

بررسی پاسخ دینامیکی حلقه باز و بسته تیر ساندویچی با هسته انعطاف پذیر مجهز به حسگر و عملگر پیزوالکتریک

نیما ندریران
حسن بیگلری*
محمد علی حامد

کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
استادیار، کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
استادیار، کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

در این مقاله، پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی با هسته انعطاف پذیر و تکیه‌گاه ساده مجهز به وصله‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک تحت بار گسترده سینوسی قبل و بعد از کنترل بررسی می‌شود. برای به دست آوردن پاسخ سازه‌های از نظریه سه لایه تیر ساندویچی استفاده شده است که در آن برای رویه بالا و رویه پایین نظریه اویلر-برنولی و برای هسته نظریه مرتبه اول خطی بکار گرفته شده است. معادلات حاکم بر مساله با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده‌اند. با استفاده از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مساله به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان تبدیل شده و سپس با تعریف مناسب متغیرهای حالت، معادلات حالت سیستم ب دست آمده‌اند. از روش کنترلی بهینه خطی مرتبه دوم برای کنترل ارتعاشات استفاده شده است. هدف مقاله نشان دادن اثر انعطاف‌پذیری هسته در کنترل پاسخ دینامیکی تیر و بررسی پاسخ فرکانسی آن قبل و بعد از بستن حلقه کنترلی توسط نظریه سه لایه تیر ساندویچی است. بررسی‌ها بیانگر عملکرد خوب کنترلر در کاهش دامنه ارتعاشات است. همچنین، انعطاف‌پذیری هسته می‌تواند باعث ایجاد حدود ۱۸٪ اختلاف در دامنه ارتعاش رویه بالا و پایین شود که این امر در تعیین محل عملگر و حسگر در رویه بالا و پایین تاثیرگذار است.

واژه‌های کلیدی: تیر ساندویچی، هسته انعطاف‌پذیر، وصله پیزوالکتریک، کنترل بهینه خطی مرتبه دوم، نظریه سه لایه.

Open and Closed Loop Dynamic Response Analysis of Flexible Core Sandwich Beam With Piezoelectric Actuator and Sensors

N. Nadirian
H. Biglari
M. A. Hamed

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

In this paper, the response of simply supported flexible core sandwich beam with piezoelectric patch, under uniform harmonic loading with and without the control is analyzed. Sandwich beam is modeled using three-layer sandwich beam theory. Governing equations of motion are obtained using Hamilton's principle, based on Euler-Bernoulli beam theory for face-sheets and linear displacement field theory for soft core. By defining suitable state variables in time domain and using Galerkin's method, the state space equations of system are derived from governing equations of motion. Controller is designed using LQR technique. Dynamic response and frequency response of beam in open and closed loop configuration are obtained and the effect of flexible core on the control of dynamic response is investigated. The obtained results show that the controller can play an important role toward damping out the vibration of the sandwich beam. Also, it is shown that the 18% difference between vibration amplitudes of top and bottom face sheets, because of the flexibility of the core, affects the position of piezo actuator and sensor.

Keywords: Sandwich Beam, Flexible Core, Piezoelectric patches, Linear Quadratic Regulator Control Method, Three Layered Theory.

میرایی در سازه و در نتیجه کنترل ارتعاشات گردد. در میان مواد هوشمند مختلف، مواد پیزوالکتریک به علت حجم کم، وزن ناچیز، آسانی نصب و توانایی بالا در کاهش ارتعاشات بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۲].

تیر ساندویچی از سه قسمت رویه بالا، هسته و رویه پایین تشکیل شده و استحکام و صلبیت خمشی بالایی دارد. از هسته به منظور فاصله انداختن بین رویه بالا و پایین استفاده می‌شود. برای جلوگیری از افزایش وزن، جنس هسته معمولاً از فوم‌های پلیمری که دارای صلبیت جانبی پایینی هستند، انتخاب می‌شود. لذا، قابلیت ارتعاش جانبی بین رویه بالا و پایین و تغییر ضخامت هسته به وجود می‌آید. با توجه به آنکه معمولاً وصله حسگر پیزوالکتریک بر روی یک رویه و وصله‌ی

۱- مقدمه

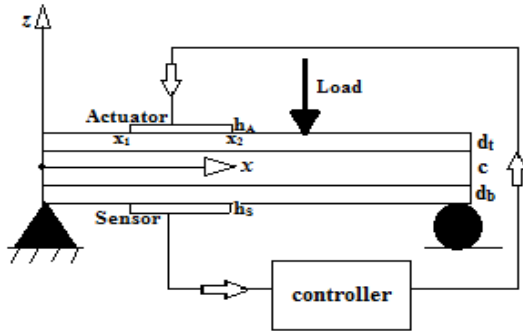
در سال‌های اخیر، استفاده از سازه‌های هوشمند متشکل از مواد کامپوزیتی یا ساندویچی به دلیل استحکام و سختی بالا افزایش یافته است. یکی از دلایل عمده استفاده از سازه‌های چند لایه کامپوزیتی یا ساندویچی، امکان بکارگیری لایه‌های پیزوالکتریک در آنها می‌باشد [۱]. از جمله پارامترهای مهمی که در طراحی یک سازه هوشمند مد نظر قرار می‌گیرد، کنترل ارتعاشات آن است. در روش‌های جدید، برای کاهش ارتعاشات از کنترل فعال استفاده می‌شود. به این ترتیب که ورودی اعمالی به عملگرها بر مبنای پاسخ اندازه‌گیری شده توسط حسگرها به گونه‌ای تنظیم می‌شود که باعث ایجاد حداکثر ضریب

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hbiglari@tabrizu.ac.ir

مرتب به دوم مورد بهره قرار می‌گیرند. نتایج حاصله، نشان دهنده تاثیر انعطاف‌پذیری جانبی هسته بر کنترل ارتعاشات تیر ساندویچی و چیدمان عملگر و حسگر بر رویه بالا و پایین است.

۲- معادلات حاکم

مطابق شکل ۱، تیر ساندویچی مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه‌های ساده به طول L ، عرض b ، چگالی لایه‌ای ρ_i ، ضخامت هسته c ، ضخامت رویه پایین و بالا d_b, d_t ، ضخامت عملگر h_A و ضخامت حسگر h_S را در نظر بگیرید.



شکل ۱- تیر ساندویچی مجهز به وصله پیزوالکتریک

برای رویه‌ها از نظریه اویلر-برنولی و برای هسته از میدان جابجایی خطی استفاده شده است. میدان جابجایی در رویه بالا، هسته و رویه پایین به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u^t(x, y, z, t) = u_0^t(x, t) - \left(z - \frac{c + d_t}{2} \right) \frac{\partial w_0^t(x, t)}{\partial x} \quad (الف-۱)$$

$$w^t(x, y, z, t) = w_0^t(x, t)$$

$$u^c(x, y, z, t) = u_0^c(x, t) + z u_1^c(x, t) \quad (ب-۱)$$

$$w^c(x, y, z, t) = w_0^c(x, t) + z w_1^c(x, t)$$

$$u^b(x, y, z, t) = u_0^b(x, t) - \left(z + \frac{c + d_b}{2} \right) \frac{\partial w_0^b(x, t)}{\partial x} \quad (ج-۱)$$

$$w^b(x, y, z, t) = w_0^b(x, t)$$

که در آن، $u_0^t, w_0^t, u_0^c, u_1^c, w_0^c, w_1^c, u_0^b, w_0^b$ مولفه‌های جابجایی صفحه میانی رویه بالا، $u_0^b, w_0^b, u_0^c, u_1^c, w_0^c, w_1^c$ مولفه‌های جابجایی صفحه میانی رویه پایین و $u_0^c, u_1^c, w_0^c, w_1^c$ مولفه‌های میدان جابجایی خطی هسته هستند که با استفاده از شرایط پیوستگی جابجایی در مرز بین رویه‌ها و هسته بر حسب مولفه‌های جابجایی رویه‌های بالا و پایین به دست می‌آیند. در مرز بین رویه‌ها و هسته، شرایط پیوستگی جابجایی مطابق رابطه (۲) برقرار است. همچنین، به دلیل سفتی کششی ناچیز هسته نسبت به رویه‌ها، از نظریه هسته ضعیف استفاده می‌شود (تنش‌های نرمال و برشی درون صفحه‌های هسته صفر است):

$$\left. \begin{aligned} u^c \Big|_{z=-\frac{c}{2}} = u^b \Big|_{z=-\frac{c}{2}} \\ w^c \Big|_{z=-\frac{c}{2}} = w^b \Big|_{z=-\frac{c}{2}} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} u^c \Big|_{z=\frac{c}{2}} = u^t \Big|_{z=\frac{c}{2}} \\ w^c \Big|_{z=\frac{c}{2}} = w^t \Big|_{z=\frac{c}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (۲)$$

$$\sigma_x^c = \sigma_y^c = \tau_{xy}^c = 0$$

عملگر پیزوالکتریک بر روی رویه دیگر سوار می‌شود، تفاوت دامنه ارتعاش رویه‌ها می‌تواند بر نحوه کنترل ارتعاش تیر موثر باشد که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود.

مطالعات گسترده‌ای در زمینه کنترل ارتعاشات تیر با روش‌های کنترلی مختلف انجام شده است که در اینجا به برخی از آنها اشاره می‌شود. رامش کومار و همکارانش [۲] ارتعاشات تیر اویلر-برنولی را با آنالیز مودال و روش کنترل بهینه خطی^۱ کنترل نمودند. آنها محل بهینه حسگر و عملگر را برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی نمودند. چابرا و همکارانش [۳] ارتعاشات تیر اویلر-برنولی مجهز به حسگر و عملگر پیزو را توسط روش آنالیز مودال و کنترل بهینه مرتبه دوم خطی کنترل نمودند و به نتایج قابل توجهی در کنترل ارتعاشات سازه دست یافتند. ابرامویچ و پلتنر [۴] معادلات حرکت تیر ساندویچی مجهز به لایه‌های کامل و وصله‌های پیزوالکتریک را به صورت تقریبی توسط نظریه اویلر-برنولی به دست آورده، سپس توسط روش المان محدود به محاسبه فرکانس پاسخ پرداختند. آنها در روش تقریبی خود، برای کل تیر سفتی معادل محاسبه نموده و آن را با نتایج تجربی مقایسه کردند. آنان به همخوانی خوبی بین نتایج تجربی و روش تحلیلی در محاسبه فرکانس دست یافتند. در این کار از پیزوسرامیک برای کنترل ارتعاشات استفاده شد.

لی و لیو [۵] به بررسی کنترل ارتعاش آزاد تیر ساندویچی با هسته شبکه‌ای مجهز به حسگر و عملگر پیزوالکتریک پرداختند. در این کار از روش آنالیز مودال و کنترل بهینه خطی بهره گرفته شده است. کاپوریا و همکارانش [۶] از نظریه مرتبه بالای زیگزاگ برای تحلیل دینامیکی تیر کامپوزیتی و ساندویچی مجهز به لایه‌ی میراگر و پیزوالکتریک استفاده کرده و نتایج به دست آمده را با نظریه مرتبه اول مقایسه نمودند. دش و سینگ [۷] معادلات غیر خطی حاکم بر ارتعاش تیر مجهز به پیزوالکتریک را توسط نظریه مرتبه سوم برشی به دست آوردند. در این نظریه فرض شده که کرنش برشی در صفحات بالا و پایین صفر است و برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده شده است. ماتسوپولو و همکارانش [۸] ارتعاشات اجباری تیر یکسرگیردار مجهز به پیزوالکتریک را مدلسازی نمودند. آنها از روش المان محدود برای حل معادلات و از روش کنترل بهینه خطی مرتبه دوم برای کنترل ارتعاشات سیستم استفاده کردند. علیقلی‌زاده و همکارانش [۹] به بهینه‌سازی طول و مکان وصله پیزوالکتریک برای کنترل ارتعاش تیر اویلر-برنولی یکسرگیردار با صرف کمترین هزینه پرداخته‌اند. پادوین و منوزی [۱۰] ارتعاشات تیر اویلر-برنولی یکسرگیردار مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک را توسط دو روش کنترلی LQR و LQG به حداقل رساندند.

در این مقاله، اثر انعطاف‌پذیری هسته در کنترل پاسخ دینامیکی حلقه باز و حلقه بسته تیر ساندویچی نشان داده می‌شود. برای مدل-سازی سازه‌ای، از نظریه سه لایه تیر ساندویچی استفاده می‌شود که در آن برای رویه بالا و پایین از نظریه اویلر-برنولی و برای هسته از میدان جابجایی خطی استفاده می‌شود. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان تبدیل گشته و سپس در فضای حالت توسط روش کنترل بهینه خطی

^۱ Linear Quadratic Regulator

$$\delta T_{core} = \int_{V_{core}} \rho_c (\dot{u}^c \delta \dot{u}^c + \dot{w}^c \delta \dot{w}^c) dv$$

$$\delta T_{actuator} = \int_{V_{actuator}} \{\rho_A (\dot{u}^t \delta \dot{u}^t + \dot{w}^t \delta \dot{w}^t) \times [H(x-x_1) - H(x-x_2)]\} dv$$

$$\delta T_{sensor} = \int_{V_{sensor}} \{\rho_s (\dot{u}^b \delta \dot{u}^b + \dot{w}^b \delta \dot{w}^b) \times [H(x-x_1) - H(x-x_2)]\} dv$$

که $H(x)$ تابع هویساید است. فرض می‌شود که نیروی جانبی به صورت گسترده به رویه بالا و در جهت منفی Z وارد می‌شود. لذا، کار خارجی ناشی از بار خارجی به صورت زیر است:

$$V_{force} = - \int_0^l \int_0^b F(x,t) \delta w_0^t dx dy \quad (8)$$

با جاگذاری معادلات (۶)-(۸) در معادله (۵) و پس از انجام یک سری عملیات جبری، معادلات حاکم بر مساله به صورت معادلات دیفرانسیل جزئی تابع زمان و مکان به دست می‌آید. معادلات حاکم در پیوست موجود است.

برای تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان از روش گالرکین استفاده می‌شود. برای تیر با تکیه‌گاه ساده، حل بفرم زیر فرض می‌شود:

$$\begin{cases} u_0^t(x,t) = \sum_{m=1}^M U_m^t(t) \cos(\alpha_m x) \\ w_0^t(x,t) = \sum_{m=1}^M W_m^t(t) \sin(\alpha_m x) \\ u_0^b(x,t) = \sum_{m=1}^M U_m^b(t) \cos(\alpha_m x) \\ w_0^b(x,t) = \sum_{m=1}^M W_m^b(t) \sin(\alpha_m x) \end{cases}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{L} \quad (9)$$

در معادله فوق M تعداد مودهای در نظر گرفته شده، L طول تیر و m شماره مود است. $\sin(\alpha_m x)$ ، $\cos(\alpha_m x)$ مودهای نرمال تیر با شرایط تکیه‌گاهی ساده است. بعد از جایگذاری روابط (۹) در معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مساله، فرم کلی معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$[M] \ddot{X} + [K] X = F_v V(t) + F_f F(t) \quad (10)$$

$$X = \{U_m^t, W_m^t, U_m^b, W_m^b\}^T$$

در معادله فوق M ماتریس جرم، K ماتریس سفتی، F_f بردار ضرایب نیروی خارجی، F_v بردار ضرایب ولتاژ کنترلی، $V(t)$ ولتاژ کنترلی و $F(t)$ نیروی اغتشاشی خارجی می‌باشد. برای کنترل ارتعاشات تیر، معادله (۱۰) در فضای حالت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + B_f F(t) + B_v V(t) \\ Y = CZ + D_f F(t) + D_v V(t) \end{cases}, Z = \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

در معادلات فوق Z بیانگر متغیر حالت است. ماتریس‌های ضرایب در فضای حالت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

با اعمال شرایط پیوستگی (۲)، تمامی متغیرهای جابجایی هسته بر حسب متغیرهای جابجایی رویه بالا و پایین به دست می‌آیند. لذا در کل، این نظریه دارای چهار مجهول $u_0^t, u_0^b, w_0^t, w_0^b$ می‌باشد. میدان الکتریکی فقط در جهت ضخامت پیزوالکتریک (راستی Z) به صورت ثابت اعمال می‌شود:

$$E_z^A = \frac{V(t)}{h_A} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، V ولتاژ و h_A ضخامت عملگر پیزو می‌باشد. روابط تنش-کرنش در رویه بالا و پایین σ^K ، لایه حسگر σ^S و لایه عملگر σ^A که از دو قسمت مکانیکی و الکتریکی تشکیل شده‌اند، به شکل زیر است [۱]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^K &= \bar{Q}_{11}^K \epsilon_x^K \\ \sigma_x^A &= \bar{Q}_{11}^A \epsilon_x^A - \bar{e}_{31}^A E_z^A = \sigma_{mechanical}^A + \sigma_{electrical}^A \\ \sigma_x^S &= \bar{Q}_{11}^S \epsilon_x^S \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن، Q سفتی کاهش یافته، ϵ کرنش، e مدول پیزوالکتریک و E میدان الکتریکی پیزوالکتریک است.

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر مساله از اصل هامیلتون به شرح زیر استفاده می‌شود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (-T + U + V) dt = 0 \quad (5)$$

در رابطه (۵)، پارامترهای V, U, T به ترتیب بیانگر انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار نیروی خارجی است که برای رویه بالا، رویه پایین، هسته، حسگر و عملگر باید محاسبه شود. انرژی کرنشی تیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{top} &= \int_{V_{top}} \sigma_x^t \delta \epsilon_x^t dv \\ U_{bottom} &= \int_{V_{bottom}} \sigma_x^b \delta \epsilon_x^b dv \\ U_{core} &= \int_{V_{core}} (\sigma_z^c \delta \epsilon_z^c + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c) dv \\ U_{actuator(mechanical)} &= \int_{V_{actuator}} \sigma_{p1}^A \delta \epsilon_x^t [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dv \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{actuator(electrical)} &= \int_{V_{actuator}} \sigma_{p2}^A \delta \epsilon_x^t [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dv \\ \delta U_{sensor} &= \int_{V_{sensor}} \sigma_x^S \delta \epsilon_x^b [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dv \end{aligned}$$

انرژی جنبشی تیر ساندویچی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \delta T_{top} &= \int_{V_{top}} \rho_t (\dot{u}^t \delta \dot{u}^t + \dot{w}^t \delta \dot{w}^t) dv \\ \delta T_{bottom} &= \int_{V_{bottom}} \rho_b (\dot{u}^b \delta \dot{u}^b + \dot{w}^b \delta \dot{w}^b) dv \end{aligned} \quad (7)$$

برشی (G) هسته بر پاسخ سیستم حلقه باز و حلقه بسته بررسی می-شود. برای این منظور، از مشخصات ارائه شده در جدول ۲ برای تیر ساندویچی و وصله پیزوالکتریک که از نوع PZT-5H می‌باشد، استفاده شده است.

پهنای تیر $b=100$ mm و محل قرارگیری ابتدای وصله عملگر و حسگر پیزوالکتریک در $x_1=L/5$ مطابق شکل ۱ می‌باشد. نیروی $4000\sin(100t)$ نیوتون در جهت منفی z به کل سطح رویه بالای تیر وارد می‌شود. نتایج در نقطه $x_c=L/4$ از ابتدای تیر ترسیم شده است. برای ترسیم نتایج از چهار مود اول در روش گالرکین استفاده شده است. ماتریس‌های وزنی کنترل به صورت زیر انتخاب شده است.
 $Q=C^T \times C, R=10^{-13}$

جدول ۱- فرکانس طبیعی (هرتز) تیر ساندویچی

| شماره مود | کار حاضر | فروستیک [۱۱] |
|------------|----------|--------------|
| فرکانس اول | 220.5 | 220 |
| فرکانس دوم | 571.1 | 587.3 |
| فرکانس سوم | 916.8 | 942.2 |

جدول ۲- مشخصات تیر ساندویچی [۱۲] و پیزوالکتریک [۱۳]

| e_{31} (Cm ⁻²) | E, G (GPa) | ρ (kgm ⁻³) | L (mm) | H (mm) | |
|------------------------------|--------------|-----------------------------|----------|----------|------------|
| - | 18 | 2000 | 1200 | 6 | رویه بالا |
| - | 0.056, 0.022 | 60 | 1200 | 60 | هسته |
| - | 18 | 2000 | 1200 | 6 | رویه پایین |
| -16.604 | 60 | 7500 | 240 | 0.5 | عملگر |
| -16.604 | 60 | 7500 | 240 | 0.0028 | حسگر |

در شکل ۲، پاسخ دینامیکی سیستم حلقه باز (کنترل نشده) و حلقه بسته (کنترل شده) به ورودی اغتشاشی سینوسی ترسیم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، جابجایی محوری رویه بالا و پایین در جهت عکس هم و خیز رویه بالا و پایین هم‌جهت نوسان می‌کنند. کنترلر تاثیر خوبی در کاهش دامنه ارتعاش دارد. بگونه‌ای که باعث کاهش ۴۰ درصدی دامنه ارتعاش خیز جانبی شده است. توجه شود که در شکل ۲، مشخصات هسته (مدول برشی و الاستیک) بگونه‌ای است که رفتار هسته در جهت جانبی تقریباً صلب است. مطابق شکل، به علت صلب بودن جانبی هسته در سیستم حلقه باز، خیز جانبی رویه بالا و پایین تقریباً یکسان است. در سیستم حلقه بسته به علت نصب عملگر در رویه بالا، کاهش دامنه U_t بیشتر از دامنه رویه پایین U_b است (۴۲٪ بیشتر). ولی کاهش دامنه ارتعاش W_t و W_b یکسان است.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(4m \times 4m)} & \mathbf{I}_{(4m \times 4m)} \\ \left[\begin{matrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{matrix} \right]_{(4m \times 4m)} & \mathbf{0}_{(4m \times 4m)} \end{bmatrix}_{(8m \times 8m)} \quad (12)$$

$$B_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(4m \times 1)} \\ \left[\begin{matrix} (\mathbf{M}^{-1}F_f) \end{matrix} \right]_{(4m \times 1)} \end{bmatrix}_{(8m \times 1)}$$

$$B_v = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(4m \times 1)} \\ \left[\begin{matrix} (\mathbf{M}^{-1}F_v) \end{matrix} \right]_{(4m \times 1)} \end{bmatrix}_{(8m \times 1)}$$

با توجه به اینکه هدف کنترل ارتعاشات تیر می‌باشد، ارتعاش نقطه $x_c=L/4$ به عنوان خروجی سیستم برای تنظیم ضرایب LQR در نظر گرفته می‌شود:

$$\{Y\}_{(4 \times 1)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^M U_m^t(t) \cos(\alpha_m x_c) \\ \sum_{m=1}^M W_m^t(t) \sin(\alpha_m x_c) \\ \sum_{m=1}^M U_m^b(t) \cos(\alpha_m x_c) \\ \sum_{m=1}^M W_m^b(t) \sin(\alpha_m x_c) \end{array} \right\}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0}_{(4 \times 4m)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_m x_c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_m x_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_m x_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_m x_c) \end{bmatrix}_{(4 \times 4m)}$$

$$D_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}, \quad D_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}$$

۳- نتایج

۳-۱- اعتبارسنجی

در این بخش، با مقایسه فرکانس طبیعی تیر ساندویچی حاصل از کار حاضر با نتایج موجود در مرجع [۱۱] به اعتبارسنجی ماتریس جرم و سفتی در مدل ارائه شده، پرداخته می‌شود. مطابق جدول ۱، نتایج به دست آمده از کار حاضر با نتایج به دست آمده از مرجع [۱۱] در تطابق خوبی می‌باشد و در همه حالات خطا کمتر از ۲٪ است.

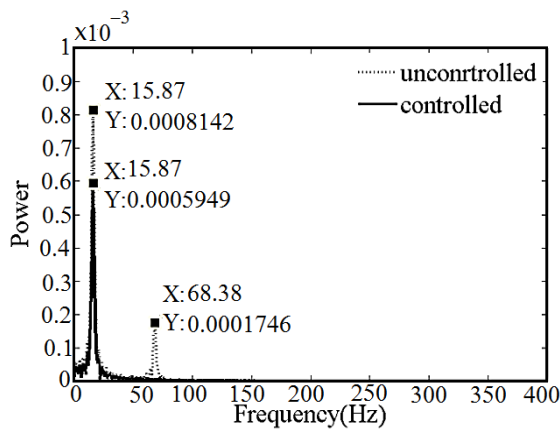
۳-۲- نتایج تحقیق حاضر

در این قسمت، پاسخ دینامیکی، پاسخ فرکانسی و نمودار بُد^۱ تیر ساندویچی تحت بار گسترده سینوسی اعمالی به رویه بالا، قبل و بعد از کنترل بررسی می‌شود. همچنین تاثیر مدول الاستیک (E) و مدول

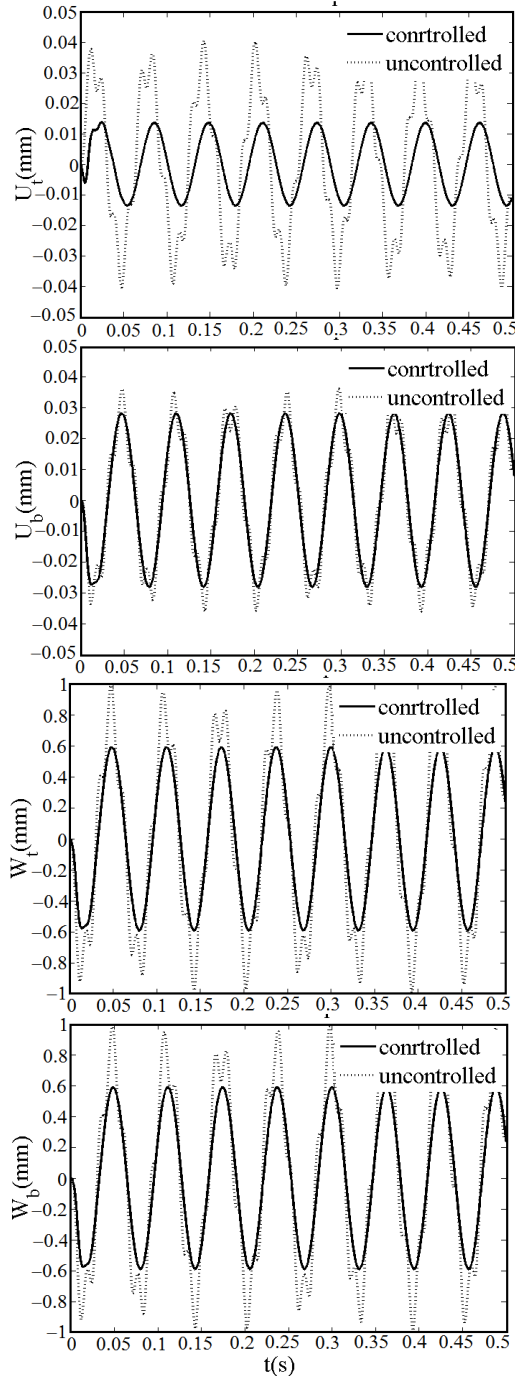
¹ Bodeh Diagram

بسته اثر آن از بین رفته و فیلتر شده است. شکل ۴ نمودار بُد سیستم حلقه باز و بسته را نشان می‌دهد. مطابق شکل، در سیستم حلقه بسته اثر فرکانس‌های طبیعی کاهش یافته یا به طور کلی از بین رفته است. انعطاف‌پذیری هسته باعث اختلاف در میزان جابجایی رویه بالا و پایین می‌شود. این انعطاف‌پذیری با کاهش مدول الاستیک (E) و مدول برشی هسته (G) افزایش می‌یابد. کاهش مدول الاستیک (E) باعث اختلاف در خیز جانبی رویه بالا و پایین و کاهش مدول برشی (G) باعث اختلاف در جابجایی محوری رویه بالا و پایین می‌شود. در شکل ۵، با کاهش مدول الاستیک هسته به میزان یک درصد مقدار قبلی خود ($E=56 \times 10^4$ Pa)، خیز جانبی رویه بالا (W_t) و پایین (W_b) چه در حلقه باز و چه در حلقه بسته متفاوت شده است (حدود ۱۸٪ اختلاف). مطابق شکل، خیز جانبی رویه بالا (W_t) بیشتر از خیز رویه پایین (W_b) است. علت این موضع اعمال مستقیم بار به رویه بالایی تیر است.

اختلاف دامنه ارتعاش جابجایی محوری رویه بالا و پایین در سیستم حلقه باز ناچیز و در حدود ۶٪ است. اما این اختلاف در سیستم حلقه بسته قابل توجه و در حدود ۵۸٪ است. با توجه به آنکه عملگر پیزوالکتریک روی رویه بالا قرار دارد، تاثیر خود را مستقیماً بر جابجایی محوری رویه بالا اعمال کرده و لذا کاهش دامنه جابجایی محوری رویه بالا (U_t) بیشتر از رویه پایین (U_b) است. به این نکته توجه شود که مطابق رابطه (۴)، اعمال میدان الکتریکی (E_z) به عملگر پیزوالکتریک باعث ایجاد کرنش در جهت محوری لایه عملگر می‌شود. لذا، تاثیر مستقیم عملگر پیزوالکتریک بر جابجایی محوری رویه بالایی است و نه خیز جانبی آن.

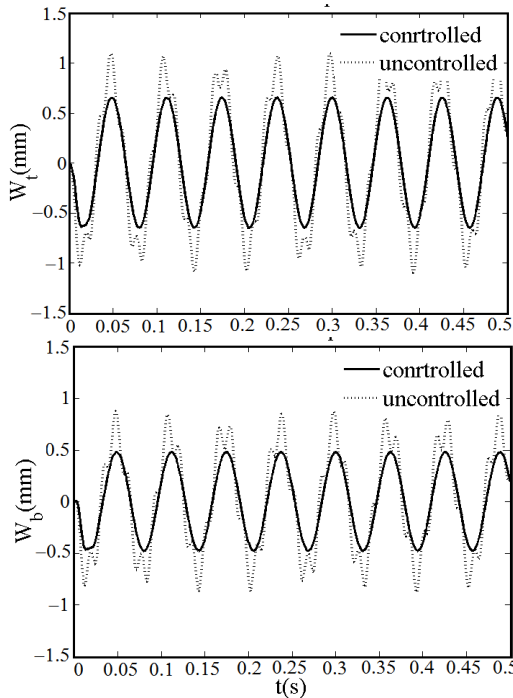


شکل ۳- تبدیل فوریه سریع تیر مربوط به بارگذاری سینوسی



شکل ۴- پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی به بار گسترده سینوسی در سیستم حلقه باز و بسته

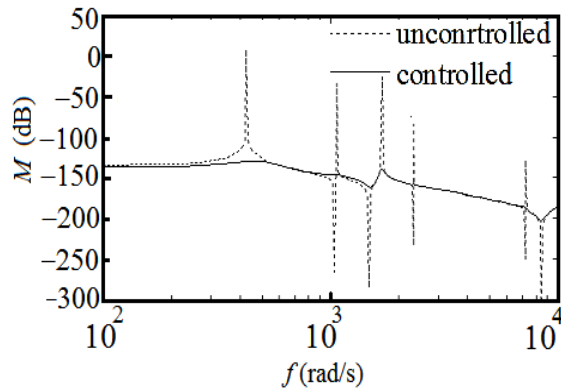
مطابق شکل ۲ در سیستم حلقه باز، علاوه بر فرکانس تحریک نیروی خارجی سینوسی، فرکانس دیگری در ارتعاش تیر وجود دارد که با اعمال کنترلر اثر آن از بین می‌رود. فرکانس دوم سوار بر پاسخ دینامیکی تیر، همان فرکانس طبیعی پایه تیر می‌باشد. برای شناسایی فرکانس‌های موجود در پاسخ دینامیکی تیر، در شکل ۳ از تبدیل فوریه سریع استفاده شده است. مطابق شکل، فرکانس ۱۵.۸۷ Hz مربوط به فرکانس نیروی تحریک است که در هر دو سیستم حلقه باز و حلقه بسته ظاهر شده است. فرکانس ۶۸.۳۸ Hz مربوط به فرکانس طبیعی اول تیر است که در سیستم حلقه باز ظاهر شده، ولی در سیستم حلقه



شکل ۵- تاثیر کاهش مدول الاستیکی هسته ($E=56 \times 10^4 \text{ Pa}$, $G=22 \times 10^6 \text{ Pa}$)

۴- نتیجه گیری

تحقیق حاضر به بررسی کنترل ارتعاشات اجباری تیر ساندویچی که از هسته انعطاف پذیر در جهت جانبی تشکیل شده است، پرداخته است. در این تحقیق، برای بررسی پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی از نظریه سه لایه استفاده شده است. در این نظریه برای رویه‌ها از نظریه تیر اوپلر-برنولی و برای هسته از میدان جابجایی خطی بهره گرفته شده است.

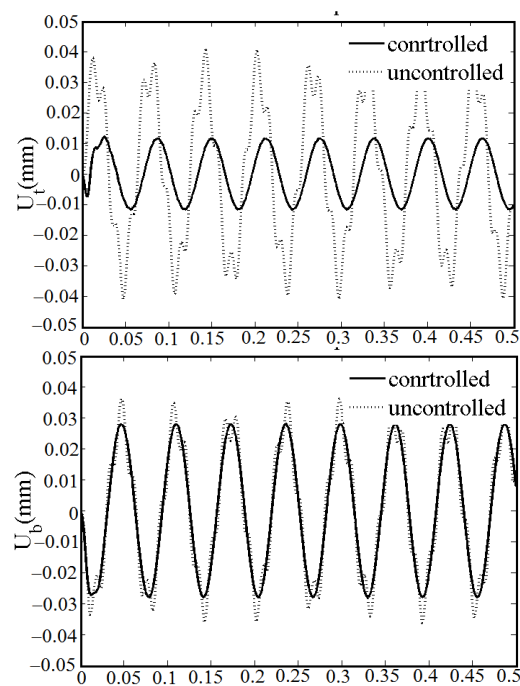
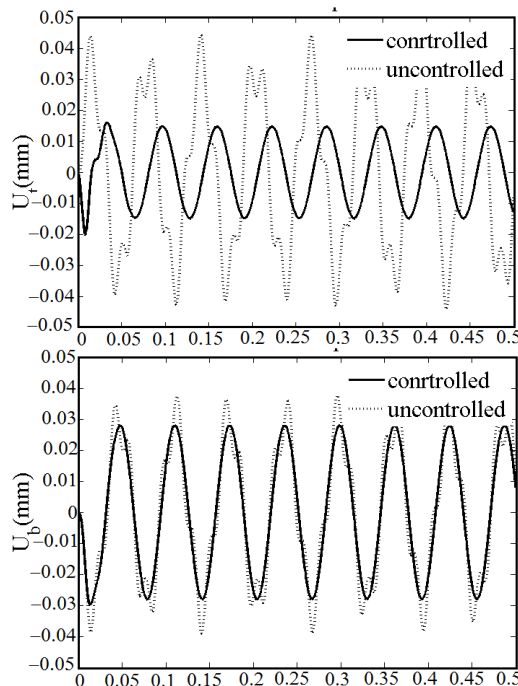


شکل ۴- نمودار بُد سیستم حلقه بسته و حلقه باز

در شکل ۶، با کاهش مدول برشی هسته به میزان پنجاه درصد مقدار قبلی خود ($G=11 \times 10^6 \text{ Pa}$)، جابجایی محوری رویه بالا (U_t) و پایین (U_b) چه در حلقه باز و چه در حلقه بسته متفاوت خواهد بود (حدود ۱۸٪ اختلاف). در سیستم حلقه باز، جابجایی محوری رویه بالا (U_t) بیشتر از جابجایی محوری رویه پایین (U_b) است. علت این امر اعمال بارگذاری به رویه بالایی تیر ساندویچی است.

مطابق شکل، با توجه به آنکه عملگر پیزوالکتریک روی رویه بالایی قرار دارد، کاهش دامنه در ارتعاش محوری رویه بالا بیشتر از رویه پایین است (۴۵٪ بیشتر). نکته دیگر موجود در شکل آن است که کاهش مدول برشی هسته (G) تاثیری در اختلاف دامنه ارتعاش خیز جانبی رویه بالایی و پایینی، چه در سیستم حلقه باز و چه در سیستم حلقه بسته، ندارد.

از مقایسه شکل ۵ و ۶ نتیجه می‌شود که اختلاف دامنه ارتعاش جابجایی محوری رویه بالا و پایین بیشتر تحت تاثیر مدول برشی هسته (G) است. در حالیکه، اختلاف دامنه ارتعاش خیز رویه بالا و پایین تحت تاثیر مدول الاستیک هسته (E) قرار دارد.

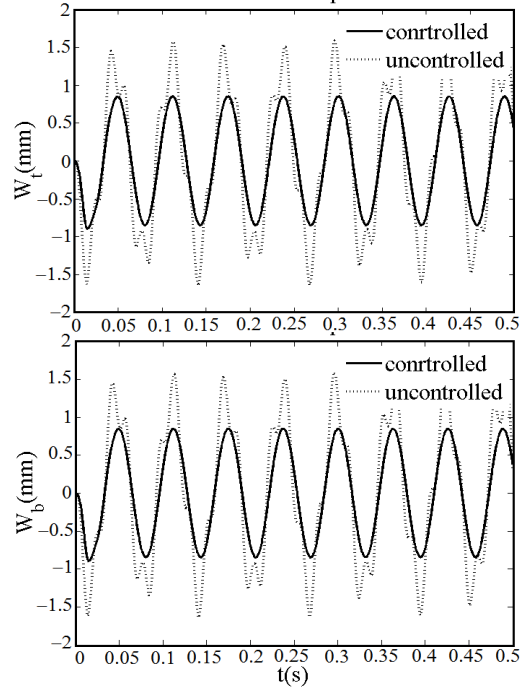


و) در کنترل ارتعاش پنل ساندویچی، انعطاف‌پذیری هسته نقش موثری در تعیین جایگاه عملگر پیزوالکتریک روی رویه بالا و یا پایین ایفا می‌کند. با توجه به یکی نبودن دامنه ارتعاش جابجایی محوری و جانبی دو رویه بالا و پایین در پنل ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر، بهتر است عملگر پیزوالکتریک روی رویه‌ای قرار گیرد که بارگذاری مستقیماً به آن اعمال می‌شود.

۶- پیوست

در این بخش، معادلات دینامیکی حاکم بر ارتعاش غشایی و خمشی تیر ساندویچی طبق نظریه سه لایه ارائه شده است:

$$\begin{aligned} \delta u'_0 : \\ & \left(I_1^t + I_1^A H + \frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{u}'_0 + \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{u}'_0^b \\ & - \left(I_2^t + I_2^A H - \frac{d_t}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \right) \frac{\partial \ddot{w}'_0}{\partial x} \\ & - \frac{d_b}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \frac{\partial \ddot{w}'_0^b}{\partial x} - \frac{\partial N'_x}{\partial x} \\ & - Q_{11}^A H_1^A \left(H' \frac{\partial u'_0}{\partial x} + H \frac{\partial^2 u'_0}{\partial x^2} \right) \\ & + Q_{11}^A H_2^A \left(H' \frac{\partial^2 w'_0}{\partial x^2} + H \frac{\partial^3 w'_0}{\partial x^3} \right) + \frac{Q_x}{c} + e_{31}^A E_z^A H_1^A H' = 0 \\ \delta w'_0 : \\ & I_2^A H' \ddot{u}'_0 + \left(I_2^t + I_2^A H - \frac{d_t}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \right) \frac{\partial \ddot{u}'_0}{\partial x} \\ & + \frac{d_t}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \frac{\partial \ddot{u}'_0^b}{\partial x} + \left(I_1^t + I_1^A H + \frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{w}'_0 \\ & - \left(I_3^t + I_3^A H + \frac{d_t^2}{4} \left(\frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \right) \frac{\partial^2 \ddot{w}'_0}{\partial x^2} - I_3^A H' \frac{\partial \ddot{w}'_0}{\partial x} \\ & + \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{w}'_0^b + \frac{d_t d_b}{4} \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \ddot{w}'_0^b}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M'_x}{\partial x^2} \\ & - Q_{11}^A H_2^A \left(H'' \frac{\partial u'_0}{\partial x} + 2H' \frac{\partial^2 u'_0}{\partial x^2} + H \frac{\partial^3 u'_0}{\partial x^3} \right) \\ & + Q_{11}^A H_3^A \left(H'' \frac{\partial^2 w'_0}{\partial x^2} + 2H' \frac{\partial^3 w'_0}{\partial x^3} + H \frac{\partial^4 w'_0}{\partial x^4} \right) \\ & + \frac{N_z}{c} - \left(\frac{d_t}{2c} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial Q_x^c}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial S_x^c}{\partial x} + e_{31}^A E_z^A H_2^A H'' = F_t(x, t) \end{aligned}$$



شکل ۶- تاثیر کاهش مدول برشی هسته ($E=56 \times 10^6 \text{ Pa}$, $G=11 \times 10^6 \text{ Pa}$)

در مرز هسته و رویه‌ها از شرط پیوستگی جابجایی استفاده شد. برای به دست آوردن انرژی جنبشی و کرنشی پیزوالکتریک که تنها بخشی از کل طول تیر را پوشانده است، از تابع پله‌ی هویساید استفاده شد. برای به دست آوردن معادلات حاکم از اصل هامیلتون و برای تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان از روش گالرکین استفاده شد. در نهایت، برای استفاده از روش کنترل بهینه خطی مرتبه دوم، معادلات تابع زمان به صورت فضای حالت نوشته‌اند.

مطابق بررسی‌های صورت گرفته، نتایج زیر حاصل شدند:

الف) اختلاف دامنه ارتعاش جابجایی محوری رویه بالا و پایین تحت تاثیر مدول برشی هسته (G) است. بگونه‌ایکه با کاهش پنجاه درصدی مدول برشی هسته، اختلاف دامنه ارتعاش رویه بالا و پایین ۱۸٪ افزایش می‌یابد.

ب) اختلاف دامنه ارتعاش خیز جانبی رویه بالا و پایین تحت تاثیر مدول الاستیک هسته (E) است. بگونه‌ایکه با کاهش مدول الاستیک به میزان یک درصد مقدار قبلی خود، اختلاف دامنه ارتعاش رویه بالا و پایین ۱۸٪ افزایش می‌یابد.

ج) اختلاف دامنه ارتعاش رویه بالا و پایین به تغییرات مدول برشی هسته (G) بیش از تغییرات مدول الاستیک هسته (E) حساس است.

د) در سیستم حلقه بسته، به دلیل تاثیر مستقیم عملگر پیزوالکتریک بر رویه بالایی، کاهش دامنه ارتعاش جابجایی محوری رویه بالایی ۵۸٪ بیشتر از رویه پایین است. این امر به دلیل انعطاف‌پذیری هسته می‌باشد.

ه) به دلیل اعمال مستقیم بار به رویه بالایی، میزان خیز جانبی رویه بالایی بیشتر از رویه پایین می‌باشد. این اختلاف حداکثر به ۱۸٪ خواهد رسید. این امر به دلیل انعطاف‌پذیری هسته می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 (I_1^t, I_2^t, I_3^t) &= \sum \int b \rho_t^t \left(1, z - \frac{c+d_t}{2}, \left(z - \frac{c+d_t}{2} \right)^2 \right) dz \\
 (I_1^A, I_2^A, I_3^A) &= \sum \int_{\frac{c}{2}+d_t}^{\frac{c}{2}+d_t+h_A} b \rho_t^A \left(1, z - \frac{c+d_t}{2}, \left(z - \frac{c+d_t}{2} \right)^2 \right) dz \\
 (I_1^S, I_2^S, I_3^S) &= \sum \int_{\frac{c}{2}-d_b-h_S}^{\frac{c}{2}-d_b} b \rho_t^S \left(1, z + \frac{c+d_b}{2}, \left(z + \frac{c+d_b}{2} \right)^2 \right) dz \\
 H_i^A &= \frac{b}{i} \left[\left(\frac{c}{2} + d_t + h_A - \frac{c+d_t}{2} \right)^i - \left(\frac{c}{2} + d_t - \frac{c+d_t}{2} \right)^i \right] \\
 H_i^S &= \frac{b}{i} \left[\left(-\frac{c}{2} - d_b + \frac{c+d_b}{2} \right)^i - \left(-\frac{c}{2} - d_b - h_S + \frac{c+d_b}{2} \right)^i \right]
 \end{aligned}$$

۷- مراجع

- [1] Reddy J. N., On laminated composite plates with integrated sensors and actuators, Eng. Struct., Vol. 21, No. 7, pp. 568-593, 1999.
- [2] Ramesh Kumar K., and Narayanan S., Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs, Smart Mat. Struct., Vol. 17, pp. 8-55, 2008.
- [3] Chhabra D., Chandna P., and Bhushan G., Design and Analysis of Smart Structures for Active Vibration Control using Piezo-Crystals, Int. J. Eng. & Tech., Vol. 1, No. 3, 2011.
- [4] Abramovich H. and Pletner B., Actuation and sensing of piezolaminated sandwich type structures, Comp. Struct., Vol. 38, No. 4, pp. 17-27, 1997.
- [5] Li F. M., and Liu X. X., Active vibration control of lattice sandwich beams using the piezoelectric actuator/sensor pairs, Comp. Part B: Eng., Vol. 67, pp. 571-578, 2014.
- [6] Kapuria S., Ahmed A., and Dumir P. C., An efficient coupled zigzag theory for dynamic analysis of piezoelectric composite and sandwich beams with damping, Sou. & Vib., Vol. 279, No. 1-2, pp. 345-371, 2005.
- [7] Dash P., and Singh B. N., Nonlinear free vibration of piezoelectric laminated composite plate, Fin. Elem. Anal. & Des., Vol. 45, No. 10, pp. 686-694, 2009.
- [8] Moutsopoulou A., Stavroulakis G., and Pouliezos T., Simulation and Modelling of Smart Beams with Robust Control Subjected to Wind Induced Vibration, J. Civil Eng., Vol. 02, No. 03, pp. 106-114, 2012.
- [9] علیقلی زاده سعید، حامد محمد علی، حسن نژاد قدیم رضا، کنترل فعال ارتعاش تیر یکسرگردار با وصله‌های پیزوالکتریک بهینه شده از نظر طول و مکان، ماهنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس،

$$\begin{aligned}
 \delta u_0^b : \\
 & \left(I_1^b + I_1^S H + \frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{u}_0^b + \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{u}_0^t \\
 & - \left(I_2^b + I_2^S H + \frac{d_b}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \right) \frac{\partial \ddot{w}_0^b}{\partial x} \\
 & + \frac{d_t}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \frac{\partial \ddot{w}_0^t}{\partial x} - \frac{\partial N_x^b}{\partial x} \\
 & - Q_{11}^S H_1^S \left(H' \frac{\partial u_0^b}{\partial x} + H \frac{\partial^2 u_0^b}{\partial x^2} \right) \\
 & + Q_{11}^S H_2^S \left(H' \frac{\partial^2 w_0^b}{\partial x^2} + H \frac{\partial^3 w_0^b}{\partial x^3} \right) - \frac{Q_x^c}{c} = 0 \\
 \delta w_0^b : \\
 & I_2^S H' \ddot{u}_0^b + \left(I_2^b + I_2^S H + \frac{d_b}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \right) \frac{\partial \ddot{u}_0^b}{\partial x} \\
 & + \frac{d_b}{2} \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \frac{\partial \ddot{u}_0^t}{\partial x} + \left(I_1^b + I_1^S H + \frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{w}_0^b \\
 & - \left(I_3^b + I_3^S H + \frac{d_b^2}{4} \left(\frac{I_1^c}{4} + \frac{I_3^c}{c^2} \right) \right) \frac{\partial^2 \ddot{w}_0^b}{\partial x^2} \\
 & - I_3^S H' \frac{\partial \ddot{w}_0^b}{\partial x} + \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \ddot{w}_0^t + \frac{d_t d_b}{4} \left(\frac{I_1^c}{4} - \frac{I_3^c}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \ddot{w}_0^t}{\partial x^2} \\
 & - \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} - Q_{11}^S H_2^S \left(H'' \frac{\partial u_0^b}{\partial x} + 2H' \frac{\partial^2 u_0^b}{\partial x^2} + H \frac{\partial^3 u_0^b}{\partial x^3} \right) \\
 & + Q_{11}^S H_3^S \left(H'' \frac{\partial^2 w_0^b}{\partial x^2} + 2H' \frac{\partial^3 w_0^b}{\partial x^3} + H \frac{\partial^4 w_0^b}{\partial x^4} \right) \\
 & - \frac{N_z^c}{c} - \left(\frac{d_t}{2c} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial Q_x^c}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial S_x^c}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

ثابت‌ها و پارامترهای موجود در معادلات حاکم به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \{N_x^t, M_x^t\} &= \sum \int_{z_t}^{z_{t+1}} \sigma_x^t \left(1, z - \frac{c+d_t}{2} \right) dz \\
 \{N_x^b, M_x^b\} &= \sum \int_{z_b}^{z_{b+1}} \sigma_x^b \left(1, z + \frac{c+d_b}{2} \right) dz \\
 N_z^c &= \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \sigma_z^c dz, \quad Q_x^c = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \kappa \tau_{xz}^c dz, \\
 S_x^c &= \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \kappa z \tau_{xz}^c dz, \quad Q_x^{*c} = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \kappa \tau_{xz}^c z^2 dz \\
 I_1^c &= \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \rho_c b dz = b \rho_c c, \quad I_2^c = 0, \quad I_3^c = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \rho_c b z^2 dz = \frac{b \rho_c c^3}{12}
 \end{aligned}$$

دوره ۱۵، شماره ۹، صفحه ۱۱-۲۲، آذر ۱۳۹۴.

- [10] Padoin E., and Menuzzi O., Modeling and LQR/LQG control of a cantilever beam using piezoelectric material, 22nd Int. Cong. Mech. Eng., 2013.
- [11] Bozhevolnaya E., and Frostig Y., Free vibration of curved sandwich beam, Aalborg university, Report N107, February 2001.
- [12] Hamed E., and Rabinovitch O., Modeling and Dynamics of Sandwich Beams with a Viscoelastic Soft Core, AIAA Journal. vol. 47, no. 9, 2009.
- [13] Damanpack A. R., Bodaghi M., Aghdam M. M., and Shakeri M., Active control of geometrically non-linear transient response of sandwich beams with a flexible core using piezoelectric patches, Comp. Struct., Vol. 100, pp. 517-531, 2013.