

شبیه‌سازی عددی شکست در مواد ترد با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته

علیرضا نصرنیا

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

فرهاد حاجی ابوطالبی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

امروزه مواد ترد و شبه‌ترد به دلیل شکل‌پذیری بسیار کم و هم‌چنین استحکام و سفتی بالا در مقایسه با وزنشان، به‌صورت گسترده در سازه‌های مختلف مانند سازه‌های هوافضایی استفاده می‌شوند. با افزایش کاربرد این مواد در صنعت، نیاز بیشتری برای تحلیل سازه‌های ترد احساس می‌گردد. در این مقاله ابتدا به‌منظور بررسی مکانیزم جوانه‌زنی و رشد ترک در مواد ترد، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته به‌کار برده می‌شود. سپس، مدل‌های آسیب بر مبنای مدل‌های ناحیه چسبنده برای پیش‌بینی ایجاد و رشد ترک در نظر گرفته می‌شوند. در ادامه، با استفاده از نرم‌افزار اجزاء محدود تجاری آباکوس، تعدادی از مسائل آزمون شبیه‌سازی گردیده، مناطق آسیب‌دیده و بحرانی در آن‌ها پیش‌بینی می‌شود. در آخر، نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی با نتایج تجربی و تئوری مقایسه و اعتبارسنجی می‌گردد. مقایسه نتایج عددی و تجربی آشکار می‌کند که معیارهای آسیب بر پایه تنش از دقت بهتری نسبت به معیارهای آسیب بر پایه کرنش برخوردار می‌باشند. بنابراین نتیجه‌گیری می‌شود که در مقایسه با معیارهای آسیب بر پایه کرنش، استفاده از معیارهای آسیب بر پایه تنش در پیش‌بینی شکست مواد ترد مطمئن‌تر است.

واژه‌های کلیدی: رشد ترک، مواد ترد، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، مدل‌های ناحیه چسبنده.

Numerical Simulation of Fracture in Brittle Materials using the Extended Finite Elements Method

A. Nasrnia

Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

F. H. Aboutalebi

Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract

Today, brittle and quasi brittle materials are widely used in the various structures such as aerospace structures, because of very low deformability as well as high strength and stiffness compared with their weight. There is a greater need for analysis of the brittle structures, with increasing application of these materials in the industries. In this paper first, the extended finite element method (XFEM) is applied to investigate the nucleation and crack growth mechanism of the brittle materials. Then, damage models based on cohesive zone models (CZM) are considered to predict initiation and crack growth. In the following, a number of benchmark problems are simulated; damaged and critical zones in them are predicted, using the ABAQUS commercial finite elements software. Finally, the numerical simulation results are compared with the experimental and theoretical results and validated. Comparison of the numerical and experimental results reveals that the stress-based damage criteria are more accurate than the strain-based damage criteria. Hence, it is concluded that in comparison with the stress-based damage criteria, using the stress-based damage criteria is more reliable in fracture prediction of brittle materials.

Keywords: Crack Growth, Brittle Materials, Extended Finite Element Method (XFEM), Cohesive Zone Models (CZM).

۱- مقدمه

زمانی که شکست خیلی ترد باشد (در محدوده شکست الاستیک)، پیش‌بینی قابل قبولی دارد. به همین منظور تئوری‌های شکست الاستیک غیرخطی نظیر مدل ترک الاستیک معادل و مدل ناحیه چسبنده^۲ ارائه شد [۴]. یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های مدل‌های ارائه گردیده نیاز به ترک از پیش تعریف شده در قطعه است. هیلبرگ و همکاران با برقراری ارتباط پیوسته بین آنالیزهای برپایه مقاومت و مکانیک شکست، مدلی پیشنهاد نمودند که قادر بود سازه‌های بدون ترک را نیز تحلیل نماید [۵].

در ادامه بیشتر تحقیقات صرف ارائه چهارچوب ریاضی مناسب برای مفهوم مکانیک شکست گردید [۷ و ۶]. با آغاز قرن بیستم یکی از مهم‌ترین اقدامات، تلاش برای مدل‌سازی ناپیوستگی در درون المان بود. این

پیش‌بینی رفتار خرابی مواد ترد با توجه به کاربرد وسیع و شکست مکانیکی ناگهانی در این مواد، از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. تحقیقات اولیه در زمینه شکست مواد ترد موجب پایه‌گذاری بنیان‌های مکانیک شکست الاستیک خطی^۱ گردید.

برای اولین بار، گریفیت در سال ۱۹۲۰ پدیده شکست در مواد جامد را مورد بررسی قرار داد [۱]. پس از آن ابروین به تحلیل تنش و کرنش نزدیک انتهای ترک در یک صفحه ترک‌دار پرداخت [۲]. در همین راستا، رایس انتگرال مستقل از مسیر و هم‌چنین تمرکز کرنش اطراف شکاف‌ها و ترک‌ها را تحلیل نمود [۳]. مکانیک شکست الاستیک خطی

^۱Egglivalent Elastic crack Model

^۲Cohesive Zone Model (CZM)

$$u = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in L} \phi_k \left(\sum_{\alpha=1}^4 c_k^\alpha F_\alpha(x) \right) \quad (1)$$

در رابطه فوق، u_i بردار جابه‌جایی گره‌ای معمولی، ϕ_i توابع شکل معمولی، b_j درجات آزادی اضافی مربوط به ناپیوستگی جابه‌جایی و c_k^α درجات آزادی اضافی مربوط به تابع مجانب نوک ترک می‌باشند. هم‌چنین توابع $H(x)$ و $F_\alpha(x)$ به ترتیب بیان‌گر غنی‌سازی ناپیوستگی و میدان تنش‌ی نه‌ایت بوده و مطابق روابط (۲) و (۳) تعریف می‌گردند:

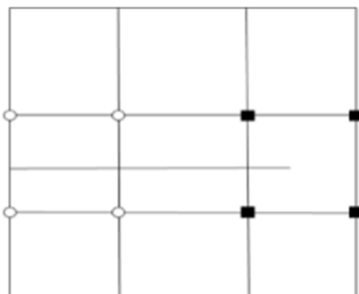
$$H(x) = \begin{cases} 1 & (X - X^*) \cdot n \geq 0 \\ -1 & (X - X^*) \cdot n < 0 \end{cases} \quad (2)$$

در رابطه فوق، X یک نقطه گوس و X^* نقطه‌ای روی ترک است که کم‌ترین فاصله را تا نقطه X دارد. همچنین n بردار یکه عمود بر ترک در نقطه X^* می‌باشد. توابع مجانب نوک ترک برای ماده الاستیک همسانگرد نیز به صورت توابع زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$F_\alpha(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \end{cases} \quad (3)$$

در شکل (۱) نحوه غنی‌سازی گره‌ها در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته نشان داده شده است. گره‌هایی که با علامت دایره مشخص گردیده‌اند، گره‌هایی هستند که با درجات آزادی b_j و تابع $H(x)$ غنی شده و گره‌های دارای علامت مربع، گره‌هایی هستند که با درجات آزادی c_k^α و توابع $F_\alpha(x)$ غنی گردیده‌اند. یکی از نکات مهم در هنگام استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، تعیین گره‌هایی است که باید غنی‌سازی شوند. برای شناسایی این گره‌ها از روش مجموعه تراز استفاده می‌گردد. این روش فرآیند مدل‌سازی ترک را بسیار ساده نموده و برای معرفی هندسه ترک از دو تابع علامت Φ و Ψ که بر هم عمود می‌باشند، استفاده می‌کند.

تابع Φ نشان‌دهنده سطح ترک و تابع Ψ بیانگر صفحه عمود بر سطح ترک می‌باشد. در نتیجه تقاطع این دو تابع، بیان‌کننده جبهه ترک است.



شکل ۱- نمایش نحوه غنی‌سازی در اجزاء محدود توسعه یافته

تحقیقات در نهایت منجر به پایه‌گذاری روش اجزاء محدود توسعه یافته گردید [۸]. در سال‌های اخیر بیشتر تحقیقات در زمینه شکست مواد ترد، معطوف به ارائه معیارهای نظریه شکست قطعات با شباهای گوناگون و تحت شرایط بارگذاری مختلف شده است [۹-۱۲].

در پژوهش حاضر ابتدا، با استفاده از روش نوین اجزاء محدود توسعه یافته و همچنین استفاده از رویکرد مکانیک آسیب و بر مبنای مدل ناحیه چسبنده، جواهره‌زنی و رشد ترک در آزمون‌های مختلف و تحت بارگذاری‌های خالص و ترکیبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، با به دست آوردن مسیر رشد ترک و هم‌چنین نیروی لازم برای شکسته شدن نهایی قطعه به بررسی کارایی و دقت معیارهای مختلف پرداخته شده و معیارهای مناسب مشخص می‌گردند.

۲- روش اجزاء محدود توسعه یافته

روش اجزاء محدود توسعه یافته نسبت به روش‌های پیشین (روش‌های ارائه شده بر پایه اجزاء محدود متداول مانند روش حداکثر تنش مماسی^۱ و حداقل چگالی انرژی کرنشی^۲) دارای مزایای بسیاری است. در روش‌های قبل برای مدل کردن ترک در شبکه، لازم بود که شبکه‌بندی با هندسه ناپیوستگی مطابقت داشته باشد. این عیب زمانی که شبیه‌سازی رشد ترک مطرح باشد، بیشتر احساس می‌شود؛ زیرا در این حالت، در هر مرحله از رشد ترک لازم است شبکه‌بندی با هندسه ترک جدید تطابق داشته باشد. هم‌چنین در روش‌های پیشین برای محاسبه تکنیکی در نوک ترک لازم است از المان‌های بسیار ریز استفاده گردد که این امر بار محاسباتی بالایی را به مسئله تحمیل می‌کند. روش اجزاء محدود توسعه یافته با ارائه رویکردی جدید برای پیاده‌سازی ترک در مسئله، بر بسیاری از عیوب ذکر شده غلبه کرده است.

بلچکو و بلک نخستین بار برای تعریف ناپیوستگی از توابع غنی‌سازی^۳ استفاده نمودند. این امر باعث ایجاد روش اجزاء محدود متداول، بر مبنای مفهوم افراز واحد گردید. در این روش برای معرفی ترک به صورت غیرهندسی از توابع غنی‌شده مخصوص به همراه درجات آزادی اضافی استفاده می‌شود. این توابع و درجات آزادی اضافه شده دو ویژگی ناپیوستگی در میدان جابه‌جایی و میدان تنش بی‌نهایت را به صورت ریاضی به مدل اجزاء محدود اضافه می‌نمایند. با تعریف این توابع غنی‌سازی، نیازی به وارد کردن ترک به صورت هندسی نخواهد بود [۸]. اندکی پس از تحقیقات بلچکو و بلک، مویس و همکاران مدلی ارائه نمودند که در آن محدودیت‌های مدل قبلی کاهش یافته و بر این اساس روشی برای مدل‌سازی گسترش ترک بدون نیاز به تغییر شبکه‌بندی پیشنهاد شد [۱۳].

میدان جابه‌جایی با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

¹Extended Finite Element Method (XFEM)

²Maximum Tangential Stress (MTS)

³Minimum Strain Energy Density (MSSED)

⁴Enrichment functions

۳- معیار آسیب

اساس روش مدل ناحیه چسبنده بر پایه معرفی رابطه ساختاری نرم‌شونده در ناحیه آسیب‌دیده اطراف نوک ترک است [۱۴]. هر مکانیزم خرابی شامل ۳ مرحله، معیار شروع، قانون تکامل تخریب و رشد خرابی است. رابطه تنش- کرنش در المان بحرانی در ابتدا به صورت الاستیک خطی بوده، پس از رسیدن تنش یا کرنش به یک مقدار حداکثری افت تدریجی سفتی المان شروع شده و در نهایت با رسیدن سفتی المان به مقدار صفر، المان دچار تخریب کامل می‌گردد. در روش اجزاء محدود توسعه یافته، تخریب فوق توسط قطع ارتباط گره‌های حقیقی و مجازی به وجود می‌آید.

۳-۱- شروع خرابی

شروع خرابی به لحظه‌ای اطلاق می‌شود که پاسخ ماده در برخی از نقاط کاهش می‌یابد. این کاهش زمانی شروع می‌گردد که تنش‌ها یا کرنش‌ها معیار مورد نظر را ارضاء نمایند. در ادامه تعدادی از معیارهای شروع تخریب ارائه می‌شوند:

۳-۱-۱- معیار حداکثر تنش اصلی^۱

این معیار به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد [۱۵]:

$$f = \left\{ \frac{\langle \sigma_{\max} \rangle}{\sigma_{\max}^0} \right\} \quad (۴)$$

σ_{\max} حداکثر تنش اصلی و σ_{\max}^0 حداکثر تنش اصلی قابل قبول بوده و علامت $\langle \rangle$ بیانگر براکت ماکولی است که توسط رابطه (۵) تعریف می‌شود. استفاده از این براکت بیانگر عدم تأثیر فشار در ایجاد و رشد ترک است [۱۶].

$$\langle \sigma_{\max} \rangle = \begin{cases} \sigma_{\max} & \sigma_{\max} > 0 \\ 0 & \sigma_{\max} \leq 0 \end{cases} \quad (۵)$$

۳-۱-۲- معیار حداکثر کرنش اصلی^۲

مشابه معیار قبل، معیار حداکثر کرنش اصلی مطابق رابطه (۶) بیان می‌گردد [۱۵]:

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_{\max} \rangle}{\varepsilon_{\max}^0} \right\} \quad (۶)$$

که در آن ε_{\max} حداکثر کرنش اصلی و ε_{\max}^0 حداکثر کرنش اصلی قابل قبول است.

۳-۱-۳- معیار حداکثر تنش نامی^۳

این معیار توسط رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$f = \max \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}, \frac{t_s}{t_s^0}, \frac{t_t}{t_t^0} \right\} \quad (۷)$$

t_n مولفه عمودی تنش نامی و t_s, t_t مولفه‌های برشی آن هستند. هم-چنین t_n^0, t_s^0, t_t^0 بیان‌کننده مقادیر تنش‌های اسمی می‌باشند به شرطی که تغییر شکل‌ها به صورت کاملاً عمودی نسبت به صفحه ترک احتمالی یا در جهات برشی اول و دوم اعمال شوند.

۳-۱-۴- معیار حداکثر کرنش نامی^۴

مشابه معیار قبل، این معیار با استفاده از معادله (۸) بیان می‌گردد [۱۵]:

$$f = \max \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0}, \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}, \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\} \quad (۸)$$

ε_n مولفه عمودی کرنش نامی و $\varepsilon_s, \varepsilon_t$ مولفه‌های برشی آن هستند. همچنین $\varepsilon_n^0, \varepsilon_s^0, \varepsilon_t^0$ نیز بیان‌کننده مقادیر کرنش‌های اسمی می‌باشند به شرطی که تغییر شکل‌ها به صورت کاملاً عمودی نسبت به صفحه ترک محتمل یا در جهات برشی اول و دوم اعمال گردند.

۳-۱-۵- معیار مربع تنش نامی^۵

این معیار با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$f = \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_s}{t_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_t}{t_t^0} \right\}^2 \quad (۹)$$

۳-۱-۶- معیار مربع کرنش نامی^۶

معیار مربع کرنش نامی مشابه با معیار قبل، به صورت معادله (۱۰) بیان می‌گردد [۱۵]:

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\}^2 \quad (۱۰)$$

از میان معیارهای شش‌گانه فوق، تنها دو معیار اول (MPE و MPS) قادر به پیش‌بینی زاویه ایجاد ترک می‌باشند، بدین صورت که مطابق معیارهای فوق ترک در راستای عمود بر تنش اصلی یا کرنش اصلی حداکثر ایجاد می‌شود. اما در سایر معیارها (MNE, MNS, QNS و QNE) جهت ایجاد ترک قابل تشخیص نبوده و باید توسط کاربر تعیین گردد.

۳-۲- تکامل خرابی

تکامل تخریب بیانگر نرخ کاهش سفتی ماده پس از رسیدن به معیار شروع خرابی است. مقدار اسکالر D نشان‌دهنده میزان خرابی کلی در ماده است. در ابتدا D مساوی با صفر است و با تکامل خرابی به مقدار یک می‌رسد. رابطه‌ی تنش-کرنش در صفحه ترک مطابق زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$(۱۱)$$

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}$$

$$\tilde{\sigma} = \{\sigma_{sn}, \sigma_m, \sigma_n\}^T, \tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_{sn}, \varepsilon_m, \varepsilon_n\}$$

^۴Maximum Nominal Strain (MNE)

^۵Quadratic Nominal Stress (QNS)

^۶Quadratic Nominal Strain (QNE)

^۲Maximum Principle Strain (MPE)

^۳Maximum Nominal Stress (MNS)

جدول ۱- خواص مکانیکی نمونه‌های گرافیتی [۱۸]

مقدار	مشخصات ماده
۸۰۵۰	مدول الاستیسیته $E(MPa)$
۳۳۵۴	مدول برشی $G(MPa)$
۰/۲۰	ضریب پواسون ν
۴۶	استحکام نهایی کششی (MPa)
۳۰	استحکام نهایی پیچشی (MPa)
۱/۰۶	چقرمگی شکست $(MPam^{0.5})$

$$C = \begin{cases} KI & \varepsilon_m^* \leq \varepsilon_m^0 \\ (1-D)KI + DKI_c & \varepsilon_m^0 \leq \varepsilon_m^* \leq \varepsilon_m^f \\ KI_c & \varepsilon_m^* \geq \varepsilon_m^f \end{cases} \quad (12)$$

در معادله فوق، K سفتی الاستیک اولیه است. برای کرنش‌های قائم فشاری، ویژگی تماسی المان به‌منظور جلوگیری از ورود صفحات ترک به یکدیگر در اثر تنش فشاری لحاظ شده است [۱۴]. هم‌چنین D پارامتر خرابی یا میزان رشد آسیب به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D = \frac{\varepsilon_m^f (\varepsilon_m - \varepsilon_m^0)}{\varepsilon_m (\varepsilon_m^f - \varepsilon_m^0)} \quad (13)$$

در رابطه فوق، ε_m مقدار بیشینه کرنش مؤثر در هر مرحله از اعمال بار است. ε_m^0 و ε_m^f نیز به‌ترتیب کرنش‌های مؤثر متناظر با شروع و پایان تخریب می‌باشند. پارامتر کرنش مؤثر به صورت معادله (۱۴) نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\varepsilon_n^2 + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_s^2} \quad (14)$$

برای بررسی اثر بارگذاری ترکیبی، پارامتری به نام \bar{M}_e^{key} تعریف می‌گردد. نحوه محاسبه این پارامتر به‌صورت رابطه (۱۵) است:

$$\bar{M}_e^{key} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{K_I^{key}}{K_{II}^{key}} \right) \quad (15)$$

مقادیر K_I^{key} و K_{II}^{key} به‌ترتیب بیان‌کننده ضرایب شدت تنش در حالت بارگذاری کششی خالص و حالت بارگذاری برشی خالص می‌باشد. این ضرایب با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه هستند [۱۱]:

$$K_I^{key} = \frac{\sqrt{2\rho\sigma_{max}}}{3} \quad (16)$$

$$K_{II}^{key} = \lim_{r \rightarrow \rho} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi\rho\sigma_{r\theta}(r,0)}}{[1 + 1.625(\rho/r) - 0.75(\rho/r)^2 - 1.875(\rho/r)^3]} \right\} \quad (17)$$

در معادلات فوق، σ_{max} ، استحکام تسلیم ماده، ρ شعاع انتهایی شیار، r فاصله مرکز انحناء شیار تا محل تنش کششی حداکثر و $\sigma_{r\theta}(r,0)$ مقدار تنش برشی حداکثر در حالت بارگذاری مود دوم خالص است.

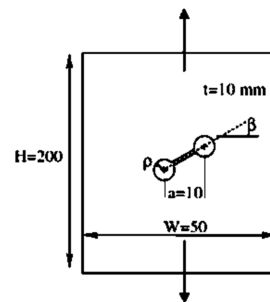
شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS انجام شده بدین صورت که شرایط بارگذاری استاتیکی و ترکیبی بر روی شبکه‌ای متشکل از المان‌های سه‌بعدی هشت‌گه‌ای به صورت درون صفحه‌ای اعمال می‌گردد. در شکل ۳، نحوه شبکه‌بندی اطراف شیار کلیدی شکل در دو وضعیت مود اول و مود ترکیبی مشخص شده است. همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد، در شرایط بارگذاری تحت مود اول به علت تقارن، نصف مدل در نظر گرفته می‌شود. با اعمال شرایط ذکر شده در مدل اجزاء محدود، نتایج عددی حاصل از معیارهای مختلف به دست می‌آید. شکل ۴ نحوه تغییر زاویه ایجاد ترک به ازای بارگذاری‌های مختلف بر حسب پارامتر \bar{M}_e^{key} برای دو معیار حداکثر تنش اصلی و حداکثر کرنش اصلی و هم‌چنین مقایسه آن با نتایج نظری [۱۰] و تجربی [۱۸] را آشکار میکند. در جداول ۲ و ۳ نیز به‌ترتیب مقادیر متناظر با زاویه و نیروی شکست پیش‌بینی‌شده توسط معیارهای مختلف بر حسب زاویه شیار β ارائه گردیده و با نتایج حاصل از آزمون‌های مرجع [۱۸] مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که معیارهای بر پایه تنش، نسبت به معیارهای کرنشی از دقت بهتری برخوردار می‌باشند. مطابق جدول ۳، حداکثر خطا در بین معیارهای تنشی ۹/۰۰ درصد و در بین معیارهای کرنشی ۱۴/۳۲ درصد است. به علاوه، معیارهای تنشی در مقایسه با معیارهای کرنشی مشابه، نیروی شکست را با دقت مناسب‌تری پیش‌بینی می‌کنند.

۴- بررسی صحت مدل‌ها

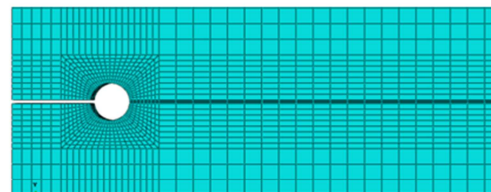
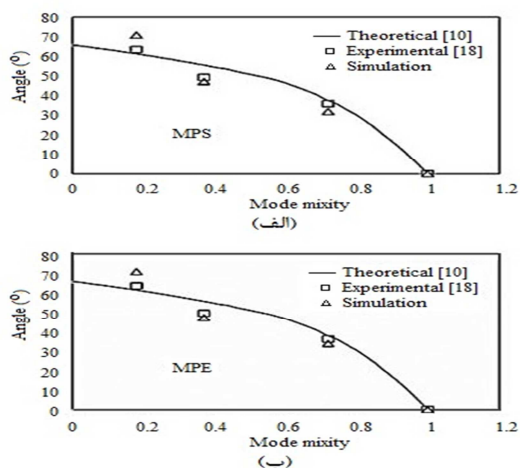
به منظور بررسی کارایی هر یک از مدل‌های ارائه‌شده، آزمون‌های شکست در شرایط مختلف بارگذاری شبیه‌سازی‌شده و نتایج حاصل با نتایج نظری و تجربی مقایسه می‌گردد.

۴-۱- آزمون کشش نمونه با شیار کلیدی شکل

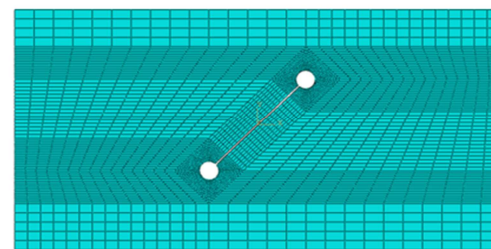
آزمون کشش نمونه با شیار کلیدی شکل تحت بارگذاری‌های مختلف در نظر گرفته می‌شود. شکل ۲، هندسه قطعه و جدول ۱ خواص مکانیکی ماده [۱۸] را نمایش می‌دهند. مطابق شکل ۲، پهناي قطعه (W)، طول آن (H)، عمق شیار (a)، ضخامت نمونه (t) و شعاع سوراخ انتهایی (ρ) به‌ترتیب ۵۰، ۲۰۰، ۱۰، ۱۰ و ۱ میلی‌متر می‌باشند.



شکل ۲- هندسه نمونه با شیار کلیدی شکل



(الف)



(ب)

شکل ۴- نتایج زاویه ایجاد ترک پیش بینی شده توسط دومعیار (الف) حداکثر تنش اصلی و (ب) حداکثر کرنش اصلی و نتایج اصلی تئوری [۱۰] و تجربی [۱۸]

شکل ۳- نحوه المان بندی نمونه با شیار کلیدی شکل، (الف) مود اول بارگذاری و (ب) مود ترکیبی

۳-۲- آزمون دیسک برزلی با شیار V شکل مرکزی

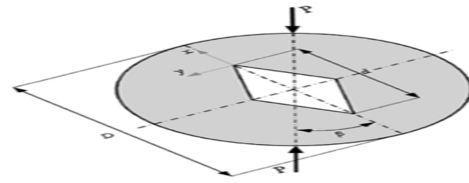
در این آزمون دیسک برزلی نشان داده شده در شکل ۵ و خواص مکانیکی مطابق جدول ۴ [۱۹] تحت فشار قرار می گیرد. در شبیه سازیها برای تمام مدل ها، قطر دیسک (D)، نصف طول شیار ($d/2$)، ضخامت دیسک و شعاع سر شیار به ترتیب ۸۰، ۲۰، ۱۰ و ۴ میلی متر در نظر گرفته می شود.

جدول ۲- نتایج زاویه ایجاد ترک پیش بینی شده توسط معیارهای حداکثر تنش اصلی و حداکثر کرنش اصلی و نتایج آزمون تجربی [۱۸]

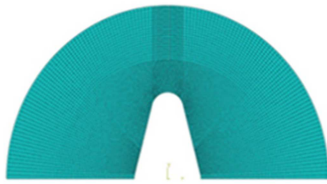
β	θ_{Exp} [۱۸]	θ_{MPS}	%Err	θ_{MPE}	%Err
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۳۰	۳۶/۱۰	۳۲/۰۹	۱۱/۱۱	۳۳/۷۵	۶/۵۱
۴۵	۴۹/۶۰	۴۷/۴۵	۴/۳۳	۴۷/۲۲	۴/۸۰
۶۰	۶۳/۷۰	۷۱/۰۵	۱۱/۵۴	۷۰/۹۸	۱۱/۴۳

جدول ۳- نتایج نیروی شکست پیش بینی شده توسط معیارهای مختلف و نتایج آزمون تجربی [۱۸]

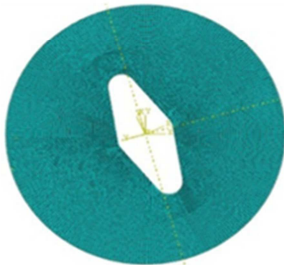
β	F_{Exp} [۱۸]	%Err	F_{MPS} (KN)	%Err	F_{MPE} (KN)	%Err	F_{MNS} (KN)	%Err	F_{MNE} (KN)	%Err	F_{QNS} (KN)	%Err	F_{QNE} (KN)
۰	۳/۹۹	۳/۹۱	۲/۰۱	۴/۴۰	۳/۷۰	۷/۲۷	۴/۵۰	۱۲/۷۸	۳/۷۲	۶/۷۷	۴/۴۷	۱۲/۰۳	
۳۰	۴/۱۳	۳/۸۹	۵/۸۱	۴/۳۵	۳/۹۲	۵/۰۸	۴/۴۳	۷/۲۶	۳/۹۰	۵/۵۷	۴/۴۰	۶/۵۴	
۴۵	۴/۱۲	۳/۸۶	۶/۳۱	۴/۶۵	۳/۸۴	۶/۸۰	۴/۷۱	۱۴/۳۲	۳/۸۳	۷/۰۴	۴/۴۶	۸/۲۵	
۶۰	۴/۱۱	۳/۷۴	۹/۰۰	۴/۵۲	۳/۷۶	۸/۵۲	۴/۳۶	۶/۰۸	۳/۷۵	۸/۷۶	۴/۳۵	۵/۸۴	



شکل ۵- دیسک برزیلی با شیار V شکل



(الف)

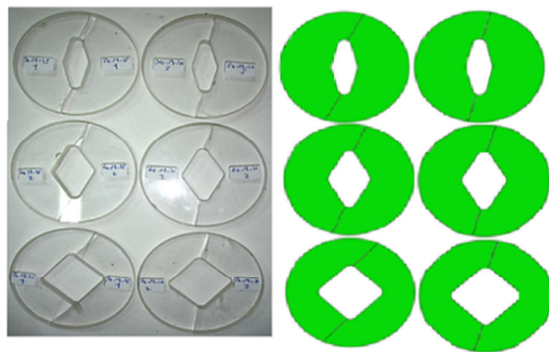


(ب)

جدول ۴- خواص مکانیکی [۱۹]

مشخصات ماده	مقدار
مدول الاستیسیته $E(MPa)$	۲۹۶۰
ضریب پواسون ν	۰/۳۸
استحکام نهایی کششی (MPa)	۷۰/۵۰
چقرمگی شکست $(MPam^{0.5})$	۱/۹۶

شکل ۶- نحوه المان‌بندی دیسک برزیلی با شیار V شکل، (الف) مود اول بارگذاری و (ب) مود ترکیبی رشد ترک در نمونه های شبیه سازی شده را با نتایج عملی [۱۹] نشان می دهد.



(ب)

(الف)

شکل ۷- وضعیت نهایی (الف) نتایج حاصل از شبیه سازی (ب) نتایج تجربی [۱۹]

همانند آزمون قبل تنها دو معیار حداکثر تنش اصلی حداکثر کرنش اصلی قادر به پیش بینی مسیر رشد ترک می باشند. هر دو معیار تغییر زاویه ترک در شرایط مختلف بار گذاری را به درستی پیش بینی می نمایند. برای سایر معیار ها نیز مسیر رشد ترک در شرایط مختلف بارگذاری را به درستی پیش بینی می نمایند. برای سایر معیارها نیز مسیر رشد ترک به صورت پیش فرض مشخص شود. نیروی پیش بینی شده توسط معیار های مختلف و مقایسه آن با مقادیر مختلف و مقایسه آن با مقادیر تجربی [۱۹] به ازای زوایای رأس شیار ۳۰، ۶۰، ۹۰ درجه در جدول ۵ نشان داده شده است. مطابق با این جدول، معیارهایی که بر پایه تنش نوشته شده اند از دقت بیشتری نسبت به معیارهای کرنشی برخوردار می باشند. در زاویه های ۳۰، ۶۰، ۹۰ درجه حداکثر خطا به ترتیب ۴۳/۹۳، ۱۸/۳۰ و ۲۲/۰۹ درصد است که همگی آن ها در معیارهای کرنشی می باشند. در بین معیارهای تنش بار بحرانی شکست از دقت قابل قبول تری نسبت به

به منظور بررسی تأثیر زاویه شیار بر نتایج شکست از شیارهایی با زوایای دهانه ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه استفاده میگردد. همچنین برای بررسی تأثیر ترکیب مودهای شکست، برای هر هندسه بارگذاری در زاویه های متفاوت اعمال می شود، به گونه ای که محدوده ای از مود یک خالص تا مود دو خالص ایجاد گردد.

شرایط بارگذاری ترکیبی، درون صفحه ای و استاتیکی بر روی شبکه ای متشکل از المان های سه بعدی هشت گره ای که در شکل ۶ نشان داده شده، اعمال می گردد. همان گونه که در شکل مشخص است، در شرایط بارگذاری تحت موارد اول به علت تقارن، نصف مدل در نظر گرفته بارگذاری ترکیبی پارامتری به نام \bar{M}_e^v تعریف می گردد. نحوه محاسبه این پارامتر به صورت رابطه (۱۸) می باشد [۲۰]:

$$\bar{M}_e^v = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{K_I^v}{K_{II}^v} \right) \quad (18)$$

مقادیر K_I^v و K_{II}^v به ترتیب بیان کننده ضرایب شدت تنش در حالت بارگذاری کششی خالص و حالت بارگذاری برشی خالص است. این مقادیر با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) محاسبه می شوند:

$$K_I^v = \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{\max} r_0^{1-\lambda_1}}{1 + w_1} \quad (19)$$

$$K_{II}^v = \lim_{r \rightarrow r_0} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi} \rho \sigma_{r\theta}(r,0) r^{1-\lambda_2}}{[1 - (r/r_0)^{\mu_2 - \lambda_2}]} \right\} \quad (20)$$

در روابط فوق، λ_1 ، λ_2 ، μ_2 ، w_1 مقادیر کمکی هستند که با توجه به هندسه شیار تعریف گردیده و در مرجع [۲۰] موجود می باشند. σ_{\max} ، استحکام تسلیم ماده، r_0 شعاع انتهای شیار، r فاصله مرکز انحناء شیار تا محل تنش حداکثر و $\sigma_{r\theta}(r,0)$ مقدار تنش برشی حداکثر در حالت بارگذاری مود دوم خالص است. شکل ۷. مقایسه مسیر ایجاد و

۴۰/۶۳ درصد می باشد. لذا در مقایسه با معیارهای کرنشی معیارهای تنش از دقت بهتری در پیش بینی شکست و زاویه ایجاد ترک برخوردار می باشند.

معیارهای کرنشی برخوردارند. مطابق با جدول ۶ نیز حداکثر خطا در مورد زاویه ایجاد ترک در معیار حداکثر تنش اصلی برای زاویه های رأس شیار ۳۰.۶۰.۹۰ درجه، به ترتیب ۱۲/۸۳، ۱۱/۲۱ و ۹/۵۲ درصد و در معیار حداکثر کرنش اصلی به ترتیب برابر با ۴۲/۳۷، ۵۹/۹۴ و

جدول ۵- مقایسه نتایج نیروی شکست پیش بینی شده توسط معیارهای مختلف با نتایج آزمون تجربی [۱۹]

$\%Err$	F_{QNE} (KN)	$\%Err$	F_{QNS} (KN)	$\%Err$	F_{MNE} (KN)	$\%Err$	F_{MNS} (KN)	$\%Err$	F_{MPE} (KN)	$\%Err$	F_{MPS} (KN)	F_{Exp} [۱۹]	β	2α
۲۲/۹۵	۷/۵۰	۰/۸۲	۶/۰۵	۲۲/۶۲	۷/۴۸	۰/۸۲	۶/۰۵	۲۲/۶۲	۷/۴۸	۱/۴۸	۶/۱۹	۶/۱۰	۰	۳۰
۲۴/۰۷	۷/۳۲	۰/۱۷	۵/۸۹	۲۳/۳۹	۷/۲۸	۰/۱۷	۵/۸۹	۲۱/۵۳	۷/۱۷	۲/۲۰	۶/۰۳	۵/۹۰	۵	۳۰
۱۵/۹۴	۷/۴۲	۶/۰۹	۶/۰۱	۱۵/۶۳	۷/۴۰	۶/۵۶	۵/۹۸	۱۴/۰۶	۷/۳۰	۴/۳۸	۶/۱۲	۶/۴۰	۱۰	۳۰
۱۷/۷۲	۷/۲۴	۴/۸۸	۵/۸۵	۱۷/۲۴	۷/۲۱	۵/۲۰	۵/۸۳	۱۵/۷۷	۷/۱۲	۲/۷۶	۵/۹۸	۶/۱۵	۱۵	۳۰
۳۰/۹۳	۷/۰۷	۴/۶۳	۵/۶۵	۳۰/۵۶	۷/۰۵	۵/۳۷	۵/۶۹	۲۸/۷۰	۶/۹۵	۷/۹۶	۵/۸۳	۵/۴۰	۲۰	۳۰
۱۵/۳۸	۶/۰۰	۶/۳۵	۴/۸۷	۱۵/۳۸	۶/۰۰	۶/۵۴	۴/۸۶	۱۴/۰۴	۵/۹۳	۴/۲۳	۴/۹۸	۵/۲۰	۰	۶۰
۱۸/۰۴	۶/۰۲	۴/۳۱	۴/۸۸	۱۷/۸۴	۶/۰۱	۴/۵۱	۴/۸۷	۱۷/۸۴	۶/۰۱	۲/۷۵	۴/۹۶	۵/۱۰	۵	۶۰
۱۷/۲۵	۵/۹۸	۴/۹۰	۴/۸۵	۱۷/۲۵	۵/۹۸	۴/۹۰	۴/۸۵	۱۷/۲۵	۵/۹۸	۲/۵۵	۴/۹۷	۵/۱۰	۱۰	۶۰
۱۸/۰۴	۶/۰۲	۴/۳۱	۴/۸۸	۱۸/۴۳	۶/۰۴	۴/۱۲	۴/۸۹	۱۷/۸۴	۶/۰۱	۲/۱۶	۴/۹۹	۵/۱۰	۱۵	۶۰
۱۵/۱۹	۶/۲۲	۲/۵۹	۵/۲۶	۱۷/۴۱	۶/۳۴	۴/۸۱	۵/۱۴	۱۶/۴۸	۶/۲۹	۲/۹۶	۵/۲۴	۵/۴۰	۲۵	۶۰
۱۸/۰۰	۴/۱۳	۴/۵۷	۳/۳۴	۱۷/۷۱	۴/۱۲	۴/۵۷	۳/۳۴	۱۶/۸۶	۴/۰۹	۲/۰۰	۳/۴۳	۳/۵۰	۰	۹۰
۱۵/۱۴	۴/۲۶	۶/۷۶	۳/۴۵	۱۴/۸۶	۴/۲۵	۷/۵۷	۳/۴۲	۱۴/۵۹	۴/۲۴	۵/۱۴	۳/۵۱	۳/۷۰	۵	۹۰
۱۱/۷۹	۴/۳۶	۱۰/۰۰	۳/۵۱	۱۱/۰۳	۴/۳۳	۱۰/۲۶	۳/۵۰	۹/۷۴	۴/۲۸	۸/۹۷	۳/۵۵	۳/۹۰	۱۰	۹۰
۲۲/۰۹	۵/۲۵	۲/۵۶	۴/۱۹	۲۱/۴۰	۵/۲۲	۲/۷۹	۴/۱۸	۲۱/۴۰	۵/۲۲	۰/۲۳	۴/۲۹	۴/۳۰	۲۰	۹۰
۲۱/۳۳	۵/۴۶	۰/۸۹	۴/۴۶	۲۱/۵۶	۵/۴۷	۱/۵۶	۴/۴۳	۱۹/۵۶	۵/۳۸	۰/۶۷	۴/۵۳	۴/۵۰	۲۵	۹۰

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش ابتدا، به منظور بررسی مکانیزم جواهر زنی و رشد ترک در مواد ترد، از روش اجزاء محدود توسعه یافته استفاده شد. سپس، مدل های آسیب بر مبنای مدل های ناحیه چسبیده به عنوان معیار ایجاد و رشد ترک در نظر گرفته شدند. در ادامه، با استفاده از نرم افزار ABAQUS، تعدادی از مسائل آزمون شبیه سازی گردیده، مناطق آسیب دیده و بحرانی در آنها پیش بینی شد. در آخر، نتایج حاصل از شبیه سازی های عددی با نتایج تجربی و تئوری مقایسه و اعتبارسنجی گردید. نتایج به دست آمده از شبیه سازی ها آشکار نمود که معیارهای تنش از دقت قابل قبول تری نسبت به معیارهای کرنشی در محاسبه نیروی شکست و زاویه ایجاد ترک برخوردار می باشند.

جدول ۶- نتایج زاویه ایجاد ترک پیش بینی شده توسط معیارهای حداکثر تنش اصلی و حداکثر کرنش اصلی با نتایج آزمون تجربی [۱۹]

$\%Err$	θ_{MPE}	$\%Err$	θ_{MPS}	θ_{Exp}	β	2α
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳۰
۴۸/۰۲	۱۳/۸۱	۸/۹۰	۸/۵۰	۹/۳۳	۵	۳۰
۳۹/۱۲	۲۶/۰۳	۱۲/۸۳	۱۶/۳۱	۱۸/۷۱	۱۰	۳۰
۲۵/۶۰	۳۵/۲۸	۲/۷۴	۲۷/۳۲	۲۸/۰۹	۱۵	۳۰
۱/۲۳	۳۷/۹۴	۶/۳۰	۳۵/۱۲	۳۷/۴۸	۲۰	۳۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۶۰
۴۷/۵۹	۱۱/۰۱	۹/۱۲	۸/۱۴	۷/۴۶	۵	۶۰
۵۱/۶۶	۲۸/۳۹	۰/۲۷	۱۸/۶۷	۱۸/۷۲	۱۰	۶۰
۳۸/۸۵	۳۶/۴۲	۱۱/۲۱	۲۹/۱۷	۲۶/۲۳	۱۵	۶۰
۵/۳۳	۴۲/۵۹	۱۰/۵۸	۴۰/۲۳	۴۴/۹۹	۲۵	۶۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۹۰
۴۳/۴۵	۱۲/۰۵	۹/۵۲	۹/۲۰	۸/۴۰	۵	۹۰
۷۶/۲۶	۲۹/۷۰	۷/۱۲	۱۸/۰۵	۱۶/۸۵	۱۰	۹۰
۲۷/۶۸	۳۵/۸۹	۰/۶۴	۲۸/۲۹	۲۸/۱۱	۲۰	۹۰
۲۰/۴۲	۴۰/۶۳	۸/۰۳	۳۶/۴۵	۳۳/۷۴	۲۵	۹۰

notched polycrystalline graphite under tensile-shear loading, *Materials Science Engineering*, Vol. 528, pp. 5685-5695, 2011.

۶- مراجع

- [1] Griffith A.A., The phenomenon of rupture and flow in solids, *philosophical transactions*, Vol. 221, pp. 163-198, 1920.
- [2] Irwin G.R., Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate, *Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 109-114, 1957.
- [3] Rice J.R., Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack, *Applied Mechanics Transactions* Vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- [4] Barenblatt G., The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, *Advances in Applied Mechechanics*, Vol. 7, pp. 55-129, 1962.
- [5] Hillerborg A., Modeer M., Petersson P., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
- [6] Carter B.J., Lajtai E.Z., Ayari M.L., Criteria for brittle fracture in compression, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, pp. 59-74, 1990.
- [7] Fischer K.F., Review of brittle fracture criteria in case of static and cyclic mixed mode loading, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 1, pp. 117-131, 1984.
- [8] Belytschko T., Black T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Numerical Method in Engineering*, Vol. 45, pp. 601-620, 1999.
- [9] Kurek M., Walat K., Ogonowski C., Lagoda T., The multiaxial random fatigue criteria based on strain and energy damage parameters on the critical plane for the low-cycle range, *International Journal of Fatigue*, Vol. 37, pp. 100-111, 2012.
- [10] Torabi A.R., Pirhadi E., Stress-based criteria for brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading, *European Journal of Mechanics and Solids*, Vol. 49, pp. 1-12, 2014.
- [11] Torabi A.R., Firoozabadi M., Ayatollahi M.R., Brittle fracture analysis of blunt V-notches under compression, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 67-68, pp. 219-230, 2015.
- [12] Saboori B., Ayatollahi M.R., Torabi A.R., Berto F., Mixed mode I/III brittle fracture in round-tip V-notches, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 83, pp. 135-151, 2016.
- [13] Moes N., Dolbow J., Belytschko T., A finite element method for crack growth without remeshing, *Numerical Method in Engineering*, Vol. 149, pp. 131-150, 1999.
- [14] Mohammadi B., Salimi-Majd D., Ali-Bakhshi M.H., Analysis of composite skin/stringer debonding and failure under static loading using cohesive zone model, *Mechanical Engineering of Modares*, Vol. 14, pp. 17-25, 2014. (In persian)
- [15] ABAQUS6.14 Help Documentation. ABAQUS theory manual.
- [16] Salimi-Majd D., Investigation of delamination in laminated composites under fatigue loading using the cohesive interface element, *Msc thesis, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology*, 2013. (In persian)
- [17] Balzani C., Wagner W., An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 2597-2615, 2008.
- [18] Lazzarin P., Berto F., Ayatollahi A.R., Brittle failure of inclined key-hole notches in isostatic graphite under in-Plane mixed mode loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 36, pp. 942-955, 2013.
- [19] Berto F., Ayatollahi M.R., Fracture assessment of brazilian disc specimens weakened by blunt V-notches under mixed mode loading by mean of local energy, *Materials and Design*, Vol. 32, pp. 2858-2869, 2011.
- [20] Ayatollahi M.R., Torabi A.R., Failure assessment of