

بهینه‌سازی چند هدفه کسر حجمی صفحات تابعی مدرج پلکانی تحت بارگذاری دو محوره برای بیشینه بار کمانش و کمینه وزن

حسن بیگلری*
پریسا اکبری آذر
علیرضا نعمتی

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

در این مقاله، بهینه‌سازی چند هدفه کسر حجمی صفحه تابعی مدرج پلکانی برای افزایش بار کمانش بحرانی و کاهش وزن سازه تحت بار دو محوره بررسی می‌شود. منظور از صفحه تابعی مدرج پلکانی، صفحه‌ای است که مشخصات مواد در راستای ضخامت بصورت یک تابع پیوسته تغییر نمی‌کند؛ بلکه بصورت پلکانی در لایه‌های متوالی تغییر می‌کند. هدف مساله بهینه‌سازی حداکثر بار کمانش بحرانی الاستیک و کمینه کردن وزن صفحه است. بدین منظور روش مجموع توابع هدف وزن‌دار به کار گرفته شده است. متغیر طراحی کسر حجمی است که در تمام لایه‌های مجاور متفاوت است. برای فرمول‌بندی تحلیل کمانش صفحه تابعی مدرج از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. روش ترکیب فازی الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی تجمع ذرات برای بهینه‌سازی کسر حجمی در لایه‌های مختلف به کار گرفته شده است. نتایج عددی برای صفحه تابعی مدرج پلکانی با صفحه تمام تابعی مدرج که از قانون توانی ساده با شاخص توانی بهینه تبعیت می‌کند، مقایسه شده است. در انتها، اثر فاکتورهای وزنی، شرایط مرزی، تعداد لایه‌ها، نسبت طول به عرض، نسبت بار و نسبت عرض به ضخامت صفحه روی طراحی بهینه بررسی شده است. نشان داده خواهد شد که بکارگیری صفحه تابعی مدرج پلکانی می‌تواند طراحی بهینه‌تری نسبت به صفحه تابعی مدرج پیوسته باشد.

واژه‌های کلیدی: صفحات تابعی مدرج پلکانی، بار بحرانی کمانش، ترکیب فازی الگوریتم ژنتیک-تجمع ذرات، آنالیز پایداری، طراحی بهینه.

Multi Objective Optimization of Volume Fraction of Step-formed Functionally Graded Plates under Biaxial Loading for Maximum Buckling Loads and Minimum Weight

H. Biglari
P. Akbari Azar
A. Nemati

Mechanical Engineering Department, University of Tabriz, Tabriz, Iran,
Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

In this paper, multi objective optimization of volume fraction of step-formed functionally graded plate under biaxial loading is studied for increasing critical buckling load and decreasing structure weight. In step-formed functionally graded plates, material properties aren't changed as continuous function in thickness direction; rather are changed as step by step at consecutive layers. The purposes of optimization problem are maximization of elastic critical buckling load and minimization of total weight of plate. The weighted sum method is employed for this purpose, considering the design variable as volume fraction that is various in adjacent layers. First order shear deformation theory is used for formulating the buckling analysis of functionally graded plate. Fuzzy combination of genetic algorithm and particle swarm optimization methods is applied for optimizing the volume fraction in different layers. Numerical results for step-formed functionally graded plate are compared with fully functionally graded plate that follows from simple power law with optimal power factor. Finally, effect of weighting factors, boundary conditions, number of layers, aspect ratio, load ratio, and width-to-thickness ratio are considered. It will be showed that applying design of step-formed functionally graded plate is better than continuous fully functionally graded plate.

Keywords: Step-formed functionally graded plate, Critical buckling load, Fuzzy combination of genetic algorithm-particle swarm optimization, optimal design.

۱- مقدمه

تشکیل‌دهنده آنها بدست می‌آید. مواد سازنده این صفحات معمولاً از سرامیک و فلز تشکیل شده‌اند. مواد سازنده این صفحات معمولاً از سرامیک و فلز تشکیل شده‌اند. صفحه تابعی مدرج پلکانی، صفحه تابعی مدرج است که از تعداد متعددی لایه همگن تشکیل شده است که هر لایه دارای کسر حجمی متفاوتی از اجزای سازنده نسبت به لایه مجاور خود می‌باشد. این صفحات معمولاً تحت بارهای گرمایی و مکانیکی رفتار مناسبی دارند.

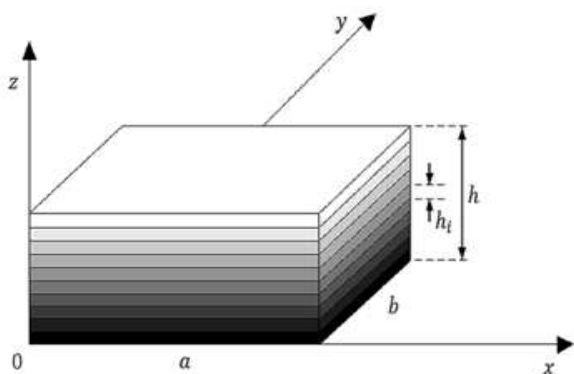
نیاز بشر برای یافتن موادی که دارای ویژگی‌های بهتری نسبت به مواد مونوکلینیک و مرکب موجود در صنایع بودند، دانشمندان را به سمت تولید مواد تابعی مدرج هدایت نمود. مواد تابعی مدرج مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگنی می‌باشند که خواص مکانیکی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hbiglari@tabrizu.ac.ir

۲- مدل سازی صفحات تابعی مدرج پلکانی

جزئیات مربوط به فرمول‌نویسی صفحات تابعی مدرج پلکانی در این بخش شرح داده شده است. شکل ۱ هندسه صفحه تابعی مدرج پلکانی به طول a ، عرض b و ضخامت h را نشان می‌دهد که در جهت ضخامت لایه لایه است. در این شکل، n و h_i تعداد لایه‌ها و ضخامت لایه i ام است.

در هر کدام از لایه‌های صفحات تابعی مدرج پلکانی درصد سرامیک و فلز متفاوت از یکدیگر است. V_{ci} و V_{mi} به ترتیب کسر حجمی فلز و سرامیک در لایه i ام را نشان می‌دهند.



شکل ۱- هندسه صفحه تابعی مدرج پلکانی

خواص ماده (P) از قبیل مدول الاستیسیته E ، ضریب انبساط گرمایی α و نسبت پواسون ν ، طبق قانون خطی مخلوطها از رابطه (۱) پیروی می‌کنند:

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (1)$$

که زیروند m مربوط به فلز و زیروند c ، مربوط به سرامیک است.

فرضیات اساسی مورد استفاده در صفحه بصورت زیر است:

۱- خیز ورق در مقایسه با ضخامت آن ناچیز است.

۲- تنش σ_z در مقایسه با σ_x و σ_y قابل صرف نظر است.

بر اساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول، جابجایی‌ها به شکل زیر بیان می‌شوند [۹]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن u_0 ، v_0 و w_0 جابجایی‌ها در صفحه میانی ورق در راستای x ، y و z ، ψ_x ، ψ_y زوایای چرخش حول محورهای x ، y هستند. روابط کرنش-جابجایی خطی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \epsilon_0 + \kappa z \quad (3)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = \gamma_0$$

که در آن ϵ_0 ، γ_0 کرنش غشایی و κ کرنش خمشی عبارتند از:

تحلیل پایداری صفحات تابعی مدرج در سال‌های اخیر جزو اساسی‌ترین مشکلات این صنعت بوده و مطالعات بسیاری در این زمینه انجام گرفته است.

فلدمن و ابودی [۱] تحلیل پایداری الاستیک صفحات تابعی مدرج تحت بار محوری را انجام دادند. آنان توزیع فضایی بهینه کسر حجمی برای افزایش مقاومت در برابر کمناش را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای تحلیل مسئله مورد نظر خود از یک روش بر اساس ترکیب روندهای میکرومکانیکی و ساختاری استفاده کردند.

وو و همکارانش [۲] حل تحلیلی برای رفتار پس از کمناش صفحات و پوسته‌های تابعی مدرج نسبتاً ضخیم تحت بار گرمایی و مکانیکی را ارائه کردند. آنها برای به دست آوردن معادلات حاکم بر مساله، نظریه وون کارمن برای تغییر شکل‌های بزرگ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا را به کار گرفتند. جواهری و اسلامی [۳] کمناش صفحات تابعی مدرج مستطیلی تحت بارهای درون صفحه‌ای حرارتی و مکانیکی بر اساس تئوری‌های تغییر شکل مرتبه بالا و کلاسیک را ارائه کردند. نجفی زاده و اسلامی [۴] کمناش صفحات تابعی مدرج دایروی با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت بار گرمایی یا حرارتی را بررسی کردند و معادلات را بر طبق فرضیه لاو-کیرشیف و رابطه کرنش-تغییر شکل غیر خطی ساندروز به دست آوردند. دو گوانگ ژانگ و ها میاو [۵] تحلیل پس از کمناش مکانیکی و حرارتی صفحات تابعی مدرج مستطیلی بر روی بستر الاستیک غیر خطی را توسط نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا بررسی کردند. حل‌های تقریبی این صفحات با استفاده از روش ریتز ارائه شدند. در این کار همچنین اثر کسر حجمی، شرایط مرزی مختلف، سفتی بستر الاستیک و شرایط محیطی دمایی مورد بررسی قرار گرفت.

در سالهای اخیر، بهینه‌سازی صفحات تابعی مدرج در بسیاری از شاخه‌های مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. اتو و همکارانش [۶] روش الگوریتم ژنتیک برای کمینه کردن تنش‌های حرارتی را برای صفحات تابعی مدرج پلکانی بکار بردند. چو و شین [۷] ترکیب مواد برای تقویت مقاومت گرمایی صفحات تابعی مدرج را توسط شبکه‌های عصبی مصنوعی بهینه کردند. کیانگ سونا و جی هوان کیم [۸] تحلیل تنش تحت بار مکانیکی، رفتار کمناش ترمومکانیکی و طراحی بهینه صفحات تابعی مدرج پلکانی را بررسی کرده‌اند.

در این مقاله، از ترکیب فازی الگوریتم ژنتیک و الگوریتم تجمع ذرات برای بهینه‌سازی چند هدفه ظرفیت کمناش و وزن صفحه تابعی مدرج پلکانی تحت بارگذاری دو محوری استفاده شده است. هدف طراحی بهینه رسیدن به حداقل وزن و حداکثر ظرفیت بار کمناش ممکن است. در این راستا، ابتدا مدل‌سازی تحلیل پایداری صفحات تابعی مدرج پلکانی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات بیان می‌شود. سپس مرور خلاصه‌ای بر الگوریتم مورد استفاده ارائه می‌شود و فرمول‌بندی مساله برای بهینه‌سازی کسر حجمی صورت می‌گیرد. در نهایت، نتایج عددی حاصل از این کار و مقایسه آنها با صفحات تابعی مدرج پیوسته، اثر فاکتور وزنی، شرایط مرزی، تعداد لایه‌ها، نسبت طول به عرض، نسبت بار دو محوره و نسبت طول به ضخامت بر روی طراحی بهینه صفحات تابعی مدرج بررسی خواهد شد.

که در آن D سفتی خمشی معادل صفحه تابعی مدرج بصورت زیر است [۸]:

$$D = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)}$$

$$E_1 = E_m h + \frac{(E_c - E_m) h}{n - 1}$$

$$E_2 = (E_c - E_m) h^2 \left(\frac{1}{n + 2} + \frac{1}{2n + 2} \right) \quad (10)$$

$$E_3 = \frac{E_m h^3}{12} + (E_c - E_m) \frac{h^2}{12} \times \left(\frac{1}{n + 3} - \frac{1}{n + 2} + \frac{1}{4(n + 1)} \right)$$

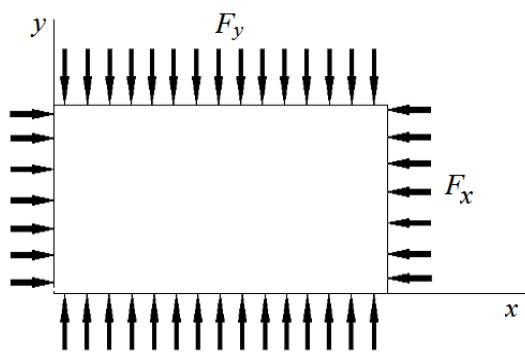
در ادامه، حل برای صفحه تابعی مدرج تحت بارگذاری دو محوره مطابق شکل ۲، پیش برده می‌شود. مقادیر بار بحرانی F_y و F_x در بارگذاری دو محوره بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_x = -\frac{F_x}{b}, N_y = -\frac{F_y}{a}, N_{xy} = 0, \frac{N_y}{b} = R \frac{N_x}{a} \quad (11)$$

که R یک ثابت بی‌بعد است. معادله (۹) را می‌توان برای نسبت بارهای مختلف R حل کرد. شکل کلی بار بحرانی به شکل زیر در می‌آید [۱۰]:

$$F_x = K_{cc} \frac{\Pi^2 D}{b}, K_{cc} = \frac{\left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + Rn^2} \quad (12)$$

که m, n شماره مود کماتش است. مقدار K_{cc} در رابطه (۱۲) مربوط به شرایط مرزی چهار لبه تکیه‌گاه ساده است. برای انواع شرایط مرزی ورق، مقدار K_{cc} در مراجع معتبر موجود است [۱۴].



شکل ۲- صفحه تحت بارگذاری دو محوره

۳- روش ترکیب فازی الگوریتم ژنتیک-بهینه‌سازی تجمع ذرات

الگوریتم مورد استفاده در این مقاله برای بهینه‌سازی، ترکیبی فازی از الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی تجمع ذرات است [۱۵]. در این الگوریتم، الگوریتم ژنتیک شامل عملگرهای تقاطع سنتی، چند وجهی و جهش

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \gamma_0 = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

معادلات اساسی تنش-کرنش به فرم زیر می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که در آن، Q_{ij} ثابت‌های سفتی الاستیک بصورت زیر می‌باشند:

$$Q_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, Q_{12} = \nu Q_{11}, Q_{22} = Q_{11} \quad (6)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1 - \nu)}$$

خواص موثر صفحه در راستای ضخامت متغیر هستند. بنابراین ضرایب الاستیک Q_{ij} تابعی از z هستند. برآیند نیروهای داخل صفحه‌ای، گشتاورها و نیروهای برشی جانبی طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$N = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

$$M = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (7)$$

$$Q_s = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz$$

معادلات تعادل استاتیکی صفحات تابعی مدرج به فرم معادله (۸) می‌باشند [۵]:

$$N_{x,xx} + 2N_{xy,xy} + N_{y,yy} = 0$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = 0 \quad (8)$$

$$N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} + q = 0$$

با قرار دادن معادلات (۷) در روابط (۸)، معادله حاکم بر خیز جانبی صفحه تحت اثر نیروهای داخل صفحه‌ای به صورت زیر درمی‌آید:

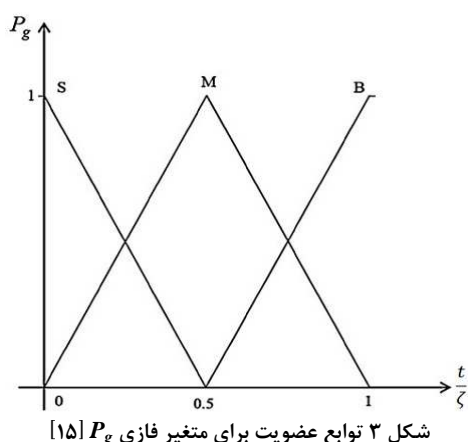
$$D \nabla^4 w - N_x w_{,xx} - 2N_{xy} w_{,xy} - N_y w_{,yy} - q = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_{ic} &= \xi_{ic} \times P_g \\ P_{mc} &= \xi_{mc} \times P_g \\ P_m &= \xi_m \times L \end{aligned} \quad (17)$$

که ξ_m ، ξ_{mc} و ξ_{ic} ثوابت مثبت هستند. P_g یک متغیر فازی است و توابع عضویت و قوانین فازی آن در شکل ۳ و جدول ۱ ارائه شده است. L برای هر ذره از جمعیت، نشان دهنده تعداد تکرارهایی است که در آن، موقعیت ذره بدون تغییر باقی مانده است.

جدول ۱- قوانین فازی برای متغیر فازی P_g (بی نازنین ۱۰)

متغیر پیشین	متغیر پی آمد
S	۰٫۰
M	۰٫۵
B	۱٫۰



۴- فرمول‌بندی مساله بهینه‌سازی

در کار حاضر، بهینه‌سازی کسر حجمی برای نسبت بارگذاری (R)، ضخامت (h_i) و پارامترهای هندسی مختلف صفحه تابعی مدرج بررسی می‌شود. بعلاوه، اثر تعداد لایه‌ها (m) بر طراحی بهینه صفحه تابعی مدرج پلکانی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. یکی از اهداف بهینه‌سازی در این مقاله رسیدن به حداقل وزن صفحه است.

وزن لایه i ام در صفحات تابعی مدرج پلکانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$w_i = \rho_i h_i a b \quad (18)$$

که در آن ρ_i طبق قانون خطی مخلوط‌ها به فرم زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_m V_{mi} + \rho_c V_{ci} \\ V_{mi} &= 1 - V_{ci} \end{aligned} \quad (19)$$

که ρ_m ، ρ_c ، V_{ci} و V_{mi} به ترتیب چگالی فلز، چگالی سرامیک، کسر حجمی فلز و کسر حجمی سرامیک هستند. وزن کل صفحه تابعی مدرج پلکانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \quad (20)$$

می‌باشد که بطور فازی با بهینه‌سازی تجمع ذرات ترکیب شده است. جزئیات این الگوریتم در ادامه بطور خلاصه شرح داده شده است.

۳-۱- عملگرهای الگوریتم ژنتیک

در عملگر تقاطع سنتی با انتخاب دو کروموزوم $x_i(t)$ و $x_j(t)$ بطور تصادفی از جمعیت و با فرض اینکه مقدار $x_i(t)$ کوچکتر از $x_j(t)$ باشد، فرزندان حاصل از این دو کروموزوم توسط روابط زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(t+1) &= \bar{x}_i(t) + \gamma_1 (\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)) \\ \bar{x}_j(t+1) &= \bar{x}_j(t) + \gamma_2 (\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

که γ_1 و γ_2 اعداد تصادفی بین ۰ و ۱ هستند.

عملگر تقاطع چند وجهی که در این الگوریتم استفاده شده است، شامل سه کروموزوم $x_i(t)$ ، $x_j(t)$ و $x_k(t)$ است که بطور تصادفی انتخاب می‌شوند. چنانچه $x_i(t)$ کوچکترین مقدار را دارا باشد، رابطه این عملگر بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(t+1) &= \bar{x}_i(t) + \lambda_1 (2\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t) - \bar{x}_k(t)) \\ \bar{x}_j(t+1) &= \bar{x}_j(t) + \lambda_2 (2\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t) - \bar{x}_k(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

که λ_1 ، λ_2 و λ_3 مقادیر تصادفی بین ۰ و ۱ هستند.

عملگر جهش با انتخاب $x_i(t)$ بطور تصادفی، برآزش این کروموزوم را بطور ناگهانی بصورت زیر تغییر می‌دهد:

$$\bar{x}_i(t+1) = \bar{x}_{min}(t) + v(\bar{x}_{max}(t) - \bar{x}_{min}(t)) \quad (15)$$

که x_{min} و x_{max} به ترتیب مربوط به ابتدا و انتهای دامنه جستجو هستند و مقدار تصادفی بین ۰ و ۱ است.

۳-۲- وزن اینرسی و ضرایب شتاب در الگوریتم

بهینه‌سازی تجمع ذرات

وزن اینرسی w و ضرایب شتاب C_1 و C_2 در الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات بکار گرفته شده در کار حاضر، توسط روابط زیر به روز رسانی می‌شوند:

$$\begin{aligned} w &= w_1 - (w_1 - w_2) \frac{t}{\xi} \\ C_1 &= C_{1i} - (C_{1i} - C_{1f}) \frac{t}{\xi} \\ C_2 &= C_{2i} - (C_{2i} - C_{2f}) \frac{t}{\xi} \end{aligned} \quad (16)$$

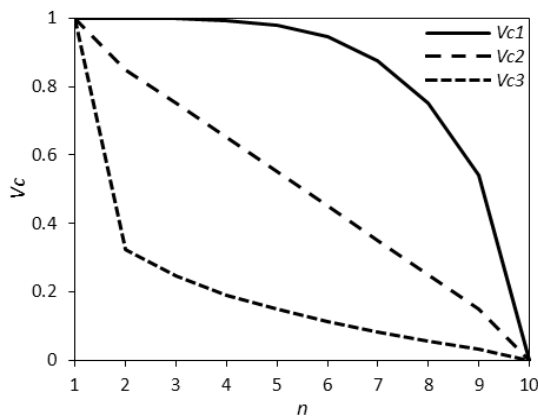
که w_1 ، w_2 ، C_{1i} ، C_{1f} ، C_{2i} و C_{2f} همگی ثابت هستند. w_1 ، w_2 مقادیر ابتدایی و نهایی w ، C_{1i} ، C_{1f} مقادیر ابتدایی و نهایی C_1 و C_{2i} ، C_{2f} مقادیر ابتدایی و نهایی C_2 می‌باشند. t شماره تکرار کنونی و ξ مقدار بیشینه تکرار را نشان می‌دهد.

۳-۳- تعیین احتمالات

احتمال وقوع عملگرهای تقاطع سنتی (P_{ic})، چند وجهی (P_{mc}) و جهش (P_m) در هر تکرار عبارتند از:

جدول ۲- کسر حجمی سرامیک برای صفحات تابعی مدرج پلکانی

شماره لایه	V_{c1}	V_{c2}	V_{c3}
۱	۱	۱	۱
۲	۰/۹۹۹۸	۰/۸۵	۰/۳۲۲
۳	۰/۹۹۹۰	۰/۷۵	۰/۲۴۵
۴	۰/۹۹۴	۰/۶۵	۰/۱۹۱
۵	۰/۹۷۹	۰/۵۵	۰/۱۴۸
۶	۰/۹۴۵	۰/۴۵	۰/۱۱۳
۷	۰/۸۷۷	۰/۳۵	۰/۰۸۳
۸	۰/۷۵۲	۰/۲۵	۰/۰۵۶
۹	۰/۵۴۱	۰/۱۵	۰/۰۳۲
۱۰	۰	۰	۰



شکل ۴- چند الگوی مختلف کسر حجمی صفحات تابعی مدرج پلکانی

۵-۱- بهینه‌سازی کسر حجمی

در این بخش، توزیع کسر حجمی بهینه سرامیک V_c در لایه‌های صفحه تابعی مدرج پلکانی برای بیشینه شدن بار کمانش و کمینه کردن وزن تعیین می‌شود. طبق معادله (۲۲) مساله طراحی بهینه به شکل زیر بیان می‌شود:

$$f(X_d) = w^* - kP^*, \quad X_d = V_c \quad (24)$$

$$0, (V_c)_i, 1, i = 1, 2, \dots, 10$$

مقادیر بهینه $(V_c)_i$ با دقت 0.001 با استفاده از روش ترکیب فازی الگوریتم ژنتیک-بهینه سازی تجمع ذرات به دست آمده‌اند. در بخش‌های بعدی، اثر پارامترهای مختلف بر روی طراحی بهینه بررسی شده‌اند. تمامی مقادیر بهینه توسط این الگوریتم با پنج تکرار بدست آمده‌اند. بعلاوه تمامی نتایج بصورت میانگین برای صد بار اجرا محاسبه شده‌اند.

جدول ۳- بار بحرانی کمانش P_{cr} (MN) صفحه تابعی مدرج پلکانی برای نسبت لاغری‌های مختلف (a/h)

a/h	V_c		
	۱۰۰	۷۰	۴۰
۶/۶۱۵	۹/۴۵۱	۱۶/۵۳۹	V_{c3}
۷/۰۱۵	۱۰/۰۲۲	۱۷/۵۳۹	V_{c2}
۷/۴۵۵	۱۰/۶۵۰	۱۸/۶۳۸	V_{c1}

که در آن n تعداد لایه‌ها را نشان می‌دهد. در همه محاسبات، از کمیت‌های بی‌بعد زیر استفاده می‌شود:

$$w^* = \frac{w}{w_c}, \quad P^* = \frac{P_{cr}}{P_{cr_c}} \quad (21)$$

که w_c و P_{cr_c} وزن و بار بحرانی به ازای $V_c=1$ (صفحه تمام سرامیکی) می‌باشد. هدف الگوریتم بهینه‌سازی، کمینه کردن وزن سازه w^* و بیشینه کردن بار بحرانی P^* می‌باشد. به همین دلیل، تابع چند هدفه به شکل معادله (۲۲) تعریف می‌شود و هدف کمینه کردن این تابع است [۱۶]:

$$f(X_d) = w^* - kP^* \quad (22)$$

X_d و k به ترتیب متغیر طراحی و ضریب وزنی می‌باشد. با افزایش اهمیت بار بحرانی و با کاهش آن اهمیت وزن در بهینه‌سازی بیشتر می‌شود.

۵- نتایج عددی و مقایسات

در این بخش، یک صفحه تابعی مدرج سرامیک-فلز برای انجام مطالعات عددی انتخاب شده است که ترکیب مواد آن شامل آلومینیوم و اکسید آلومینیوم است. مدول یانگ و چگالی آلومینیوم و اکسید آلومینیوم به ترتیب $E_m=70$ GPa, $E_c=380$ GPa, $\rho_m=2750$ kg/m³ و $\rho_c=3420$ kg/m³ است. صفحه مورد بررسی دارای نسبت طول به عرض $a/b=2$ نسبت طول به ضخامت $a/h=70$ و نسبت بار $R=1$ بوده و متشکل از ۱۰ لایه با ضخامت برابر می‌باشد.

پارامترهای ثابت بکار گرفته شده در الگوریتم بهینه‌سازی مساله مورد نظر بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$(23)$$

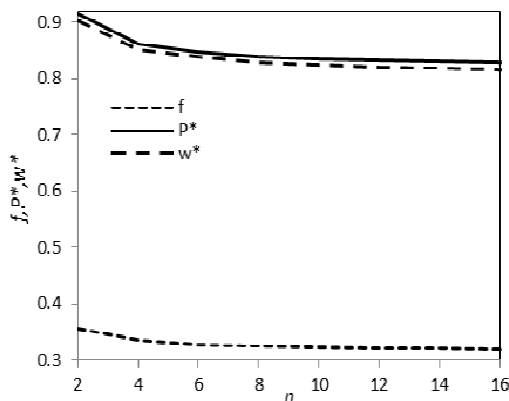
$$w_1 = 0.9, \quad w_2 = 0.4$$

$$C_{1i} = C_{2f} = 2.5, \quad C_{1f} = C_{2i} = 0.5$$

$$\xi_{tc} = \xi_{mc} = 0.2, \quad \xi_m = 0.001$$

جدول ۲ سه حالت مختلف V_c مورد بررسی برای لایه‌های صفحه تابعی مدرج را نشان می‌دهد. V_{c1}, V_{c2}, V_{c3} به ترتیب نشانگر صفحه با سرامیک بیشتر، سرامیک و فلز برابر و فلز بیشتر هستند. شکل ۴ نمودار چیدمان کسر حجمی سرامیک سه نمونه را نشان می‌دهد. با توجه به چگالی بیشتر سرامیک نسبت به فلز، می‌توان دریافت V_{c1} بیشترین و V_{c3} کمترین مقادیر وزن را دارا هستند. از طرفی با توجه به آنکه مدول الاستیک سرامیک بیشتر از فلز است، لذا بار بحرانی کمانش برای حالت V_{c1} بیشینه و برای حالت V_{c3} کمینه می‌باشد. بنابراین پیش رفتن کسر حجمی لایه‌ها به سمت سرامیک بیشتر، باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود. اما در این شرایط وزن نیز افزایش یافته که امری نامطلوب می‌باشد.

تغییرات بار بحرانی برای نسبت لاغری‌های مختلف صفحه (a/h) برای سه حالت V_c در جدول ۳ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش a/h بار بحرانی به شدت کاهش می‌یابد. بار بحرانی کمانش برای حالت V_{c1} و V_{c3} به ترتیب، بیشترین و کمترین مقادیر را دارد.



شکل ۶- مقادیر بی بعد f ، P^* و W^* به ازای تعداد لایه های مختلف

جدول ۵ مقادیر توزیع کسر حجمی سرامیک V_c بهینه در لایه‌های مختلف صفحه تابعی مدرج پلکانی برای تعداد لایه‌های مختلف را ارائه می‌کند. با توجه به اعداد جدول ۵، با افزایش تعداد لایه‌ها درصد سرامیک لایه‌ها با شیب ملایم‌تری افزایش می‌یابد.

جدول ۵- مقادیر کسر حجمی سرامیک V_c بهینه در لایه‌های مختلف صفحه تابعی مدرج پلکانی برای تعداد لایه مختلف

n	۲	۶	۱۰	۱۲	۱۴
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۳		۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۴		۰/۰۰۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱
۵		۰/۰۰۶	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲
۶		۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۲
۷			۰/۰۰۴	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳
۸			۰/۰۰۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۳
۹			۰/۰۱	۰/۰۰۶	۰/۰۰۴
۱۰			۱	۰/۰۰۸	۰/۰۰۵
۱۱				۰/۰۱۲	۰/۰۰۶
۱۲				۱	۰/۰۱۰
۱۳					۰/۰۱۸
۱۴					۱

۵-۳- اثر انواع شرایط مرزی روی طراحی بهینه

در جدول ۶، بار بحرانی کمناش و وزن بهینه صفحه تابعی مدرج پلکانی بهینه با بار بحرانی صفحه سرامیکی خالص ($V_c=1$) و صفحه فلزی خالص ($V_c=0$) برای انواع شرایط مرزی مقایسه شده‌اند. طبق نتایج جدول ۶، بار بحرانی کمناش صفحه تابعی مدرج پلکانی بهینه با داشتن تعدادی لایه حاوی درصدی سرامیک، بسیار نزدیک به بار بحرانی کمناش صفحه سرامیکی خالص است. در حالیکه وزن صفحه تابعی مدرج پلکانی بهینه در حدود وزن صفحه تمام آلومینیومی است. بیشینه و کمینه بار بحرانی کمناش مربوط به شرایط مرزی CCCC (همه‌ی لبه‌ها گیردار) و SSSF (سه لبه ساده و یک لبه گیردار) می‌باشد. وزن سازه در شرایط مرزی مختلف فرقی نمی‌کند. وزن در

در شکل ۵ تاثیر ضرایب وزنی مختلف روی طراحی بهینه برای یک صفحه مستطیلی با تعداد ده لایه ($n=70$) و نسبت لاغری $a/h=70$ به ازای فاکتورهای وزنی 0.3 ، 0.6 و 1 بررسی شده است. همانطور که در شکل مشخص است، با افزایش k و بیشتر شدن اهمیت بار بحرانی کمناش در بهینه‌سازی، درصد سرامیک موجود در صفحه افزایش یافته است که این باعث افزایش وزن سازه نیز می‌شود. برای w بزرگتر از واحد، درصد سرامیک به شدت افزایش می‌یابد. به طوری که افزایش ظرفیت بار کمناش در مقابل افزایش وزن مقدار قابل توجهی نیست. بنابراین مقادیر کمتر از ۱ پیشنهاد می‌شوند.

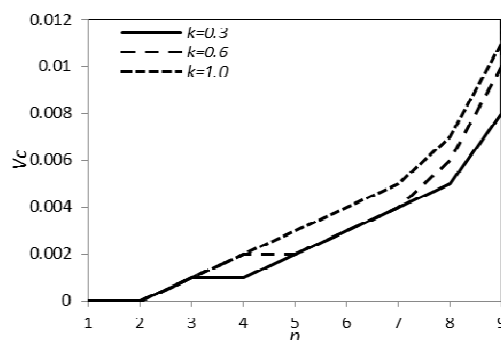
در جدول ۴، مقادیر تابع هدف f ، بار کمناش بی‌بعد (P^*) و وزن بی‌بعد (W^*) صفحه تابعی مدرج پلکانی بهینه‌یابی شده به ازاء مقادیر مختلف فاکتور وزنی (k) ارائه شده است. با توجه به جدول ۴، با افزایش فاکتور وزنی و اهمیت یافتن بار بحرانی کمناش، کسر حجمی سرامیک در لایه‌ها افزایش یافته، لذا مقدار ظرفیت بار بحرانی کمناش، وزن سازه و در نتیجه تابع بهینه‌سازی افزایش می‌یابند.

۵-۲- اثر تعداد لایه‌ها روی طراحی بهینه

همانطور که اشاره شد، نمونه بررسی شده در این مقاله دارای ده لایه است. در این بخش، تاثیر تعداد لایه‌ها روی طراحی بهینه برای صفحه مستطیلی با $a/h=70$ و $k=0.6$ بررسی شده است.

جدول ۴- مقادیر بهینه تابع هدف، بار کمناش بی‌بعد و وزن بی‌بعد صفحه تابعی مدرج پلکانی به ازای فاکتور وزنی مختلف

k	۰/۳	۰/۶	۱
$f(\times 10^{-3})$	۵۷۳/۷۵۹	۳۲۳/۳۹۷	-۱/۰۴۸۸
$P^*(\times 10^{-3})$	۸۳۴/۶۵۳	۸۳۴/۷۲۶	۸۳۴/۸۱۸
$w^*(\times 10^{-3})$	۸۲۴/۱۵۴	۸۲۴/۲۲۲	۸۲۴/۳۳۱



شکل ۵- کسر حجمی سرامیک (V_c) بهینه در لایه‌های مختلف صفحه تابعی مدرج به ازای فاکتور وزنی متفاوت (k)

همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد لایه‌ها مقادیر بی‌بعد f ، P^* و W^* کاهش می‌یابند. با توجه به نمودار می‌توان دریافت که از ده لایه به بعد، با افزایش تعداد لایه‌ها تغییر قابل توجهی در مقدار f ایجاد نمی‌شود. کمینه شدن f در تعداد ده لایه نشان‌دهنده‌ی وزن کمتر، بار کمناش بیشتر و برتری آن نسبت به دیگر تعداد لایه‌ها می‌باشد.

تابعی مدرج پلکانی بهینه با درصد سرامیک پایین، وزنی نزدیک به فلز و ظرفیت کماتشی شبیه به سرامیک خالص دارد.

جدول ۷- مقایسه بار بحرانی کماتش و وزن صفحه تابعی مدرج بهینه
با $(a/b=2)$ با صفحه سرامیکی و آلومینیومی خالص به ازای نسبت بار مختلف (R) و $k=0.6$

وزن (kg)	بار بحرانی کماتش (kN)			R
	تابعی مدرج	فلز خالص	سرامیک خالص	
۱۵۷۹/۶۳	۸/۴	۱/۸	۱۰/۰	۰
۱۵۷۹/۶۶	۲۰/۹	۴/۶	۲۵/۰	۰/۲۵
۱۵۷۹/۷۵	۱۳/۹	۳/۰	۱۶/۷	۰/۵۰
۱۵۷۹/۶۸	۱۰/۴	۲/۳	۱۲/۵	۰/۷۵
۱۵۷۹/۶۵	۸/۴	۱/۸	۱۰/۰	۱/۰۰
۱۵۷۹/۷۲	۷/۰	۱/۵	۸/۳	۱/۲۵
۱۵۷۹/۷۴	۶/۰	۱/۳	۷/۱	۱/۵۰

۵-۵- اثر نسبت منظر (a/b) و ضریب لاغری (a/h) روی طراحی بهینه

در جدول ۸، اثر نسبت منظر (a/b) روی ظرفیت کماتش بهینه و مقایسه با حالت صفحه آلومینیوم و سرامیک خالص ارائه شده است. با توجه به ارقام، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت منظر، میزان ظرفیت بار کماتش نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۸- مقایسه بار بحرانی و وزن صفحه تابعی مدرج بهینه با صفحه سرامیکی و فلزی خالص به ازای نسبت منظرهای مختلف و $k=0.6$ و $a/b=1$

وزن (kg)	بار بحرانی کماتش (kN)			a/b		
	تابعی مدرج	فلز خالص	سرامیک خالص			
۷۹۰	۷۷۱	۹۵۸	۱۳/۴	۳/۰	۱۶/۰	۱
۵۲۶	۵۱۴	۶۳۹	۱۴/۵	۳/۲	۱۷/۴	۱/۵
۳۹۵	۳۸۹	۴۷۹	۱۶/۷	۳/۷	۲۰/۰	۲
۳۱۶	۳۰۸	۳۸۳	۱۹/۴	۴/۳	۲۳/۲	۲/۵
۲۶۳	۲۵۷	۳۱۹	۲۲/۳	۴/۹	۲۶/۷	۳

در جدول ۹، اثر ضریب لاغری (a/h) روی ظرفیت کماتش بهینه و مقایسه با حالت صفحه آلومینیوم و سرامیک خالص ارائه شده است. با توجه به ارقام، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضریب لاغری میزان ظرفیت بار کماتش کاهش می‌یابد.

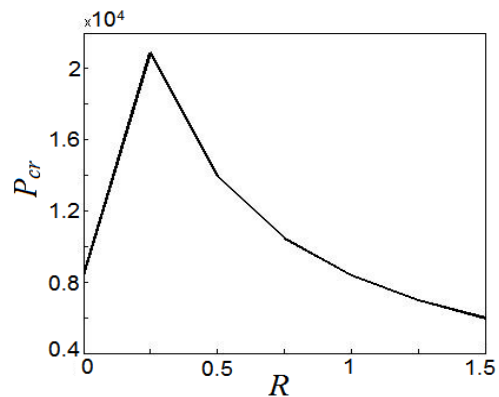
حالت سرامیک خالص، آلومینیوم خالص و تابعی مدرج پلکانی بهینه به ترتیب، ۱۹۱۷، ۱۵۴۱ و ۱۵۸۰ کیلوگرم است. بنابراین، وزن صفحه تابعی مدرج بهینه به آلومینیوم خالص نزدیک است. درحالی‌که، ظرفیت کماتش آن به ورق تمام سرامیک ارتقاء یافته است و این نتیجه مطلوبی است.

جدول ۶- مقایسه بار بحرانی و وزن بهینه صفحه تابعی مدرج بهینه با بار بحرانی مربوط به صفحه سرامیک و آلومینیوم خالص با انواع شرایط مرزی

شرایط مرزی	بار بحرانی کماتش (kN)			وزن (kg)
	سرامیک خالص	فلز خالص	تابعی مدرج	
SSSS	۳۲/۲	۵/۹	۲۶/۹	۱۵۷۹/۷۴
SCSC	۵۶/۱	۱۰/۳	۴۶/۸	۱۵۷۹/۶۳
CSCS	۳۹/۰	۷/۱	۳۲/۶	۱۵۷۹/۶۱
CCCC	۶۴/۱	۱۱/۸	۵۳/۵	۱۵۷۹/۶۸
SSSC	۴۴/۹	۸/۲	۳۷/۴	۱۵۷۹/۶۵
CCCS	۴۸/۹	۹/۰	۴۰/۷	۱۵۷۹/۶۴
CCCF	۱۵/۲	۲/۸	۱۲/۷	۱۵۷۹/۸۵
SCSF	۱۰/۰	۱/۸	۸/۴	۱۵۷۹/۶۳
SSSF	۴/۴	۰/۸	۳/۷	۱۵۷۹/۶۰
CSCF	۸/۸	۱/۶	۷/۴	۱۵۷۹/۷۴

۵-۴- اثر انواع نسبت بار روی طراحی بهینه

در این قسمت، اثر نسبت بار (R) روی ظرفیت کماتش بهینه صفحه با نسبت منظر $(a/b=2)$ و $k=0.6$ در شکل ۷ نشان داده شده است. با توجه به شکل، بیشینه ظرفیت کماتش تحت بارگذاری دو محوره، در نسبت بار $R=0.25$ رخ می‌دهد و پس از آن، ظرفیت کماتش صفحه روند نزولی خواهد داشت.



شکل ۷- اثر نسبت بار (R) روی بار کماتش بهینه صفحه تابعی مدرج با $(a/b=2)$

جدول ۷ بار بحرانی کماتش و وزن برای صفحه مدرج تابعی بهینه $(a/b=2)$ را با بار بحرانی کماتش و وزن صفحه خالص سرامیکی و آلومینیومی برای نسبت بارهای مختلف (R) مقایسه می‌کند. مجدداً، بیشینه ظرفیت کماتش مربوط به نسبت بار ۰/۲۵ می‌باشد. سپس با افزایش نسبت بار، میزان ظرفیت بار کماتش کاهش می‌یابد. صفحه

جدول ۹- مقایسه بار بحرانی و وزن بهینه با بار بحرانی و وزن صفحه سرامیک و فلز خالص به ازای نسبت منظرهای مختلف و $k=0/6$

a/h	بار بحرانی کمانش (kN)			وزن (kg)	
	سرامیک خالص	فلز خالص	تابعی مدرج	سرامیک خالص	فلز خالص
۱۰	$3/4 \times 10^6$	$6/3 \times 10^5$	$2/9 \times 10^6$	۱۳۴۱۶	۱۰۷۸۷
۳۰	$1/3 \times 10^5$	$2/3 \times 10^4$	$1/1 \times 10^5$	۴۴۷۲	۳۵۹۶
۵۰	$2/7 \times 10^4$	$5/1 \times 10^3$	$2/3 \times 10^4$	۲۶۸۳	۲۱۵۷
۷۰	$1/0 \times 10^4$	$1/8 \times 10^3$	$8/4 \times 10^3$	۱۹۱۷	۱۵۴۱
۹۰	$4/7 \times 10^3$	$8/7 \times 10^2$	$3/9 \times 10^3$	۱۴۹۱	۱۱۹۹

۵-۶- مقایسه صفحه تابعی مدرج پلکانی و پیوسته

در این بخش، طراحی بهینه برای صفحات تابعی مدرج پیوسته و پلکانی مقایسه شده است. در صفحه تابعی مدرج پیوسته، کسر حجمی از قانون توانی ساده مطابق فرمول (۲۴) به دست می‌آید:

$$V_c = (0.5 + z/h)^p \quad (24)$$

جدول ۱۰ پارامترهای بهینه صفحه مدرج تابعی پلکانی را با صفحه فلز خالص و صفحه مدرج تابعی پیوسته به ازاء شاخص توان بهینه (p) در رابطه (۲۴) مقایسه و ارزیابی می‌کند. بهینه‌سازی شاخص توان در صفحه تابعی مدرج پیوسته توسط روش ترکیب فازی الگوریتم ژنتیک- بهینه سازی تجمع ذرات انجام شده است که تنظیمات پارامترهای آن مانند تنظیمات صفحه تابعی مدرج پلکانی می‌باشد.

جدول ۱۰- مقایسه پارامترهای بهینه میان صفحه تابعی مدرج پلکانی بهینه و تابعی مدرج پیوسته بهینه و فلز خالص به ازای $k=0/6$

$w^*(\times 10^{-3})$	$P^*(\times 10^{-3})$	$f(\times 10^{-3})$	
۸۰۴/۱	۱۸۴/۲	۶۳۹/۶	فلز خالص
۹۹۸/۷	۹۹۸/۶	۴۰۰/۶	تابعی مدرج پیوسته
۸۲۴/۲	۸۳۴/۷	۳۲۳/۴	تابعی مدرج پلکانی

با مشاهده جدول ۱۰ می‌توان دریافت که کمترین مقدار w^* و P^* مربوط به صفحه فلزی و بیشترین مقدار مربوط به صفحه تابعی مدرج پیوسته است. در حالی که این مقادیر برای صفحه تابعی مدرج پلکانی حد میانه می‌باشد. برای مشخص شدن اینکه کدام صفحه طراحی بهینه‌تری را ارائه می‌دهد، مقدار تابع هدف (f) نیز در جدول ۱۰ ارائه شده است. صفحه فلزی بیشترین مقدار این پارامتر را داراست. در حالی که کمترین مقدار این پارامتر مربوط به صفحه مدرج تابعی پلکانی می‌باشد که نشان می‌دهد این نوع صفحات طراحی بهینه‌تری نسبت به صفحات تابعی مدرج پیوسته ارائه می‌دهند. علت این امر آن است که کسر حجمی در لایه‌های مختلف صفحات تابعی مدرج پلکانی، برای رسیدن به حالت بهینه می‌تواند مستقل از هم و با فواصل گسسته تغییر یابد. در حالی که در صفحات تابعی مدرج پیوسته، این قید وجود دارد که کسر حجمی لایه‌های مجاور باید بصورت پیوسته تغییر کند.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل بار کمانش با در نظر گرفتن فاکتور وزن، رفتار مکانیکی و طراحی بهینه برای صفحه تابعی مدرج پلکانی بررسی شد. برای این کار از الگوریتم ترکیب فازی ژنتیک-تجمع ذرات استفاده شد. هدف مساله بهینه‌سازی بیشینه ظرفیت کمانش و کمینه وزن صفحه بود. بدین منظور، روش مجموع توابع هدف وزن‌دار به کار گرفته شد. همچنین فرض شد که خواص مواد از قانون خطی مخلوطها پیروی می‌کنند و سازه از تعدادی لایه همگن تشکیل شده است.

برای بهینه‌سازی کسر حجمی، یک صفحه تابعی مدرج سرامیک-فلز برای انجام مطالعات انتخاب گردید که متشکل از ترکیب آلومینیوم و اکسید آلومینیوم است. ملاحظه شد در صفحه تابعی مدرج پلکانی بهینه، تعداد ده لایه مناسب بوده و ظرفیت کمانش در حد صفحه تمام سرامیکی و وزن آن در حد ورق تمام آلومینیومی است. همچنین، در مقایسه صفحات تابعی مدرج پلکانی و پیوسته، عملکرد بهتر صفحات تابعی مدرج پلکانی در حداکثر ظرفیت بار کمانش و حداقل وزن مشاهده گردید.

۷- مراجع

- [1] Feldman, E., Aboudi, J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos Struct* 38:pp 29–36,1997.
- [2] Woo, J., Merguid, S.A., Stranart, J.C., Liew, K.M. Thermomechanical postbuckling analysis of moderately thick functionally graded plates and shallow shells. *Int J Mech Sci* 47:pp1147–71,2005.
- [3] Javaheri, R., Eslami, M.R. Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *J Therm Stresses* 25:pp 603–25,2002.
- [4] Najafizadeh, M.M., Eslami, M.R. Buckling analysis of circular plates of function-ally graded materials under uniform radial compression. *Int J Mech Sci* 44:pp. 2479–93 2002.
- [5] Da-Guang, Zhang N., Hao-Miao, Zhou. Mechanical and thermal post-buckling analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on nonlinear elastic foundations. *Thin-Walled Structures* 89: pp.142-151,2015.
- [6] Ootao, Y., Tanigawa, Y., Ishimaru, O. Optimization of material composition of functionally graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *J Therm Stress* 23:pp. 257–71,2000.
- [7] Cho, J.R., Shin, S.W. Material composition optimization for heat-resisting FGM by artificial neural network. *Compos Part A Appl Sci Manuf* 35: pp.585–94,2004.
- [8] Kyung-Su, Na., Ji-Hwan, Kim. Volume fraction optimization for step-formed functionally graded plates considering stress and critical temperature. *Composite Structures* 92:pp. 1283–1290,2010.
- [9] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *Euro. J. Mech.-A/Solids* 20: 841–855,2001.
- [10] Markworth, J., Saunders, J.H. A model of structure optimization for a functionally graded material. *Mater. Lett.* 22:pp.103–107,1995.
- [11] Cho, J.R., Ha, D.Y. Volume fraction optimization for minimizing thermal stress in Ni–Al₂O₃ functionally graded materials. *Mater. Sci. Eng.* A334: pp.147–155,2002.
- [12] Shackelford, J.F., Alexander, W., Park, J.S., CRC Materials Science and Engineering Handbook. second ed, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [13] Li, Y., Ramesh, K.T., Chin, E.S.C. Dynamic characterization of layered and graded structures under impulsive loading. *Int. J. Solids Struct.* 38: pp.6045–6061,2001.

- [14] Gerard, G., Becker, H. "national advisory committee for aeronautics. new york university, Washington July ,1957.
- [15] Mahmoodabadi, M.J., Adljooy Safaie, A., Bagheri, A., Nariman-zadeh, N. A novel combination of Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithm for Pareto optimal design of a five-degree of freedom vehicle vibration model. *Applied Soft Computing* 13: pp.2577–2591,2013.
- [16] Rao, S.S. Engineering optimization: theory and practice. 3rd ed. New York: Wiley, 1996.
- [17] kyung-su, N., ji-Hwan, K. Volume fraction optimization for step-formed functionally graded plates considering stress an critical temperature. *Compstruct* pp11 ,2009.
- [۱۸] قاسمی مرتضی، جامی الاحمدی عبدالرحمان، حل تحلیلی کمانش ورقهای تابعی مدرج با لایه های پیزوالکتریک به کمک تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی، مجله مهندسی مکانیک مدرس، سال ۱۵، شماره ۳، صفحه ۳۹۷-۳۸۷، خرداد ۱۳۹۴.