress, 15th World Conf. On NDT, Italy, 15-21 Oct, 2000.

مراجع

[1] Demcenko, A., Mazeika, L., "Calculation of Lamb Waves Dispersion Curves in Multi-Layered Planar Structures," ULTRAGARSAS, vol. 44, pp. 15-17, 2002.

[2] Honarvar, F., Enjilela, E., Sinclair, A. N., "An Alternative Method for Plotting Dispersion Curves," Ultrasonics, vol. 49, pp. 15-18, 2009.[3]

[3] Ștefan, S., Nicolae, C., Mircea, G., Viorel A., "Extraction of dispersion curves for waves propagation in free complex waveguides by standard finite element codes," Ultrasonics, vol. 51, pp. 503-515, 2011.

[4] Usuki, T., Suzuki, T., "Dispersion curves for a viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivatives," Journal of sound and vibration, vol. 331, pp. 605-621, 2012.

[5] Akbarov, S.D., Guliev, M.S., Kepceler, T., "Dispersion relations of axisymmetric wave propagation in initially twisted bi-material compounded cylinders," Journal of sound and vibration, vol. 330, pp. 1644-1664, 2011.

[6] Chen, W. Q., Wang, H. M., Bao, R. H., "On Calculating Dispersion Curves of Waves in a Functionally Graded Elastic Plate," Composite Structures, vol. 81, pp. 233-242, 2007.

[7] Deschamps, M., Hosten, B., Gerard, A., Uberall, H., "Repulsion of Phase-Velocity Dispersion Curves and the Nature of Plate Vibrations," Journal De Physique, vol. 4, pp. 905-908, 1994.

[8] Huo, S., Reis, H., "Estimation of Adhesive Bond Strength in Laminated Safety Glass Using Guided Mechanical Waves: Part I. An Energy Velocity Approach," Insight: Non-Destructive Testing and Condition Monitoring, Vol. 50, pp. 146-152, 2008.

[9] Kazys, R., Mudge, P.J., Sanderson, R., Ennaceur, C., Gharaibeh, Y., Mazeika, L., Maciulevicius, A., "Development of ultrasonic guided wave techniques for examination of non-cylindrical components," Physics Procedia, vol. 3, pp. 833-838, 2010.

[10] Rose, J. L., "Ultrasonic Guided Waves in Structural Health Monitoring," Key Engineering Materials, vol. 270-273, pp. 14-21, 2004.

[11] Graff, K. E., "Wave motion in elastic solids", Oxford University Press, London, 1975.

[۱۲] میرزاخانی نافچی، امین، "بررسی انتشار امواج فراصوت در ورق‌های چند لایه" پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده‌ی مهندسی، گروه مکانیک، ۱۳۸۹.

[13] Rose, J. L., "Ultrasonic Waves in Solid Media", New York: Cambridge University Press, 1999.

[14] Prager, J., Hoever, C., Brekow, G., Kreutzbruck, M., "Flaw detection with guided