

ارتعاشات اجباری میکرولوله حامل جریان سیال واقع بر بستر پسترناک تحت نیروی متحرک و با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش

محمد حسینی*

دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

عباس زندی باغچه مریم

کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

چکیده

در این مقاله ارتعاشات اجباری یک میکرولوله ویسکوالاستیک حامل سیال، واقع بر بستر پسترناک تحت تاثیر نیروی متحرک هارمونیک بررسی شده است. معادله حرکت میکرولوله حامل سیال به همراه شرایط مرزی، براساس تئوری گرادیان کرنش مرتبه اول و فرضیات تیر اویلر-برنولی با استفاده از اصل توسعه یافته همیلتون استخراج می شود. رفتار ویسکوالاستیک میکرولوله با استفاده از تئوری ویسکوالاستیک خطی کلین-ویت مدل سازی شده است. معادله دیفرانسیل حاکم با بکارگیری روش گالرکین به یک سیستم از معادله دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان تبدیل می شود و نتایج عددی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی برای یک میکرولوله با شرایط مرزی دوسرهمفصل و دوسرگیردار بدست آمده است. در این مطالعه تاثیر تغییرات پارامترهای مختلف مانند نسبت جرمی، قطر میکرولوله، مدول بستر پسترناک و وینکلر و تاثیر شرایط مرزی مختلف بر تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله ویسکوالاستیک، بررسی شده است. مقایسه نتایج بدست آمده از روش مربعات دیفرانسیلی با روش رانگ کوتا مرتبه چهار، بیانگر دقت خوب روش عددی مربعات دیفرانسیلی در حل این گونه مسائل می باشد. همچنین نتایج با آنچه قبلا در مطالعات پیشین گزارش شده است در تطابق خوبی می باشد.

واژه های کلیدی: ارتعاشات اجباری، میکرولوله حامل سیال، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش، نیروی متحرک، روش مربعات دیفرانسیلی.

Forced Vibration of Microscale Pipes Conveying Fluid Resting on Visco-pasternak Foundation under Moving Loads with Considering the Strain Gradient Theory

M. Hosseini

Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

A. Zandi Baghche Maryam

Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

Abstract

In this article, the forced vibration analysis of viscoelastic microscale pipes conveying fluid resting on visco-Pasternak foundation under a harmonic moving load is considered. Based on the strain gradient theory and Euler-Bernoulli theory, the governing equation of motion and boundary conditions are derived using extended Hamilton principle. The viscoelastic behavior of the micropipes is modeled by using the Kelvin-Voigt linear viscoelastic theory. The displacement field in the space domain is approximated by trial functions and the equation of motion are reduced into the time domain using Galerkin method. The coupled equation system in the time domain is solved by differential quadrature element method (DQEM) and the results of numerical analysis are obtained for two different boundary conditions, namely pinned-pinned and fixed-fixed. In the present work, the effects of different parameters such as the mass ratio, diameter of micropipe, Pasternak and Winkler foundation moduli, different boundary conditions on the non-dimensional deflection of viscoelastic micropipe are investigated. Also, results are in well agreement with the ones obtained in previous work.

Keywords: Forced vibration, Microscale pipes conveying fluid, Strain gradient elasticity theory, Moving loads, Differential quadrature method.

۱- مقدمه

برش در ماشینکاری و لوله های حاوی سیال از نمونه های مسائل بار متحرک به شمار می روند. علاوه بر اهمیت بررسی این نوع بارگذاری در مسائل با مقیاس بزرگ، بررسی رفتار دینامیک سازه ها تحت نیروی متحرک در مقیاس میکرو و نانو نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. از کاربرد این نوع مسائل می توان به مواردی مثل دستگاه های تزریق دارو، میکرولوله های حامل جریان سیال، سنسورها و تحریک کننده ها و همچنین بکارگیری این دانش در تخمین عمر سازه های مختلف اشاره نمود.

نظریه کلاسیک محیط پیوسته به دلیل صرف نظر کردن از پارامتر مقیاس طول و جملات غیرمحمولی در معادلات ساختاری آن، قادر به

تحلیل رفتار دینامیکی سازه ها تحت اثر حرکت یک نیرو بر روی آن ها یکی از مباحث جالب و کاربردی در مهندسی مکانیک می باشد که مورد بحث بسیاری از محققین و مهندسين بوده است. تحلیل دینامیکی تیرها تحت تاثیر بار متحرک از زمانی بیشتر مورد توجه قرار گرفت که سرعت و وزن خودروها و قطارها به طور قابل ملاحظه ای افزایش یافت. هر سازه یا ماشینی که بار متحرکی بر آن اثر کند و سبب تحریک و ارتعاش آن سازه یا ماشین گردد، شامل این دسته از مسائل به حساب می آیند. پل ها، ریل ها، جرثقیل های ساختمانی، ترمز وسایل نقلیه، ابزار

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hosseini@sirjantech.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۸/۰۳

تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۰/۲۰

توصیف رفتار سازه‌ها در مقیاس‌های میکرو و نانو نمی‌باشد، از این‌رو نیاز به تئوری‌های غیر محلی^۱ [۱] و تئوری‌های مرتبه بالاتر [۲] احساس می‌شود. با پیشرفت علم و توسعه فرآیند تولید، اندازه قطر لوله و سایر مشخصات آن می‌تواند تا مقیاس میکرو و نانو کوچک‌تر شود. رینالدی و همکاران [۳] قطر داخلی میکرولوله را در بازه ۰ تا $100 \mu m$ در نظر گرفت و به بررسی مقدار پارامتر مقیاس طول پرداخت. بررسی رفتار ارتعاشی و پایداری این‌گونه مواد در مقیاس میکرو همانند مقیاس بزرگ در طراحی میکرو دستگاه‌ها دارای اهمیت می‌باشد که این به یک موضوع چالش برانگیز برای محققان تبدیل شده است. در سالیان گذشته، محققان بسیاری با استفاده از تئوری‌های مختلفی به مدل‌سازی و تحلیل ارتعاش لوله‌های حاوی جریان سیال در مقیاس نانو و میکرو پرداختند [۴-۹]. با این حال، بسیاری از این مطالعات در زمینه تئوری الاستیسیته کلاسیک انجام شده است. نظریه کلاسیک به دلیل در نظر گرفتن مقادیر محلی تنش و کرنش نمی‌تواند رفتار مکانیکی مواد الاستیک در مقیاس میکرو و نانو را توصیف کند، به همین دلیل در دهه‌های اخیر به بررسی تئوری‌های غیرمحلی دیفرانسیلی و گرادیانی برای تحلیل این‌گونه سازه‌ها پرداخته شده است [۱۰-۱۲]. نظریه کوپل تنش از جمله تئوری‌های مرتبه بالاتر بوده که دارای یک پارامتر اضافی مقیاس طول می‌باشد که توسط یانگ و همکارانش ارائه گردید [۱۳]. سیمسک و ردی [۱۴] به بررسی استاتیکی، ارتعاش آزاد میکروتیرها با مواد تابعی براساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده و تئوری‌های مختلف مرتبه بالاتر پرداختند. آن‌ها اثر پارامتر مقیاس طول، تاثیر مواد مرکب و تغییر شکل برشی بر روی رفتار ارتعاش آزاد سیستم را بررسی کردند و به مطالعه تاثیر پارامتر مقیاس طول در رفتار میکروتیر پرداختند. در پژوهشی دیگر سیمسک [۱۵] براساس تئوری مختلف، ارتعاشات تیر با مواد مدرج تابعی تحت نیروی متحرک را مورد مطالعه قرار دادند. کونگ و همکاران [۱۶] به بررسی و تحلیل رفتار دینامیکی و استاتیکی میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش پرداختند و دریافتند که با افزایش پارامتر مقیاس طول، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد. وانگ^۲ و همکاران [۱۷] به بررسی رفتار ارتعاشی میکرولوله حامل سیال و اثر اندازه بر روی تغییر شکل‌های استاتیکی با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری تیر تیموشنکو پرداختند. ردی [۱۸] ارتعاشات و کمانش تیر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی را بررسی کرده و بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی را با رویکرد تحلیلی بدست آورد. علاوه بر این محمود و همکاران [۱۹] با در نظر گرفتن اثرات لایه سطحی و استفاده از روش المان محدود، به بررسی رفتار استاتیکی میکروتیر پرداختند. وانگ و همکارانش [۲۰] ارتعاشات آزاد مدل‌های میکرو و نانو را با بکارگیری تئوری‌های غیرمحلی و با در نظر گرفتن تیر تیموشنکو، تحلیل کردند. جی و همکارانش [۲۱] رفتار ارتعاشی میکروتیر را براساس تئوری کوپل تنش بررسی کردند. اخیراً، میسیورک و سنیدادی [۲۲] پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت بار متحرک (بدون اینرسی) را با شیوه ریاضی جدیدی حل نموده و قسمت خصوصی پاسخ را بصورت حل دقیق بدست آورد. سانگ [۲۳] به بررسی تیر دوسرمفصل تحت جرم متحرک

پرداخت. تاجعلی و همکاران [۲۴] با استفاده از تئوری گرادیان کرنش مرتبه اول به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیر با در نظر گرفتن تئوری تیر تیموشنکو با مواد تابعی^۳ پرداختند. انصاری و همکاران [۲۵] به بررسی خمش، کمانش و ارتعاشات میکروتیر پرداختند. آن‌ها نتیجه گرفتند که با افزایش پارامتر مقیاس طول داخلی، نمودارهای خیز میکروتیر با مواد تابعی به سمت نمودارهای بدست آمده از تئوری کلاسیک میل می‌کند. قربان پور و همکاران [۲۶] ارتعاشات نانولوله کربنی ویسکوالاستیک را با در نظر گرفتن اثر اندازه جریان سیال تحت میدان مغناطیس و بستر الاستیک وینکلر و پسترناک بررسی کردند و تاثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی نانولوله را با روش عددی تحلیل کردند. وانگ [۲۷] با در نظر گرفتن تئوری‌های تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو و تئوری کوپل تنش اصلاح شده، معادلات حاکم بر حرکت میکرولوله حامل جریان سیال را توسعه دادند.

با توجه به مرور منابع مشخص می‌شود که این مطالعات بیشتر در رابطه با تیر با شرایط مرزی دوسرمفصل و بدون جریان سیال بوده و ارتعاشات اجباری میکرولوله تحت بار متحرک، واقع بر بستر پسترناک^۴ براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش بررسی نشده است. همچنین اثرات شرایط مرزی مختلف، جریان سیال و پارامتر ویسکوالاستیک بر روی تغییر مکان سازه‌های تحت بار متحرک تاثیر به‌سزایی دارد که با وجود کاربردهای فراوان آن در حوزه مسائل بار متحرک، در مطالعات گذشته بررسی نشده است. در این مطالعه ارتعاشات اجباری یک میکرولوله ویسکوالاستیک حامل سیال، واقع بر بستر پسترناک تحت تاثیر نیروی متحرک هارمونیک با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی بررسی شده است. در ابتدا مختصری در مورد تئوری گرادیان کرنش مرتبه اول توضیح داده شده است سپس با استفاده از اصل توسعه یافته همیلتون^۵ معادله حاکم بر حرکت میکرولوله حامل جریان سیال تحت نیروی متحرک و بستر پسترناک استخراج شده است. سرانجام با استفاده از روش عددی به بررسی تاثیر تغییرات پارامترهای مختلف مانند سرعت نیروی متحرک، تاثیر شرایط مرزی، پارامترهای مدول الاستیک وینکلر^۶ و مدول برشی بستر پسترناک بر تغییر مکان عرضی میکرولوله بررسی شده است. صحت نتایج با مقایسه با نتایج حاصل از روش ترکیبی گالرکین-رانگ کوتا و آنچه قبلاً در تحقیقات پیشین ارائه شده است تایید می‌گردد.

۲- تئوری گرادیان کرنش مرتبه اول

در ابتدا مختصری در مورد تئوری گرادیان کرنشی مرتبه اول توضیح داده می‌شود، سپس معادلات حاکم بر حرکت استخراج می‌گردد. براساس این تئوری که اولین بار توسط میندلین و راشل [۲۸] بکار گرفته شد. براساس آن در انرژی کرنشی یک سازه علاوه بر تنش و قسمت متقارن گرادیان مرتبه اول پارامترهای جابه‌جایی (کرنش)، بردار گرادیان انبساط، تانسور گرادیان کشش انحرافی و تانسور گرادیان چرخش نیز دخیل هستند. طبق این تئوری، انرژی کرنشی در یک

³ Functionally Graded Material (FGM)

⁴ Pasternak

⁵ Extended Hamilton principle

⁶ Winkler

¹ Nonlocal

² Wang

ماده‌ی الاستیک خطی، بصورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)}) dV \quad (1)$$

که تانسور کرنش ε_{ij} بردار گرادیان انبساط γ_i ، تانسور گرادیان چرخش متقارن χ_{ij} ، تانسور گرادیان کشش انحرافی $\eta_{ijk}^{(1)}$ به ترتیب با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (2)$$

$$\gamma_i = \partial_i \varepsilon_{mm} \quad (3)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ipq} \partial_p \varepsilon_{qj} + e_{jpq} \partial_p \varepsilon_{qi}) \quad (4)$$

$$\eta_{ijk} = \frac{1}{3} (\partial_i \varepsilon_{jk} + \partial_j \varepsilon_{ki} + \partial_k \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{15} (\delta_{ij} (\partial_k \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \delta_{mk}) + \delta_{jk} (\partial_i \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \delta_{mi}) + \delta_{ki} (\partial_j \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \delta_{mj})) \quad (5)$$

که u مولفه تغییر شکل تیر در راستای z است و ∂_i مشتق اول نسبت به اندیس i می‌باشد و e_{ipq} نماد جایگشت^۱ است. تانسور تنش کلاسیک σ_{ij} مزدوج تانسور ε_{ij} در نظر گرفته می‌شود. تنش‌های مرتبه-ی بالاتر یا کوپل تنش‌های $\tau_{ijk}^{(1)}$ ، p_i و m_{ij} به ترتیب مزدوج گرادیان کرنش γ_i ، $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij} هستند و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

$$p_i = 2l_0^2 G \gamma_i \quad (7)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2l_1^2 G \eta_{ijk}^{(1)} \quad (8)$$

$$m_{ij} = 2l_2^2 G \chi_{ij} \quad (9)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (10)$$

که θ_i مولفه‌های بردار چرخش است و بصورت زیر است:

$$\theta_i = \frac{1}{2} (e_{ijk} u_{j,k}) \quad (11)$$

که $\bar{\lambda}$ و G ضرایب لامه هستند. با در نظر گرفتن روابط بالا مشخص می‌شود که تابع انرژی الاستیک طبق تئوری کلاسیک تنها به بخش متقارن تانسور کرنش وابسته است، حال آن‌که تئوری گرادیان کرنش مرتبه اول، به کرنش، گرادیان کرنش، بخش متقارن گرادیان چرخش و گرادیان دوم میدان جابه‌جایی وابسته است. l_0 ، l_1 و l_2 پارامترهای مقیاس طولی ماده هستند و به ترتیب مرتبط با گرادیان انبساط، گرادیان کشش انحرافی و گرادیان چرخش می‌باشند. براساس تئوری تیر اویلر-برنولی، مولفه تغییر شکل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (12)$$

که w مولفه تغییر شکل میکرولوله در راستای z می‌باشد. با استفاده از معادله (۱۲) و سپس جایگذاری در معادلات (۶) و (۱۰)، روابط زیر قابل بیان است:

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} &= 0 \\ \sigma_{xx} = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

همچنین، با استفاده معادله (۱۳) و ترکیب در معادلات (۹) - (۱۱)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} m_{xy} = m_{yx} &= -Gl_2^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \\ m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

¹ Permutation symbol

با ترکیب معادلات (۲) - (۵) و معادله (۱۲) مولفه‌های بردار گرادیان انبساط را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\gamma_x = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (16)$$

همچنین با استفاده از روابط قبل، گرادیان کشش انحرافی غیر صفر بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} &= -\frac{4}{15} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \\ \eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{15} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \\ \eta_{111}^{(1)} = -\frac{2}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (17)$$

تانسور تنش کلاسیک غیر صفر طبق معادله (۱۴) و همچنین تانسور گرادیان چرخش متقارن غیر صفر معادله‌ی (۱۳) می‌باشد. با قرار دادن معادلات (۱۶) و (۱۷) در معادلات (۷) - (۸)، تنش‌های مرتبه‌ی بالاتر غیر صفر بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$p_x = -2l_0^2 Gz \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad p_z = -2l_0^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (18)$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15} l_1^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (19)$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \frac{2}{5} l_1^2 Gz \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} l_1^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\tau_{133}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{5} l_1^2 Gz \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},$$

$$\tau_{111}^{(1)} = -\frac{4}{5} l_1^2 Gz \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} l_1^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

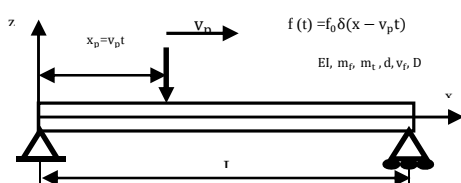
۳- معادله حرکت لوله حامل سیال

یک میکرولوله حامل سیال با طول L و قطرهای داخلی و خارجی D ، d و سطح مقطع A_p با شرایط مرزی دوسرهمفصل را همانند شکل ۱ در نظر بگیرید؛ که در آن m_t جرم بر واحد طول لوله، m_f جرم سیال بر واحد طول لوله، v_f سرعت یکنواخت سیال، $\delta(\cdot)$ دلتای دیراک و EI سفتی خمشی میکرولوله می‌باشد. با استفاده از اصل توسعه یافته همیلتون، معادله حرکت و شرایط مرزی برای یک لوله حامل سیال که بصورت زیر فرمول بندی شده است استخراج می‌شود [۲۹]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (1 - m_f v_f^2 u_L) dt - \int_{t_1}^{t_2} m_f v_f \left(\frac{\partial w_L}{\partial t} + v_f \frac{\partial w_L}{\partial x} \right) \delta w_L dt = 0 \quad (20)$$

که مقدار $u_L = w_L = 0$ و $l = l_{\text{لاگرانژی سیستم می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:$

$$l = T_t + T_f - U + W_{\text{ext}} \quad (21)$$



شکل ۱- میکرولوله حامل سیال تحت نیروی متحرک

که T_t انرژی جنبشی میکرولوله و T_f انرژی جنبشی سیال به ترتیب با روابط زیر نشان داده می‌شوند:

$$T_t = \frac{1}{2} m_t \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (22)$$

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^L \left[v_f^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v_f \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)^2 \right] dx \quad (23)$$

با استفاده از قضیه حساب تغییرات روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta T_t = m_t \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx \quad (24)$$

$$\delta T_f = m_f \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) + v_f \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + v_f \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) + v_f^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right] dx \quad (25)$$

برای مدل کردن رفتار مواد ویسکوالاستیک مدل‌های بسیاری پیشنهاد شده است که از آن‌ها مدل کلین-ویت بیش از همه مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مدل از فنر و میرا کننده برای شبیه سازی مواد ویسکوالاستیک استفاده شده است که در آن فنر و میرا کننده بصورت موازی با هم قرار گرفته است و در نتیجه این مجموعه دارای کرنش یکسانی می‌باشند. براساس مدل کلین-ویت، مدول الاستیک E و G بایستی به ترتیب با عملگرهای $E \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right)$ و $G \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right)$ جایگزین شوند [۳۰]. سپس، با جایگزینی معادلات (۱۲) - (۱۹) در معادله (۱)، انرژی کرنشی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + P \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] dx \quad (26)$$

که

$$P = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) (P_0) \quad (27)$$

$$P_0 = I \left(2G l_0^2 + \frac{4}{5} G l_1^2 \right)$$

$$S = \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) (S_0) \quad (28)$$

$$S_0 = \left(EI + 2GA_p l_0^2 + \frac{8}{15} GA_p l_1^2 + GA_p l_2^2 \right)$$

میکرولوله حامل سیال بر روی بستر پسترناک واقع است که دارای دو پارامتر است که پارامتر اول آن یعنی K_w نشان دهنده فشار نرمال است و پارامتر دوم آن K_G تنش عرضی را نمایش می‌دهد. کار ناشی از تغییر شکل بستر پسترناک بصورت زیر می‌باشد:

$$\delta W_b = - \int_0^L K_w w \delta w dx + \int_0^L K_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx \quad (29)$$

که در روابط بالا، K_w مدول الاستیک وینکلر و K_G مدول برشی بستر پسترناک می‌باشد. تغییرات کار مجازی انجام شده توسط بستر پسترناک و کار خارجی بصورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\delta W^{\text{ext}} = \delta W_b + \delta W_f \quad (30)$$

δW_f کار مجازی ناشی نیروهای خارجی است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta W_f = \int_0^L f(x, t) \delta w dx \quad (31)$$

انرژی جنبشی میکرولوله و سیال، به ترتیب معادلات (۲۴) و (۲۵) می‌باشد، که با قرار دادن این روابط و معادلات (۲۶) و (۳۰) در معادله (۲۰)، معادله حرکت میکرولوله حامل سیال بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$-P_0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + S_0 g \frac{\partial^7 w}{\partial x^6 \partial t} + S_0 g \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \quad (32)$$

$$+ 2m_f v_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m_f v_f^2 - K_G) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+ (m_f + m_t) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_w w = f(x, t)$$

با توجه به معادلات استخراج شده، مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری‌های گرادیانی منجر به ایجاد معادلاتی با مرتبه‌ی بالاتر از معادلات کلاسیک می‌شود. به همین دلیل برای حل به شرایط مرزی اضافی علاوه بر شرایط مرزی کلاسیک نیازمند هستند. شرایط مرزی در این حالت بصورت زیر می‌باشد:

$$\left[(S) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - P \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + (m_f v_f^2) \frac{\partial w}{\partial x} + (m_f v_f) \frac{\partial w}{\partial t} \right] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (33)$$

$$\left[(S) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial x} \Big|_0 = 0$$

$$\left[(P) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \Big|_0 = 0$$

باید توجه کرد که این مدل تحت وضعیت‌های مشخصی، به ترتیب، به مدل کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک کاهش می‌یابد. هنگامی که پارامترهای مقیاس طولی ماده یعنی l_0 و l_1 صفر باشند به مدل کوپل تنش اصلاح شده و هنگامی که هر سه پارامتر مقیاس طولی صفر باشند به مدل کلاسیک کاهش می‌یابد. با استفاده از پارامترهای بی بعد زیر می‌توان معادله حرکت را بی بعد نمود:

$$\xi = \frac{x}{L}, W = \frac{w}{L}, \tau = \frac{v_p}{L} t, \beta = \frac{m_f}{m_f + m_t}$$

$$V = \left(\frac{m_f}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} L v_f, \lambda = \frac{8 \left(2r_0^2 + \frac{8r_1^2}{15} + 1 \right)}{(1 + v)(1 + \alpha^2) \varphi^2},$$

$$k = \frac{r_0^2 + \frac{2r_1^2}{5}}{(1 + v)\mu^2}, r_0 = \frac{l_0}{l_2}, r_1 = \frac{l_1}{l_2}, \Omega = \bar{\Omega} \frac{L}{v_p}$$

$$\varphi = \frac{D}{l_2}, \mu = \frac{L}{l_2}, \psi = \frac{v_p}{v_f}, \Phi = \frac{D}{D}$$

$$k_G = \frac{K_G L^2}{EI}, k_W = \frac{K_W L^4}{EI}, \kappa = \frac{g v_p}{L} \quad (34)$$

با استفاده از روابط معادله (۳۴) و جایگزینی در معادله (۳۲)،

معادله حاکم به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$-k \frac{\partial^6 W}{\partial \xi^6} + (1 + \lambda) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - \kappa \frac{\partial^7 W}{\partial \xi^6 \partial \tau} + (1 + \lambda) \kappa \frac{\partial^5 W}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2V^2 \psi \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \frac{V^2 \psi^2}{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + (V^2 - k_G) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + k_W W = f(\xi, \tau) \quad (35)$$

که پارامتر بی بعد شده نیرو بصورت زیر قابل بیان است:

$$f(\xi, \tau) = \frac{f(\tau) \delta(\xi - \tau) L^2}{EI} \quad (36)$$

همچنین $f(\tau)$ برای نیروی هارمونیک و نیروی غیرهارمونیک به

ترتیب در رابطه (۳۷) تعریف می‌شود:

$$f(\tau) = f_0 \sin \Omega \tau \quad (37)$$

$$f(\tau) = f_0$$

Ω فرکانس نیروی تحریک می‌باشد و بار متحرک در لحظه

ی $\tau = 0$ بر میکرولوله اثر کرده و در لحظه $\tau = 1$ از انتهای

میکرولوله خارج می‌شود. جابجایی ناشی از نیروهای وارد بر تیر می‌تواند

بصورت زیر بیان شود:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\xi) w_i(\tau) \quad (38)$$

۴- روش مربعات دیفرانسیلی

روش مربعات دیفرانسیلی یک تکنیک حل عددی برای مسائل مرزی و یا مقدار اولیه است. این روش برای اولین بار در اوایل دهه ۱۹۷۰ توسط ریچارد بلمن و همکارانش توسعه یافت [۳۱]. در این روش مشتق مرتبه m تابع پیوسته q نسبت به x در هر نقطه x_i بصورت مجموع خطی از مقادیر تابع وزن در همه نقاط نوشته می‌شود. برای مثال مشتقات مرتبه اول و دوم تابع $q(t)$ در نقطه t_i در زیر نشان داده شده است:

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_i} = \sum_{j=1}^m A_{ij}^{(1)} q(t_j) \quad (44)$$

$$\left. \frac{d^2q}{dt^2} \right|_{t=t_i} = \sum_{j=1}^m A_{ij}^{(2)} q(t_j) \quad (45)$$

t_j نقاط زمانی مجزا، $q(t_j)$ مقدارهای تابع در این نقاط، $A_{ij}^{(2)}$ ضرایب وزنی تابعند که با مشتقات مرتبه ی اول و دوم تابع مرتبطند و m هم تعداد نقاط زمانی مجزا هستند. با استفاده از توابع درون یابی لاگرانژ می‌توان فرمول بندی جبری زیر را برای محاسبه ی ضرایب وزنی مشتقات مرتبه ی اول و دوم بدست آورد:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(t_i)}{(t_i - t_j)M^{(1)}(t_j)} & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m \\ - \sum_{k=1, k \neq i}^m A_{ik}^{(1)} & i = j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \end{cases} \quad (46)$$

که $M^{(1)}$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$M^{(1)}(t_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^m (t_i - t_j) \quad (47)$$

ضرایب وزنی مشتقات مرتبه ی دوم می‌تواند از رابطه بازگشتی زیر بدست آید:

$$A_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 2 \left[A_{ii}^{(1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(1)}}{t_i - t_j} \right] & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m. \\ - \sum_{k=1, k \neq i}^m A_{ik}^{(2)} & i = j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{cases} \quad (48)$$

همان‌طور که گفته شد انتخاب نقاط گرهی دلخواه است. معمولاً از توزیع غیریکنواخت و یا توزیع چبیشف استفاده می‌شود. در توزیع یکنواخت فاصله بین نقاط یکسان بوده اما در مطالعه ی حاضر، نقاط شبکه بصورت فاصله ی غیر یکنواخت در نظر گرفته می‌شوند و معادله ی زیر این موضوع را بیان می‌کند [۳۳]:

$$t_i = T/2 \left[1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{m-1}\right) \right] \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (49)$$

T فاصله ی زمانی است.

۴-۱- روش DQEM برای حل معادله دیفرانسیل یک سیستم

معادله ی حاکم بر را می‌توان بصورت معادله (۵۰) نوشت:

$$[M][\ddot{w}] + [C][\dot{w}] + [K][w] = [F] \quad (50)$$

مشتق‌های مرتبه اول و دوم زمانی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} [\dot{w}_i] &= [A]^{(1)} [w_i] \\ [\ddot{w}_i] &= [A]^{(2)} [w_i] \end{aligned} \quad (51)$$

بطوریکه $w_i(\tau)$ ، i امین مختصات تعمیم یافته خیر میکرولوله و $\Phi_i(\xi)$ ، i امین نرمال مود ارتعاشی میکرولوله می‌باشد که از شرایط مرزی بدست می‌آید. با جایگذاری معادله جابجایی (۳۸) در معادله حاکم میکرولوله (۳۵) سپس ضرب طرفین در $\Phi_i(\xi)$ و بعد انتگرال گیری در بازه ۰ تا ۱ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{\infty} k \int_0^1 \frac{\partial^6 \Phi_i}{\partial \xi^6} \Phi_i d\xi q_i(\tau) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (1 + \lambda) \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial \xi^4} \Phi_i d\xi q_i(\tau) \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} k \kappa \int_0^1 \frac{\partial^6 \Phi_i}{\partial \xi^6} \Phi_i d\xi \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (1 + \lambda) \kappa \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial \xi^4} \Phi_i d\xi \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} 2V^2 \psi \int_0^1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} \Phi_i d\xi \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (V^2 - k_G) \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \xi^2} \Phi_i d\xi q_i(\tau) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V^2 \psi^2}{\beta} \int_0^1 \Phi_i \Phi_i d\xi \frac{d^2 q_i(\tau)}{d\tau^2} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k_W \int_0^1 \Phi_i \Phi_i d\xi q_i(\tau) \\ & = \int_0^1 f(\tau) \delta(\xi - \tau) \Phi_i d\xi \end{aligned} \quad (39)$$

ماتریس‌های $[K]$ ، $[C]$ ، $[M]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، ماتریس میرایی و ماتریس سفتی، $[F]$ بردار نیروی خارجی و $[q]$ بردار جابه‌جایی می‌باشد و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$M_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{V^2 \psi^2}{\beta} \int_0^1 \Phi_i \Phi_i d\xi \quad (40)$$

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{i=1}^n 2V^2 \psi \int_0^1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} \Phi_i d\xi \\ & - \sum_{i=1}^n k \kappa \int_0^1 \frac{\partial^6 \Phi_i}{\partial \xi^6} \Phi_i d\xi \\ & + \sum_{i=1}^n (1 + \lambda) \kappa \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial \xi^4} \Phi_i d\xi \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} K_{ij} &= - \sum_{i=1}^n k \int_0^1 \frac{\partial^6 \Phi_i}{\partial \xi^6} \Phi_i d\xi \\ & + \sum_{i=1}^n (1 + \lambda) \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial \xi^4} \Phi_i d\xi \\ & + \sum_{i=1}^n k_W \int_0^1 \Phi_i \Phi_i d\xi \\ & + \sum_{i=1}^n (V^2 - k_G) \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \xi^2} \Phi_i d\xi \end{aligned} \quad (42)$$

$$F_i(\tau) = \int_0^1 f(\tau) \delta(\xi - \tau) \Phi_i d\xi \quad (43)$$

همچنین خیز استاتیکی ناشی از نیروی متمرکز در میانه لوله، برای

شرایط مرزی دومفصل $w_{st} = \frac{F_0 L^3}{48EI}$ و برای شرایط مرزی دوسرگیردار $w_{st} = \frac{F_0 L^3}{192EI}$ است.

که

$$[w_i] = [w_i(\tau_1) \ w_i(\tau_2) \ \dots \ w_i(\tau_m)]^T \quad (52)$$

ماتریس های $[M]$, $[C]$, $[K]$ مستقل از زمان و از مرتبه $n \times n$ هستند و بردارهای $[w]$ و $[F]$ از مرتبه $n \times 1$ می باشند. با تقسیم بندی معادله (50) در هر نقطه‌ی زمانی مجزا و سپس با استفاده از معادله (51)، معادله حاکم را می توان بصورت ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \dots & [\bar{K}_{1m}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \dots & [\bar{K}_{2m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\bar{K}_{m1}] & [\bar{K}_{m2}] & \dots & [\bar{K}_{mm}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [w]_{\tau=\tau_1} \\ [w]_{\tau=\tau_2} \\ \vdots \\ [w]_{\tau=\tau_m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F]_{\tau=\tau_1} \\ [F]_{\tau=\tau_2} \\ \vdots \\ [F]_{\tau=\tau_m} \end{Bmatrix} \quad (53)$$

که ماتریس $[\bar{K}_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ می باشد و بصورت زیر محاسبه می شود:

$$[\bar{K}_{ij}] = \begin{cases} A_{ij}^{(2)}[M] + A_{ij}^{(1)}[C] & \text{if } i \neq j \\ A_{ij}^{(2)}[M] + A_{ij}^{(1)}[C] + [K] & \text{if } i = j \end{cases} \quad (54)$$

با ساده سازی و استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی می توان معادله فوق را بصورت ماتریس زیر باز نویسی نمود:

$$[\bar{K}][\tilde{w}] = [\tilde{F}] \quad (55)$$

که در آن، $[\bar{K}]$ ماتریس $nm \times nm$ درایه و بردار $[\tilde{w}]$ و $[\tilde{F}]$ دارای $nm \times 1$ درایه می باشد. بعد از اعمال شرایط اولیه در معادله (55)، ضرب $[\tilde{w}]$ بدست می آید.

۲-۴- اعمال شرایط اولیه

شرایط اولیه بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} [w(\tau_1)] &= [w(0)] = 0 \\ [\dot{w}(\tau_1)] &= [\dot{w}(0)] = \sum_{j=1}^m A_{1j}^{(1)}[w(\tau_j)] = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

با اعمال شرایط اولیه و جایگذاری معادله (54) در معادله (55)، ماتریس زیر تشکیل می شود:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{ii}] & [\bar{K}_{id}] \\ [\bar{K}_{di}] & [\bar{K}_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\tilde{w}_i] \\ [\tilde{w}_d] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\tilde{F}_i] \\ [\tilde{F}_d] \end{Bmatrix} \quad (57)$$

در ماتریس فوق اندیس i و d به ترتیب نشان دهنده شرایط اولیه و سایر المان های زمانی می باشد. با حذف کردن بردار $[\tilde{w}_i]$ ، معادله (55) به شکل زیر باز نویسی می شود:

$$[\bar{K}][\tilde{w}_d] = [\tilde{F}] \quad (58)$$

که

$$[\bar{K}] = [\bar{K}_{dd}] - [\bar{K}_{di}][\bar{K}_{ii}]^{-1}[\bar{K}_{id}] \quad (59)$$

$$[\tilde{F}] = [\tilde{F}_d] - [\bar{K}_{di}][\bar{K}_{ii}]^{-1}[\tilde{F}_i] \quad (60)$$

۵- نتایج عددی

در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از تاثیر تغییرات پارامترهای بی بعد مختلف مانند نسبت جرمی، قطر میکرولوله، نسبت سرعت، تاثیر تئوری های الاستیسیته مختلف، تاثیر بستر پسترناک و اثر شرایط مرزی مختلف بر تغییر مکان عرضی میکرولوله مورد مطالعه قرار می گیرد.

صحت نتایج با مقایسه با نتایج حاصل از روش ترکیبی گالرکین- رانگ کوتا مرتبه چهار و آنچه قبلا در تحقیقات پیشین ارائه شده است تایید می گردد.

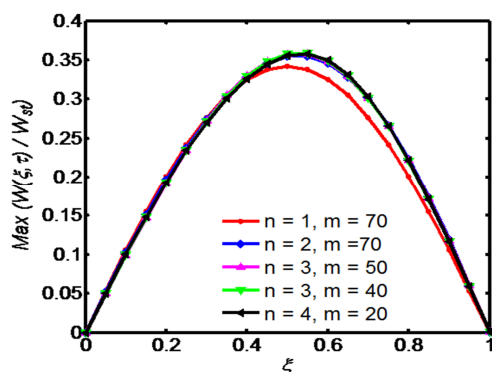
میکرولوله در نظر گرفته شده از مواد اپوکسی (epoxy) [۲] تشکیل شده است، همچنین پارامترهای مقیاس طول به طور یکسان $l = l_0 = l_1 = l_2$ در نظر گرفته می شود. مقادیر در نظر گرفته شده در این بررسی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \nu &= 0.38, l = 17.6 \mu\text{m}, D = 50 \mu\text{m}, \Omega = 3 \\ L &= 20D, \psi = 1, \Phi = 0.8, V = 2, \alpha = 0.8 \\ \beta &= 0.5, k_w = 50, k_G = 20, \kappa = 0.005 \end{aligned} \quad (61)$$

به منظور بررسی همگرایی روش مربعات دیفرانسیلی ارائه شده در این بررسی، مقادیر مربوط به خیز یک میکرولوله تحت بار متمرکز متحرک، در شکل ۲ ترسیم شده است، که در آن m المان زمانی و n تعداد مودهای در نظر گرفته شده است. از آنجایی که هدف تنها بررسی همگرایی نتایج حاصله است، فرض می شود که تمام پارامترهای مقیاس طول در تئوری های گرادیانی معرفی شده، دارای مقدار یکسان $l = 17.6 \mu\text{m}$ می باشند. این نتایج با استفاده از مقادیر حاصل از تئوری کلاسیک $\frac{F_0 L^3}{48EI}$ نرمال شده است. با توجه به نتایج مشاهده می شود که به ازای مقادیر $n = 2$ و $m = 70$ نمودارها همگرا شده و با تغییر المان های زمانی و تعداد مودها تغییری در نتایج حاصل نمی شود. بنابراین با توجه به همگرایی مسئله، تمام نتایجی در شکل های بعدی ارائه می شود به ازای مقادیر $n = 2$ و $m = 70$ می باشد.

همچنین در شکل های ۲-۱۱ نتایج حاصله براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش مرتبه اول ارائه شده است.

در ابتدا به منظور اطمینان از روش حل و نتایج حاصله، تغییر مکان بی بعد بدست آمده از روش مربعات دیفرانسیلی مورد استفاده در این تحقیق و نتایج حاصله از روش مربعات دیفرانسیلی که در مرجع [۳۴] مورد استفاده قرار گرفته، در شکل ۳ بررسی شده است. در این شکل تغییر مکان بی بعد شده برحسب پارامتر بی بعد زمان و مقادیر مختلف α که برابر با $\alpha = \frac{\nu p \pi}{L \omega_1}$ می باشد ترسیم شده است، که در آن اولین فرکانس طبیعی تیر بصورت عبارت جبری $\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 \left(\frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + GA_p l^2 \right)}{\rho L^2 (A_p L^2 + \pi^2 I_2)}}$ است. که در آن، ρ چگالی و L طول میکرولوله هستند.

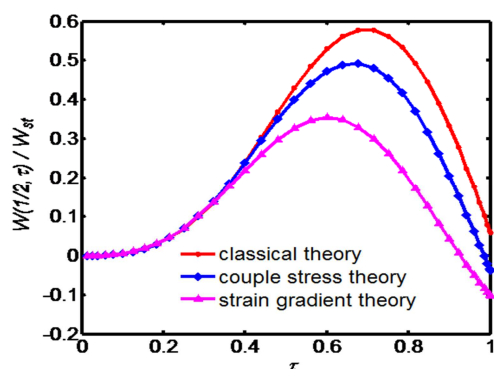


شکل ۲- همگرایی تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله با در نظر گرفتن المان های زمانی و تعداد مودهای مکانی مختلف

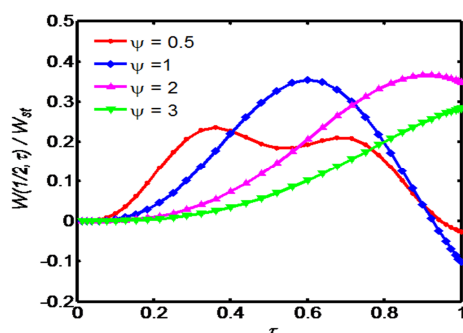
در شکل ۵ به بررسی تاثیر نسبت سرعت ψ بر حداکثر خیز بدون بعد میکرولوله با شرایط مرزی دوسرمفصل تحت بارگذاری متمرکز متحرک برحسب تغییرات پارامتر زمان پرداخته شده است. مشاهده می شود که خیز میکرولوله با افزایش نسبت سرعت، افزایش یافته و حداکثر مقدار در انتهای زمان بی بعد شده اتفاق می افتد، بطوری که در نسبت سرعت $\psi = 2$ جابجایی بی بعد شده 0.3662 است.

جدول ۱- حداکثر مقدار جابجایی میکرولوله با بکارگیری روش گالرکین- مربعات دیفرانسیلی و روش گالرکین- رانگ کوتا برحسب پارامترهای بی بعد مختلف برای شرایط مرزی دوسرمفصل

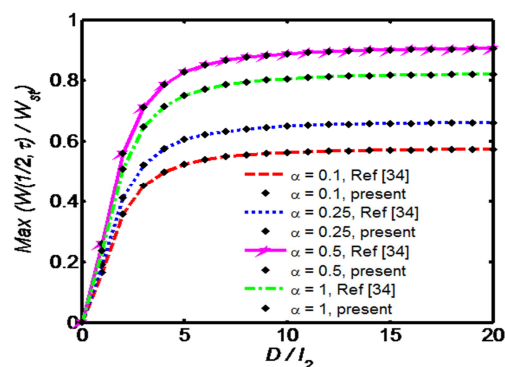
پارامتر بی بعد	مقادیر مختلف	روش گالرکین- رانگ کوتا مرتبه چهار	روش گالرکین- مربعات دیفرانسیلی
k_W	۰	۰/۴۰۸۱۱	۰/۴۰۷۳۷
	۳۰	۰/۳۷۷۱۴	۰/۳۷۶۴۵
	۵۰	۰/۳۵۸۷۰	۰/۳۵۸۴۹
k_G	۰	۰/۶۶۰۶۹	۰/۶۶۰۲۳
	۱۰	۰/۴۷۰۱۸	۰/۴۷۰۰۹
	۳۰	۰/۲۸۶۰۸	۰/۲۸۵۰۸
K	۰	۰/۳۶۴۳۲	۰/۳۶۴۸۱
	۰/۰۵	۰/۳۱۹۲۳	۰/۳۱۸۲۴
	۰/۱	۰/۲۸۶۶۳	۰/۲۸۵۹۰



شکل ۴- تغییر مکان تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله برحسب پارامتر بدون بعد زمان براساس تئوری های مختلف



شکل ۵- حداکثر تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله به ازای مقادیر مختلف نسبت سرعت ψ برای شرایط مرزی دوسرمفصل



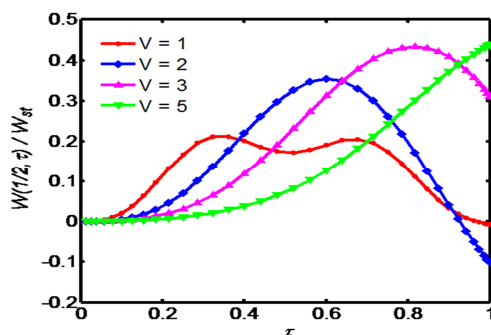
شکل ۳- حداکثر تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله و مرجع [۳۴] بر- حسب پارامتر بدون بعد سرعت α برای شرایط مرزی دوسرمفصل

با توجه به نتایج بدست آمده در شکل ۳ مشخص می شود که دقت بالایی در نتایج وجود دارد و می توان از صحت نتایج حاصله در غیاب جریان سیال و پارامترهای بی بعد مدول الاستیک وینکلر و مدول برشی بستر پسترناک و ضریب میرایی ساختاری ویسکوالاستیک اطمینان حاصل کرد. در جدول ۱ حداکثر تغییر مکان در میانه میکرولوله برحسب مقادیر مختلف پارامتر بدون بعد مدول الاستیک وینکلر k_W و مدول برشی بستر پسترناک k_G و ضریب میرایی ساختاری ویسکوالاستیک K برای شرایط مرزی دوسرمفصل بدست آمده است. در این جدول نتایج روش گالرکین- مربعات دیفرانسیلی با نتایج حاصل از روش ترکیبی گالرکین- رانگ کوتا مرتبه چهار مقایسه شده و با توجه به آن مشخص می شود که دقت آن بسیار خوب و قابل اطمینان بوده، اما همانطور که قبلاً توضیح داده شد، در روش مربعات دیفرانسیلی سرعت همگرایی و دقت آن نسبت به روش ترکیبی گالرکین- رانگ کوتا بهتر می باشد. همچنین با توجه به این نتایج روشن است که با افزایش پارامترهای بی بعد ذکر شده، حداکثر تغییر مکان کاهش می یابد.

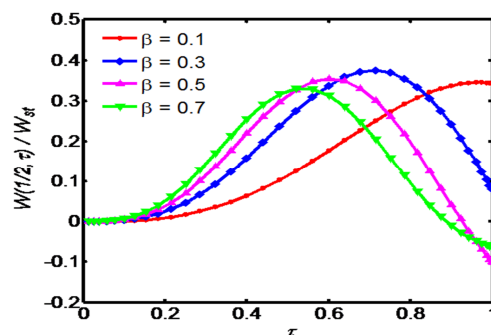
جهت مطالعه اثر تئوری الاستیسیته محلی و غیرمحلی بر تغییر مکان بی بعد شده در میانه میکرولوله، به ازای مقادیر مختلف زمان بی بعد شده و شرایط مرزی دوسرمفصل، شکل ۴ ترسیم شده است. مشاهده می شود که در تئوری گرادیان کرنش مرتبه اول نسبت به کوپل تنش و تئوری کلاسیک تغییر مکان کمتری وجود دارد. همچنین با استفاده از تئوری کوپل تنش، تغییر مکان بدست آمده نسبت به تئوری کلاسیک مقدار کمتری را دارا می باشد. دلیل فیزیکی این رخداد به وجود اثرات اندازه در ترم انرژی کرنشی ذکر شده در معادله (۱) بر می گردد که این ترم ها با عث افزایش انرژی کرنشی و بالطبع افزایش سفتی سیستم می گردد. لذا از آنجایی که جابجایی سیستم رابطه عکس با سفتی سازه دارد و چون انرژی کرنشی تئوری گرادیان کرنش بیشتر از کوپل تنش است لذا سفتی پیش بینی شده توسط این تئوری بیشتر می باشد و هر دوی این تئوری ها سفتی بیشتری را نسبت به حالت کلاسیک تخمین می زنند. همچنین مشاهده می شود که افزایش زمان باعث افزایش آثار غیرمحلی می شود، به طوری که در ابتدا این اثرات ناچیز بوده و در بازه های جابجایی براساس تئوری غیرکلاسیک بیش تر از کلاسیک است.

در شکل ۶ جابجایی میکرولوله حامل سیال به ازای مقادیر مختلف نسبت جرمی β که نسبت جرم سیال به مجموع جرم سیال و لوله می-باشد و شرایط مرزی دوسرهمفصل رسم گردیده است. همانطور که انتظار می رود با افزایش نسبت جرمی، مقدار تغییر مکان افزایش یافته و حداکثر آن در انتهای زمان بی بعد شده رخ خواهد داد، که حداکثر این مقدار به ازای $\beta = 0.1$ برابر 0.3306 و به ازای $\beta = 0.7$ حداکثر جابجایی 0.34330 است. در شکل ۷ ملاحظه می شود که با افزایش پارامتر بی بعد شده سرعت V ، جابجایی بدون بعد افزایش می یابد. البته مشخص است که این جابجایی در بازه ی زمان واحد در نظر گرفته برای شرایط تکیه گاهی دوسرهمفصل با افزایش پارامتر سرعت، در انتها به حداکثر مقدار خود می رسد. این در حالی است که این از لحاظ فیزیکی نیز ثابت شده است که با افزایش سرعت سیال، مقدار جابجایی نیز افزایش می یابد. این امر نشان دهنده ی وابستگی رفتار میکرولوله به پارامترهای مختلف از جمله پارامتر سرعت سیال می باشد.

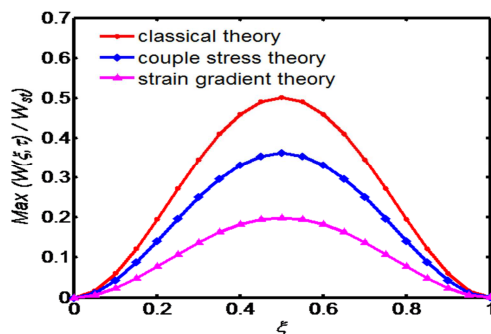
جهت مطالعه تاثیر هارمونیک و غیرهارمونیک بودن نیروی متحرک بر تغییر مکان عرضی میکرولوله حامل سیال به ازای پارامتر بی بعد شده Ω ، شکل ۸ ترسیم شده است. در این شکل محور عمودی تغییر مکان بی بعد شده و محور افقی طول بی بعد شده است. مشاهده می شود که در طول بی بعد ابتدایی، اختلاف بین نمودارها ناچیز است و با افزایش آن اختلاف بین آن ها افزایش می یابد، بطوری که در میانه میکرولوله به حداکثر مقدار خود می رسد. تفسیر چنین رفتاری می تواند اثر نیروهای خارجی متحرک که بیشترین تاثیر را در مرکز دارد باشد. در همین رابطه، مشاهده می شود که با افزایش مقادیر فرکانس تحریک تا $\Omega = 3$ ، تغییر مکانی مشابه با تغییر مکان ناشی از نیروی غیرهارمونیک حاصل می شود.



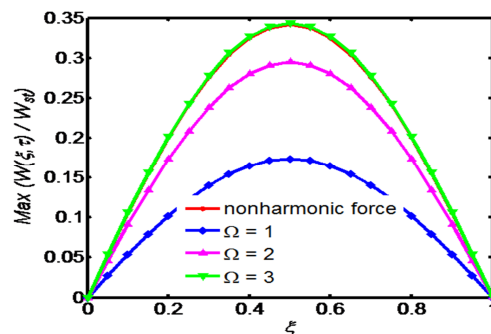
شکل ۷- تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی بعد شده سرعت V برای شرایط مرزی دوسرهمفصل



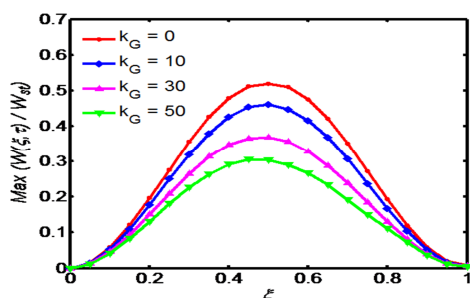
شکل ۶- تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله به ازای مقادیر مختلف نسبت جرمی β برای شرایط مرزی دوسرهمفصل



شکل ۹- حداکثر تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله برحسب پارامتر مکان، براساس تئوری های مختلف و شرایط تکیه گاهی دوسرگیردار



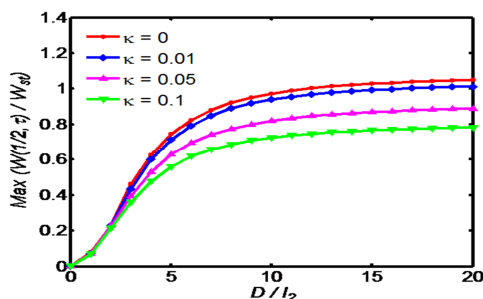
شکل ۸- حداکثر تغییر مکان بی بعد شده میکرولوله به ازای مقادیر مختلف پارامتر فرکانس تحریک Ω برای شرایط مرزی دوسرهمفصل



شکل ۱۰- حداکثر تغییر مکان بی‌بعد شده میکرولوله به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد شده مدول برشی بستر پسترناک k_G برای شرایط مرزی دوسرگیردار

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده با استفاده از تئوری الاستیسیته کلاسیک (CT)، کوپل تنش (CST) و گرادیان کرنش مرتبه اول (SGT) برای شرایط مرزی دوسرهمفصل و دوسرگیردار

دوسرهمفصل			
SGT	CST	CT	مود
۲۲/۲۶۰۸۱	۱۹/۶۸۴۱۱	۱۸/۵۶۸۸۲	۱
۶۹/۳۵۴۱۴	۵۵/۵۰۴۲۵	۴۸/۹۷۰۵۴	۲
۱۴۸/۰۷۷۱۰	۱۱۴/۷۷۰۹۵	۹۸/۵۷۳۱۴	۳
دوسرگیردار			
SGT	CST	CT	
۳۹/۶۳۰۰۶	۳۱/۸۴۱۷۴	۲۸/۱۷۵۹۳	۱
۱۰۳/۲۶۵۹۸	۸۰/۲۳۵۴۱	۶۹/۰۷۰۵۳	۲
۱۹۸/۲۱۹۳۲	۱۵۱/۸۱۱۵۵	۱۲۹/۰۱۱۶۱	۳



شکل ۱۱- حداکثر تغییر مکان بی‌بعد شده میکرولوله به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد شده ضریب میرایی ساختاری ویسکوالاستیک κ برای شرایط مرزی دوسرگیردار

۶- نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات یک میکرولوله همگن حامل سیال، واقع بر بستر پسترناک با درنظر گرفتن تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش مرتبه اول بررسی شد. با استفاده از روش عددی، به بررسی تاثیر تغییرات پارامترهای بی‌بعد شده مختلف مانند سرعت نیروی متحرک، نسبت سرعت نیروی متحرک به سرعت سیال، تاثیر شرایط مرزی، پارامترهای مدول الاستیک وینکلر، مدول برشی بستر پسترناک و ضریب میرایی ساختاری ویسکوالاستیک بر تغییر مکان عرضی میکرولوله پرداخته شد. همچنین همگرایی این نتایج را با نتایج عددی حاصل از روش ترکیبی گالرکین- رانگ کوتا مرتبه چهار مقایسه شده و ملاحظه شد که این روش بسیار کارآمد و قابل اطمینان است؛ همچنین

جدول ۲- حداکثر مقدار جابجایی میکرولوله با بکارگیری روش گالرکین- مربعات دیفرانسیلی و روش گالرکین- رانگ کوتا مرتبه چهار بر حسب پارامترهای بی‌بعد سرعت، نسبت جرمی، نسبت سرعت برای شرایط مرزی دوسرگیردار

پارامتر بی‌بعد	مقادیر مختلف	روش گالرکین- رانگ کوتا مرتبه چهار	روش گالرکین- مربعات دیفرانسیلی
V	۱	۰/۳۳۲۴۵	۰/۳۳۲۳۲
	۳	۰/۵۵۵۹۱	۰/۵۵۵۸۳
	۵	۰/۶۹۸۰۲	۰/۶۹۷۹۵
β	۰/۱	۰/۳۶۴۹۹	۰/۳۶۴۶۲
	۰/۳	۰/۴۷۷۹۰	۰/۴۷۷۵۳
	۰/۷	۰/۵۴۳۸۰	۰/۵۴۳۶۹
ψ	۰/۵	۰/۳۴۳۹۰	۰/۳۴۳۳۶
	۱	۰/۴۱۲۰۶	۰/۴۱۱۸۶
	۳	۰/۵۳۴۱۵	۰/۵۳۳۹۸

جهت مطالعه اثر مدول برشی بستر پسترناک با شرایط مرزی دو- سرگیردار بر حداکثر جابجایی میکرولوله، شکل ۱۰ ارائه گردیده و به ازای مقادیر بی‌بعد $k_G = 0, 10, 30, 50$ رسم شده است. نسبت خیز دینامیکی میکرولوله بر خیز استاتیکی بدست آمده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش مرتبه اول برحسب طول بی‌بعد شده میکرولوله ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در میانه میکرولوله نسبت به مابقی نقاط، اختلاف بین نمودارها افزایش می‌یابد. علاوه بر این با افزایش مدول برشی بستر پسترناک مقدار جابجایی کاهش می‌یابد، که تعبیر فیزیکی آن روشن است که با افزایش اثرات مدول بستر سفتی سازه بیشتر می‌شود. لازم به ذکر است که مقادیر جابجایی غیر- محلی با استفاده از نتایج حاصل از تئوری کلاسیک $W_{st} = \frac{F_0 L^3}{192EI}$ نرمال شده است.

در جدول ۳ اثرات شرایط مرزی مختلف و تئوری الاستیسیته کلاسیک و غیرکلاسیک بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده میکرولوله در غیاب جریان سیال و پارامتر ویسکوالاستیک بررسی شده است. همان‌طور که مشخص است، شرایط مرزی دوسرهمفصل فرکانس کمتری نسبت به گیردار- گیردار پیش بینی می‌کند. همچنین در تئوری کلاسیک، فرکانس طبیعی نسبت به تئوری کوپل تنش و گرادیان کرنش کمتر می‌باشد.

علاوه بر این در شکل ۱۱ جابجایی ناشی از نیروی خارجی برحسب مقادیر نسبت قطر به پارامتر مقیاس طول میکرولوله به ازای مقادیر مختلف κ ترسیم شده است. با مشاهده نتایج و تحلیل آن مشخص می‌شود که با افزایش نسبت قطر به پارامتر مقیاس تا یک بازه‌ای خاص مقدار تغییر مکان افزایش یافته و بعد از آن مقدار جابجایی ثابت می‌گردد و مقدار آن به سمت خیزی که از تئوری کلاسیک بدست می‌آید میل می‌کند. بنابراین می‌توان این‌گونه بیان نمود که با افزایش قطر میکرولوله، تاثیر تئوری‌های غیرمحلی بر تغییر مکان کاهش می‌یابد.

International Journal of Engineering Science, Vol. 64, No.1, pp. 37-53, 2013.

- [15] Şimşek M., Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 4, pp. 904-917, 2010.
- [16] Kong S., Zhou S., Nie Z. and Wang K., Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.
- [17] Wang C., Zhang Y., Ramesh S. S. and Kitipornchai S., Buckling analysis of micro-and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 39, No. 17, pp. 3904-3920, 2006.
- [18] Reddy J., Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [19] Mahmoud F., Eltaher M., Alshorbagy A. and Meletis E., Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite element, *Journal of mechanical science and technology*, Vol. 26, No. 11, pp. 3555-3563, 2012.
- [20] Wang C., Zhang Y. and He X., Vibration of nonlocal Timoshenko beams, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 10, pp. 105-121, 2007.
- [21] Ji B., Chen W. and Zhao J., Measurement of length-scale and solution of cantilever beam in couple stress elastoplasticity, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 25, No. 3, pp. 381-387, 2009.
- [22] Misiurek K. and Sniady P., Vibration of sandwich beam due to a moving force, *Composite Structures*, Vol. 104, No. 1, pp. 85-93, 2013.
- [23] Sung Y. G., Modelling and control with piezoactuators for simply supported beam under moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 4, pp. 617-626, 2002.
- [24] Tajalli S., Rahaeifard M., Kahrobaiyan M., Movahhedy M., Akbari J. and Ahmadian M., Mechanical behavior analysis of size-dependent micro-scaled functionally graded Timoshenko beams by strain gradient elasticity theory, *Composite Structures*, Vol. 102, No. 1, pp. 72-80, 2013.
- [25] Ansari R., Gholami R., Shojaei M. F., Mohammadi V. and Sahmani S., Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory, *Composite Structures*, Vol. 100, No.1, pp. 385-397, 2013.
- [26] Ghorbanpour Arani A., Amir S., Dashti P. and Yousefi M., Flow-induced vibration of double bonded visco-CNTs under magnetic fields considering surface effect, *Computational Materials Science*, Vol. 86, No. 1, pp. 144-154, 2014.
- [27] Wang L., Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 26, No. 4, pp. 675-684, 2010.
- [28] Mindlin R. and Eshel N., On first strain-gradient theories in linear, elasticity *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 109-124, 1968.
- [29] Benjamin T. B., Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. I. Theory, in *Proceeding of, The Royal Society*, Vol. 21, No. 1, pp. 457-486, 1997.
- [30] Ghavanloo E. and Fazelzadeh S. A., Flow-thermoelastic vibration and instability analysis of viscoelastic carbon nanotubes embedded in viscous fluid, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 1, pp. 17-24, 2011.
- [31] Bellman R. and Casti J., Differential quadrature and long-term integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.
- [32] Bert C. W. and Malik M., Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.
- [33] Khalili S., Jafari A. and Eftekhari S., A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2497-2511, 2010.
- [34] Şimşek M., Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1721-1732, 2010.

هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد.

با بررسی نتایج مشخص شد که استفاده از تئوری‌های غیرمحمولی باعث کاهش تغییر مکان بی‌بعد شده و انعطاف پذیری میکرولوله، نسبت به میکرولوله مدل شده در تئوری کلاسیک، کاهش یافته و رفتار سفت-تری نسبت به مدل کلاسیک نشان می‌دهد. علاوه بر این افزایش پارامتر مدول وینکلر، مدول برشی بستر پسترناک و همچنین ضریب میرایی ساختاری ویسکوالاستیک، با کاهش خیز میکرولوله در شرایط مرزی مختلف همراه است. لازم به ذکر است که حداکثر تغییر مکان برحسب طول بی‌بعد شده میکرولوله، با افزایش مقادیر مختلف پارامترهای بدون بعد سرعت، نسبت جرمی و نسبت سرعت برای شرایط مرزی دوسر-گیردار و تکیه گاه دوسرمفصل موجب افزایش حداکثر تغییر مکان شده و با تعبیر فیزیکی آن همان‌طوری که انتظار می‌رود همخوانی داشته است.

۷- مراجع

- [1] Eringen A. C., Nonlocal polar elastic continua, *International journal of engineering science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.
- [2] Lam D., Yang F., Chong A., Wang J. and Tong P., Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [3] Rinaldi S., Prabhakar S., Vengallatore S. and Paidoussis M. P., Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: Damping, frequency shift, and stability, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 8, pp. 1081-1088, 2010.
- [4] Lee H.-L. and Chang W.-J., Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory, *Journal of Applied Physics*, Vol. 103, No. 2, pp. 024302, 2008.
- [5] Reddy C., Lu C., Rajendran S. and Liew K., Free vibration analysis of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes, *Applied Physics Letters*, Vol. 90, No. 13, pp. 133122, 2007.
- [6] Wang L., Ni Q., Li M. and Qian Q., The thermal effect on vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 40, No. 10, pp. 3179-3182, 2008.
- [7] Yan Y., Wang W. and Zhang L., Noncoaxial vibration of fluid-filled multi-walled carbon nanotubes, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 1, pp. 122-128, 2010.
- [8] Yoon J., Ru C. and Mioduchowski A., Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 9, pp. 1326-1336, 2005.
- [9] Natsuki T., Ni Q.-Q. and Endo M., Wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes filled with fluids, *Journal of applied physics*, Vol. 101, No. 3, pp. 034319, 2007.
- [10] Fleck N., Muller G., Ashby M. and Hutchinson J., Strain gradient plasticity: theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, pp. 475-487, 1994.
- [11] McFarland A. W. and Colton J. S., Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 1060-1080, 2005.
- [12] Stölken J. and Evans A., A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14, pp. 5109-5115, 1998.
- [13] Yang F., Chong A., Lam D. and Tong P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [14] Şimşek M. and Reddy J., Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory,