

تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و گرمایی با استفاده از روش المان محدود نیمه تحلیلی

منصور درویزه	استاد، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان
ابوالفضل درویزه	استاد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بندرانزلی
رضا انصاری	استادیار، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان
علی علی جانی	دانشجوی دکتری، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

چکیده

در این مقاله، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های مختلف مکانیکی شامل فشاری محوری، پیچشی، فشاری خارجی و همچنین بار گرمایی بررسی می‌شود. به این منظور، روش المان محدود نیمه تحلیلی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک معادله مقدار ویژه کمانش، بار بحرانی و مود محیطی مربوط به آنرا تعیین می‌نماید. در بارگذاری مکانیکی، دو روش برای تشکیل ماتریس سختی هندسی معرفی شده که پاسخ‌های دو روش در تعیین بار بحرانی کمانش با یکدیگر و همچنین با مراجع مقایسه می‌شوند. برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تک لایه برحسب نوع بارگذاری، مقاومترین زاویه الیاف در برابر عدم کمانش بررسی و معرفی می‌شود.

کلمات کلیدی: کمانش، کامپوزیت، المان محدود نیمه تحلیلی، معادله مقدار ویژه

Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shells Under Mechanical and Thermal Loads Using a Semi-Analytical Finite Element Method

M. Darvizeh	Professor, Faculty of Engineering, University of Guilan
A. Darvizeh	Professor, Islamic Azad University of Bandar Anzali
R. Ansari	Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Guilan
A. Alijani	Ph. D. Student, Faculty of Engineering, University of Guilan

Abstract

In this article, the buckling of composite cylindrical shells is investigated under thermal and different mechanical loading consisting of the axial compression, torsion and external pressure. To achieve this, a semi-analytical finite element method is developed based on the First order Shear Deformation Theory (FSDT). The eigenvalue equation obtained is used to determine the critical load and its corresponding circumferential mode. In the mechanical loading, two methods are introduced to make the geometric stiffness matrix, the results of which are compared to each other and also to the references. For single layer composite cylindrical shells and each loading, the most strength ply angle against buckling are studied.

Keywords: Buckling, Composite, Semi-analytical finite element, Eigenvalue equation

۱- مقدمه

مواد کامپوزیت به دلیل خواص ایده‌الی که در خود دارند توانستند جایگزین مناسبی برای مواد متعارف در صنایع شوند این مواد به دلیل برخورداری از استحکام بالا، وزن کم و همچنین قابلیت مونتاژپذیری سریع، در حوزه‌هایی مانند هوافضا، پزشکی، ساختمان و غیره استفاده می‌شوند [۱] و [۲].

مدلسازی رفتار سازه در کلیه حوزه‌ها شامل دینامیک، استاتیک، پلاستیسیته، تغییر شکل‌های بزرگ و غیره نیازمند یک ابزار قدرتمند، سریع و دقیق می‌باشد. یکی از این ابزارها در حوزه روش‌های عددی، روش المان محدود است. توسعه المان محدود در تعیین رفتار سازه‌ها به گونه‌ای شکل گرفته که برای پدیده‌های مختلف مکانیکی به صورت منظمی طبقه‌بندی شده است [۳-۱۱]. Reddy با استفاده از روش المان محدود رفتار مکانیکی سازه‌های کامپوزیتی را بررسی نمود [۱۲] و [۱۳]. تعیین بار کمانش بحرانی، شکل مود سازه و ارائه رفتار آن پس از تغییر شکل، از مباحث اصلی در مساله کمانش محسوب می‌شوند. در مطالعه پدیده کمانش، Wriggers با کمک روش المان محدود تحلیل‌های مقدار ویژه (خطی) و همچنین غیرخطی کمانش را ارائه نموده است [۳] و [۱۴] روش المان محدود نیمه تحلیلی به عنوان حالتی خاص از روش المان محدود، می‌تواند مش‌بندی سه بعدی سازه‌ها را به دو بعد یا یک بعد کاهش دهد. چند تحقیق، دقت مناسب پاسخ‌های این روش را برای تحلیل مسائل خطی و غیرخطی کمانش ارائه می‌کنند [۱۵-۲۲]. در سری مجموعه تحقیقات [۱۵-۱۷]، Teng با توسعه روش المان محدود نیمه تحلیلی، اثر نقص هندسی را بر روی پوسته‌ها بررسی نمود. در سری کارهای [۱۸-۲۲]، Patel به کمک روش المان محدود نیمه تحلیلی، کمانش استوانه‌ها و مخروط‌های ناقص کامپوزیتی را تحت بارهای فشاری محوری، پیچشی و فشاری مطالعه نمود.

در سری کارهای Sheinman [۲۳-۲۵]، رفتار کمانشی غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای کامل و ناقص به وسیله تئوری-های مختلف پوسته بررسی شده است. Eslami و Javaheri [۲۶] رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی ارتوتروپیک را با تئوری سندرز بررسی نمودند.

در مقاله حاضر یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با استفاده از روش المان محدود نیمه تحلیلی با المان‌های یک بعدی مدل می‌شود و تحت انواع بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی قرار می‌گیرد. در بارگذاری مکانیکی، تنش‌های داخلی پوسته استوانه‌ای که ماتریس سفتی هندسی در معادله مقدار ویژه کمانش را تشکیل می‌دهد، با استفاده از دو روش حاصل می‌شود.

روش اول روش کلاسیک و موجود در مراجع بوده و روش دوم براساس یک فرض ساده کننده و منطبق بر مفاهیم پایه مکانیک معرفی می‌شود. بار کمانش بحرانی و مود محیطی متناظر با آن برای بارگذاری‌های مختلف و زوایای متفاوت الیاف بررسی شده و برای هر بارگذاری، مقاومترین زاویه الیاف برای عدم کمانش استوانه کامپوزیتی تک لایه پیشنهاد می‌شود.

۲- فرمول بندی مساله

روش المان محدود نیمه تحلیلی برای مسائل تغییر شکل هارمونیک، می‌تواند جایگزین مناسبی برای تحلیل المان محدود سه بعدی باشد. بنابراین، این تحلیل می‌تواند برای بررسی رفتار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای استفاده شود. به منظور مدل کردن استوانه‌های نازک به وسیله روش المان محدود نیمه تحلیلی، جایگزینی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) به جای مش بندی در راستای شعاعی امکان پذیر خواهد بود. همچنین در مسائل هارمونیک شامل تغییر شکلهای متقارن و غیرمتقارن پوسته‌ها، سری فوریه می‌تواند جایگزین مش بندی در راستای محیطی شود. در نتیجه، اگر یک استوانه نازک در راستای محوری به وسیله روش المان محدود و المان‌های یک بعدی مش زده شود، این مش بندی می‌تواند رفتار کمانش آن استوانه را بصورت کامل پیش بینی کند.

۲-۱- فرمول بندی هندسی مساله

شکل ۱ یک طرحواره از یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به طول L ، شعاع سطح میانی R و ضخامت h را نشان می‌دهد که در آن s ، راستای محور استوانه، θ راستای محیطی و z راستای شعاعی است.

با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، جابجایی‌های استوانه می‌تواند بر حسب صفحه میانی ضخامت استوانه ($z = 0$) بیان شود. با استفاده از این تئوری، ضرورت المان بندی در راستای شعاعی از بین رفته و مدل را از آن بی‌نیاز می‌کند [۱۲]، [۲۲] و [۲۷].

در این تئوری، جابجایی‌های u و v و w در یک نقطه (s, θ, z) ، به صورت تابعی از جابجایی‌های سطح میانی u_0 و v_0 بیان می‌شود که در آن β_s و β_θ دورانه‌های مستقل به ترتیب در راستای محوری و محیطی می‌باشند.

$$\begin{aligned} u(s, \theta, z) &= u_0(s, \theta) + z\beta_s(s, \theta) \\ v(s, \theta, z) &= v_0(s, \theta) + z\beta_\theta(s, \theta) \\ w(s, \theta, z) &= w_0(s, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

بطوریکه بالانویس c_0 مؤلفه های متقارن میدان جابجایی و بالانویس c_i و s_i مولفه های نامتقارن متغیرهای میدان جابجایی به ترتیب متناظر با $\cos(in\theta)$ و $\sin(in\theta)$ را نشان می دهند. مولفه های متقارن میدان جابجایی در کل مسیر بارگذاری شامل قبل از نقطه کمانش، نقطه کمانش و بعد از آن مؤثر می باشد. در صورتیکه تأثیر مولفه های نامتقارن میدان جابجایی، در مسیر قبل از کمانش ناچیز خواهد بود.

افزایش تعداد جملات سری فوریه، درجه آزادی تحلیل را افزایش می دهد. بدین معنی که در یک تغییر شکل غیر متقارن، ۵ درجه آزادی در هر گره با $5 + 4M_1 + 6M_2$ درجه آزادی جایگزین می شود. افزایش این جملات می تواند در ارائه تقریبهای دقیق تر از تحلیل کمانش مفید باشد.

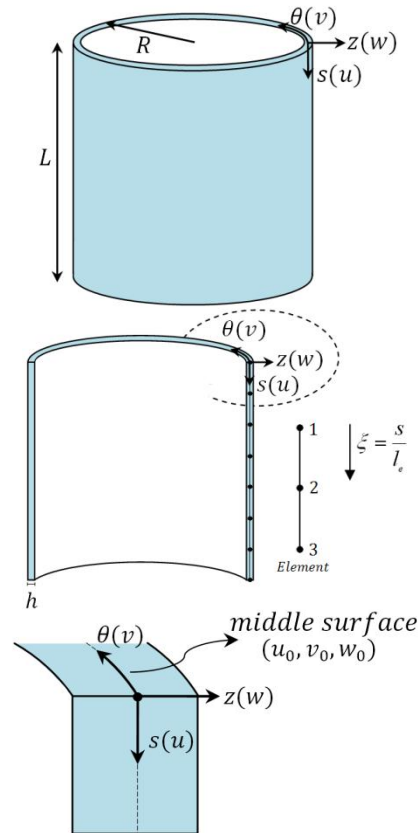
در این قسمت بصورت ریاضی، اثر تعداد جملات سری فوریه روی تغییر شکل هارمونیک یک حلقه دایره ای بررسی می شود. بدین ترتیب، برای مدلسازی حلقه در راستای محیطی و مشاهده تغییر شکل هارمونیک در آن، میدان مکان شعاع محیطی به صورت سری فوریه

$$R(\theta) = R_0 + \sum_{i=1}^M [R_0^{c_i} \cos(in\theta) + R_0^{s_i} \sin(in\theta)]$$

بیان شده و اثرات پارامترهای شعاعی متقارن و غیر متقارن بر روی شکل مود ارائه می شود. در شکل ۲ برای مود غالب محیطی ۴، اثرات پارامترهای ذکر شده نمایش داده می شود. شکل ۲ اثر جملات متقارن و غیرمتقارن را بر روی تغییر شکل حلقه دایره ای ارائه می کند. همچنین مقایسه دو شکل (۲-الف) و (۲-ب) تأثیر پارامتر مربوط به ترم $\sin(in\theta)$ را در سری فوریه نشان می دهد که در تعیین تغییر شکل بر اثر بار پیچشی مؤثر خواهد بود.

این سری فوریه و تئوری (FSDT) دو بعد استوانه را تعریف می کنند که به وسیله آنها روش المان محدود با مش بندی یک بعدی در راستای محوری، می تواند رفتار سه بعدی سازه را بررسی کند. در تحلیل کمانش تحت بارگذاری های محوری، فشاری خارجی و گرمایی، حداقل ۱۰ درجه آزادی برای هر گره به صورت زیر پاسخهای قابل قبول برای تحلیل کمانش خطی ارائه می کند.

$$U_I = [u_0^{c_0}, u_0^{c_1}, v_0^{c_0}, v_0^{s_1}, w_0^{c_0}, w_0^{c_1}, \beta_s^{c_0}, \beta_s^{c_1}, \beta_\theta^{c_0}, \beta_\theta^{s_1}] \quad (3)$$



شکل ۱- مختصات، ابعاد، المان بندی و صفحه میانی استوانه

با استفاده از یک رهیافت المان محدود نیمه تحلیلی، می توان جابجایی های صفحه میانی را به وسیله یک سری فوریه بر حسب زاویه محیطی θ ارائه نمود. در تغییر شکل متقارن و غیر متقارن پوسته های دوار، جابجایی صفحه میانی برای n امین مود کمانش محیطی بدین شکل بیان می شود [۱۵-۲۲].

$$\begin{aligned} u_0(s, \theta) &= u_0^{c_0}(s) + \sum_{i=1}^{M_1} [u_0^{c_i}(s) \cos(in\theta) + u_0^{s_i}(s) \sin(in\theta)] \\ v_0(s, \theta) &= v_0^{c_0}(s) + \sum_{i=1}^{M_1} [v_0^{c_i}(s) \cos(in\theta) + v_0^{s_i}(s) \sin(in\theta)] \\ w_0(s, \theta) &= w_0^{c_0}(s) + \sum_{i=1}^{M_2} [w_0^{c_i}(s) \cos(in\theta) + w_0^{s_i}(s) \sin(in\theta)] \\ \beta_s(s, \theta) &= \beta_s^{c_0}(s) + \sum_{i=1}^{M_2} [\beta_s^{c_i}(s) \cos(in\theta) + \beta_s^{s_i}(s) \sin(in\theta)] \\ \beta_\theta(s, \theta) &= \beta_\theta^{c_0}(s) + \sum_{i=1}^{M_2} [\beta_\theta^{c_i}(s) \cos(in\theta) + \beta_\theta^{s_i}(s) \sin(in\theta)] \end{aligned} \quad (2)$$

است.

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (5)$$

$$N_3(\xi) = 1-\xi^2$$

۲-۲- فرمول بندی المان محدود

برابری کار نیروی داخلی ناشی از تغییر شکل سازه و کار نیروی خارجی به صورت زیر بیان می شود [۸]:

$$\int \delta \varepsilon^T \sigma dV - \delta U^T \mathbf{P} = 0 \quad (6)$$

که در آن δU نمو بردار جابجایی، \mathbf{P} بردار نیرو و ε, σ به ترتیب بردارهای تنش و کرنش می باشند. تحلیل معادله (۶) بصورت خطی (بدون نیاز به حلقه نموی تکراری) می تواند آنرا به یک معادله مقدار ویژه کمناشی تبدیل کند. بدین منظور پارامترهای معادله شناسایی می شوند.

معادله سینماتیک فون کارمن در حضور بار گرمایی به سه بخش خطی، غیر خطی و گرمایی تقسیم می شود [۱۸-۲۰].

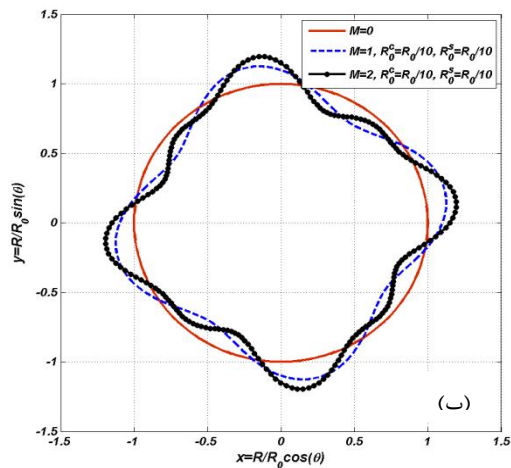
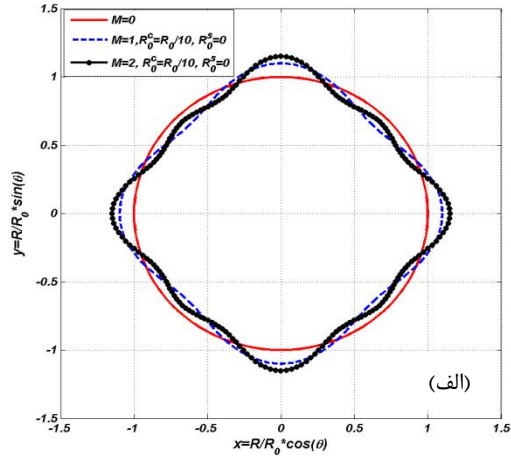
$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L + z\varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^{NL} \\ [0]_{2 \times 1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{th} \\ [0]_{2 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ε_p^L ، ε_b ، ε_s به ترتیب کرنش های خطی غشایی، خمشی و برشی را بیان می کند. همچنین ε_p^{NL} بیانگر کرنش غیرخطی و ε_{th} کرنش گرمایی می باشد. برای پوسته استوانه ای با روابط سینماتیک فون کارمن، رابطه بین کرنش و تغییر شکل صفحه میانی بدین شکل تعریف می شود

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L \\ \varepsilon_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial s} \\ \frac{\partial v_0}{R\partial\theta} + \frac{w_0}{R} \\ \frac{\partial u_0}{R\partial\theta} + \frac{\partial v_0}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_p^{NL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_s + \frac{\partial w_0}{\partial s} \\ \beta_\theta + \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} - \frac{v_0}{R} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial s} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{R\partial\theta} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial s} \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\{\varepsilon_{th}\} = \{\alpha\} \Delta_0 T$$

که در آن $\Delta_0 T$ تغییر دما نسبت به دمای مرجع بوده و $\{\alpha\} = \{\alpha_s \quad \alpha_\theta \quad \alpha_{s\theta}\}^T$ که معرف ضریب انبساط گرمایی در راستای محور های مختصات می باشد، با استفاده از تبدیل ضریب انبساط گرمایی در راستای الیاف کامپوزیت یعنی



شکل ۲- اثر پارامترها و جملات سری فوریه روی تغییر شکل محیطی

در صورتیکه، برای بارگذاری پیچشی، حداقل ۱۵ درجه آزادی برای هر گره می تواند پاسخهای قابل قبولی را برای بدست آوردن بار کمناش بحرانی ارائه نماید.

$$U_I = [u_0^{c_0}, u_0^{c_1}, u_0^{s_1}, v_0^{c_0}, v_0^{c_1}, v_0^{s_1}, w_0^{c_0}, w_0^{c_1}, w_0^{s_1}, \beta_s^{c_0}, \beta_s^{c_1}, \beta_s^{s_1}, \beta_\theta^{c_0}, \beta_\theta^{c_1}, \beta_\theta^{s_1}] \quad (4)$$

همانطور که از دو مدلسازی شعاعی و محیطی می توان استنتاج نمود، جابجایی هر نقطه که تابعی از سه مؤلفه (s, θ, z) می باشد، با استفاده از تئوری تغییر شکل و رهیافت المان محدود نیمه تحلیلی به صورت تابعی از s ارائه می شود. اکنون با استفاده از روابط المان محدود، سه تابع شکل زیر برای مدلسازی محور استوانه در نظر گرفته می شود (شکل ۱). توابع شکل ذیل (N_I) وظیفه درونیایی کلیه میدان های مکان و جابجایی را بر عهده دارند که در آنها $\xi = \frac{s}{l_e}$ و l_e طول المان

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \bar{\theta} & \sin^2 \bar{\theta} & 2\cos\bar{\theta}\sin\bar{\theta} & 0 & 0 \\ \sin^2 \bar{\theta} & \cos^2 \bar{\theta} & -2\cos\bar{\theta}\sin\bar{\theta} & 0 & 0 \\ -\cos\bar{\theta}\sin\bar{\theta} & \cos\bar{\theta}\sin\bar{\theta} & \cos^2 \bar{\theta} - \sin^2 \bar{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\theta} & -\sin\bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \sin\bar{\theta} & \cos\bar{\theta} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ماتریس T تنشها در راستای الیاف کامپوزیت را به تنشها در مختصه (s, θ, z) تبدیل می‌نماید که در آن زاویه بین محور s و رشته (الیاف) کامپوزیت بوده و σ بردار تنش، ε بردار کرنش و Δ پارامتر موجود در رابطه (۱۶) به این شکل معرفی می‌شود

$$\sigma = [\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_{s\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{sz}]^T \quad (17)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{sz}]^T$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

جایگذاری معادلات (۱۲) و (۱۴) در معادله (۶) می‌دهد

$$\delta U^T \int (B_0 + B_{nl})^T \bar{Q} (B_0 U + \frac{1}{2} B_{nl} U) \quad (18)$$

$$- \bar{\alpha} \Delta_0 T) dV - \delta U^T \mathbf{P} = 0$$

بسط معادله (۱۸) یک معادله به فرم زیر را نتیجه می‌دهد

$$K_s U - F_{th} - \mathbf{P} = 0 \quad (19)$$

که در آن K_s ماتریس سفتی سکانت و F_{th} بردار نیروی گرمایی بصورت زیر حاصل می‌شود

$$K_s = K_0 + \frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{3} N_2 \quad (20)$$

$$F_{th} = \int (B_0 + B_{nl})^T \bar{Q} \bar{\alpha} \Delta_0 T dV$$

بطوریکه

$$K_0 = \int B_0^T \bar{Q} B_0 dV$$

$$N_1 = \int (B_0^T \bar{Q} B_{nl} + B_{nl}^T \bar{Q} B_0 + \bar{G}^T \sigma_0 \bar{G}) dV \quad (21)$$

$$N_2 = \int (B_{nl}^T \bar{Q} B_{nl} + \bar{G}^T \sigma_{nl} \bar{G}) dV$$

در معادله فوق σ_0, σ_{nl} به ترتیب تنش های خطی و غیرخطی می باشند. در غیاب بارگذاری گرمایی نمو معادله (۱۹) به فرم زیر ارائه می‌شود

$$K_T \Delta U - \Delta \mathbf{P} = 0 \quad (22)$$

بدست می‌آید. روابط مربوط به تبدیلات در ادامه ارائه خواهد شد.

جدا کردن بخش جابجایی از معادله سینماتیک (۸) به صورت زیر امکان پذیر است

$$\varepsilon_p^L = B_l U, \quad \varepsilon_b = B_b U, \quad \varepsilon_s = B_s U, \quad (9)$$

$$\varepsilon_p^{NL} = \frac{1}{2} \bar{B}_{nl} (U) U$$

کرنش غیرخطی (ε_p^{NL}) در معادله (۸) بصورت زیر نیز می‌تواند معرفی شود.

$$\varepsilon_p^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial s} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{R \partial \theta} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial s} \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} & \frac{\partial w_0}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial s} \\ \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \bar{A} \Theta, \quad \Theta = \bar{G} U \quad (10)$$

بنابراین معادله کرنش (۷) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود

$$\varepsilon = (B_0 + \frac{1}{2} B_{nl}) U - \bar{\alpha} \Delta_0 T \quad (11)$$

که $\bar{\alpha} = \{\alpha \quad 0 \quad 0\}$ و نمو معادله (۱۱) به شکل زیر بیان می‌شود

$$\delta \varepsilon = (B_0 + B_{nl}) \delta U \quad (12)$$

بطوریکه

$$B_0 = \begin{Bmatrix} B_l + z B_b \\ B_s \end{Bmatrix}, \quad B_{nl} = \begin{Bmatrix} \bar{B}_{nl} \\ [0] \end{Bmatrix}, \quad \bar{B}_{nl} = \bar{A} \bar{G} \quad (13)$$

با فرض اینکه تحلیل در ناحیه الاستیک انجام شود و تنش‌های موجود در تمام نقاط سازه از تنش تسلیم تجاوز نکند می‌توان قانون هوک برای مواد کامپوزیت را به صورت زیر بیان نمود [۲]

$$\sigma = \bar{Q} \varepsilon \quad (14)$$

که در آن ε از معادله (۱۱) و \bar{Q} با تبدیل زیر بدست می‌آید

$$\bar{Q} = [T^{-1}] [Q] [T]^{-T} \quad (15)$$

T ماتریس تبدیل و Q ماتریس ضریب الاستیک در راستای محور الیاف بصورت زیر ارائه می‌گردد.

الگوریتم فرایند حل معادله مقدار ویژه و تعیین بار بحرانی

کمانش [۳]:

$$\begin{aligned}
 K_0 U_0 &= P & 1- \text{تعیین بردار جابجایی اولیه} \\
 U_0 \rightarrow \varepsilon \rightarrow \sigma \rightarrow K_G & & 2- \text{تعیین ماتریس سفتی هندسی به} \\
 & & \text{وسیله بردار جابجایی} \\
 \left| \hat{K}_0 + \lambda_c \hat{K}_G \right| &= 0 & 3- \text{در بارگذاری مکانیکی} \\
 P_c &= \lambda_c P & 4- \text{بار بحرانی کمانش}
 \end{aligned}$$

ماتریس سفتی هندسی که بر اساس تنش های موجود در سازه ایجاد شده سبب می شود معادله مقدار ویژه در یک میدان تنش خاص، متناظر با بار بحرانی کمانش برقرار باشد. برای تعیین ماتریس سفتی هندسی می بایست جابجایی های سازه بر اساس یک بار معین تعیین شود (تحلیل استاتیکی) و بر اساس این بردار جابجایی؛ بردار کرنش، بردار تنش و در نهایت ماتریس سفتی هندسی تشکیل می شود. ماتریس سفتی خطی که در تحلیل استاتیکی بکار گرفته می شود مربوط به قبل از نقطه کمانش بوده و در دستیابی آن فقط از جملات متقارن در میدان جابجایی استفاده می گردد. ماتریس سفتی و سفتی هندسی که در معادله مقدار ویژه قرار خواهند گرفت مربوط به لحظه کمانش است، به عبارت دیگر برای دستیابی آنها از جملات متقارن و نامتقارن میدان جابجایی بهره گرفته می شود. الگوریتم فوق به منظور تحلیل کمانش خطی استفاده می گردد. با حل این معادله مقدار ویژه کوچکترین ضریب بار بحرانی بعنوان پارامتر تعیین بار بحرانی کمانش سازه تعیین می شود. در الگوریتم فوق P یک بار دلخواه است.

همین روند تعیین بار بحرانی، برای بارگذاری گرمایی نیز استفاده می شود که در آن دمای بحرانی کمانش مطابق با معادله مقدار ویژه (۳۰) بدست می آید.

۳- نتایج

این بخش به دو قسمت تقسیم می شود. قسمت اول مربوط به بررسی پدیده کمانش برای پوسته استوانه ای کامپوزیتی می باشد. در این قسمت، همگرایی پاسخ های روش المان محدود در تعیین بارکمانش بررسی می شود. همچنین پاسخهای تحلیل گرمایی برای پوسته استوانه ای کامپوزیتی مطابق با مراجع صحت سنجی شده و در انتهای این قسمت مقاومترین زاویه الیاف در برابر عدم کمانش معرفی می گردد.

قسمت دوم این بخش به بررسی پدیده کمانش استوانه های کامپوزیتی در برابر انواع بارگذاری مکانیکی شامل فشاری محوری، پیچشی و فشاری خارجی اختصاص دارد. در این قسمت همراه با صحت سنجی جواب ها با مراجع، دو روش در تعیین بار کمانش بحرانی ارائه و با یکدیگر مقایسه می شوند.

که در آن K_T ماتریس سفتی مماسی بوده و با هر دو تساوی زیر می تواند تعیین شود

$$K_T = K_0 + N_1 + N_2 = K_0 + K_G + K_{nl} \quad (23)$$

K_G ماتریس سفتی هندسی و K_0, K_{nl} به ترتیب ماتریس سفتی خطی و غیر خطی می باشند.

$$\begin{aligned}
 K_G &= \int \bar{G}^T (\sigma_0 + \sigma_{nl}) \bar{G} dV \\
 K_{nl} &= \int (B_0^T \bar{Q} B_{nl} + B_{nl}^T \bar{Q} B_0 + B_{nl}^T \bar{Q} B_{nl}) dV
 \end{aligned} \quad (24)$$

در تحلیل خطی کمانش، از اثرات ماتریس سفتی غیرخطی صرفنظر می شود، با این فرض، معادله نموی (۲۲) برای تحلیل کمانش به معادله مقدار ویژه زیر تبدیل می شود [۳ و ۲۰]

$$\left| K_0 + \lambda_c \hat{K}_G \right| = 0 \quad (25)$$

که در آن λ_c ضریب بار بحرانی کمانش است. در غیاب بارگذاری مکانیکی و حضور بار گرمایی، نمو معادله (۱۹) بصورت زیر بیان می شود

$$K_T \Delta U - \Delta \hat{F}_{th} = 0 \quad (26)$$

که در این بارگذاری، ماتریس سفتی مماسی و نمو بارگرمایی بصورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned}
 K_T &= K_0 + K_G + K_{nl} - K_{th} \\
 \Delta \hat{F}_{th} &= \int (B_0^T + B_{nl}^T) \bar{Q} \bar{\alpha} \Delta (\Delta_0 T) dV
 \end{aligned} \quad (27)$$

ماتریس سفتی هندسی گرمایی K_{th} از رابطه زیر بدست می آید

$$K_{th} = \int \bar{G}^T \sigma_{th} \bar{G} dV \quad (28)$$

که در آن تانسور تنش گرمایی عبارت است از

$$\sigma_{th} = \bar{Q}_1 \varepsilon_{th}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_3 \\ \bar{Q}_3 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

که \bar{Q} از معادله (۱۵) و ε_{th} از معادله (۸) تعیین می شوند. اکنون می توان معادله مقدار ویژه کمانش را برای بارگذاری گرمایی از معادله (۲۶) استخراج نمود.

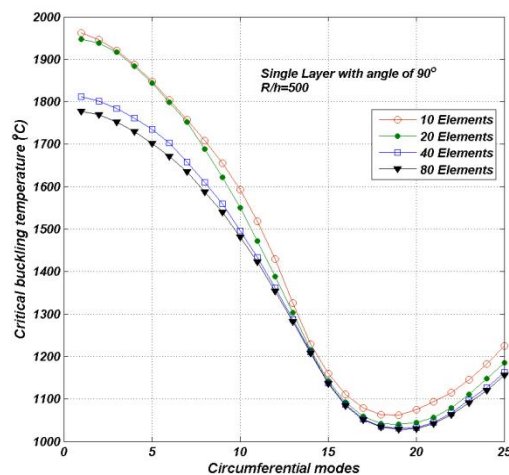
$$\left| K_0 + T_{cr} (\hat{K}_G - \hat{K}_{th}) \right| = 0 \quad (30)$$

۳-۲- الگوریتم تعیین بار بحرانی کمانش

نقطه کمانش عبارت است از مکانی که در آن سازه ظرفیت تحمل بار را بطور قابل مشاهده ای از دست می دهد. به عبارت دیگر بعد از نقطه کمانش با افزایش نسبتاً "کوچک بار، تغییر شکل های بزرگی نسبت به قبل از نقطه کمانش اتفاق می افتد. ماتریس سفتی خطی و هندسی در یک معادله ویژه (معادله ۲۵) برای بارگذاری مکانیکی) بار آغاز کمانش را مطابق با الگوریتم زیر تعیین می کنند [۳].

۳-۱- بارگذاری گرمایی

شکل ۳ همگرایی پاسخهای دمای کمانش بحرانی را با افزایش تعداد المان روی استوانه نشان می‌دهد. مطابق با شکل (۳)، ۲۰ المان می‌تواند دمای کمانش بحرانی کمینه را با دقت مناسب ارائه کند. این پاسخها برای مود اول محوری استوانه با خواص هندسی $h=0.003m$ ، $R/h=500$ و $L=0.5R$ و همچنین شرایط تکیه گاهی ساده ترسیم شده است. در مقاله حاضر، برای تحلیل استوانه تحت بارگذاری گرمایی و بارگذاری مکانیکی به ترتیب از ماده ۱ و ماده ۲ ارائه شده در جدول ۱ به عنوان خصوصیات مادی سازه استفاده می‌شود.



شکل ۳- همگرایی روش المان محدود با افزایش تعداد المان

جدول ۱- خصوصیات مادی

		ماده ۱	ماده ۲
مدول یانگ (GPa)	E_{11}	180.4	42.6
	E_{22}	18.04	11.7
	E_{33}	18.04	11.7
مدول برشی (GPa)	G_{12}	9.02	4.8
	G_{31}	9.02	4.8
	G_{23}	9.02	4.8
ضریب پواسون	ν_{12}	0.25	0.32
	ν_{13}	0.25	0.32
	ν_{23}	0.25	0.32
ضریب انبساط گرمایی (1/C)	α_{11}	1×10^{-6}	-
	α_{22}	2×10^{-6}	-

جدول ۲ بطور کلی تطابق مناسب بین پاسخهای کار حاضر و دو مرجع را نشان می‌دهد. مطابق با جدول ۲ در چیدمان $90^\circ / 0^\circ$ ، دمای کمانش بحرانی بدست آمده از مراجع [۱۸] و [۲۸] پایین‌تر بوده و در چیدمان $90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ ، پاسخهای بدست آمده، بین دو جواب مرجع قرار دارد و همچنین می‌توان مشاهده نمود که دمای کمانش بحرانی مطابق با مرجع [۲۸]، در هر دو چیدمان لایه‌های کامپوزیت، بالاترین مقادیر را دارا می‌باشد. می‌توان علت این تفاوت جوابها را از فرضهای به کار گرفته شده در هر کدام از تحقیقات دانست به عنوان نمونه استفاده از تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک مانند دائل، سندرز یا فون کارمن می‌تواند اختلافی را در جوابها حاصل نماید. همچنین روش تحلیل مساله که در این تحقیق روش عددی است در مقایسه با روشهای تحلیل دیگری که مراجع [۱۸] و [۲۸] استفاده کرده‌اند می‌تواند از عوامل تفاوت جوابها باشد.

جدول ۲- مقایسه دمای کمانش بحرانی برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با تکیه‌گاه ساده، مود محوری $m=3$ ماده کامپوزیتی مطابق ماده ۱ جدول ۱، $L=0.5R$ و $h=0.003m$

زاویه لیاف	R/h	مرجع [۲۸]	مرجع [۱۸]	کار حاضر
$90^\circ / 0^\circ$	200	1188 (13)*	1144 (12)	1115 (12)
			1131 (13)	1096 (13)
			1137 (14)	1088 (14)
	300	756 (15)	698 (15)	647 (15)
			696 (16)	636 (16)
			704 (17)	632 (17)
	400	553 (18)	507 (17)	462 (17)
			504 (18)	469 (18)
			509 (19)	489 (19)
	500	452 (19)	397 (19)	386 (19)
			397 (20)	384 (20)
			400 (21)	380 (21)
$90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$	200	1304 (11)	1199 (11)	1323 (11)
			1197 (12)	1313 (12)
			1234 (13)	1321 (13)
	300	912 (13)	843 (13)	850 (13)
			843 (14)	849 (14)
			866 (15)	872 (15)
	400	659 (18)	596 (16)	627 (16)
			594 (17)	624 (17)
			599 (18)	633 (18)
	500	514 (19)	484 (17)	505 (17)
			478 (18)	504 (18)
			479 (19)	512 (19)

*مود محیطی کمانش

شکل ۴ دمای کمانش بحرانی بر حسب مودهای محیطی را برای استوانه کامپوزیتی تک لایه با زوایای متفاوت لیاف نشان می‌دهد. خواص هندسی استوانه در شکل ۴ مشابه با شکل ۳ می‌باشد.

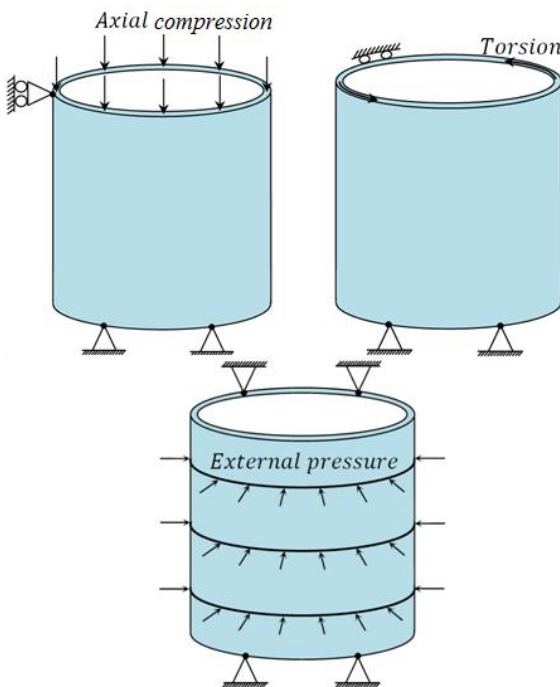
حال به منظور صحت سنجی پاسخهای کمانش گرمایی، استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط تکیه گاهی ساده مطابق با مراجع [۱۸] و [۲۸] در نظر گرفته می‌شود. که روش تحلیل مرجع [۱۸] مانند کار حاضر، روش المان محدود می‌باشد. جدول ۲ دمای کمانش بحرانی و مود محیطی متناظر با آن را برای نسبت-های شعاع به ضخامت مختلف ارائه می‌کند.

این جدول با نتایج مرجع [۲۹] که بیان می نماید مقاومترین زاویه الیاف برای عدم کمانش در بارگذاری گرمایی زاویه ای بین ۷۵°-۶۰° می باشد، مطابقت دارد.

توجه به این نکته ضروری است که در مطالعه کمانش گرمایی فرض شده است که خواص مکانیکی کامپوزیت، مستقل از افزایش دما باشد. به عنوان نمونه همان گونه که شکل (۴) نشان می دهد کمترین دمای کمانش بحرانی برای زاویه الیاف ۹۰° در مود ۱۸ و در دمایی بالای ۱۰۰۰°C اتفاق می افتد این مود محیطی و این دمای بحرانی صرفاً جهت مطالعه پدیده کمانش بدون در نظر گرفتن تغییر خواص کامپوزیت به دست آمده و از تأثیر گرما بر روی خواص مکانیکی سازه و متعاقب آن پدیده کمانش صرف نظر شده است. کلیه مراجع در تحلیل کمانش حرارتی بر اساس همین فرض، پدیده کمانش را بررسی کرده اند همان گونه که جدول (۲) نشان می دهد مراجع [۱۸] و [۲۸] دمای کمانش بالای ۱۰۰۰°C را ارائه نموده اند.

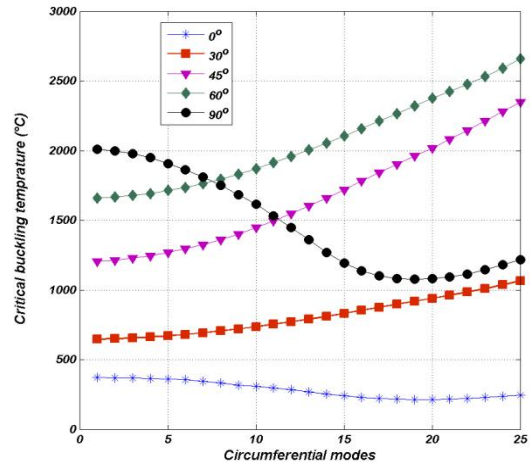
۲-۳- بارگذاری مکانیکی

شکل ۵ سه بارگذاری مکانیکی یعنی فشاری محوری، پیچشی و فشاری خارجی که بر استوانه وارد می شود را به صورت طرحواره نشان می دهد.

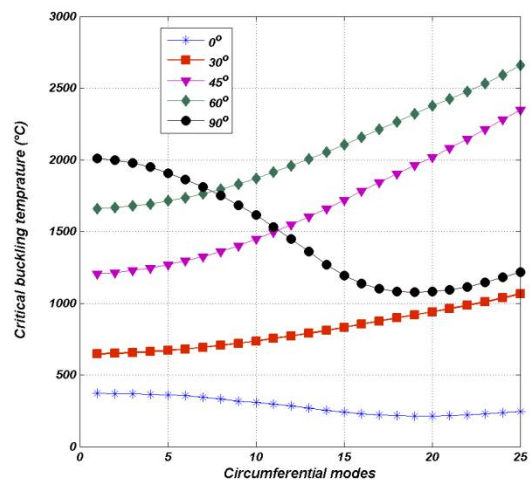


شکل ۶- انواع بارگذاری های مکانیکی اعمال شده روی استوانه

در بارگذاری مکانیکی، استفاده از معادله مقدار ویژه کمانش (معادله (۲۵)) نیازمند تشکیل ماتریس های سفی خطی و



شکل ۴- اثر زاویه الیاف و مود کمانش محیطی بر روی دمای کمانش بحرانی



شکل ۵- اثر زاویه الیاف و مود کمانش محیطی بر روی دمای کمانش بحرانی

وقتی استوانه تحت بار گرمایی قرار گیرد مطابق شکل ۴ در مود محیطی کمتر از ۷، زاویه الیاف ۹۰° مقاومترین الیاف، اما از مود ۷ به بعد زاویه الیاف ۶۰° مقاومترین خواهد بود. بنابراین در پدیده کمانش مجموعه ای از عوامل مانند هندسه استوانه و مود کمانش محیطی در رتبه بندی مقاوم ترین زاویه الیاف مؤثرند. در تمام مودهای محیطی زاویه الیاف صفر درجه بعنوان ضعیف ترین زاویه الیاف محسوب می شود. جدول زیر مطابق با شکل ۴، دمای بحرانی کمانش کمینه برحسب سانتیگراد را در زوایای متفاوت الیاف ارائه می کند.

جدول ۳- کمینه دمای کمانش بحرانی برای زوایای متفاوت

الیاف پوسته استوانه ای کامپوزیتی تک لایه

زاویه الیاف	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
دمای بحرانی	214	378	647	1200	1658	1643	1079

جدول ۵- بار کمانش بحرانی برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با چیدمان $90^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ$ ، شرایط تکیه‌گاهی طرف ($s=L$) $u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\theta = 0$ و شرایط تکیه‌گاهی طرف ($s=0$) تحت نیروی محوری: $v_0 = w_0 = \beta_\theta = 0$ ، تحت فشار خارجی: $u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\theta = 0$.

	مرجع [۳۰]	مرجع [۲۰]	کار حاضر روش اول	کار حاضر روش دوم
بار محوری بحرانی (kN/m)	106.89	106.72	118.64	118.9
بار فشاری خارجی بحرانی (kN/m^2)	179.83	170.67	174.18	175.59
بار پیچشی بحرانی (kN/m)	46.18	46.78	46.49	54.53

بدین ترتیب برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تک لایه، بار کمانش بحرانی برای زوایای مختلف الیاف تحت بارگذاری‌های متفاوت تعیین و مقاوم‌ترین زاویه الیاف در هر بارگذاری معرفی می‌شود.

جدول ۶- مقایسه بار کمانش بحرانی در زوایای متفاوت الیاف برای بارگذاری مکانیکی و گرمایی

زاویه الیاف	بار محوری فشاری (kN/m)	بار فشاری خارجی (kN/m^2)	بار پیچشی (kN/m)
0°	93	80	27
15°	112	87	23
30°	115	102	29
45°	108	123	38
60°	119	148	34
75°	112	162	35
90°	94	164	40

جدول ۶ اثر زاویه الیاف را بر روی بارکمانش بحرانی ارائه می‌کند. بر طبق این جدول همان‌طور که انتظار می‌رود بارگذاری پیچشی و بارگذاری فشاری در زاویه الیاف ۹۰ درجه (به علت انطباق راستای اعمال این دو بارگذاری بر زاویه الیاف ۹۰ درجه) بالاترین مقاومت را از خود نشان می‌دهند. اما در بارگذاری محوری انتظار بر این بود که مطابق با جهت اعمال نیرو، بالاترین مقاومت الیاف در همان راستای اثر نیرو باشد. در بارگذاری محوری نیروهای وارد بر پوسته در راستای محور استوانه بوده ولی زاویه الیاف صفر درجه که در راستای محور استوانه قرار می‌گیرد کمترین مقاومت را در برابر این بارگذاری از خود نشان می‌دهد. چنانچه جدول بیان می‌کند زاویه الیاف ۶۰، مقاوم‌ترین زاویه الیاف را در بارگذاری محوری دارا است.

شکل‌های ۶ تا ۸ به ترتیب برای بارگذاری‌های فشاری محوری، پیچشی و فشاری خارجی، اثر زاویه الیاف و مود محیطی

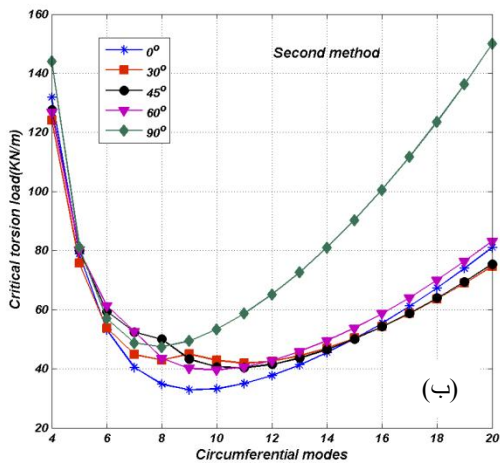
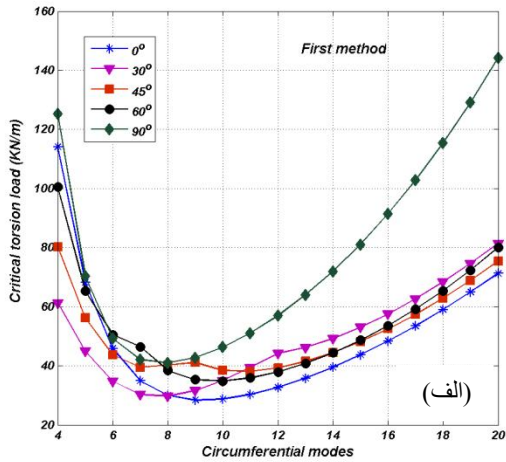
هندسی می‌باشد. در مقاله حاضر، تنش‌های موجود در ماتریس سفتی هندسی در بارگذاری مکانیکی با دو روش استنتاج می‌شوند: روش اول روشی کلاسیک، مرسوم و مطابق با الگوریتم بخش ۲-۳ بوده و روش دوم بر اساس مفاهیم پایه مکانیک و با تقریبی ساده کننده ارائه می‌شود. در روش دوم فرض می‌شود: ۱- بر اثر اعمال بار فشاری محوری، $\sigma_s \neq 0$ و مابقی تنش‌های موجود در سازه صفر باشند؛ ۲- بر اثر بار پیچشی تنها تنش‌های موجود در سازه تنش پیچشی $\sigma_{s\theta}$ باشد؛ ۳- در بارگذاری فشاری خارجی، تنش موثر بر استوانه تنش محیطی σ_θ باشد. بنابراین اثر بارگذاری‌های مختلف مکانیکی بر روی تانسور تنش، که در ماتریس سفتی هندسی استفاده می‌گردد، مطابق با جدول ۴ معرفی می‌شود.

جدول ۴- تانسور تنش در بارگذاری‌های مختلف برای دستیابی

	به ماتریس سفتی هندسی		
	بارگذاری محوری	بارگذاری فشاری خارجی	بارگذاری پیچشی
تانسور تنش (σ)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

در این روش ماتریس سفتی که در معادله مقدار ویژه کمانش (۲۵) قرار می‌گیرد بر اساس جملات متقارن و نامتقارن میدان جابجایی تعیین می‌شود و تنش‌های اولیه که در تعیین ماتریس سفتی هندسی استفاده می‌گردند بجای تحلیل استاتیکی مطابق با الگوریتم بخش ۲-۳ براساس جدول ۴ به دست می‌آیند.

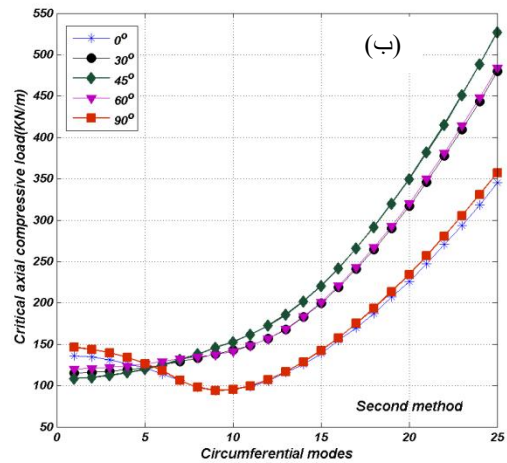
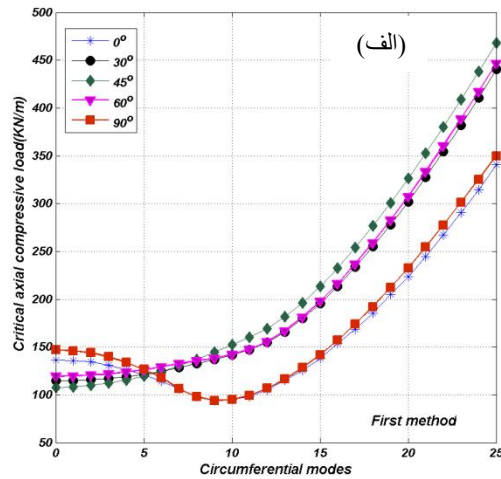
اکنون پاسخهای دو روش در تحلیل کمانش پوسته استوانه-ای کامپوزیتی تحت انواع بارگذاری مجزای مکانیکی محوری، پیچشی و فشاری خارجی با خواص هندسی زیر بررسی می‌شوند: $L=0.2m$ و $R=0.1325m$ و $h=1.16mm$ جدول زیر، کمینه بار مکانیکی در بین همه مودهای محیطی که باعث کمانش جسم در مود اول محوری می‌شود را ارائه می‌کند. جدول ۵، صحت پاسخهای دو روش ذکر شده در تعیین بار کمانش را نشان می‌دهد. تمایز این دو روش که مربوط به دستیابی تانسور تنش برای تشکیل ماتریس سفتی هندسی می‌باشد، پس از حل معادله مقدار ویژه کمانش، پاسخهای یکسانی را ارائه می‌کند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که جدول ۴ یک روش سریع را برای تعیین ماتریس سفتی هندسی پیشنهاد می‌نماید. پس از این صحت سنجی، اثرات زاویه الیاف کامپوزیتی بر روی مقاومت کمانش استوانه تحت انواع بارگذاری مکانیکی بررسی می‌شود.



شکل ۸- بار کمانش بحرانی برای پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تک لایه تحت بار پیچشی الف) روش اول ب) روش دوم

دو نمودار شکل ۷ به خوبی توافق بین پاسخهای روش اول و دوم را در بارگذاری پیچشی نشان می دهد. نمودار بار بحرانی بر حسب مود محیطی در این شکل بیان می کند که پارامتر مود محیطی تأثیری بر رتبه بندی مقاومت الیاف در برابر بار پیچشی نخواهد داشت؛ به طوری که کامپوزیتی تک لایه با زاویه الیاف صفر درجه ضعیف ترین و با زاویه الیاف 90° مقاوم ترین کامپوزیت بوده و مقاومت کامپوزیت تک لایه به ترتیب از لایه ای با زاویه صفر درجه به سمت لایه ای با زاویه 90° افزایش می یابد.

را بر روی بار بحرانی کمانش نشان داده و علاوه بر آن بصورت قیاسی، تطابق پاسخهای بار کمانش بحرانی بر اساس دو روش ذکر شده را ارائه می کنند.



شکل ۷- بار کمانش بحرانی برای پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تک لایه تحت بار فشاری محوری الف) روش اول ب) روش دوم

رفتار دو نمودار در شکل ۶ توافق بسیار مناسب دو روش ارائه شده در تعیین بار کمانش محوری را نشان می دهد. این نمودار بیان می کند که در بارگذاری محوری، مود محیطی پارامتری تأثیرگذار بر روی بار بحرانی کمانش می باشد. مطابق با شکل در مود محیطی کمتر از ۵، زوایای الیاف صفر درجه و 90° مقاوم ترین زاویه الیاف بوده اما با افزایش مود محیطی زاویه الیاف 45° به عنوان مقاوم ترین زاویه الیاف معرفی می شود.

نکات اصلی در مقاله می‌تواند به صورت زیر جمع‌بندی شود

- ۱- روش ارائه شده در تعیین ماتریس سفتی هندسی (روش دوم) در عین سادگی می‌تواند با دقت مناسب بار کماتش بحرانی را در بارگذاری مکانیکی تعیین نماید.
- ۲- یک کامپوزیت استوانه‌ای تک لایه با زاویه الیاف 90° تحت بارگذاری های پیچشی و فشاری خارجی، بالاترین مقاومت را در برابر عدم کماتش از خود نشان می‌دهد.
- ۳- یک استوانه کامپوزیتی تک لایه با زاویه الیاف بین 60° تا 90° (با در نظر گرفتن مود محیطی) تحت بارگرمایی، بالاترین مقاومت را در برابر عدم کماتش ارائه می‌کند.
- ۴- تحت بار فشاری محوری، قویترین زاویه الیاف برای یک استوانه کامپوزیتی تک لایه به منظور عدم کماتش، تابعی از مود محیطی است.
- ۵- المان بندی یک بعدی استوانه در راستای محوری با ۲۰ المان خطی مرتبه ۳، پاسخهای قابل قبولی را برای تحلیل کماتش در ناحیه خطی ارائه می‌کند.

مراجع

[1] Kaw, A.K. "Mechanics of Composite Materials". CRC Press, Boca Raton, 2006.

[2] Jones R.M. "Mechanics of Composite Materials (Second Edition)". Taylor & Francis, Philadelphia. 1999.

[3] Wriggers P. "Nonlinear Finite Element Methods. Springer-Verlag", Berlin Heidelberg, 2008.

[4] Zienkiewicz OC, "Taylor RL. The Finite Element Method, Fifth Edition", Volume 2: Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

[5] Crisfield MA. "Non-linear Finite Element Analysis of solids and Structures" Volume 2: Advanced Topics. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[6] Bathe KJ. "Finite Element Procedures. Prentice-Hall", New Jersey, 1996.

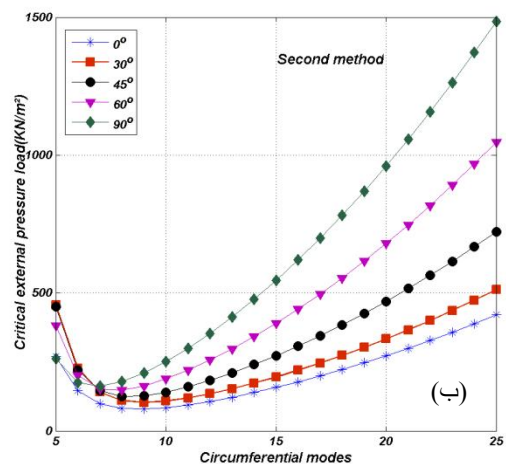
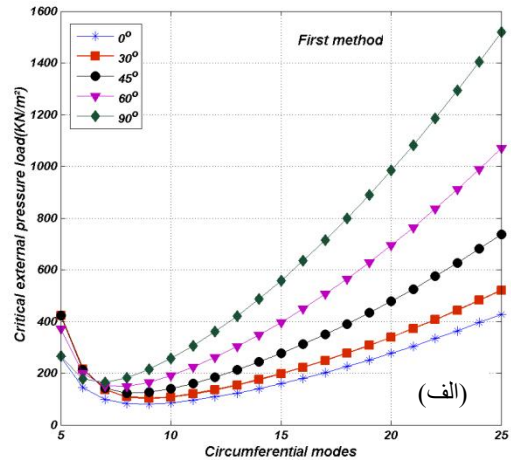
[7] Reddy J.N. "An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis". Oxford University Press, New York, 2004.

[8] Wood RD, Schrefler B. "Geometrically Non-linear Analysis a Correlation of Finite Element Notations". International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12:635-642, 1978.

[9] De Souza Neto EA, Peric D, Owen DRJ. "Computational Methods for Plasticity Theory and Applications". John Wiley&Sons, Chichester, 2008.

[10] Bonet J, Wood R.D. "Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis". Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[11] Logan D.L. "A First Course in the Finite Element Method, Fourth Edition. Thomson", Canada, 2007.



شکل ۹- بار کماتش بحرانی برای پوسته های استوانه‌ای کامپوزیتی تک لایه تحت بار فشاری خارجی (الف) روش اول (ب) روش دوم

تطابق پاسخها بین روش اول و روش دوم در بارگذاری فشاری خارجی نیز بر اساس شکل ۸ مشهود است. تأثیر زاویه الیاف برای عدم کماتش استوانه، مشابه با بار پیچشی (شکل ۷) بوده به گونه ای که مقاومت کامپوزیت تک لایه از زاویه الیاف صفر درجه تا ۹۰ درجه به صورت صعودی افزایش می‌یابد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کماتش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت انواع بارگذاری‌های مکانیکی و گرمایی در شرایط تکیه گاهی ساده، با روش المان محدود نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در بررسی کماتش برای بارگذاری مکانیکی، یک روش برای تعیین ماتریس سفتی هندسی که معادله مقدار ویژه کماتش را تشکیل می‌دهد، ارائه و با روش دیگر مرسوم در مراجع مقایسه شد. همگرایی پاسخهای المان محدود و همچنین مقایسه پاسخها با مراجع، صحت و دقت تحلیل را نشان داد.

material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation". *Composite Structures*, 93: 3063–3071, 2011.

[28] Thangaratnam R.K., Palaninathan, R. "Buckling of Composite Cylindrical Shells". *J Aero Soc India*, 41 (1): 47-54, 1989.

[29] Ganesan, N., Kadoli, R. "Buckling and Dynamic Analysis of Piezothermoelastic Composite cylindrical shell". *Composite Structure*, 59:45- 60, 2003.

[30] Goldfeld, Y., Arbocz, J. "Buckling of Laminated Conical Shells Given the Variations of the Stiffness Coefficients". *AIAA J*, 42 (3):642-9, 2004.

[12] Reddy J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis (Second Edition)". CRC Press, Boca Raton, 2004.

[13] Ochoa O.O, Reddy J.N. "Finite Element Analysis of Composite Laminates. Kluwer Academic", Dordrecht, 1992.

[14] Wagner W, Wriggers P. "A Simple Method for the Calculation of Postcritical Branches". *Engineering Computations*, 5:103-109, 1988.

[15] Hong T, Teng J.G. "Non-linear Analysis of Shells of Revolution under Arbitrary Loads". *Computers and Structures*, 80:1547–1568, 2002.

[16] Teng J.G, Hong T. "Postbuckling Analysis of Elastic Shells of Revolution Considering Mode Switching and Interaction". *International Journal of Solids and Structures*, 43:551–568, 2006.

[17] Hong T, Teng J.G. "Imperfection Sensitivity and Postbuckling Analysis of Elastic Shells of Revolution". *Thin-Walled Structures*, 46:1338–1350, 2008.

[18] Patel B.P, Shukla KK, Nath Y. "Thermal Postbuckling Analysis of Laminated Cross-ply Truncated Circular Conical Shells". *Composite Structures* 71:101–114, 2005.

[19] Patel B.P, Nath Y, Shukla K.K. "Nonlinear Thermo-elastic Buckling Characteristics of Cross-ply Laminated Joined Conical–Cylindrical Shells". *International Journal of Solids and Structures* 43:4810–4829, 2006.

[20] Patel B.P, Singh S, Nath Y. "Postbuckling Characteristics of Angle-ply Laminated Truncated Circular Conical Shells". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13:1411–1430, 2008.

[21] Singh S, Patel B.P, Nath Y. "Postbuckling of Angle-ply Laminated Cylindrical Shells with Meridional Curvature". *Thin-Walled Structures*, 47:359–364, 2009.

[22] Patel B.P, Singh S, Nath Y. "Stability and nonlinear dynamic behavior of cross-ply laminated heated cylindrical shells". *Latin American Journal of Solids and Structures*, 3:245-261, 2006.

[23] Sheinman I, Jabareen M. "Postbuckling of Laminated Cylindrical Shells in Different Formulation". *AIAA*, 43(5)1117-1123, 2005.

[24] Sheinman I, Shaw D, Simites G.J. "Nonlinear Analysis of Axially-Loaded Laminated Cylindrical Shells". *Computers & Structures*, 16:131-137, 1983.

[25] Sheinman I, Goldfeld Y. "Imperfection Sensitivity of Laminated Cylindrical Shells According to Different Shell Theories". *Journal of Engineering Mechanics*, 129(9)1048-1053, 2003.

[26] Eslami M.R, Javaheri R. "Buckling of Composite Cylindrical Shells under Mechanical and Thermal Loads". *Thermal Stresses*, 22(6)527-545, 1999.

[27] Bagherizadeh E, Kiani Y, Eslami M.R. "Mechanical buckling of functionally graded