

## حل تشابهی انتقال حرارت نانوسیال در جریان سکون متقارن محوری همراه با مکش سطحی یکنواخت

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی شیمی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود،  
ایران

مریم رضوی

استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود، ایران

حمید محمدیون\*

استادیار، گروه مهندسی شیمی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، شاهرود، ایران

مرتضی خوشوقت علی آبادی

### چکیده

در این تحقیق دمای بی بعد و انتقال گرمای جابجایی در جریان سکون شعاعی نانو سیال همراه با نفوذ سطحی یکنواخت  $U_0$  بر روی استوانه ساکن به صورت پایا بررسی شده است. جریان آزاد پایا بوده و قدرت اولیه جریان  $\bar{k}$  می باشد. در این مسئله حل تشابهی معادلات اندازه حرکت و معادله انرژی، با تبدیلات مناسب ذکر شده در این تحقیق، ارائه شده است. معادلات به صورت کاملا تشابهی در شرایطی حل شده اند که دیواره تحت تاثیر نفوذ سطحی یکنواخت قرار دارد. کلیه ی حل های ذکر شده برای اعداد رینولدز  $Re = \bar{k}a^2 / 2\nu_f$  بین ۰/۱ تا ۱۰۰۰، مقادیر گوناگون نفوذ سطحی بی بعد  $S = U_0 / \bar{k}a$  و مقادیر معینی از کسر حجمی نانو ذرات ارائه شده است که در آنها شعاع  $a$  استوانه و  $\nu_f$  لزجت سینماتیکی سیال پایه است. نتایج نشان میدهد برای همه اعداد رینولدز، با کاهش کسر حجمی نانوذرات و افزایش مکش سطحی، عمق نفوذ مولفه های شعاعی و محوری میدان سرعت و تنش برشی دیواره، افزایش می یابد به علاوه افزایش کسر حجمی نانوذرات و مکش سطحی موجب افزایش ضریب انتقال حرارت و عدد ناسلت میشود.

**واژه های کلیدی:** نانوسیال، جریان سکون، انتقال گرما، کسر حجمی، نفوذ یکنواخت.

## Similarity Solution of Radial Stagnation Point Flow and Heat Transfer of Nano Fluid with Uniform Transpiration

M. Razavi

Department of Chemical Engineering, Shahrood branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran

H. Mohammadiun

Department of Mechanical Engineering, Shahrood branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran

M. Khoshvaght Aliabadi

Department of Chemical Engineering, Shahrood branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran

### Abstract

In this study the steady dimensionless temperature and convective heat transfer in the vicinity of stagnation point flow of a nanofluid along with uniform transpiration  $U_0$  on a Stationary cylinder have been investigated. The impinging free-stream is steady and with a constant strain rate  $\bar{k}$ . Similarity solution of the momentum and energy equations is derived by use of transformations introduced in this research. Self-similar solution is obtained when the wall temperature of the cylinder or its wall heat flux is constant. All the solutions are presented for Reynolds numbers  $Re = \bar{k}a^2 / 2\nu_f$  ranging from 0.1 to 1000 for different values of dimensionless transpiration,  $S = U_0 / \bar{k}a$ , and selected values of particle fractions where  $a$  is cylinder radius and  $\nu_f$  is kinematic viscosity of the base fluid. Results show that for all Reynolds numbers, as the particle fraction decreases or suction rate increases, the depth of diffusion of the fluid velocity field in radial direction, the depth of the diffusion of the fluid velocity field in  $Z$ -direction and shear-stresses increases as well as by increasing the particle fraction or suction rate, heat transfer coefficient and Nusselt number increases.

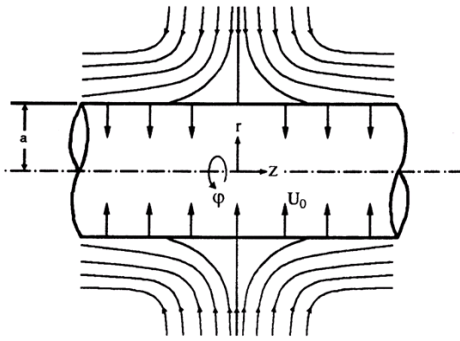
**Keywords:** Nano fluid, Stagnation point flow, Heat transfer, Particle fraction, Uniform transpiration.

تجهیزات سرمایشی استفاده کرد. در سالهای اخیر، محققین به مطالعه تجربی و عددی انتقال گرمای جابجایی نانو سیالات در هندسه های مختلف پرداخته اند (میگا و همکاران [۲]، هریس و همکاران [۳]، وانگ وایسر و همکاران [۴]، سانترا و همکاران [۵]، و نوین و همکاران [۶]). نیلد و کوزنتسو، انتقال گرمای جابجایی آزاد در لایه مرزی جریان لایه ای یک نانوسیال را به صورت تحلیلی بررسی کردند [۷]. آنها نشان داده اند که مدل به کار رفته برای نانوسیال با تاثیرات حرکت براونی تلفیق می شود. در پژوهش دیگری، نیلدو کوزنتسو [۸]، ناپایداری

### ۱- مقدمه

نانوسیال، نامی است که اولین بار توسط چویی [۱]، بکار گرفته شد و به سیالاتی گفته می شود که حاوی نانوذرات جامد معلق با اندازه کوچکتر از ۱۰۰ nm و با کسر حجمی کمتر از ۵ درصد باشند. نانوسیال می تواند باعث بهبود انتقال گرما در مقایسه با مایعات خالص شود. از نانوسیالات می توان برای بهبود سیستم مدیریت حرارتی در کاربردهای مهندسی، از جمله انتقال گرما، میکرومکانیک، سیستم های HVAC و

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hmohammadiun@iau-shahrood.ac.ir



شکل ۱- طرحواره جریان سکون شعاعی بر روی استوانه طویل همراه با مکش یا دمش یکنواخت در سطح

## ۲- خواص نانوسیال

نانوذرات اکسید آلومینیوم ( $\gamma Al_2O_3$ ) که در پژوهش حاضر به کار رفته اند ویژگی های زیر را دارا می باشد :

چگالی  $\rho_m = 3600 \frac{Kg}{m^3}$ ، قطر میانگین ذره :  $44 \text{ nm}$  سایر خواص

نیز در جدول ۱ فهرست شده است.

جدول ۱- خواص مربوط به سیال پایه و نانو سیال [۲۸]

Parameter	Value
Thermal conductivity of base fluid, $k_f$	0.6316 [W/m-K]
Thermal conductivity of nano particle, $k_p$	40 [W/m-K]
Specific heat of base fluid, $C_{p,f}$	4.181 [kJ/kg-K]
Specific heat of nano particle, $C_{p,p}$	0.765 [kJ/kg-K]
Density of base fluid, $\rho_f$	987.6 [kg/m <sup>3</sup> ]
Density of nano particle, $\rho_p$	3600 [kg/m <sup>3</sup> ]
Viscosity of base fluid, $\mu_f$	0.000538 [kg/m-s]
Diameter of nano particle, $d_p$	44 nm
Diameter of base fluid molecule, $d_f$	0.384 nm

## ۲-۱- چگالی نانو سیال

در این تحقیق فرض شده است که چگالی نانوذرات اکسید آلومینیوم در کل دامنه ی دمایی مورد نظر ثابت باشد و از رابطه زیر برای محاسبه چگالی نانو سیال استفاده شده است:

$$\rho_n = (1 - \phi_v) \rho_f + \phi_v \rho_p \quad (1)$$

در رابطه بالا اندیس های  $n, f, p$  به ترتیب معرف نانوسیال، سیال پایه و ذرات اکسید آلومینیوم می باشد و  $\phi_v$  معرف کسر حجمی ذرات معلق در سیال است.

## ۲-۲- لزجت دینامیکی نانو سیال

لزجت دینامیکی نانو سیال را می توان با روابط موجود، برای مخلوط های دوفازی برآورد کرد در و پاسمن، فرمول اینشتین را برای ارزیابی سرعت موثر ارائه کردند. سیال حاوی سوسپانسیون رقیقی از ذرات کروی سخت و کوچک است.

$$\mu_n = \mu_0 (1 - 2.5 \phi_v) \quad (2)$$

حرارتی در یک لایه مرزی متخلخل اشباع شده با یک نانو سیال را بررسی کردند. اخیرا، خان و پاپ، جریان لایه مرزی یک نانوسیال که از روی یک سطح گسترش یافته عبور کرده است را مورد مطالعه قرار داده اند [۹]. به طور کلی یافتن حلهای دقیق معادلات ناویراستوکس دارای پیچیدگیهای ریاضی بسیاری است. این امر ناشی از غیر خطی بودن این معادلات است. اولین حل دقیق مسأله جریان سکون توسط هایمنز [۱۰] ارائه گردید. در این حل، جریان سکون دو بعدی در مقابل صفحه تخت بررسی شد. وی با اختیار متغیری مناسب و نیز تبدیل مؤلفه های سرعت به یک تابع تشابهی، به یک معادله دیفرانسیل معمولی دست یافت و میدان سرعت و در نتیجه میدان فشار را در نزدیکی صفحه تخت بدست آورد. پس از هایمنز، هومان [۱۱] یک حل دقیق برای حالت سه بعدی معادلات ناویراستوکس از جریان سکون متقارن محوری در مقابل یک صفحه تخت بدست آورد. هوارث [۱۲] و دیوی [۱۳] جریان سکون سه بعدی در مقابل یک صفحه تخت را برای حالت های غیر متقارن بررسی کرده و نتایج خود را منتشر کردند. اولین حل دقیق برای جریان سکون متقارن محوری بر روی یک استوانه نامحدود، توسط وانگ [۱۴] ارائه شد. در این حل فرض شده است که استوانه ساکن بوده و هیچگونه حرکت چرخشی یا محوری ندارد. گورلا [۱۵-۱۸] در مجموعه ای از مقالات، جریان سکون متقارن محوری اطراف استوانه را مورد بررسی قرار داد، که جریان به صورت لایه ای در حالت های دائم و گذرا در نظر گرفته شده بود. در این مقالات اثر حرکت محوری یکنواخت و نیز حرکت محوری هارمونیک استوانه مورد بررسی قرار گرفته است. کانینگ و همکارانش [۱۹]، اثر چرخش استوانه با سرعت دورانی ثابت را برای جریان سکون بر روی استوانه مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق همچنین اثر مکش و دمش یکنواخت جریان، روی سطح استوانه در نظر گرفته شده است. به دلیل چرخش استوانه، جریان کاملاً سه بعدی است و سرعت در جهت  $\phi$  نیز وجود دارد. تاخار و همکاران [۲۰]، اثر غیر دائمی بودن جریان سکون شعاعی متقارن محوری بر روی استوانه را همراه با اثر حرکت محوری استوانه با سرعت متغیر مورد مطالعه قرار داده اند. صالح و رحیمی [۲۱-۲۳] حل های دقیقی برای جریان سکون متقارن محوری بر روی استوانه نامحدود و نیز انتقال گرمای آن، برای حالت هایی که استوانه دارای حرکت محوری و چرخشی تابع زمان می باشد بدست آورده اند. همچنین رحیمی و شکرگزارعباسی [۲۴-۲۷] حل های دقیقی برای جریان سکون سه بعدی و انتقال گرمای سیال لزج تراکم ناپذیر در حالت گذار، در برخورد با صفحه تخت ارائه دادند. در تحقیق حاضر، حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانو سیال و انتقال گرمای آن بر روی استوانه ساکن همراه با مکش سطحی یکنواخت، برای اولین بار ارائه شده است. همانطور که در شکل ۱ مشاهده می شود جریان در مختصات استوانه ای  $(r, \phi, z)$  با اجزاء سرعت متناظر  $(u, v, w)$  در نظر گرفته شده است. مساله در شرایطی بررسی می شود که دمای دیواره استوانه ثابت است یا دیواره استوانه تحت تاثیر شار گرمایی ثابتی قرار دارد.

معادله اندازه حرکت راستای  $z$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu_n \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

معادله انرژی:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk_{eff} \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{eff} \frac{\partial T}{\partial z}) = (\rho c_p)_n \left[ u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (11)$$

شرایط مرزی معادلات بالا عبارتند از:

$$r = a: u = -U_0, w = 0 \quad (12)$$

$$r \rightarrow \infty: u = -\bar{k} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} = -\bar{k}, w = 2\bar{k}z \quad (13)$$

عبارت اول رابطه (۱۲) بیان گر این مطلب است که که نفوذ سطحی سیال به داخل استوانه دارای نرخ ثابت  $U_0$  می باشد. عبارت دوم نیز همان شرط عدم لغزش سیال لزوج می باشد. روابط (۱۳) بر اساس حل غیر لزوج بدست آمده اند به این شکل که اولی بیانگر این موضوع است که شیب تغییرات سرعت  $u$  در دوردست با شیب آن در حل غیر لزوج یکسان بوده و دومی نیز بیان گر این موضوع است که اگر به حد کافی از دیواره استوانه دور شویم، آنگاه سرعت  $w$  سیال لزوج همان سرعت  $w$  سیال غیر لزوج می شود. شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادله انرژی به صورت زیر بیان می شود:

#### الف) حالت دمای دیواره معلوم

$$r = a: T = T_w \quad (14)$$

$$r \rightarrow \infty: T = T_\infty$$

در رابطه فوق  $T_w$  بیانگر دمای دیواره می باشد که دارای مقدار ثابت است. همچنین  $T_\infty$  بیانگر دمای جریان آزاد یا همان دمای سیال دور از دیواره می باشد.

#### ب) حالت شار گرمایی دیواره معلوم

$$r = a: \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_w}{k} \quad (15)$$

$$r \rightarrow \infty: T = T_\infty$$

در روابط فوق  $k$  رسانایی گرمایی سیال و  $q_w$  شار گرمایی معلوم دیواره استوانه می باشد که مقدار آن ثابت است. همان طور که از روابط فوق مشهود است، شرط مرزی دوم در هر دو حالت یکسان است و فرض شده است که  $T_\infty$  ثابت باشد. با استفاده از متغیرهای تشابهی مناسب می توان تعداد متغیرهای موجود در معادلات حاکم را کاهش داد. بالگو برداری از حل های غیر لزوج ارائه شده در رابطه (۱۳) و با ضرب این روابط در توابع تبدیل مناسب، روابط زیر برای کاستن معادلات ناویراستوکس به معادلات تشابهی بی بعد ارائه شده است:

$$u = -\bar{k} \frac{a}{\sqrt{\eta+1}} f(\eta), w = 2\bar{k} f'(\eta)z, \quad (16)$$

$$P = \rho_n \bar{k}^2 a^2 p$$

که در روابط بالا  $f(\eta)$  معرف مشتق نسبت به متغیر تشابهی  $\eta$  می باشد که عبارتند از:

رابطه بالا برای غلظت حجمی پائین ذره، کمتر از ۰/۰۵ درصد، قابل استفاده است. روابط گوناگونی برای تعیین لزجت معادل مخلوط دو فازی در تالیفات ارائه شده است که هر رابطه، محدودیت ها و کاربردهای خاص خود را دارد. متأسفانه، نتایج نشان می دهد که فرمول برینکمن، داده های تجربی موجود در تالیفات را به خوبی برآورد نمی کند. همچنین برینکمن، شکل تعمیم یافته رابطه انیشتین را به صورت زیر ارائه کرده است:

$$\mu_n = \mu_0 (1 - \phi_v)^{-2.5} \quad (3)$$

یکی از جامع ترین روابط برای محاسبه لزجت سینماتیکی نانو سیالات رابطه ای است که توسط میسون کرچونه به صورت زیر ارائه شده است [۲۸]:

$$\frac{\mu_n}{\mu} = \frac{1}{1 - 34.87 \left( \frac{d_p}{d_f} \right)^{-0.3} \phi_v^{1.03}} \quad (4)$$

در رابطه بالا  $d_f$ ، قطر معادل یک مولکول سیال پایه است، که با استفاده از رابطه زیر به دست می آید:

$$d_f = 0.1 \left( \frac{6M}{N\pi\rho_{f0}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

که در آن  $M$  وزن مولکولی سیال پایه،  $N$  عدد آووگادرو و  $\rho_{f0}$  چگالی سیال پایه محاسبه شده در دمای  $T_0 = 293K$  است. در تحقیق حاضر، فرمول کرچونه برای بازنویسی معادلات ناویر - استوکس حاکم بر نانو سیال و نیز معادله انرژی استفاده شده است.

### ۳-۲- رسانایی گرمایی نانو سیال

رابطه زیر برای محاسبه رسانایی گرمایی نانو سیال پیشنهاد شده است [28]:

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = 1 + 4.4 \text{Re}_p^{0.4} \text{Pr}_{bf}^{0.66} \left( \frac{T}{T_{fr}} \right)^{10} \left( \frac{k_p}{k_f} \right)^{0.03} \phi_v^{0.66} \quad (6)$$

در رابطه بالا  $\text{Re}_p$  و  $\text{Pr}_{bf}$  به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\text{Re}_p = \frac{2\rho_{bf} k_b T}{\pi \mu_{bf}^2 d_p} \quad \& \quad \text{Pr}_{bf} = \frac{\mu_{bf} (c_p)_{bf}}{k_{bf}} \quad (7)$$

### ۳- معادلات حاکم

همان طور که در شکل (۱) نشان داده شده است جریان در مختصات استوانه ای  $(r, z)$  با اجزاء سرعت متناظر  $(u, w)$  در نظر گرفته شده است. جریان تراکم ناپذیر بوده و در حالت پایا بررسی می شود. با فرض تقارن محوری معادلات حاکم در مختصات استوانه ای به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

معادله اندازه حرکت راستای  $r$ :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu_n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

با استفاده از رابطه (۲۵) و پس از ساده سازی، معادله انرژی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left\{ 1 + \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} [T_\infty + \frac{aq_w}{2k_{bf}} \theta]^{10.4} \right\} [(\eta + 1)\theta'' + \theta'] + 10.4 [T_\infty + \frac{aq_w}{2k_{bf}} \theta]^{9.4} \frac{aq_w}{2k_{bf}} \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} (\eta + 1)(\theta')^2 + \left\{ 1 - \phi_v + \phi_v \left[ \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f} \right] \right\} \text{Re}_{bf} \text{Pr}_{bf} f \theta' = 0 \quad (27)$$

در ادامه، برای بیان ساده تر رابطه بالا، با  $\frac{q_w a}{2k_{bf}}$  نمایش داده شده است. ضریب انتقال گرمای جابجایی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$h = \frac{-k_{nf}|_{T=T_w} (T_w - T_\infty) \theta'(0)}{T_w - T_\infty} \frac{2}{a} \quad (28)$$

از رابطه بالنتیجه زیربندست می آید:

$$ha = -2k_{nf}|_{T=T_w} \theta'(0) = -2k_{bf} [1 + 4.4 \text{Re}_p^{0.4} \text{Pr}_{bf}^{0.66} (\frac{T_w}{T_{fr}})^{10} (\frac{k_p}{k_f})^{0.03} \phi^{0.66}] \theta'(0) \quad (29)$$

معادلات دیفرانسیل (۱۸)، (۲۴) و (۲۷) به همراه شرایط مرزی ارائه شده، باروش تفاضل محدود و با استفاده از الگوریتم ماتریس سه قطری (TDMA) به طور هم زمان حل می شود. نتایج حاصل از حل این معادلات در بخش های بعد ارائه شده است.

#### ۴- محاسبه تنش برشی در سطح

برای محاسبه تنش برشی موثر بر سطح استوانه رابطه زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\sigma = \mu_n \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \hat{e}_r + \frac{\partial w}{\partial r} \hat{e}_z \right]_{r=a} \quad (30)$$

جمله اول رابطه بالا، (تنش برشی دیواره استوانه در جهت  $r$ ) برابر با صفر بوده و تنها جمله دوم (تنش برشی دیواره استوانه در جهت  $z$ ) باقی می ماند و رابطه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sigma = \mu \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \hat{e}_z \right]_{r=a} \quad (31)$$

به منظور محاسبه تنش برشی، ابتدا با مشتق گیری زنجیره ای جمله  $\frac{\partial w}{\partial r}$  به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = (2\bar{k} f'' z) \frac{2r}{a^2} \quad (32)$$

با توجه به اینکه در  $\eta = 0$ ،  $r = a$  می باشد رابطه مربوط به محاسبه تنش برشی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sigma = \mu_n [2\bar{k} f''(0) z] \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{\sigma a}{4\mu_n \bar{k} z} = f''(0) \quad (33)$$

#### ۵- معرفی تابع جریان

در تحقیق حاضر هدف ارائه حل کاملا تشابهی می باشد که تمام اثرات فیزیکی حاکم بر مساله، نقش دیواره نفوذ پذیر و نیز جریان

$$\eta = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1 \quad (17)$$

روابط (۱۶)، در معادله پیوستگی صدق می کند و پس از جایگزینی این روابط در معادلات اندازه حرکت راستاهای  $t$  و  $r$ ، یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی برای تعیین  $f$  به صورت زیر بدست می آید:

$$(\eta + 1)f''' + f'' + \text{Re}_n [1 - (f')^2 + f f''] = 0 \quad (18)$$

در رابطه بالا عدد رینولدز نانوسیال به صورت زیر معرفی می شود:

$$\text{Re}_n = \beta \frac{\bar{k} a^2}{2\nu_f} \quad (19)$$

$$\beta = [1 - 34.87 \left(\frac{d_p}{d_f}\right)^{-0.3} \phi_v^{1.03}] (1 - \phi_v + \phi_v \frac{\rho_p}{\rho_f}) \quad (20)$$

با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳)، شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادله (۱۸) به صورت زیر بدست می آید:

$$\eta = 0: \quad f = S, \quad f' = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' = 1 \quad (21)$$

در رابطه بالا  $S = \frac{U_0}{k a}$  معرف مکش سطحی بی بعد می باشد.

به منظور انتقال معادله انرژی از متغیر بی بعد  $\theta(\eta)$  در دو حالت دمای دیواره ثابت و شار گرمایی ثابت به صورت زیر استفاده می شود:

#### الف) حالت دمای دیواره معلوم

در این حالت متغیر جدید  $\theta$  که بیانگر دمای بی بعد است، به صورت زیر معرفی می شود:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (22)$$

در این حالت، شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۱۴) به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\eta = 0: \quad \theta = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \theta = 0 \quad (23)$$

با فرض  $\Gamma = 4.4 \left(\frac{2\rho_{bf} K_b}{\pi \mu_{bf}^2 d_p}\right)^{0.4} \frac{1}{T_{fr}^{10}} \left(\frac{k_p}{k_f}\right)^{0.03}$  معادله انرژی پس از ساده سازی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left\{ 1 + \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} [T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta]^{10.4} \right\} [(\eta + 1)\theta'' + \theta'] + 10.4 [T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta]^{9.4} (T_w - T_\infty) \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} (\eta + 1)(\theta')^2 + \left\{ 1 - \phi_v + \phi_v \left[ \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f} \right] \right\} \text{Re}_{bf} \text{Pr}_{bf} f \theta' = 0 \quad (24)$$

#### ب) حالت شار گرمایی دیواره معلوم

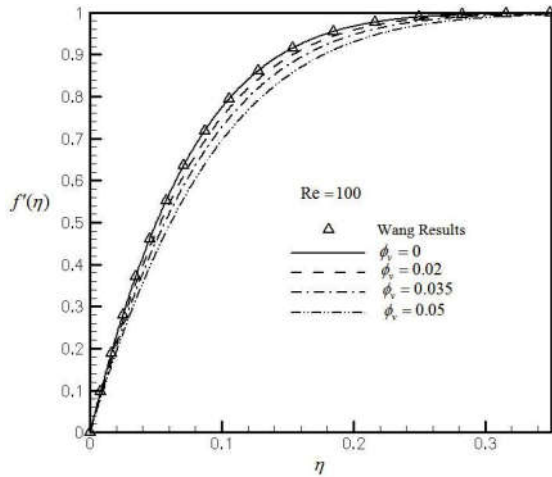
در شرایطی که دیواره استوانه تحت تاثیر شار گرمایی ثابت  $q_w$  قرار دارد دمای بی بعد  $\theta(\eta)$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{\frac{aq_w}{2k_{bf}}} \quad (25)$$

در این حالت، شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۱۵) به صورت زیر تبدیل می شوند:

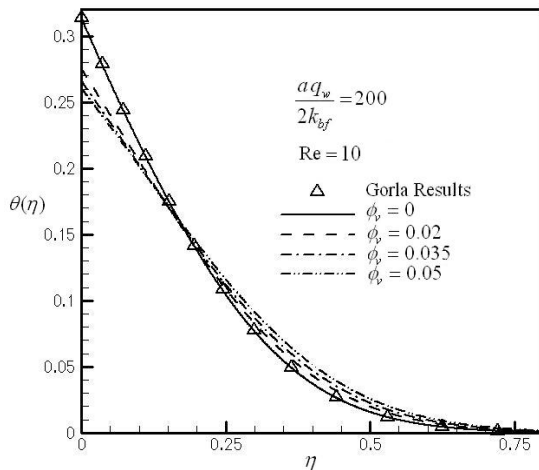
$$\eta = 0: \quad -\frac{k_{nf}}{k_{bf}} \theta'(0) = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \theta = 0 \quad (26)$$



شکل ۳- منحنی تغییرات  $f'(\eta)$  بر حسب  $\eta$  در  $Re = 1000$  به ازای کسر حجمی های مختلف نانوذرات

در شکل ۴ نمونه ای از منحنی های توزیع دمای بی بعد  $\theta$  بر حسب  $\eta$  نمایش داده شده است. این منحنی ها در شرایطی ترسیم شده اند که دیواره استوانه فاقد مکش سطحی بوده و تحت تاثیر شار حرارتی یکنواخت قرار دارد. همان طور که انتظار می رود با افزایش عدد رینولدز جریان اندازه حرکت سیال افزایش می یابد و با افزایش عمق نفوذ ممنتوم سیال نه تنها ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می یابد بلکه دمای بی بعد در سطح نیز کمتر می شود. در شرایطی که  $\phi_p = 0$  باشد نتایج حاصل بر نتایج Gorla منطبق میشود و این انطباق نتایج صحت روش حل را تایید می کند.



شکل ۴- اثر کسر حجمی نانو ذرات بر منحنی های دمای بی بعد  $\theta$  در شرایط شار حرارتی ثابت دیواره در  $Re=10$

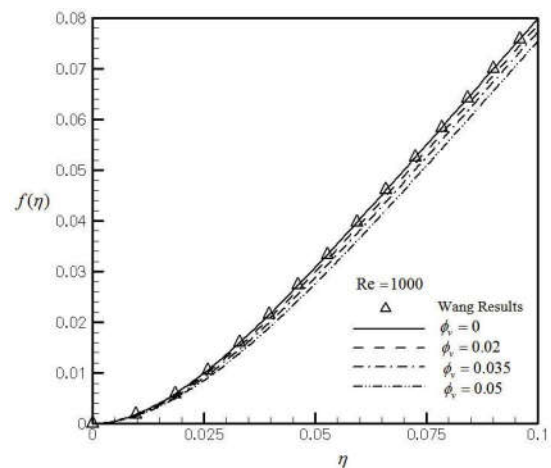
در شکل ۵ تاثیر کسر حجمی  $\phi_p$  بر منحنی های دمای بی بعد در شرایط  $S=0$  نشان داده شده است. این نتایج در دمای دیواره  $T_w=450K$  ترسیم شده اند. همانطور که انتظار می رود بر خلاف منحنی های دمای بی بعد شار ثابت در این حالت تمام منحنی ها از نقطه  $\theta=1$  شروع می شوند و با افزایش کسر حجمی نانو ذرات شیب منحنی ها کاهش می یابد و این به معنی افزایش ضخامت لایه مرزی حرارتی

سکون شعاعی را به خوبی نمایش دهد. برای ارائه این هدف معرفی تابع جریان بی بعد استوکس  $\hat{\psi}$ ، برای سیال تراکم ناپذیر پذیر مفید به نظر می رسد. بدین منظور  $\hat{\psi}$  به صورت زیر معرفی می شود:

$$\hat{\psi} = \frac{\Psi}{ka^3} = f(\eta) \left(\frac{z}{a}\right) \quad (34)$$

## ۶- نتایج

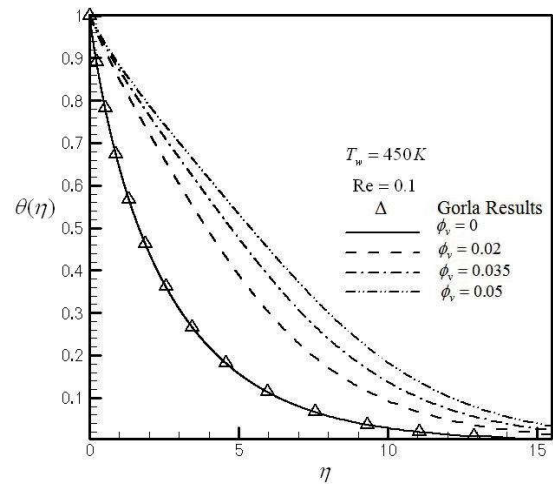
در این قسمت نتایج حاصل از حل معادلات دیفرانسیل (۱۸)، (۲۴) و (۲۷) به همراه تنش برشی در سطح و عدد ناسلت در محدوده اعداد رینولدز مختلف و به ازای کسر حجمی های انتخابی ارائه شده است. اثر تغییر کسر حجمی نانو ذرات بر تابع  $f(\eta)$  در  $Re=1000, S=0$  در شکل ۳ نمایش داده شده است. در  $\phi_p = 0$  سیال پایه همان نتایج Wang مرجع [۱۴] استخراج شده است و جالب توجه است که با افزایش کسر حجمی نانو ذرات، عمق نفوذ مولفه شعاعی میدان سرعت سیال کاهش می یابد. به عبارت دیگر تزریق نانو ذرات در سیال پایه، باعث کاهش اینرسی حرکتی سیال می شود و با کاهش اندازه حرکت شعاعی سیال، سرعت شعاعی آن کاهش می یابد. می توان نشان داد برای سایر اعداد رینولدز نیز همین روند تغییرات وجود دارد. در تمام موارد مشاهده می شود که بیشترین مولفه شعاعی میدان سرعت مربوط به سیال پایه است.



شکل ۵- منحنی تغییرات  $f(\eta)$  بر حسب  $\eta$  در  $Re = 1000$  به ازای کسر حجمی های مختلف نانوذرات

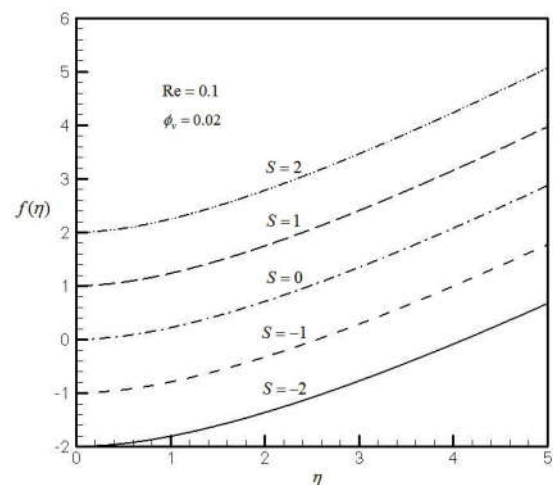
اثر تغییر کسر حجمی نانو ذرات بر تابع  $f'(\eta)$  در  $Re = 100, S = 0$  در شکل ۳ نمایش داده شده است. همان طور که ملاحظه می شود نتایج حل حاضر در  $\phi_p = 0$  (برای سیال پایه) بر نتایج حل Wang مرجع [۱۴] منطبق می باشد. در این مورد نیز با افزایش کسر حجمی نانو ذرات، عمق نفوذ مولفه محوری میدان سرعت سیال کاهش می یابد به عبارت دیگر تزریق نانو ذرات در سیال پایه، باعث کاهش اینرسی حرکتی سیال می شود و با کاهش اندازه حرکت محوری سیال، سرعت محوری آن کاهش می یابد. نتایج نشان می دهند، بیشترین مولفه محوری، مربوط به سیال پایه می باشد.

می باشد. هر چند افزایش نانو ذرات به سیال، منجر به کاهش گرادیان دمای بی بعد در سطح استوانه می شود اما شدت افزایش رسانایی گرمایی آنقدر قابل توجه است که افزایش آهنگ انتقال گرما را به همراه دارد.



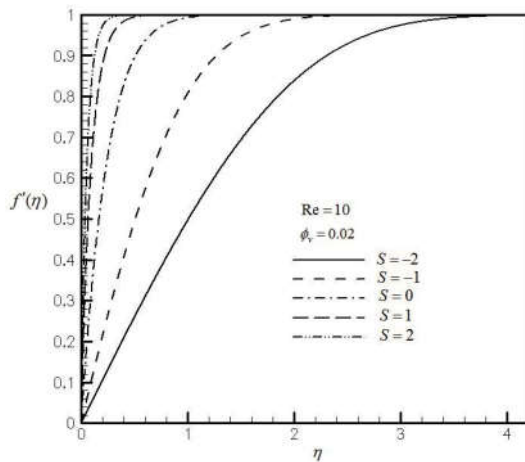
شکل ۵- تاثیر کسر حجمی  $\phi_v$  بر منحنی های دمای بی بعد در دمای  $Re = 0.1$  و  $T_w = 450K$

در شکل ۶ نمونه ای از منحنی های  $f(\eta)$  بر حسب  $\eta$  برای کسر حجمی  $Re = 0.1, \phi_v = 0.02$  و مقادیر انتخابی مکش و دمش سطحی بی بعد، ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش مکش سطحی  $f(\eta)$  مقدار تابع  $f(\eta)$  افزایش می یابد و به عبارت دیگر افزایش مکش سطحی، باعث افزایش عمق نفوذ مولفه شعاعی میدان سرعت سیال می شود زیرا افزایش مکش سطحی، اینرسی حرکتی سیال را در حرکت سیال به طرف سطح استوانه افزایش می دهد و منجر به افزایش مولفه شعاعی میدان سرعت می شود. اما همان طور که انتظار می رود، دمش سطحی کاملاً برعکس مکش سطحی عمل می کند.



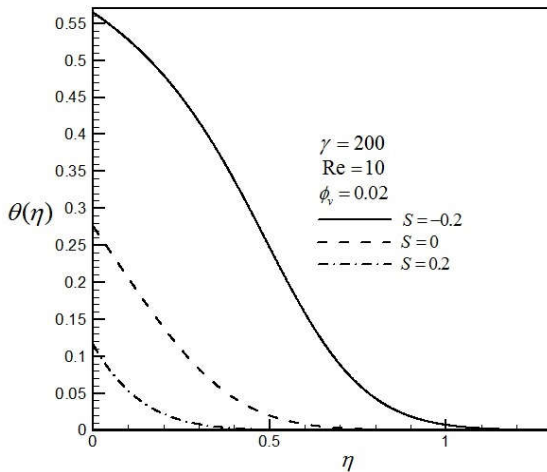
شکل ۶- منحنی تغییرات  $f(\eta)$  بر حسب  $\eta$  در  $Re = 0.1$  و  $\phi_v = 0.02$  به ازای مقادیر متفاوت مکش و دمش یکنواخت در سطح

اثر مکش و دمش سطحی، بر تابع  $f'(\eta)$  در  $\phi_v = 0.02$  در شکل ۷ نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می شود برای تمام اعداد رینولدز، با افزایش مکش در سطح استوانه، مقدار تابع  $f'(\eta)$  افزایش می یابد به عبارت دیگر افزایش مکش سطحی، باعث افزایش مولفه محوری میدان سرعت می شود زیرا با افزایش مکش سطحی اندازه حرکت سیال افزایش می یابد. اما در این مورد نیز دمش سطحی کاملاً برعکس عمل می کند. در همه موارد مکش سطحی باعث کاهش ضخامت لایه مرزی می شود و کاهش ضخامت لایه مرزی، افزایش گرادیان سرعت در سطح را به همراه دارد اما در مقابل، دمش سطحی ضخامت لایه مرزی را افزایش می دهد و با افزایش ضخامت لایه مرزی گرادیان سرعت در سطح استوانه افزایش می یابد.



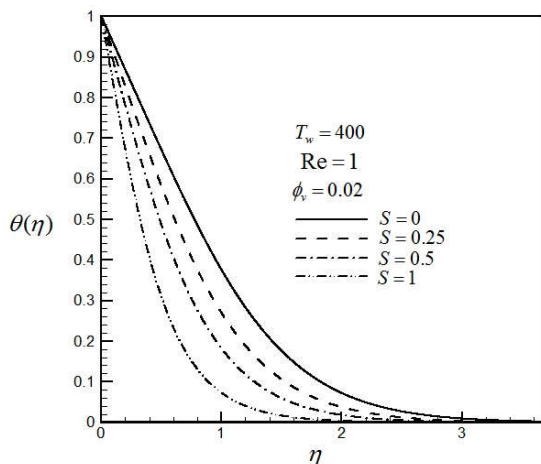
شکل ۷- منحنی تغییرات  $f'(\eta)$  بر حسب  $\eta$  در  $Re = 10$  و  $\phi_v = 0.02$  به ازای مقادیر متفاوت مکش و دمش یکنواخت در سطح

نمونه ای از منحنی های تنش برشی بر حسب عدد رینولدز در شکل ۸ ترسیم شده اند. در رسم این منحنی ها مقادیر مکش سطحی بی بعد،  $S = 0, 1, 2$  در نظر گرفته شده است. همان طور که انتظار می رود مکش سطحی، تاثیر قابل ملاحظه ای بر تنش برشی در سطح استوانه دارد و افزایش مکش سطحی باعث افزایش تنش برشی در سطح استوانه می شود زیرا همان طور که قبلاً بیان شد با افزایش مکش سطحی ضخامت لایه مرزی سرعت کاهش می یابد و کاهش ضخامت لایه مرزی منجر به افزایش شیب نیم رخ های توزیع سرعت می شود یا به عبارت دیگر گرادیان سرعت در سطح افزایش می یابد و از آنجا که تنش برشی مستقیماً با گرادیان سرعت متناسب است با افزایش مکش سطحی تنش برشی افزایش می یابد.



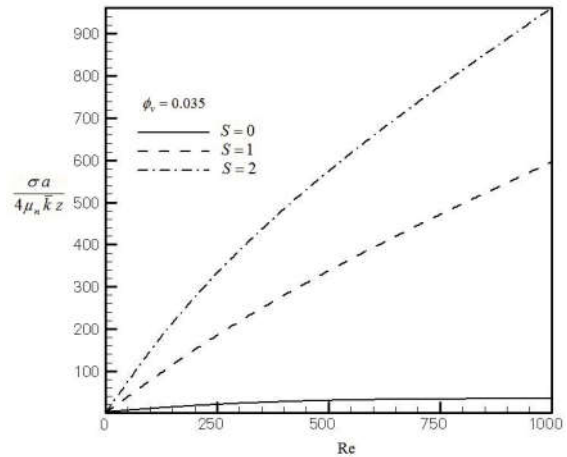
شکل ۸- اثر مکش و دمش به طور همزمان بر دمای بی بعد  $\theta(\eta)$

در شکل ۱۱ منحنی های دمای بی بعد بر حسب متغیر  $\eta$  در شرایط  $\phi_v = 0.02$  و به ازای مقادیر متفاوت دمای دیواره  $T_w$  و عدد رینولدز ترسیم شده است. مشابه حالت شار گرمایی ثابت در این حالت نیز با افزایش مکش سطحی، عمق نفوذ دمای دیواره استوانه در سیال کاهش می یابد. از آنجا که همه نمودارها از یک نقطه شروع شده اند. شیب نمودارها در نقطه شروع (گرادیان دمای بی بعد در سطح استوانه) با افزایش مقدار مکش سطحی و کاهش ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش یافته است و این پدیده باعث بهبود انتقال حرارت می شود.



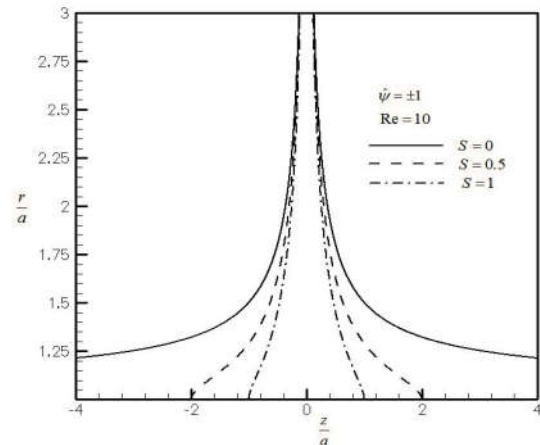
شکل ۹- نمایش خطوط جریان  $\psi = \pm 1$  به ازای مقادیر مختلف مکش سطحی، در شرایط،  $Re = 10$

در شکل ۱۲ منحنی های تغییرات عدد ناسلت بر حسب عدد رینولدز ترسیم شده است. همان طور که مشخص می شود در یک عدد رینولدز معین با افزایش مکش سطحی عدد ناسلت افزایش می یابد زیرا افزایش مکش سطحی باعث افزایش گرادیان دما در سطح استوانه می شود و عدد ناسلت را افزایش می دهد و باعث بهبود انتقال گرما می شود.



شکل ۱۰- اثر مکش و دمش به طور همزمان بر دمای بی بعد  $\theta(\eta)$

شکل ۹ اثر مکش سطحی را بر خطوط جریان به خوبی نمایش می دهد. این خط جریان ها در شرایط  $Re = 10$ ،  $\phi_v = 0.02$  و مقادیر مکش سطحی بی بعد  $S = 0, 0.5, 1$  ترسیم شده اند. با افزایش مکش سطحی خطوط جریان به طرف دیواره استوانه کشیده می شوند و هر چه مقدار مکش سطحی بیشتر باشد پهنای خطوط جریان کمتر می شود.



شکل ۱۱- منحنی تغییرات تنش برشی در سطح بر حسب عدد رینولدز در شرایط  $\phi_v = 0.035$ ، به ازای مقادیر متفاوت مکش سطحی

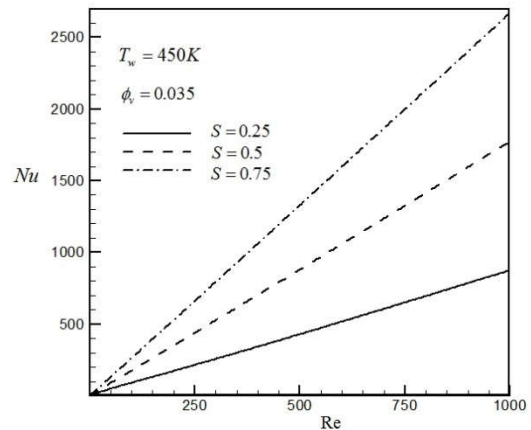
در شکل ۱۰ اثر مکش و دمش به طور همزمان بر دمای بی بعد  $\theta(\eta)$  در شرایط شار حرارتی دیواره ثابت بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود این فرآیند برای دمش نتایج کاملاً معکوسی دارد زیرا با افزایش دمش عمق نفوذ دمای دیواره در سیال اطراف بیشتر می شود و به عبارت دیگر ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش می یابد و نقش دمش سطحی افزایش دما در سطح استوانه می باشد.

لزجت سینماتیکی نانو سیال  
 رسانایی گرمایی نانوسیال  
 دمای انجماد سیال پایه  
 عدد رینولدز نانوذرات  
 عدد پرانتل سیال پایه  
 عدد ناسلت

$\nu_n$   
 $k_{eff}$   
 $T_{fr}$   
 $Re_p$   
 $Pr_b$   
 $Nu$

### ۹- مرجع

- [1] Choi S.U.S., Enhancing thermal conductivity of fluid with nanoparticles, *Dev. Appl Non-Newtonian Flows*, Vol. 66, pp. 99–105, 1995.
- [2] Maigab S.E.B., Nguyen C.T., Galanis N. and Roy G., Heat transfer behaviors of nanofluid in a uniformly heated tube, *Superlattices Microstruct.*, Vol. 35, No. 3-6, pp. 453–462, 2004.
- [3] Heris S.Z., Etemad S.Gh. and Esfahani M.N., Experimental investigation of oxide nanofluid laminar forced flow convective heat transfer, *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, Vol. 33, No.4, PP. 529–535, 2006.
- [4] Duangthongsuk W., Wongwises S., Heat transfer enhancement and pressure drop characteristics of TiO<sub>2</sub>-water nanofluid in a double-tube counter flow heat exchangers, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol.52, No.7-8, pp. 2059–2067, 2009.
- [5] Santra A.K., Sen S., Chkroborty M., Study of heat transfer due to laminar flow of copper–water nanofluid through two isothermally heated parallel plates, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, No.2, pp. 391–400, 2009.
- [6] Nguyen C.T., Galanis N., Polidori G., Fohanno S., Popa C.V. and Beche, A.L., An experimental study of confined and submerged impinging jet heat transfer using Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluid, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, No.2, pp. 401–411, 2009.
- [7] Kuznetsov A. V. and Nield D.A., Natural convection boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 49, No.2, pp. 243–247, 2010.
- [8] Kuznetsov A. V. and Nield D. A., Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid: Brinkman model, *Transp. Porous Med.*, Vol.81, No. 3, pp. 409–422, 2010.
- [9] Khan W. A. and Pop I., Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 53, No.11-12, pp. 2477–2483, 2010.
- [10] Hiemenz K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden, *Kreiszyliner. Dingers Polytech. J.* Vol. 326 pp. 321-410, 1911.
- [11] Homann F. Z., Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel, *Zeitsch. Angew. Math. Mech.*, Vol. 16, No.3, pp. 153-164, 1936.
- [12] Howarth L., The boundary layer in three dimensional flow. Part II. The flow near a stagnation point. *Phil. Mag. Series 7*, Vol. 42, pp. 1433-1440, 1951.
- [13] Davey A., Boundary layer flow at a saddle point of attachment, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 10, No.4, pp. 593-610, 1951.
- [14] Wang C., Axisymmetric stagnation flow on a cylinder, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 2, pp. 207-213, 1974.
- [15] Gorla R.S.R., Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder, *Dev. Mech.*, Vol.9, pp. 286-288, 1977.
- [16] Gorla R.S.R., Nonsimilar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder, *Int. J. Engineering Science*, Vol. 16, No. 6, pp. 397-400, 1978.
- [17] Gorla R.S.R., Transient response behavior of an axisymmetric stagnation flow on a circular cylinder due to time dependent free stream velocity, *Int. J. Engineering science*, Vol. 16, No.7, pp. 493- 502, 1978.
- [18] Gorla R.S.R., Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation-point on a cylinder, *Int. J. Engineering Science*, Vol. 17, No. 1, pp. 87-93, 1979.
- [19] Cunning G.M., Davis A.M.J. and Weidman, P.D., Radial stagnation flow on a rotating cylinder with uniform transpiration, *Journal of Engineering mathematics*, Vol. 33, No. 2, pp. 113-128,



شکل ۱۲- منحنی های تغییرات عدد ناسلت بر حسب عدد رینولدز جریان به ازای کسر حجمی  $\phi_v = 0.035$  در دمای دیواره ثابت

### ۷- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانو سیال بر روی استوانه ساکن و انتقال گرما آن ارائه شده است. همه این نتایج در محدوده اعداد رینولدز ۰/۱ تا ۱۰۰۰ و به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی نانوذرات در شرایطی که دمای دیواره استوانه ثابت است یا شار گرمایی ثابتی بر دیواره استوانه اعمال می شود ارائه شده است. نتایج نشان می دهد افزایش کسر حجمی نانوذرات و کاهش مکش سطحی، باعث کاهش مولفه شعاعی و محوری میدان سرعت و تنش برشی موثر بر دیواره استوانه می شود در حالی که ضریب انتقال حرارت جابجایی و عدد ناسلت با افزایش مکش سطحی و افزایش کسر حجمی نانوذرات افزایش می یابد.

### ۸- نمادها

چگالی نانو سیال	$\rho_n$
کسر حجمی	$\phi_v$
چگالی سیال پایه	$\rho_f$
چگالی نانوذرات	$\rho_p$
قطر معادل مولکول های سیال پایه	$d_f$
قطر معادل مولکول های نانوذرات	$d_p$
لزجت دینامیکی نانوسیال	$\mu_n$
لزجت دینامیکی سیال پایه	$\mu$
متغیر تشابهی	$\eta$
عدد رینولدز نانو سیال	$Re_n$
عدد رینولدز سیال پایه	$Re$
قدرت چشمه جریان	$\bar{k}$
شعاع استوانه	$a$
لزجت سینماتیکی سیال پایه	$\nu_f$
مولفه شعاعی میدان سرعت	$u$
مولفه محوری میدان سرعت	$w$
تنش برشی	$\sigma$
فشار	$p$
فشار بی بعد	$P$



1998.

- [20] Takhar H.S., Chamkha A.J. and Nath G., Unsteady axisymmetric stagnation-point flow of a viscous fluid on a cylinder, *Int. Journal of Engineering Science*, Vol. 37, No. 15, pp. 1943-1957, 1999.
- [21] Saleh, R. and Rahimi, A. B., Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous Fluid on a Moving Cylinder with Time- Dependent Axial Velocity and Uniform Transpiration, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, No. 6, pp. 997-1005, 2004.
- [22] Rahimi A. B. and Saleh R., Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous Fluid on a Rotating Cylinder With Time- Dependent Angular Velocity and Uniform Transpiration, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 107-115, 2007.
- [23] Rahimi A. B., and Saleh R., Similarity Solution of Unaxisymmetric Heat Transfer in Stagnation-Point Flow on a Cylinder with Simultaneous Axial and Rotational Movements, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 130, No. 5, pp. 054502-1-054502-5, 2008.
- [24] Abbasi A. S. and Rahimi A. B., Non-Axisymmetric Three-Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 131, No. 7, pp. 074501.1- 074501.5, 2009.
- [26] Abbasi A. S. and Rahimi A. B., Three-Dimensional Stagnation- Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate with Transpiration, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 23, No. 3, pp. 513-521, 2009.
- [27] Abbasi A. S., Rahimi A. B. and Niazmand H., Exact Solution of Three-Dimensional Unsteady Stagnation Flow on a Heated Plate, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 25, No. 1, pp. 55-58, 2011.
- [28] Abbasi A. S. and Rahimi A. B., Investigation of Two-Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer Impinging on a Flat Plate, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 134, No.6, pp. 064501.1-064501.5, 2012.
- [29] Corcione M., Empirical correlating equations for predicting the effective thermal conductivity and dynamic viscosity of nanofluids, *Ene. Convers. Manage*, Vol. 52, No. 1, pp. 789-793, 2011.
- [30] Gorla R.S.R., Heat transfer in axisymmetric stagnation flow on a cylinder, *Applied Scientific Research J.*, Vol.32, No. 5, pp. 541-553, 1976.