

تحلیل عددی ورقهای نازک ایزوتروپ و ارتوتروپ به کمک روش بدون شبکه محلی پترو گالرکین (MLPG) با اشکال هندسی گوناگون

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد جاسب، دلیجان، ایران
استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

حامد عدالتی
بهزاد سلطانی*

چکیده

در مقاله حاضر به کمک یکی از روشهای بدون المان به تحلیل استاتیکی ورقهای نازک با اشکال هندسی گوناگون بر مبنای تئوری کلاسیک میندلین پرداخته شده است. در این روش عددی دامنه مسئله، تنها توسط مجموعه ای از گره ها بیان می شود و به هیچگونه شبکه بندی نیاز نیست. برای بیان دامنه مسائل با اشکال هندسی گوناگون ابتدا مجموعه ای از گره ها در یک دامنه مستطیلی استاندارد تعریف می شوند، سپس توسط یک نگاشت این گره ها به دامنه مسئله اصلی انتقال می یابند، بنابراین می توان ورقهای با اشکال هندسی مختلف را تحلیل کرد. جهت حل مسائل از روش بدون شبکه محلی پتروگالرکین (MLPG) استفاده می شود. روش مذکور جزء روشهای انتگرالی فرم ضعیف می باشد که از توابع شکل MLS استفاده می کند. با توجه به عدم خاصیت دلتا کرونگر در توابع شکل MLS، چون در این روش دستگاه معادلات گره به گره تشکیل می شود، می توان شرایط مرزی را بصورت مستقیم اعمال کرد. برای نشان دادن صحت روش حل، جوابهای روش حاضر با نتایج حاصل از حل تحلیلی و روش المان محدود مقایسه خواهد شد. پس از تایید صحت روش حل به حل چند مسئله جدید پرداخته می شود.

واژه های کلیدی: روش بدون شبکه گالرکین، تئوری ورق ها، حل عددی فرم ضعیف، تحلیل تنش.

Analysis of Thin Isotropic and Orthotropic Plates Using Meshless Local Petrov-Galerkin Method With Various Geometric Shapes

H. Edalati

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Jasp branch, Delijan, Iran

B. Soltani

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract

Utilizing one of the mesh free methods, the present paper concerns static analysis of thin plates with various geometric shapes based on the mindlin classical plate theories. In this numerical method, the domain of issue is solely expressed through a set of nodes and no mesh is required. To express the domain of issues with various geometric shapes, first a set of nodes are defined in a standard rectangular domain, then via a map, these nodes are transferred to the main domain of the original issue. Therefore plates of various geometric shapes can be analyzed. The meshless local petro galrkin method (MLPG) is utilized here. The method is one of the weak form integral methods that uses MLS shape functions for approximation. Regarding the absence of Delta feature in MLS functions, because of in MLPG, the system equation is constructed node by node therefore direct interpolation method can be used to enforce essential boundary conditions. Outputs are compared with those of analytic and finite element methods, in order to validate the solution method, a few new examples will be solved.

Keywords : Mesh free, Plate's theory, Weak form integral, stress analysis.

۱- مقدمه

مهمترین پیشرفت در روشهای عددی توسعه روش المان محدود^۱ در سال ۱۹۵۰ بود [۱]. در روش المان محدود یک محیط پیوسته و پیچیده به المانهای کوچکتر تقسیم می شود و المانها بوسیله یک نگاشت به هم متصل هستند. المان محدود یک روش توسعه یافته و قوی برای حل مسائل خطی و غیر خطی مهندسی است [۱].
علی رغم مزایای زیاد روش المان محدود این روش شامل ضعفهایی نیز هست که عبارتند از: الف) هزینه بالای شبکه بندی دامنه

مسئله، ب) دقت پایین در محاسبه تنشها، ج) مشکلات در حل مسائل تطابقی^۲، د) محدودیت در حل بعضی از مسائل (مسائل با تغییر شکل بزرگ و شکست). که ریشه اصلی این مشکلات ناشی از شبکه بندی دامنه مسئله است.

در طی سالهای اخیر برای حل این مشکلات، روشهای جدید محاسباتی ارائه شده است که بر خلاف روش المان محدود به شبکه بندی دامنه مسئله نیاز نیست. که اینها را روشهای بدون المان یا بدون شبکه^۳ می نامند. در این گونه روشها تنها با مجموعه ای از گره ها که در دامنه مسئله توزیع می شوند، جهت حل معادلات دیفرانسیل حاکمه

¹ Difficulty in adaptive analysis

² mesh free or mesh less

¹ Finite element method

مسئله استفاده می‌شوند. مزایای روشهای بدون شبکه باعث شده که در سالهای اخیر توجه بسیاری از محققین در زمینه مکانیک محاسباتی به این دسته از روشها جلب شود و تحقیقات گسترده‌ای در زمینه توسعه این روشها انجام داده‌اند.

روش بدون شبکه، روش ایجاد معادلات جبری برای تمام دامنه مسئله بدون شبکه بندی (گسسته سازی) دامنه آن است. این روش از یک سری نقاط که در داخل دامنه و روی مرز مسئله گسترش یافته‌اند برای گسسته سازی، ساخت توابع شکل و حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌کند. مزایای روشهای بدون شبکه باعث شده که در سالهای اخیر محققین زیادی در این زمینه به تحقیق و توسعه آنها بپردازند.

ساده ترین روش بدون شبکه روش تفاضل محدود^۱ است که در سال ۱۹۳۷ و ۱۹۳۸ بیان شد [۲]. یکی از معروفترین روشهای حل بدون شبکه روش اس پی اچ^۲ است که در سال ۱۹۷۷ ارائه شد که در تحلیل پدیده های علم نجوم همچون انفجار ستاره‌ها، مدل سازی توده‌های غبار و مسائل بدون مرز استفاده می‌شود [۱]. بعدها این روش در زمینه حل مسائل مکانیک سیالات و جامدات استفاده شد [۳، ۴]. به دلیل ناپایدار بودن روش حل اس پی اچ، یک تابع تصحیح توسط لیو و همکارانش ارائه شد و آن را روش حل آر کی پی ام^۳ نامیدند [۵، ۶]. تحقیق و توسعه روش های حل بدون شبکه فرم ضعیف از سال ۱۹۹۰ شروع شد که منجر به ارائه چندین روش جدید شد. در سال ۱۹۹۴ روش بدون شبکه گالرکین^۴، در سال ۱۹۹۹ روش بدون شبکه محلی پتروف گالرکین^۵، در سال ۱۹۹۹ روش درون یابی نقاط^۶، در سال ۲۰۰۱ روش شعاعی درون یابی نقاط^۷ [۱] ابداع گردیده‌اند. و به نظر می‌رسد این روشها با توجه به عمر کم‌شان توانایی رقابت با روشهای المان محدود را خواهند داشت.

در زمینه روشهای حل بدون شبکه فرم قوی تحقیقات کمتری انجام شده است. این ممکن است تا حدی به دلیل ناپایدار بودن این روش در مقایسه با روش فرم ضعیف و از طرف دیگر به دلیل نزدیکتر بودن روش حل فرم ضعیف با روش المان محدود باشد.

ورقها از اجزای جدا نشدنی صنایع امروز محسوب می‌شوند. با توجه به کاربردهای گوناگون ورقها در صنایع مختلف آنالیز و تحلیل آنها مهم است. رفتار ورقها در حالات مختلف دینامیکی و استاتیکی می‌تواند توسط معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی بیان کرد. که به خاطر پیچیدگی معادلات حل تحلیلی تعداد محدودی از آنها امکان پذیر است. بنابراین دانشمندان برای حل این معادلات همراه با توسعه کامپیوتر به سمت روشهای حل عددی (تقریبی) رفته‌اند. که جدیدترین روشهای عددی، روش بدون شبکه می‌باشد، که در آنالیز ورقها نیز استفاده شده است. بلیچکو و همکارانش از روش بدون شبکه EFG برای آنالیز ورقها و پوسته های نازک استفاده کردند [۷]. این روش همچنین برای آنالیز تیر

اولر- برنولی و ورق کیرشلف [۸]. کماتش ورقهای نازک [۹] و ورقهای کامپوزیت مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰].

سلطانی و همکارانش از روش RKPM ورقهای FGM تقویت شده تحت بارهای خمشی را تحلیل کردند [۱۱]، آنالیز ورقهای دایره‌ای پیزوالکتریک با روش MLPG توسط سلاک و همکارانش انجام شد [۱۲]. لیو و همکارانش در مقاله‌ای به جمع آوری تحقیقات انجام شده در زمینه روشهای بدون شبکه پرداختند [۱۳].

در این مقاله از روش حل بدون شبکه MLPG به کمک یک نگاشت جهت تحلیل مسائل ورق با هر هندسه دلخواهی استفاده شده‌است. برای نشان دادن دقت روش حل، نتایج با حل های تحلیلی و المان محدود مقایسه می‌شود.

در روش حل MLPG با توجه به عدم خاصیت دلتای کروکر در تابع تقریب اما بدلیل تشکیل دستگاه معادلات بصورت گره به گره می‌توان شرایط مرزی را بصورت مستقیم اعمال کرد. هنگام استفاده از روش بدون شبکه در تئوری کلاسیک ورقها هر گره فقط یک متغیر جایجایی در جهت محور عمودی را دارد لذا نمی‌توان دو شرط مرزی را همزمان به یک گره اعمال کرد بنابراین در این مقاله از شرایط مرزی همسایگی استفاده شده است.

۲- تابع شکل MLS

در روش بدون شبکه گالرکین از تابع تقریب MLS استفاده می‌کند. این تابع تقریب بصورت تابعی از سریها در سال ۱۹۹۳ ارائه شد. در این تابع شکل یک متغیر اسکالر مانند $u(x)$ در دامنه Ω و در نقطه x بصورت زیر بیان می‌شود [۱۴].

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = P^T(x) a(x) \quad (1)$$

$P(x)$ تابع پایه و m تعداد توابع پایه است. تابع $P(x)$ اغلب به صورت تک جمله ای از مثلث پاسکال ساخته می‌شود تا حداقل نیازها را ارضا کند. در بعضی مسائل خاص با بالا بردن درجه تابع پایه می‌توان عملکرد تابع تقریب MLS را بهتر کرد. $a(x)$ بردار ضرایب است که بصورت زیر است.

$$a^T(x) = \{a_1(x) \ a_2(x) \ \dots \ a_m(x)\} \quad (2)$$

توجه کنید بردار ضرایب مجهول $a(x)$ در معادله (۲) تابعی از x هستند. که این ضرایب بوسیله مینیم کردن تابع زیر حاصل می‌شود.

$$J = \sum_{i=1}^n \hat{W}(x - x_i) [P^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (3)$$

n تعداد گره‌های داخل دامنه محلی نقطه دلخواه x ، $\hat{W}(x - x_i) \neq 0$ تابع وزن، u_i مقدار متغیر u در $x = x_i$ است. معادله (۳) معادله باقیمانده وزن دار نامیده می‌شود. و بدلیل اینکه تعداد گره ها n که در معادله تقریب MLS استفاده می‌شود اغلب از تعداد مجهولات m بیشتر است لذا تابع تقریب u^h از تمام گره‌ها عبور نمی‌کند. از پایداری معادله J نسبت به $a(x)$ داریم

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (4)$$

از ساده سازی معادله بالا دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود.

$$A(x) a(x) = B(x) U_s \quad (5)$$

$$U_s = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^T \quad (6)$$

¹ finite difference method (FDM)

² Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

³ reproducing kernel particle method (RKPM)

⁴ Element Free Galerkin (EFG)

⁵ Meshless Local Petrov-Galerkin method (MLPG)

⁶ Point Interpolation method (PIM)

⁷ Radial Point Interpolation method (RPIM)

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w = z L_d w \quad (13)$$

روابط تنش‌ها نیز بصورت روابط زیر بیان می‌شود

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = z c L_d w \quad (14)$$

که در مواد ایزوتروپیک ماتریس سختی بصورت زیر است [۱۵].

$$c = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

در مواد کامپوزیت که بصورت مواد ارتوتروپیک مدل می‌شوند در حالت تنش صفحه‌ای ماتریس سختی بصورت زیر بیان می‌شود. [۱۶].

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (16)$$

که $\bar{Q}_{ij}$ با استفاده از ماتریس انتقال زیر محاسبه می‌شود

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \quad (19)$$

θ زاویه پیچش الیاف است، Q_{ij} مولفه‌های ماتریس سختی در دستگاه مختصات اصلی (در جهت الیاف و در جهت عمود بر الیاف) می‌باشند. این ماتریس برحسب خواص فیزیکی ورق در جهات اصلی بصورت زیر بیان می‌شود.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12} \\ \nu_{12}E_2 &= \nu_{21}E_1 \end{aligned} \quad (21)$$

از روابط بیان شده می‌توان نتیجه گرفت، که معادلات تنش، توابع خطی بر حسب فاصله عمودی تا صفحه میانی (بر اساس فرضیات) می‌باشند. در اینجا دو پارامتر شبه کرنش و شبه تنش بصورت زیر تعریف می‌شود که در مقطع ورق ثابت و مستقل از مقدار z می‌باشند

$$\varepsilon_p = L_d w \quad (22)$$

U_s بردار مقدار متغیرها در گره‌های داخل دامنه محلی است. و $A(x)$ که ماتریس وزن نامیده می‌شود.

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \bar{W}_i(x) P(x_i) P^T(x_i) \quad (23)$$

$$\bar{W}_i(x) = \bar{W}(x - x_i) \quad (24)$$

ماتریس $B(x)$ در معادله (۵) بصورت زیر تعریف می‌شود

$$B(x) = [\hat{W}_1(x) P(x_1) \hat{W}_2(x) P(x_2) \cdots \hat{W}_n(x) P(x_n)] \quad (25)$$

با حل معادله (۵) برای $a(x)$ و جایگذاری در معادله (۱) رابطه زیر حاصل می‌شود

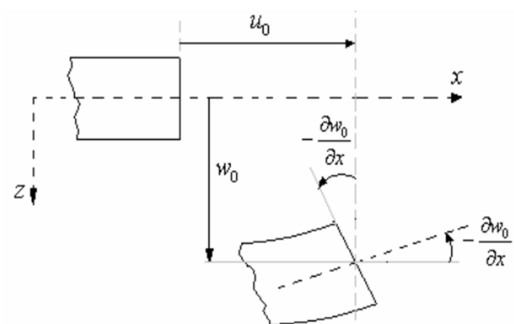
$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \phi^T(x) U_s \quad (26)$$

در اینجا $\phi(x)$ بردار تابع شکل MLS برای n گره داخل ناحیه محلی نقطه دلخواه x است که بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \phi^T(x) &= [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x)]_{(1 \times n)} \\ &= P^T(x) A^{-1}(x) B(x) \end{aligned} \quad (27)$$

۳- تئوری ورقها

یک ورق با دامنه Ω را مطابق با شکل (۱) در نظر بگیرید. مقادیر جابجایی در راستای محورهای x, y, z به ترتیب با u, v, w نشان داده می‌شود.



شکل ۱ نمای یک ورق و سیستم مختصات آن

با توجه به فرضیات کیرشف مقادیر u, v را بصورت تابعی از z (فاصله تا صفحه میانی) می‌توان بیان کرد.

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial}{\partial x} \\ -z \frac{\partial}{\partial y} \\ 1 \end{Bmatrix} w = L_u w \quad (28)$$

با جایگذاری روابط جابجایی در معادلات کرنش داریم

$$\sigma_p = D \varepsilon_p = D L_d w \quad (23)$$

ماتریس D در مواد ایزوتروپیک و کامپوزیت بترتیب بصورت زیر بیان می شود

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nl} [\bar{Q}_{ij}]_k [z_k^3 - z_{k-1}^3] \quad (25)$$

۴- اعمال شرایط مرزی اجباری

شرایط مرزی در ورق ها بصورت زیر بیان می شود [۱۵]

$$u_\Gamma = u_b \quad \Gamma_u = \Gamma_w \cup \Gamma_\theta \quad (26)$$

u_b برداری شامل جابجایی عرضی و چرخشی روی مرزهای شامل شرایط اجباری در ورق ها است . بصورت زیر تعریف می شود.

$$u_b = L_b W \quad (27)$$

بردار عملگر دیفرانسیلی است که در شرایط تکیه گاهی مختلف بصورت زیر تعریف می شود
تکیه گاه ثابت

$$L_b = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

تکیه گاه مفصلی

$$L_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

۵- روش بدون شبکه محلی پترو گالرکین MLPG

در روش MLPG نیز از تابع تقریب MLS استفاده می شود. روش MLPG توسط آتلوری^۱ و همکارانش در سال ۱۹۹۸ ارائه شد [۱۷] که توسط دیگر محققان در حل مسائل الاستو استاتیکی، الاستو دینامیک، تحلیل تیرهای نازک و کلفت، تحلیل ورقها و پوسته ها، جریان سیال، مکانیک شکست و ... در حال استفاده و توسعه می باشد.

روش بدون شبکه EFG بر اساس پروسه حل فرم ضعیف کلی گالرکین می باشد که در این روش برای انتگرال گیری عددی به یک شبکه بندی پس زمینه نیاز است لذا این روش حل کاملا بدون شبکه نیست. برای اجتناب از شبکه بندی کلی دامنه مسئله، روش حل فرم ضعیف محلی پترو گالرکین MLPG ارائه شد، که در این روش برای انتگرال گیری عددی از دامنه های کوادراچر محلی هر گره استفاده می شود.

همانطور که گفته شد در این روش نیز از تابع شکل MLS استفاده می شود و با توجه به این نکته که این تابع تقریب خاصیت دلتای

کرونکر را ندارد لذا برای اعمال شرایط مرزی اجباری^۲ باید از تمهیداتی استفاده کرد که در اینجا از روش مستقیم استفاده می شود.
در روش MLPG معادلات حاکمه با استفاده از روش فرم ضعیف باقیمانده های وزن دار بیان می شوند.

$$\int_{\Omega_s} \hat{V} (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{qu}} \hat{V} (w_i - \bar{w}_i) d\Gamma = 0 \quad (30)$$

$\hat{V}$ تابع وزن یا تست، انتگرال دوم روی مرز مسئله و برای ارضای شرایط مرزی اجباری، Ω_q دامنه مسئله، Γ_{qu} ناحیه روی مرز مسئله با شرایط مرزی اجباری و α ضریب پنالتی است. اگر در اعمال شرایط مرزی از روش پنالتی استفاده شود معادله حاکمه بصورت معادله (۳۰) می باشد ولی چون در این تحقیق از روش مستقیم استفاده می شود معادله حاکمه بصورت زیر است.

$$\int_{\Omega_s} \hat{V} (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (31)$$

باجایگذاری معادلات (۲۳) و (۲۷) در معادله (۳۱) و ساده سازی معادله حاکمه روش MLPG برای ورقها بصورت زیر بیان می شود

$$\int_{\Omega_q} \hat{V} (D \nabla^4 w - b) d\Omega = 0 \quad (32)$$

با قرار دادن معادله تقریب (۳۰) در معادله حاکمه (۳۲) و ساده سازی و استفاده از تکنیک انتگرال جزء به جزء فرم ماتریسی معادله تعادل بصورت زیر حاصل می شود.

$$[K] \{W\} = \{F\} \quad (33)$$

$[K]$ ماتریس سختی، $[W]$ بردار تغییر مکان، $[F]$ بردار نیرو است. هر کدام از ماتریسها بصورت زیر محاسبه می شود.

$$[K] = [K]_\Omega + [K]_i \quad (34)$$

$$[K]_{ij} = \int_{\Omega_s} \left\{ \hat{V}_{i,xx} \quad \hat{V}_{i,yy} \quad \hat{V}_{i,xy} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{j,xx} \\ \phi_{j,yy} \\ \phi_{j,xy} \end{bmatrix} d\Omega \quad (35)$$

$$[K]_{ij} = \int_{\Gamma_{si}} [B_{ij}] d\Gamma \quad (36)$$

$$[B_{ij}] = \hat{V}_i \left[(D_{11}\phi_{j,xxx} + (D_{12} + 2D_{66})\phi_{j,xyy})n_x + (D_{22}\phi_{j,yyy} + (D_{12} + 2D_{66})\phi_{j,xyy})n_y \right] - \hat{V}_{i,x} \left[(D_{11}\phi_{j,xx} + D_{12}\phi_{j,yy})n_x + 2D_{66}\phi_{j,xy}n_y \right] - \hat{V}_{i,y} \left[2D_{66}\phi_{j,xy}n_x + (D_{12}\phi_{j,xx} + D_{22}\phi_{j,yy})n_y \right] \quad (37)$$

$$f_i = \int_{\Omega_s} \hat{V}_i f d\Omega - \int_{\Gamma_{sw}} \alpha_1 \hat{V}_i \bar{w} d\Gamma - \int_{\Gamma_{sw}} \alpha_2 \hat{V}_{i,n} \bar{\theta} d\Gamma \quad (38)$$

² essential boundary conditions

¹ Atluri

۷- نتایج عددی

پس از استخراج معادلات و بیان چگونگی عملکرد روش بدون شبکه محلی پتروگالرکین، حال نوبت به آن می رسد که برای اجرایی کردن روش فوق برنامه ای در محیط نرم افزار متلب نوشته شود [۱۹]. با حل چند مثال دقت نتایج و کارایی این روش را با نتایج حل تحلیلی و روش عددی المان محدود مقایسه کرده تا بتوان پس از تایید صحت برنامه کامپیوتری از این برنامه که بر مبنای روش بدون شبکه MLPG می باشد جهت حل مسائلی که تاکنون از این روش به آنها پرداخته نشده بهره برد.

برای نشان دادن صحت برنامه نوشته شده، یک ورق مستطیلی با مشخصات جدول ۱ که حل تحلیلی آن وجود دارد مورد بررسی قرار می گیرد.

جدول ۱- مشخصات هندسی و فیزیکی ورق

ابعاد ورق (متر)	۰/۶×۰/۶
مدول یانگ (GPa)	۲۰۰
ضریب پواسن	۰/۳
ضخامت ورق (متر)	۰/۰۱

برای اینکه بتوان نتایج را عمومیت بخشید خیزها بدون بعد می گردند که در هر قسمت رابطه مربوطه بیان می شود، همچنین در کلیه محاسبات فرمول خطا بصورت زیر است.

$$Error = \frac{\epsilon_{ext} - \epsilon_p}{\epsilon_{ext}} \times 100 \quad (46)$$

ورق نازک مربعی با تکیه گاه های ساده و ثابت تحت بار گسترده

ورقی به ضخامت ۰/۱m تحت نیروی گسترده 100 N/m^2 که از چهار طرف تحت تکیه گاه ساده (مفصلی) قرار دارد در نظر گرفته می شود. فرمول خیز بدون بعد شده در این حالت بصورت زیر است [۲۰].

$$\bar{W} = \frac{W_{max} D}{qb^4} \quad (47)$$

در رابطه فوق q نیرو، b ابعاد ورق می باشد.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (48)$$

نتایج حاصل در جدول ۲ آمده است. در حل دقیق این مثال که توسط تیموشنکو انجام شده است مقدار خیز بدون بعد برابر با ۰/۰۰۴۰۶ است [۲۱]. همچنین نتایج حل این مسئله از روش المان محدود برابر ۰/۰۰۴۰۵ می باشد [۲۲].

در جدول ۳ نتایج تحلیل ورق فوق که از چهار طرف تحت تکیه گاه ثابت قرار دارد را نشان می دهد. در حل دقیق این مثال که توسط تیموشنکو انجام شده است مقدار خیز بدون بعد برابر با ۰/۰۰۱۲۶ است [۲۱]. همچنین در حل به روش المان محدود این مقدار برابر ۰/۰۰۱۲۸۳ حاصل گردیده است [۲۲].

همانطور که مشاهده می کنید دقت نتایج در روش حل بدون شبکه گالرکین نسبت به نتایج المان محدود بیشتر است، و از آنجا در این

به آسانی دیده می شود که ماتریس سختی $[K]$ در این روش نواری و نامتقارن است در صورتیکه ماتریس سختی در روش EFG متقارن بود لذا حجم محاسبات در این روش پر هزینه تر است.

جهت اعمال شرایط مرزی چون در هر گره یک متغیر مجهول وجود دارد لذا نمی توان همزمان دور شرط مرزی را به هر گره اعمال کرد بنابراین از روش اعمال شرط مرزی همسایگی استفاده می کنیم. شرط مرزی همسایگی به این گونه است که در همسایگی گره هایی که روی مرز قرار دارند گره های جدید قرار می دهیم که به اندازه ϵ (حدودا برابر یک میلیونیم فاصله متوسط گره ها است) از آنها فاصله دارند سپس شرایط مرزی جابجایی را به گره های روی مرز و شرایط جابجایی مشتق دار را به گره های همسایگی اعمال می شود.

معادلات حاکم جهت هر گره روی مرز و هر گره همسایگی بترتیب بصورت زیر است

$$w_i = [\phi_1 \dots \phi_n] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \bar{w}_i \quad (39)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial n} = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n} \dots \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial n} \quad (40)$$

۶- نگاشت انتقال

همانطور که ملاحظه کردید معادلات دیفرانسیل حاکمه و معادلات شرایط مرزی برای ورقها در مختصات کارتزین ارائه شده است، لذا ورقهای با هندسه منحنی الشکل را نمی توان به راحتی تحلیل کرد. به این دلیل توسط یک نگاشت محیط منحنی الخط را به محیط مستطیلی شکل می نگاریم. این نگاشت توسط توابع شکل که اغلب در المان محدود بکار می رود صورت می گیرد. هرچه درجه تابع شکل بالاتر باشد دقت نگاشت نیز بهتر است، بنابراین در اینجا از توابع شکل درجه سه استفاده می شود یعنی می توان هر ضلع ورق مورد بررسی را با یک تابع درجه سه مدل کرد [۱۸].

$$x = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (41)$$

$$y = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (42)$$

ξ, η مختصات مرزهای مسئله در فرم استاندارد، x_i, y_i مختصات نقاط مشخص شده روی مرز طبیعی مسئله و N_i توابع شکل می باشند که طبق روابط زیر محاسبه می شوند.

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (43)$$

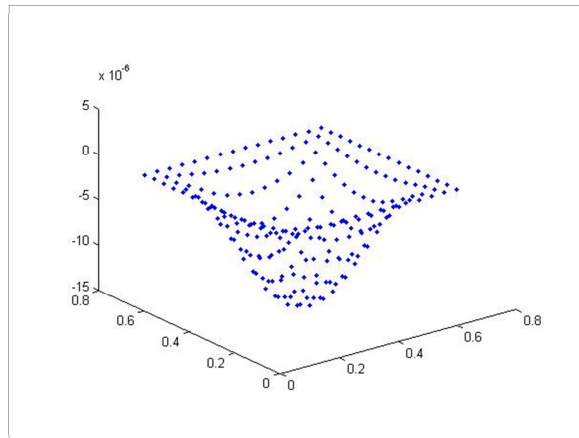
$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + 9\xi_i \xi) \quad (44)$$

$$i = 5, 6, 7, 8$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) (1 + 9\eta_i \eta) \quad (45)$$

$$i = 9, 10, 11, 12$$



شکل ۳- فرم تغییر شکل یافته ورق مربعی با تکیه گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

ورق نازک مستطیلی با تکیه گاه‌های ساده و ثابت تحت بار گسترده

در ادامه به بررسی ورقهای مستطیلی با نسبت های مختلف طول و عرض پرداخته می شود. و نتایج حاصل با نتایج حل های تحلیلی که در مرجع [۲۱] بیان شده مقایسه می شود، نتایج بصورت بی بعد شده طبق رابطه (۴۷) است. جداول ۴ و ۵ جابجایی یک ورق مستطیلی شکل با تعداد 15×15 گره را تحت بار گسترده عرضی 100 N/m^2 به ترتیب تحت شرایط تکیه گاهی ساده و درگیر را نشان می دهد. بدلیل شبیه بدون فرم ورق تغییر شکل یافته ورق مستطیلی با ورق مربعی شکل، از نمایش فرم تغییر شکل یافته ورق مستطیلی شکل صرف نظر شده است.

جدول ۴ جابجایی بی بعد ورق مستطیلی شکل با تکیه گاه مفصلی

عرض / طول	۱/۵	۲	۳	۴
MLPG	۰/۰۰۷۷۲	۰/۰۱۰۱۴	۰/۰۱۲۲۵	۰/۰۱۲۸۹
مرجع [۲۱]	۰/۰۰۷۷۲	۰/۰۱۰۱۳	۰/۰۱۲۲۳	۰/۰۱۲۸۲

جدول ۵ جابجایی بی بعد ورق مستطیلی شکل با تکیه گاه ثابت

عرض / طول	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
EFG	۰/۰۰۱۶۶	۰/۰۰۲۱۲	۰/۰۰۲۳۶	۰/۰۰۲۴۴
مرجع [۲۱]	۰/۰۰۱۷۲	۰/۰۰۲۲۰	۰/۰۰۲۴۵	۰/۰۰۲۵۴

ورق نازک دایره‌ای شکل با تکیه گاه های ساده و ثابت تحت بار گسترده

در اینجا به تحلیل یک ورق دایره ای شکل با مشخصات فیزیکی جدول (۱) و به شعاع یک متر که تحت بار گسترده 100 N/m^2 است پرداخته می شود. نتایج بدست آمده از روش حل بدون شبکه محلی پتروف گالرکین طبق رابطه زیر بی بعد می شوند.

$$\alpha = \frac{w_{\max} E h^3}{p a^4} \quad (49)$$

روش دیگر نیاز به شبکه بندی دامنه مسئله نیست لذا حجم محاسبات شبکه بندی مسئله کاهش میابد.

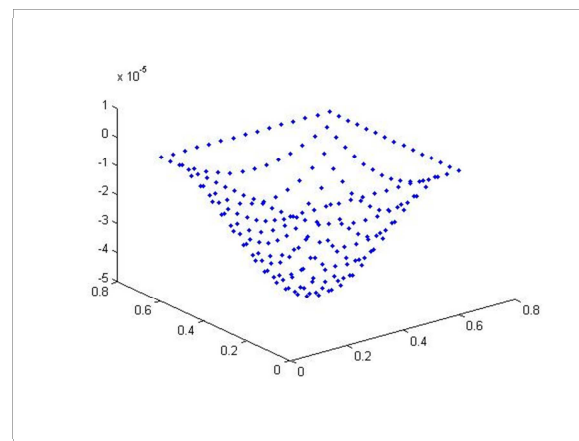
شکل های فرم تغییر شکل یافته ورق مربعی در دو حالت تکیه گاه ساده و گیردار بترتیب در شکل های ۲ و ۳ نشان داده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می شود دامنه مسئله و فرم تغییر شکل ورقها فقط توسط گره ها نشان داده می شود. همچنین با دقت به نوع تغییر شکل گره ها می توان بخوبی تاثیر شرایط مرزی را در نتایج حل مسئله دید.

جدول ۲- خیز بدون بعد ورق مربعی شکل نازک با تکیه گاه ساده تحت بار یکنواخت

تعداد گره	10×10	13×13	15×15	17×17
خیز بدون بعد	۰/۰۰۳۹۰	۰/۰۰۴۰۳	۰/۰۰۳۹۸	۰/۰۰۴۰۸
خطا	۳/۹٪	۰/۷٪	۱/۹۷٪	۰/۵٪

جدول ۳- خیز بدون بعد ورق مربعی شکل نازک با تکیه گاه ثابت تحت بار یکنواخت

تعداد گره	10×10	13×13	15×15	17×17
خیز بدون بعد	۰/۰۰۱۳۰	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۱۲۷
خطا	۳/۱٪	۱/۵٪	۰/۷٪	۰/۷٪



شکل ۲- فرم تغییر شکل یافته ورق مربعی با تکیه گاه ساده تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

جدول ۷ و ۸ نتایج بی بعد شده حاصل از نرم افزار برای نسبت‌های مختلف قطرهای اصلی در حالتی که از 20×20 گره برای بیان دامنه مسئله استفاده شده‌است را نشان می‌دهد.

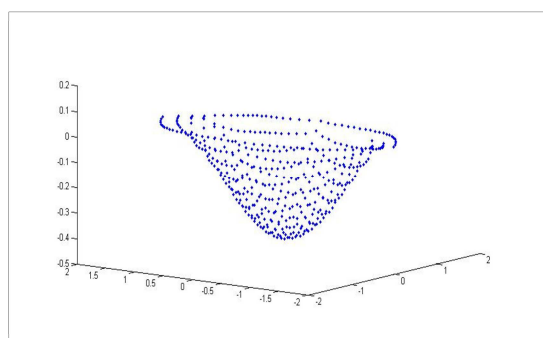
همچنین شکل‌های ۶ و ۷ فرم تغییر شکل یافته ورق بیضی در حالت خاص $a/b = 2$ را برای دو شرایط تکیه گاهی مختلف نشان می‌دهد

جدول ۷- جابجایی بی بعد ورق بیضی شکل با تکیه گاه مفصلی				
a/b	۱/۵	۲	۳	۴
MLPG	۱/۲۳	۱/۵۳	۱/۸۳	۱/۹۸
مرجع [۲۱]	۱/۲۶	۱/۵۸	۱/۸۸	۲/۰۲

جدول ۸- جابجایی بی بعد ورق بیضی شکل با تکیه گاه ثابت				
a/b	۱/۵	۲	۳	۴
MLPG	۰/۲۹۵۸	۰/۳۴۴۳	۰/۳۹۸۳	۰/۴۲۳۶
مرجع [۲۱]	۰/۳۰۴۶	۰/۳۷۰۱	۰/۴۱۸۸	۰/۴۳۵۲

ورق ارتو تروپیک مستطیلی و مربعی شکل تحت بار گسترده

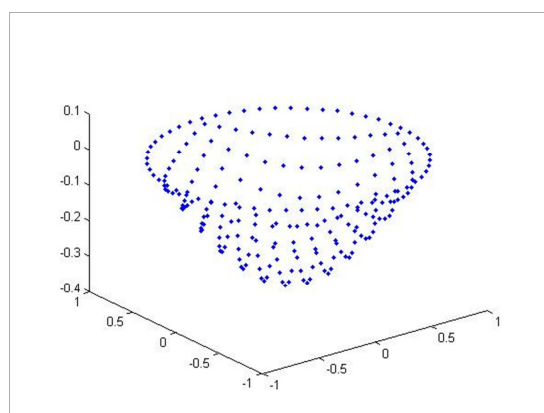
در ادامه به بررسی و مقایسه رفتار ورقهای ارتوتروپیک تحت بار گسترده یکنواخت و شرایط تکیه گاهی ساده و ثابت پرداخته خواهد شد. در جدول (۹) نتایج حاصل از تحلیل ورق ارتوتروپیک با مشخصات $E_1 = 25E_2$, $G_{12} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$ را نشان می‌دهد. حل دقیق این مثال توسط ردی ارائه گردیده و مقدار 0.6497 برای خیز بدون بعد بدست آورده‌است [۲۳].



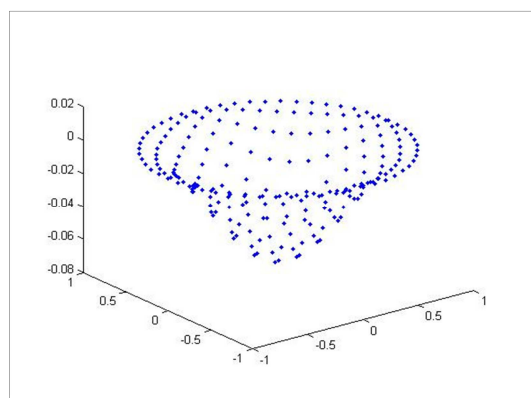
شکل ۶- فرم تغییر شکل یافته ورق بیضی شکل با تکیه گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

با توجه به مقایسه نتایج حاصل شده از برنامه کامپیوتری با نتایج حل تحلیلی مرجع [۲۱] در جدول ۶ دیده می‌شود که در حالتی که از 15×15 گره در دامنه مسئله استفاده می‌شود دقت نتایج بهتر است. باید به این نکته نیز توجه کرد که درصدی از خطای نتایج ناشی از نگاشتی می‌باشد که دامنه دایره ای را به مستطیلی می‌نگارد در شکل های بترتیب ۴ و ۵ فرم تغییر شکل یافته ورق دایره‌ای تحت تکیه گاه ساده و گیردار نشان داده می‌شود

جدول ۶- جابجایی بی بعد ورق دایره ای شکل				
تعداد گره ها	۱۰×۱۰	۱۳×۱۳	۱۵×۱۵	مرجع [۲۱]
مفصلی	۰/۰۵۵۴۴	۰/۰۶۲۴۱	۰/۰۶۲۱۲	۰/۰۶۳۷۰
ثابت	۰/۱۴۲۸	۰/۰۱۵۴۹	۰/۰۱۵۵۳	۰/۰۱۵۶۲



شکل ۴- فرم تغییر شکل یافته ورق دایره ای با تکیه گاه ساده تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی



شکل ۵- فرم تغییر شکل یافته ورق دایره ای با تکیه گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

ورق نازک بیضی شکل با تکیه‌گاه‌های ساده و ثابت تحت بار گسترده

اکنون یک ورق بیضی شکل با مشخصات فیزیکی جدول ۱ بررسی می‌شود و نتایج حاصل از نرم افزار بکمک رابطه (۴۹) بی‌بعد می‌شود. در

جدول ۱۰- جابجایی مرکز ورق دایره ای شکل (بر حسب میلی متر)

مرجع [۲۴]	روش حل MLPG			
تعداد گره ها	۱۰×۱۰	۱۳×۱۳	۱۵×۱۵	
تکیه گاه ثابت	۱/۳	۱/۴	۱/۴	۱/۸۴

ورق هلالی شکل ایزوتروپیک و ارتوتروپیک

با توجه به قابلیت برنامه در تحلیل اشکال مختلف اکنون ورق هلالی شکل که از برخورد یک دایره به شعاع $1m$ و یک بیضی به معادله هندسی $x^2 + 4y^2 = 1$ ایجاد شده است، تحت نیروی گسترده $100 N/m^2$ در دو شرایط تکیه گاهی ساده و ثابت مورد بررسی قرار می گیرد. در جدول ۱۱ نتایج برای دو نوع ورق ایزوتروپیک و ارتوتروپیک مطابق با مشخصات فیزیکی مثال قبل می باشد. شکل ۹ فرم تغییر شکل یافته ورقها از برنامه کامپوتری و نرم افزار آباکوس را نشان می دهد و با هم مقایسه می کند

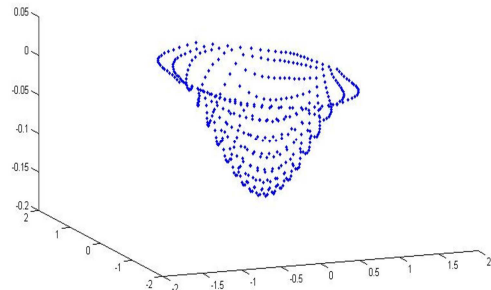
جدول ۱۱- جابجایی مرکز ورق هلالی شکل (بر حسب میلی متر)

نوع ورق	نوع تکیه گاه	روش بدون شبکه EFG با ۴۴۱ گره	نرم افزار Abaqus با ۱۰۸۸ المان
ایزوتروپیک	تکیه گاه مفصلی	۰/۴۹	۰/۴۶
	تکیه گاه ثابت	۰/۰۹۶	۰/۱۰۲
	تکیه گاه مفصلی	۰/۷۳	۰/۸۹۸
ارتوتروپیک	تکیه گاه ثابت	۰/۱۵	۰/۱۸

۸- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی و تحلیل ورق های نازک ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با شکل های گوناگون تحت اثر بارگذاری عرضی بر اساس روش بدون شبکه گالرکین پرداخته شده است. همانطور که در نتایج دیده می شود جوابها با تغییر تعداد گره ها نسبتا پایدار است و این از مزایای روشهای فرم ضعیف است. و از دیگر مزایای این روش می توان به عدم المان بندی ناحیه حل اشاره نمود که در روش المان محدود این پروسه ای پیچیده است لذا در این روش بدلیل عدم شبکه بندی دامنه مسئله محاسبات شبکه بندی حذف می شود.

همچنین می توان در مقایسه با روش المان محدود به مزایایی از قبیل دقیق تر بودن نتایج ، همگرایی سریعتر و تعداد گره های کمتر نسبت به تعداد المانها اشاره کرد.



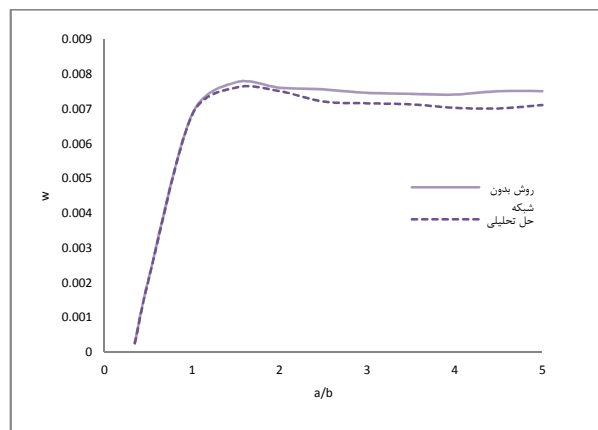
شکل ۷- فرم تغییر شکل یافته ورق بیضی شکل با تکیه گاه گردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

جدول ۹- خیز بدون بعد ورق ارتوتروپیک مربعی شکل نازک با تکیه گاه ساده تحت بار یکنواخت

تعداد گره	۱۰×۱۰	۱۳×۱۳	۱۵×۱۵	۱۷×۱۷
خیز بدون بعد	۰/۶۶۰۲	۰/۶۵۴۷	۰/۶۳۱۳	۰/۶۵۷۷
خطا	۱/۶	۰/۷۷	۲/۸	۱/۲

نتایج المان محدود در حل این مسئله در دو حالت استفاده از المانهای منطبق و غیر منطبق به ترتیب برابر $۰/۶۵۵۱$ و $۰/۶۵۳۵$ است لذا خطای نتایج المان محدود $۰/۲/۵\%$ می باشد [۲۳].

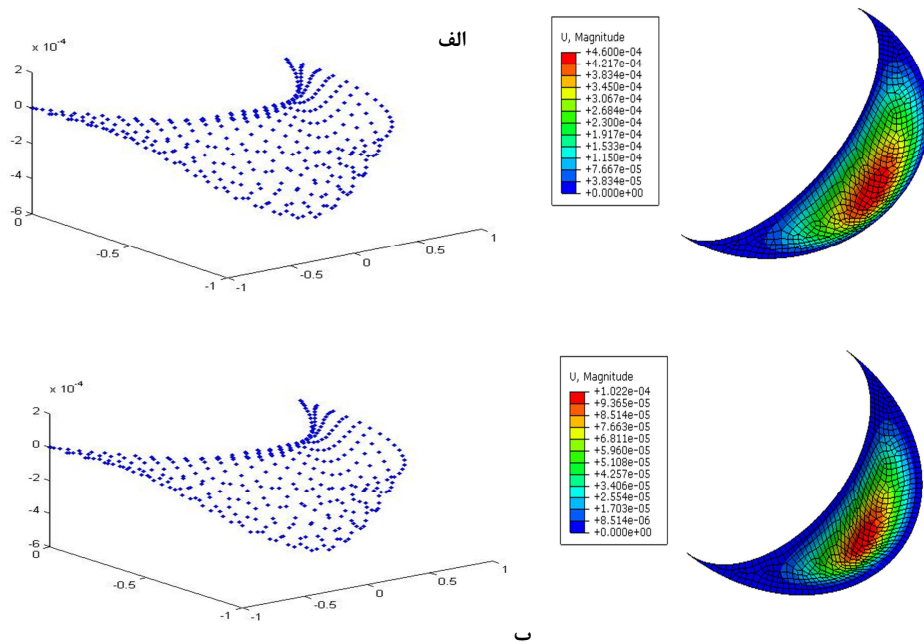
در شکل ۸ به مقایسه نتایج حل تحلیلی و روش بدون شبکه گالرکین در یک ورق مستطیلی کامپوزیت چهار لایه با چینش $(۰/۹۰/۹۰/۰)$ که خواص لایه های آن عبارت از $G_{12} = 0.5E_2$, $E_1 = 25E_2$, $\nu_{12} = 0.25$ است پرداخته شده است.



شکل ۸- جابجایی بی بعد ورق مستطیلی شکل کامپوزیت با تکیه گاه ثابت

ورق ارتوتروپیک دایره ای شکل

در اینجا به مقایسه نتایج جابجایی یک ورق دایره ای شکل ارتوتروپیک با مشخصات $E_1 = 131GPa$, $E_2 = 13GPa$, $\nu_{12} = 0.34$, $G_{12} = 6.4GPa$, $R = 1m$, $h = 12mm$ ، تحت نیروی گسترده $100 N/m^2$ است از دو روش بدون شبکه گالرکین و المان محدود [۲۴] پرداخته می شود.



شکل ۹- فرم تغییر شکل یافته ورق هلالی شکل (الف) تکیه گاه ساده (ب) تکیه گاه ثابت

- [10] Chen, X.L., Liu, G. R., and Lim, S. P., An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape. *Compos. Struct*, 2003. 59(2)(279-289).
- [11] M. Memar Ardestani, B.S., Sh. Shams, Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method. *Composite Structures*, 2014. 112: p. 231-240.
- [12] Sladek, J., et al., Analysis of the bending of circular piezoelectric plates with functionally graded material properties by a MLPG method. *Engineering Structures*, 2013. 47: p. 81-89.
- [13] Liew, K.M., X. Zhao, and A.J.M. Ferreira, A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 2011. 93(8): p. 2031-2041.
- [14] Lancaster, P.A.S., K., Surfaces generated by moving least squares methods. *math. comput.*, 1981. 37: p. 141-158.
- [15] Krysl, P., Belytschko, T., Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1996. 17: p. 26-35.
- [16] Kaw, A.K., *Mechanics of composite materials*, ed. 2. 2006, CRC Press: Taylor & Francis Group.
- [17] Atluri, S.N.a.Z., A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput. Mech*, 1998. 22: p. 117-127.
- [18] shu, c., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. 2000: springer.

[۱۹] غیوری، ده.ب.ل.ف.ت.ه.، راهنمای جامع: 1388: Matlab7. کانون نشر علوم.

- [20] Liu, G.R., *Meshfree methods—moving beyond the Finite element method*. CRC Press, 2002.
- [21] Timoshenko, S., *Theory of plates and shells*, ed. s. edition. 1959.
- [22] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R. L., *The finite element method*, ed. f. edition. Vol. 2. Taylor.
- [23] Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and shell theory and analysis*, ed. s. edition. 2003: CRC PRESS.
- [24] Rao, C.S.a.K.P., *LARGE DEFORMATION FINITE ELEMENT ANALYSIS OF LAMINATED CIRCULAR COMPOSITE PLATES* *Computers & Structures*, 1994.54:p.59-64.

در این برنامه کامپیوتری بدلیل استفاده از روش شرایط مرزی همسایگی در اعمال شرایط مرزی بجای روش پنالتی دقت نتایج بیشتر می باشد چون ضریب پنالتی در اغلب مسائل با روش های سعی و خطا تخمین زده می شود، البته لازم بذکر است که تغییر فاصله گره همسایگی تا گره روی مرز تأثیرات کمی در دقت نتایج می گذارد.

۹- مراجع

- [1] G.R. LIU , Y.T.G., *AN INTRODUCTION TO MESH FREE METHODS AND THEIR PROGRAMMING*. 2005: Springer.
- [2] Szafrana, Z., *ELASTIC ANALYSIS OF THIN FIBER-REINFORCED PLATES*. CIVIL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING REPORTS, 2005. 1.
- [3] Colagrossi A, L.M., Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 2003. 191(2): p. 448-475.
- [4] Johnson GR, S.R., Beissel SR., SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1996. 139(1-4): p. 347-373.
- [5] Liu WK, J.S., Li S, Adey J, Belytschko T . , Reproducing kernel particle method for structural dynamics. *Int J Numer Methods Eng*, 1995. 38: p. 1655-79.
- [6] Liu WK, J.S., Zhang YF, Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Methods Fluids*, 1995. 20: p. 1081-106.
- [7] Krysl, P.a.B., T, Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Comput.mech*, 1996. 17: p. 25-36.
- [8] Ouatuati, A.E.a.J., D. A., A new approach for numerical modal analysis using the element free method. *Numerical Methods Eng*, 1999. 46(1-27).
- [9] Liu, G.R.a.C., X. L., Bucking of symmetrically laminated composite plates using the element-free Galerkin method. *Struct. Stability Dyn*, 2002. 2(3): p. 281-294.