

## بررسی تحلیلی و عددی ارتعاشات آزاد نانولوله کربن دو جداره با در نظر گرفتن اثر غیر محلی بین جداره‌ها

افشین زمانی زکریا

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

حسن بیگلری\*

استادیار، دانشگاه تبریز، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

### چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربن تک جداره و دو جداره به صورت عددی و تحلیلی بررسی شده است. در شبیه‌سازی المان محدود، از المان‌های تیر که توسط المان‌های فنری به عنوان نیروهای واندروالس به یکدیگر در گره‌ها متصل می‌شوند، استفاده گردیده است. برای اولین بار در این تحقیق، اثر نیروهای غیر محلی بین دو جداره نانولوله کربن، در مدل‌سازی المان محدود به صورت فنرهای خطی با توزیع کروی بررسی شده است. برای بررسی بهتر تأثیر نیروهای غیر محلی، ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربن دو جداره، بدون در نظرگیری نیروهای واندروالس کروی نیز، به دو روش تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در بررسی تحلیلی از تئوری تغییر شکل برشی در تیرها استفاده شده است. حالت غیر محلی مدل‌سازی عددی، نسبت به دو حالت تحلیلی و عددی محلی مقادیر فرکانس‌های بی‌بعد بزرگتری را پیش‌بینی می‌کند. این نتیجه به این علت است که با افزودن آرایش کروی فنرها برای بررسی اثر نیروهای غیر محلی، سفتی خمشی تیر افزایش یافته و سبب افزایش مقادیر فرکانس‌های طبیعی می‌شود. با این وجود در شکل مودهای بالاتر، اثر نیروهای غیر محلی کمتر می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که اثر نیروهای غیر محلی در مودهای فرکانسی پایین بیشتر است. مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و حل تحلیلی با یکدیگر نشان از آن دارد که در مودهای فرکانسی بالاتر مطابقت بین مقادیر تحلیلی و عددی بیشتر است.

واژه‌های کلیدی: نانولوله کربنی، ارتعاشات آزاد، روش اجزاء محدود، اثر غیر محلی.

## Analytical and Numerical Study on the Free Vibration of DWCNT Purposing the Nonlocal Effect between Its Walls

A. Zamani Zakari

M.Sc. Student, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

H. Biglari

Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

### Abstract

In this research, free vibration analysis of single and double walled carbon nanotubes (DWCNT) are considered, Analytical and numerically. In FEM simulation, two node beam elements are used and spring elements added as Van Der Waals (VDW) interaction forces between various walls of nanotube. For the first time in this research, the effect of nonlocal forces are prescribed as inclined nonlinear spring elements between nanotube walls. For better understanding of nonlocal force effects, free vibration analysis of DWCNT is performed analytically and numerically without nonlocal effect, too. In the analytical section, parabolic shear deformation theory is used. The nonlocal mode of FEM shows higher non-dimensional natural frequencies as compared to the analytical and linear FEM solutions. The later result is because of the increment in the flexural stiffness of simulated nanotube, by addition of nonlocal springs. However in the higher mode frequencies, the effects of nonlocal forces are reduced. Thus, nonlocal effect is higher in low frequency mode numbers. By comparing the results of analytics and FEM results, there shown more agreement between them by raising up the frequency mode number.

**Keywords:** Carbon nanotube, Free vibration, Finite element analysis, Nonlocal effect.

## ۱- مقدمه

امروزه نانولوله‌های کربنی به علت دارا بودن خواص منحصر بفرد الکتریکی در سنسورها و نانو ادوات میکروالکترونیک بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱]. یکی از این کاربردها استفاده از نانولوله‌های با اشکال، اندازه‌ها، تعداد جداره‌ها و شرایط مرزی متفاوت برای به دست آوردن امواج الکترومغناطیس با فرکانس‌های مشخص می‌باشد. بررسی ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی به روش تحلیلی و عددی تأثیر بسزایی در طراحی و ساخت این نانو ادوات دارد [۲].

بسیاری از محققین نانولوله‌های کربنی را به صورت پوسته مدل کرده‌اند [۳]. تئوری تیر نیز به صورت الاستیک خطی و الاستیک غیرمحللی به صورت گسترده‌ای، برای بررسی ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی مورد استفاده قرار گرفته است [۴]. بسته به هندسه و ابعاد نانولوله کربنی، هر یک از تئوری‌های پوسته و تیر، مزایا و معایب خود را دارند. بدین منظور که در نسبت منظرهای کوتاه نانولوله، تئوری پوسته موفق‌تر بوده و در نسبت منظرهای بالا، تئوری تیر با داده‌های حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و تجربی تطابق بسیار خوبی دارد. مدلسازی المان محدود نیز بعنوان یک ابزار دقیق برای بررسی ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی مورد استفاده قرار گرفته است [۵].

در نانوتیرها اثر نیروهای واندروالس به صورت غیر محللی بر رفتار ارتعاشی آن موثر است. این نیروها موجب می‌شوند که در تغییر شکل تیر، نقاط مجاور تیر بر یکدیگر تأثیر متقابل داشته باشند که البته در اندازه‌های ماکروبی اثر آن ناچیز است. وجود این نیرو باعث وجود نیروهای واندروالس است که اتمها به یکدیگر وارد می‌نمایند. اثر نیروهای واندروالس به صورت تحلیلی توسط هی و همکاران [۳] بررسی شده است. آنها با فرض نانولوله بعنوان یک پوسته، نیروهای واندروالس را به صورت تابع وابسته به شعاع نانولوله تعریف کرده و نشان دادند که نیروهای واندروالس بر روی ارتعاشات طولی و پیچشی تأثیر چشمگیری ندارد و تنها بر روی ارتعاشات جانبی خمشی آن هم در شکل مودهای بالا تأثیر قابل توجهی دارد. انصاری و همت‌نژاد [۶] به شبیه‌سازی رفتار غیرخطی نانولوله دوجداره پرداخته و نیروهای واندروالس را به صورت فنرهای خطی شعاعی میان دو جداره در نظر گرفتند. استروزی و همکاران [۷] ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی تک جداره را به صورت ترکیبی از روش‌های تحلیلی و عددی (مدل پوسته) بررسی کردند. مدل آنها مطابقت خوبی با نتایج تجربی سایر محققین داشته است. اخیراً، کلی و نایسلی [۸] یک مدل تیر چند جداره بر اساس تیر اویلر-برنولی که توسط معادلات ویسکوالاستیک به همدیگر مربوط می‌شوند را بررسی کرده‌اند.

در زمینه بررسی عددی نیروهای واندروالس به صورت غیر محللی در تمام نقاط نانولوله‌های کربن دو جداره، مقاله‌های بسیار محدودی موجود است. به عنوان نمونه، شکرپه و رفیعی [۹] برای بررسی رفتار مکانیکی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، نیروهای واندروالس را به صورت المانهای فنر غیر خطی با آرایش کروی در نظر گرفته‌اند. تا به امروز، تأثیر این پدیده به صورت عددی در رفتار ارتعاشی نانولوله‌های چند جداره مورد توجه قرار نگرفته است. در اکثر مقالات، نیروهای واندروالس صرفاً به صورت فنرهای شعاعی بین دو جداره در نظر گرفته شده‌اند. حال آنکه این نیروها در یک محدوده کروی به تمام نقاط پیرامون خود اعمال می‌شوند.

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد خمشی نانولوله کربنی تک جداره و دو جداره توسط تئوری تغییر شکل برشی تیرها (به صورت تحلیلی) و توسط شبیه‌سازی عددی (المان تیر) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مدلسازی عددی نیروهای واندروالس یک بار به صورت فنرهای خطی و عمودی، و بار دیگر به صورت فنرهای با توزیع کروی تا یک شعاع بحرانی که توسط رابطه پتانسیل لئونارد-جونز به دست می‌آید، در نظر گرفته می‌شوند. نشان داده خواهد شد که در نظرگیری نیروهای واندروالس به صورت کروی (نه فقط به صورت شعاعی)، تأثیر بسزایی در تعیین فرکانس طبیعی ارتعاش نانولوله‌های کربنی دو جداره در مودهای پایین دارد.

## ۲- تئوری تغییر شکل برشی تیرها

در این قسمت، مدل تحلیلی نانولوله کربن به صورت یک تیر با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی ارائه می‌شود. با فرض اینکه تغییر شکل نانولوله در جهت‌های  $x$  و  $z$  به ترتیب  $U$  و  $W$  باشد و ارتعاش لوله فقط در صفحه  $xz$  صورت بگیرد، میدان جابجایی به صورت زیر خواهد بود (شکل ۱) [۳]:

$$\begin{aligned} U(x, z; t) &= -zw_{,x} + \varphi(z)u_1(x; t) \\ W(x, z; t) &= w(x; t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $u$  و  $w$  به ترتیب جابجایی صفحه میانی در جهت‌های  $x$  و  $z$  می‌باشند. که در آن،  $u_1$  مختصات مجهولی است که تأثیر کرنش برشی را نشان می‌دهد.  $\varphi$  فاکتور شکل است که توزیع تنش و کرنش در سطح مقطع تیر را نشان می‌دهد. فاکتور شکل برای تیر مطابق تئوری ردی<sup>۱</sup> برابر است با [۱۰]:

$$\varphi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2)$$

میدان جابجایی که توسط روابط (۱) و (۲) بیان شد، به رابطه سینتیکی (۳) منجر می‌شود:

<sup>1</sup> Reddy

شرایط مرزی در ابتدا و انتهای نانولوله به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} x=0, L \\ w=0 \quad \text{or} \quad M_{,x} = \bar{Q}_x \\ w_{,x}=0 \quad \text{or} \quad M = \bar{M}_x \\ u_1=0 \quad \text{or} \quad M^a = \bar{M}_x^a \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه بالا، پارامترهایی که دارای علامت بار می‌باشند، ممان‌ها و نیروهای اعمالی در مرزها هستند. با جایگذاری روابط (۱) تا (۴) و (۷) و (۸) در رابطه (۶)، معادلات حرکت ارتعاشی زیر برای نانولوله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \\ = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\ + \rho \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} \\ - E \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ + E \left( I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ - G \left( A - \frac{8}{h} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) \\ = \rho \left( I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ - \rho \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (10)$$

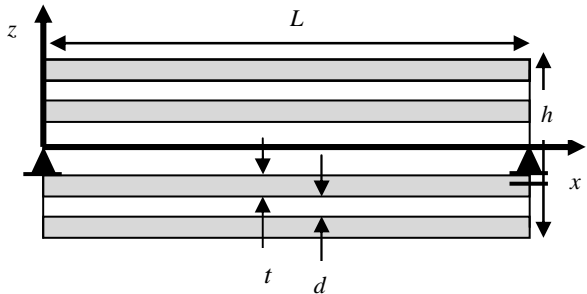
در رابطه بالا،  $A$  سطح مقطع نانولوله و  $h$  قطر بیرونی نانولوله می‌باشند. جملات اینرسی که در معادله (۱۰) ظاهر شده‌اند، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$(I_1, I_1', I_1'') = \int_A (z^2, z^4, z^6) dA \quad (11)$$

### ۳- مدل تحلیلی نانولوله دو جداره

مدل‌هایی که در آنها از یک تیر معادل برای مدلسازی نانولوله چند جداره استفاده می‌شود، تعامل بین دو جدار نانولوله را در نظر نمی‌گیرند و این امر سبب می‌شود که مقادیر کمتری را برای فرکانس‌های طبیعی به دست آورند. در این بخش، نانولوله دو جداره با استفاده از دو تیر که با یکدیگر توسط فنرهای عمودی (شعاعی) تعامل دارند، مدل شده‌اند (شکل ۲). وجود فنرها برای شبیه‌سازی نیروهای واندروالس بین جداره‌های مجاور، صورت گرفته است [۱۱]. با استفاده از رابطه (۱۰) و تعمیم آن برای نانولوله‌های چند جداره، روابط جدید به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = -z w_{,xx} + \varphi(z) u_{1,x} \\ \gamma_{xz} = \varphi'(z) u_1 \end{aligned} \quad (3)$$



شکل ۱- طرحواره نانولوله کربن دو جداره

که در آن، پریم نشان دهنده مشتق نسبت به  $z$  و زیروند  $x$  نشان دهنده مشتق نسبت به  $x$  می‌باشد.

رابطه تنش-کرنش در نانولوله کربنی با فرض رفتار ایزوتروپیک طبق رابطه کلی هوک به صورت زیر است:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (4)$$

در رابطه بالا،  $E$  و  $G$  به ترتیب بیانگر مدول یانگ و مدول برشی نانولوله کربنی می‌باشند. معادلات حاکم بر سیستم، با استفاده از اصل هامیلتون و محاسبه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U_s) dt = 0 \\ T = \frac{1}{2} \int_{\mu} \rho (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) d\mu \end{aligned} \quad (5)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\mu} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) d\mu$$

که در آن  $U_s$  و  $T$  به ترتیب انرژی پتانسیل و جنبشی می‌باشند.  $\mu$  حجم نانولوله،  $\rho$  چگالی و  $\delta$  سمبل تغییرات است. پس از ساده‌سازی‌های مرسوم در حساب تغییرات، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} M_{xx} = \rho_0 \ddot{w} - \rho_2 \ddot{w}_{xx} + \rho_{11} \ddot{u}_{1,x} \\ M_x^a - Q^a = \rho_{02} \ddot{u}_1 - \rho_{11} \ddot{w}_x \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $\rho_i$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i dz, \quad (i=0,1,2) \\ \rho_{im} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i \varphi^m dz, \quad (i=0,1; m=1,2) \end{aligned} \quad (7)$$

و مولفه‌های ممان و نیرو برابر است با:

$$\begin{aligned} M = \int \sigma_x z d\mu \\ M^a = \int \sigma_x \varphi(z) d\mu \\ Q^a = \int \tau_{xz} \varphi'(z) d\mu \end{aligned} \quad (8)$$

$$c_j = \frac{320 \times 2r_j}{0.16d^2} \left( \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (14)$$

که در آن، برای شعاع داخلی جداره  $j$  ام بوده و  $d$  فاصله اتم‌های کربن تا کربن می‌باشد که برابر  $0.142$  نانومتر می‌باشد. در نتیجه در فواصل کوچک، تعامل بین نانولوله‌ها به صورت خطی به فاصله بین آنها بستگی دارد. لذا بطور کلی فشار نیروی واندروالس برابر است با:

$$p = c(\Delta w) \quad (15)$$

### ۳-۱- شرایط مرزی تکیه گاه ساده

شرایط مرزی تکیه گاه ساده برای هر یک از جداره‌های نانولوله فرض شده است:

$$w_N = M = M^a = 0 \quad (16)$$

برای حل معادلات ارتعاشی تیر دو جداره، حل بر اساس روش فوریه به صورت زیر فرض می‌شود:

$$w_N = W_N \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(\omega t) \quad (17)$$

$$Lu_{1N} = U_N \cos \frac{n\pi x}{L} \sin(\omega t) \quad i = 1, 2$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی تیر است.  $U_N$  و  $W_N$  مختصات عمومی جدار داخلی و خارجی در خمش تیر می‌باشند.  $n$  نیز بیانگر شماره مود ارتعاش می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۷) در رابطه (۱۲) دستگاه مقادیر ویژه بی‌بعد زیر به دست می‌آید:

$$[K]\{b_i\} = 0 \quad (18)$$

که در آن درایه‌های غیر صفر ماتریس  $K$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K_{11} = \frac{A_1}{A} \Omega^2 - \varepsilon - \frac{I_{11}}{I} \beta^4 - \frac{I_{11} \beta^2}{AL^2} \Omega^2$$

$$K_{12} = K_{21} = \left( \frac{\beta^3}{I} - \frac{\beta}{AL^2} \Omega^2 \right) \Delta_1$$

$$K_{13} = K_{31} = \varepsilon$$

$$K_{22} = \left( \frac{\Omega^2}{AL^2} - \frac{\beta^2}{I} \right) \Delta_2 - \frac{GL^2}{EI} \Gamma_1 \quad (19)$$

$$K_{33} = \frac{A_2}{A} - \varepsilon - \frac{I_{12}}{I} \beta^4 - \frac{I_{12} \beta^2}{AL^2} \Omega^2$$

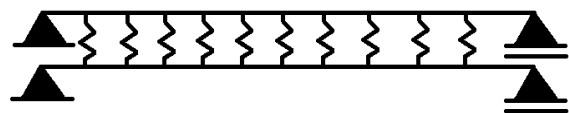
$$K_{34} = K_{43} = \left( \frac{\beta^3}{I} - \frac{\beta}{AL^2} \Omega^2 \right) \Delta_3$$

$$K_{44} = \left( \frac{\Omega^2}{AL^2} - \frac{\beta^2}{I} \right) \Delta_4 - \frac{GL^2}{EI} \Gamma_2$$

مقادیر بی‌بعد استفاده شده در روابط (۱۹) به صورت زیر تعریف می‌شوند:



(الف)



(ب)

شکل ۲- طرحواره نانولوله دو جداره و مدل تیر معادل. (الف) نانولوله با نیروهای فتر شعاعی (ب) مدل تیر معادل برای نانولوله دو جداره

$$\begin{aligned} EI_{1N} \frac{\partial^4 w_N}{\partial x^4} + E \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 u_{1N}}{\partial x^3} \\ + c_{N-1} (w_N - w_{N-1}) = \rho A_N \frac{\partial^2 w_N}{\partial t^2} \\ - \rho I_{1N} \frac{\partial^4 w_N}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 u_{1N}}{\partial x \partial t^2} \\ - E \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 w_N}{\partial x^3} \\ + E \left( I_{1N} - \frac{8}{3h^2} I'_{1N} + \frac{16}{9h^4} I''_{1N} \right) \frac{\partial^2 u_{1N}}{\partial x^2} \\ - G \left( A_N - \frac{8}{h^2} I'_{1N} + \frac{16}{9h^4} I''_{1N} \right) \\ = \rho \left( I_{1N} - \frac{8}{3h^2} I'_{1N} + \frac{16}{9h^4} I''_{1N} \right) \frac{\partial^2 u_{1N}}{\partial t^2} \\ - \rho \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 w_N}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن،  $N$  بیانگر شماره جداره مورد نظر از داخل می‌باشد.  $I_{1N}$  ممان اینرسی جرمی و  $A_N$  سطح مقطع لوله می‌باشد. تعامل بین جداره‌ها (ضریب  $C_{N-1}$ ) با استفاده از انرژی پتانسیل لئونارد جونز<sup>۱</sup> به دست می‌آید [۱۲]. این نیرو برابر با نیروی بین دو عدد نانو صفحه گرافن می‌باشد که با فاصله آنها رابطه مستقیم دارد. نیروی واندروالس ( $p$ ) که همان فشار وارد شده بر واحد طول می‌باشد، برابر است با:

$$p = \left[ \frac{dg}{d\delta} \right]_{\delta=r} + c(\Delta w) \quad (13)$$

چون پتانسیل اولیه در حالت تعادل می‌باشد،  $dg/d\delta$  برابر صفر می‌باشد. لذا ضریب تعامل واندروالس  $C$  برابر است با:

<sup>1</sup> Lennard-Jones

می‌شود. رابطه (۲۲) در شکل ۳ به صورت نمودار مشاهده می‌شود.

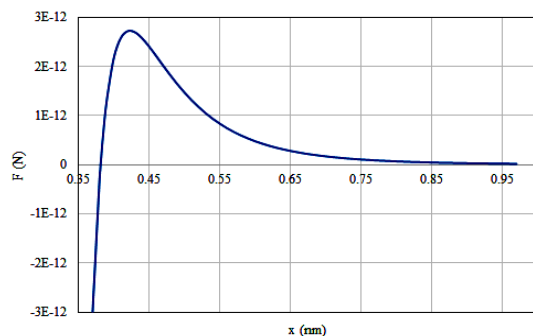
مطابق شکل ۳، نیروهای واندروالس (لئونارد جونز) طبق رابطه (۲۲) تا شعاع ۰٫۷ نانومتر موثر می‌باشد و بعد از آن مقدار نیرو به صفر میل می‌کند. در نتیجه، با توجه به فاصله ۰٫۳۴ نانومتری بین جداره نانولوله‌ها و شعاع موثر ۰٫۷ نانومتر نیروهای واندروالس، تعداد گره‌های مجاور که تحت تأثیر نیروی واندروالس هر گره در جداره دیگر قرار گرفته می‌گیرد را می‌توان به صورت زیر به دست آورد (شکل ۴):

$$N = 2 \times \left( \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{l} \right) + 1 \quad (23)$$

که در آن  $R$ ،  $d$  و  $l$  به ترتیب برابر با شعاع موثر لئونارد-جونز، فاصله جداره‌های نانولوله و فاصله گره‌ها در مدل المان محدود می‌باشند. علامت بار بر روی مقدار داخل پرانتز در رابطه (۲۳) نشان دهنده مقدار صحیح عدد به دست آمده است. با اتخاذ مقدار مشخص برای هر یک از پارامترهای اخیر، تعداد گره‌های متصل با فنر  $N$  مشخص می‌شوند.

در تمامی مدل‌سازی‌های عددی، با اتخاذ فاصله بین گره‌ها برابر با ۰٫۱ نانومتر، نتایج حل عددی به یک مقدار ثابت همگرا می‌شوند. در نتیجه مقدار  $N$  در تمامی شبیه‌سازی‌ها برابر با ۱۳ به دست می‌آید (رابطه ۲۳).

مدلسازی عددی به دو صورت محلی و غیر محلی انجام می‌گردد. در حالت محلی، از المان 14 Combin با سفتی ثابت که سفتی آن از طریق رابطه (۲۱) تعیین می‌شود، استفاده شده است (شکل ۵-الف). برای مدل‌سازی حالت غیر محلی، از المان 14 Combin (فنر خطی) که به صورت المان‌های مورب فنری بین دو تیر گنجانده شده است (شکل ۵-ب)، استفاده شده است. رابطه (۲۲) به صورت مقادیر عددی به عنوان سفتی این المان فنر خطی برای نرم‌افزار Ansys تعریف شده است. درجات آزادی تمامی المانها در جهت عمود بر صفحه سلب شده تا شکل مودها در صفحه و به صورت دو بعدی مدل شود. گره ابتدای نانولوله در سه جهت و گره انتهایی آن در دو جهت  $y$  و  $z$  مقید شده و تمامی درجات چرخشی، آزاد در نظر گرفته شدند.



شکل ۳- نمودار نیروی واندروالس-جابجایی طبق رابطه لئونارد-جونز

$$A = A_1 + A_2, \quad I = I_{11} + I_{12}$$

$$\varepsilon = \frac{cL^4}{EI}, \quad \beta = m\pi, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho A \omega_N^2 L^4}{EI}}$$

$$\Gamma_1 = A_1 - \frac{8}{h} I_{11} + \frac{16}{9h^4} I'_{11}$$

$$\Gamma_2 = A_2 - \frac{8}{h} I_{12} + \frac{16}{9h^4} I'_{12}$$

(۲۰)

$$\Delta_1 = I_{11} - \frac{4}{3h^2} I'_{11},$$

$$\Delta_2 = I_{11} - \frac{8}{3h^2} I'_{11} + \frac{16}{9h^4} I''_{11}$$

$$\Delta_3 = I_{12} - \frac{4}{3h^2} I'_{12},$$

$$\Delta_4 = I_{12} - \frac{8}{3h^2} I'_{12} + \frac{16}{9h^4} I''_{12}$$

که  $A_1$  سطح مقطع جداره داخلی و  $A_2$  سطح مقطع جداره خارجی است. در تعریف  $\beta$  پارامتر  $m$  شماره مود فرکانسی می‌باشد.

دستگاه همگن رابطه (۱۸) به شرطی حل غیر بدیهی خواهد داشت که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد. لذا معادله‌ای بر حسب فرکانس طبیعی بی‌بعد  $\Omega$  حاصل می‌شود که از حل آن مقادیر فرکانس طبیعی سیستم به دست می‌آید.

#### ۴- شبیه‌سازی عددی

برای مدل‌سازی عددی ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی، از نرم‌افزار Ansys استفاده شده است. برای ایجاد المان‌های تیر و فنر خطی بین جداره‌های نانولوله کربنی به ترتیب از المان‌های بیم ۱۸۸ و 14 Combin استفاده شده است. خواص مکانیکی المان تیر مطابق با مقادیر استفاده شده در مدل تحلیلی است. همچنین سفتی فنر خطی شعاعی (محلی) از رابطه زیر تعیین شده است:

$$k_{vdw}(x) = c \times A_{i-CNT} \quad (21)$$

$$A_{i-CNT} = 2\pi(R_i + 0.35) \times L_{CNT}$$

که در آن  $c$  مقدار به دست آمده از رابطه (۱۵)،  $A_{i-CNT}$  سطح خارجی جداره داخلی و  $L_{CNT}$  طول نانولوله می‌باشد.

برای بررسی اثر نیروهای غیر محلی، سفتی فنرهای مورب خطی طبق پتانسیل لئونارد-جونز به صورت رابطه زیر بیان می‌شود (شکل ۳) [۱۳]:

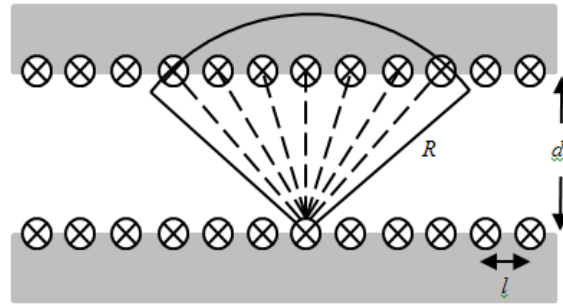
$$k_{vdw}(x) = 24\varepsilon \left[ 26 \frac{\sigma^{12}}{x^{14}} - 7 \frac{\sigma^6}{x^8} \right] \quad (22)$$

که در آن  $\varepsilon$  و  $\sigma$  پارامترهای واندروالس می‌باشند و برای اتم‌های کربن به ترتیب معادل ۰٫۲۳۲ کیلوژول بر مول و ۰٫۳۴ نانومتر هستند.  $x$  نیز جابجایی است که به المان مورد نظر وارد

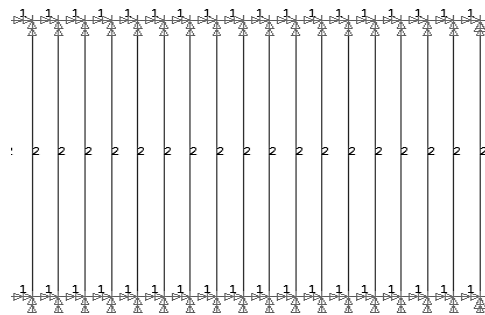
و ۴۰۰ گیگاپاسکال در نظر گرفته شد. همچنین چگالی نانولوله برابر با  $2.3 \text{ g/cm}^3$  در نظر گرفته شده است.

به منظور صحنه‌گذاری، در جدول ۱ مقادیر فرکانس‌های بی‌بعد شده (طبق رابطه ۲۰)، برای نانولوله تک جداره در نسبت منظرهای مختلف مطابق مدل تحلیلی و حل عددی المان محدود با نتایج تحلیلی آیدوغدو [۴] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج تحلیلی و عددی مطابقت خوبی با یکدیگر دارند. اختلاف بین نتایج تحلیلی و عددی در نسبت منظرهای بالاتر، بسیار کم می‌شود. در کل، مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از المان محدود نسبت به نتایج تحلیلی اندکی کوچکتر است. علت آن بیشتر بودن تعداد درجات آزادی و در نتیجه انعطاف‌پذیری بیشتر در مدل المان محدود نسبت به مدل تحلیلی است.

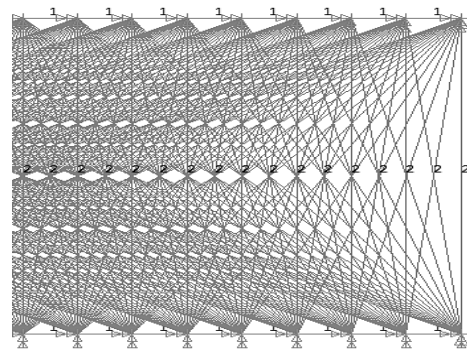
در نانولوله‌های دو جداره، شعاع داخلی جداره داخلی، به ترتیب برابر با ۰٫۳۵، ۰٫۵ و ۱ نانومتر در نظر گرفته شده است. جداول ۲ تا ۴ به ترتیب فرکانس‌های اول تا پنجم به دست آمده توسط روش تحلیلی، شبیه‌سازی عددی محلی و شبیه‌سازی عددی غیرمحلی را نشان می‌دهد. با مقایسه جداول ۲ تا ۴ مشخص می‌شود که فرکانس بی‌بعد برای تمامی نانولوله‌ها با رفتار خطی (حل تحلیلی و شبیه‌سازی محلی) در شعاع‌های داخلی مختلف، تغییر چندانی نمی‌یابد. با توجه به جدول ۲، مشخص است که نتایج شبیه‌سازی عددی غیر محلی نسبت به حالت محلی آن مقادیر بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. این نتیجه به این علت است که با افزودن فنرهای با آرایش کروی در حالت غیر محلی، سفتی خمشی تیر بیشتر شده و مقادیر فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. نتایج مدل تحلیلی خطی نسبت به مدل عددی متناظر آن (عددی-محلی) معمولاً بزرگتر است. علت این موضوع در نتایج جدول (۱) بحث شد.



شکل ۴- شماتیک شعاع موثر لئونارد جونز در مدلسازی المان محدود



(الف)



(ب)

شکل ۵- آرایش المان‌های تیر (۱) و فنر (۲)، (الف) در تیر کلاسیک شامل فنرهای خطی؛ (ب) تیر غیرمحلی شامل فنرهای لئونارد جونز

## ۵- بحث و بررسی

برای حل مسئله مقادیر ویژه (۱۸) باید ابعاد نانولوله در دسترس باشد. در این پژوهش، شعاع داخلی و خارجی نانولوله تک جداره داخلی به ترتیب برابر با ۰٫۳۵ و ۰٫۷ نانومتر در نظر گرفته شده است. ضخامت هر جداره نانولوله در تمامی موارد برابر با ۰٫۳۵ نانومتر است. در نانولوله‌های چند جداره، فاصله بین جداره‌ها برابر ۰٫۳۴ نانومتر می‌باشد. طول نانولوله طوری در نظر گرفته شد که نسبت منظر آن به ترتیب برابر با ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ باشد. همچنین در نانولوله‌های دو جداره نیز این نسبت منظرها مورد توجه قرار گرفته است. مدول یانگ و برشی نانولوله به ترتیب برابر با ۱۰۰۰

**جدول ۱-** فرکانس بی‌بعد شده برای نانولوله تک جداره توسط معادلات تحلیلی و روش اجزاء محدود (FEM) و آیدوگندو [۴]

شماره مود (n)	نسبت منظر	۱۰	۵۰	۱۰۰
۱	تحلیلی	۳,۱۲۸۲	۳,۱۴۱۰	۳,۱۴۱۴
	FEM	۳,۱۰۹۹	۳,۱۳۹۴	۳,۱۴۰۴
	آیدوگندو	۳,۱۲۷۸	۳,۱۴۱۰	۳,۱۴۱۴
۲	تحلیلی	۶,۱۸۲۲	۶,۲۷۸۸	۶,۲۸۲۱
	FEM	۶,۰۵۵۲	۶,۲۷۱۵	۶,۲۷۸۹
	آیدوگندو	۶,۱۷۳۵	۶,۲۷۸۹	۶,۲۸۱۷
۳	تحلیلی	۹,۱۰۹۹	۹,۴۱۰۲	۹,۴۲۱۱
	FEM	۸,۷۴۳۷	۹,۳۸۸۶	۹,۴۱۴۰
	آیدوگندو	۹,۰۴۱۸	۹,۴۱۰۲	۹,۴۲۱۱
۴	تحلیلی	۱۱,۸۸۸۷	۱۲,۵۳۲۰	۱۲,۵۵۷۷
	FEM	۱۱,۱۵۹۶	۱۲,۴۸۵۲	۱۲,۵۴۴۷
	آیدوگندو	۱۱,۶۱۲	۱۲,۵۳۱	۱۲,۵۵۷
۵	تحلیلی	۱۴,۵۱۷۳	۱۵,۶۴۱۴	۱۵,۶۹۱۰
	FEM	۱۳,۳۲۶۵	۱۵,۵۵۵۶	۱۵,۶۷۰۰
	آیدوگندو	۱۳,۷۵۷	۱۵,۶۴۰	۱۵,۶۸۵

**جدول ۳-** فرکانس بی‌بعد شده برای نانولوله دو جداره توسط روش تحلیلی و روش اجزاء محدود (شعاع کوچک نانولوله داخلی برابر ۰,۵ نانومتر)

شماره مود (n)	نسبت منظر	۱۰	۵۰	۱۰۰
۱	تحلیلی	۳,۱۳۰۶	۳,۱۴۱۱	۳,۱۴۲۱
	عددی- محلی	۳,۱۰۱۹	۳,۱۳۹۰	۳,۱۴۰۲
	عددی- غیر محلی	۳,۱۰۴۶	۳,۱۷۷۲	۳,۲۱۶۰
۲	تحلیلی	۶,۲۰۰۶	۶,۲۷۹۶	۶,۲۸۲۴
	عددی- محلی	۶,۰۰۲۶	۶,۲۶۸۴	۶,۲۷۸۰
	عددی- غیر محلی	۵,۹۹۴۵	۶,۲۹۵۶	۶,۳۳۷۳
۳	تحلیلی	۹,۱۶۶۷	۹,۴۱۲۸	۹,۴۲۱۸
	عددی- محلی	۸,۶۰۹۰	۹,۳۷۸۸	۹,۴۱۱۰
	عددی- غیر محلی	۸,۵۵۸۰	۹,۴۰۰۹	۹,۴۶۶۱
۴	تحلیلی	۱۱,۹۷۷۰	۱۲,۵۳۸۱	۱۲,۵۵۹۲
	عددی- محلی	۱۰,۹۲۴۱	۱۲,۴۶۱۹	۱۲,۵۳۶۹
	عددی- غیر محلی	۱۰,۷۷۶۶	۱۲,۴۷۹۸	۱۲,۵۸۸۳
۵	تحلیلی	۱۴,۴۸۵۳	۱۵,۶۵۳۲	۱۵,۶۹۴۰
	عددی- محلی	۱۲,۹۹۰۰	۱۵,۵۰۹۵	۱۵,۶۵۳۳
	عددی- غیر محلی	۱۲,۶۹۳۸	۱۵,۵۲۳۴	۱۵,۷۰۰۶

**جدول ۲-** فرکانس بی‌بعد شده برای نانولوله دو جداره توسط روش تحلیلی و روش اجزاء محدود (شعاع کوچک نانولوله داخلی برابر ۰,۳۵ نانومتر)

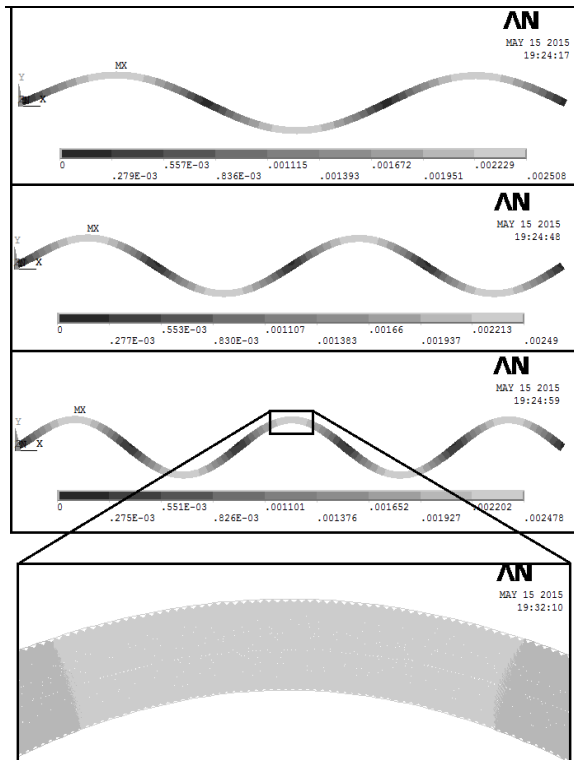
شماره مود (n)	نسبت منظر	۱۰	۵۰	۱۰۰
۱	تحلیلی	۳,۱۳۱۹	۳,۱۴۱۲	۳,۱۴۱۵
	عددی- محلی	۳,۱۰۲۲	۳,۱۳۹۰	۳,۱۴۰۲
	عددی- غیر محلی	۳,۱۰۵۵	۳,۱۸۴۳	۳,۲۲۹۶
۲	تحلیلی	۶,۲۰۶۱	۶,۲۸۰۱	۶,۲۸۲۴
	عددی- محلی	۶,۰۰۴۸	۶,۲۶۸۵	۶,۲۷۷۹
	عددی- غیر محلی	۵,۹۹۵۸	۶,۳۰۰۹	۶,۳۴۸۳
۳	تحلیلی	۹,۱۵۶۹	۹,۴۱۴۳	۹,۴۲۲۲
	عددی- محلی	۸,۶۱۳۳	۹,۳۷۹۴	۹,۴۱۱۱
	عددی- غیر محلی	۸,۵۵۴۸	۹,۴۰۵۶	۹,۴۷۶۶
۴	تحلیلی	۱۱,۸۳۸۸	۱۲,۵۴۱۶	۱۲,۵۶۰۲
	عددی- محلی	۱۰,۹۲۹۹	۱۲,۴۶۳۰	۱۲,۵۳۷۱
	عددی- غیر محلی	۱۰,۷۵۱۷	۱۲,۴۸۴۳	۱۲,۵۹۸۲
۵	تحلیلی	۱۳,۹۷۶۲	۱۵,۶۵۹۶	۱۵,۶۹۵۸
	عددی- محلی	۱۲,۹۹۶۵	۱۵,۵۱۱۵	۱۵,۶۵۳۸
	عددی- غیر محلی	۱۲,۶۱۶۷	۱۵,۵۲۸۱	۱۵,۷۱۰۱

با مقایسه نتایج جداول ۲ تا ۴ مشاهده می‌شود که تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در حل عددی-غیر محلی نسبت به دو روش دیگر به تغییرات شعاع داخلی حساس‌تر است. علت این امر، بکارگیری روابط غیرخطی در این مدل عددی می‌باشد.

**جدول ۴-** فرکانس بی‌بعد شده برای نانولوله دو جداره توسط روش تحلیلی و روش اجزاء محدود (شعاع کوچک نانولوله داخلی برابر ۱ نانومتر)

شماره مود (n)	نسبت منظر	۱۰	۵۰	۱۰۰
۱	تحلیلی	۳,۱۱۸۰	۳,۱۴۰۷	۳,۱۴۲۹
	عددی- محلی	۳,۱۰۰۷	۳,۱۳۸۹	۳,۱۴۰۲
	عددی- غیر محلی	۳,۱۰۲۴	۳,۱۶۲۰	۳,۱۸۵۹
۲	تحلیلی	۶,۱۲۱۰	۶,۲۷۵۳	۶,۲۸۱۴
	عددی- محلی	۵,۹۹۵۱	۶,۲۶۷۹	۶,۲۷۷۹
	عددی- غیر محلی	۵,۹۹۰۳	۶,۳۱۸۴	۶,۳۱۳۲
۳	تحلیلی	۹,۳۹۸۵	۸,۹۸۹۳	۹,۴۱۸۲
	عددی- محلی	۸,۵۸۹۸	۹,۳۷۷۵	۹,۴۱۰۶
	عددی- غیر محلی	۸,۵۶۲۶	۹,۳۹۱۰	۹,۴۴۳۶
۴	تحلیلی	۱۱,۸۰۳۲	۱۲,۵۰۵۰	۱۲,۵۵۰۶
	عددی- محلی	۱۰,۸۸۹۸	۱۲,۴۵۸۹	۱۲,۵۳۶۰
	عددی- غیر محلی	۱۰,۸۱۹۳	۱۲,۴۶۹۷	۱۲,۵۶۵۹
۵	تحلیلی	۱۴,۶۹۹۰	۱۵,۵۹۰۲	۱۵,۶۷۷۴
	عددی- محلی	۱۲,۹۳۶۸	۱۵,۵۰۳۴	۱۵,۶۵۱۷
	عددی- غیر محلی	۱۲,۸۱۰۵	۱۵,۵۱۲۰	۱۵,۶۸۰۳

اختلاف بین نتایج مدل عددی-غیرمحلی با مدل عددی محلی در شعاع‌های داخلی مختلف برای سه مود فرکانسی اول،



شکل ۶- شکل مودهای اول تا پنجم برای نانولوله دوجداره با نسبت منظر ۱۰ و شعاع داخلی ۰٫۵ نانومتر

۱۰۰ قابل توجه و در نسبت منظرهای پایین (حدود ۱۰) قابل چشم‌پوشی است.

- افزایش نسبت منظر تیر باعث افزایش بر هم نهی نیروهای غیر محلی و اندروالس و در نتیجه افزایش سختی خمشی نانوتیر می‌شود. اما افزایش شعاع داخلی نانوله اثر معکوس دارد.

- نتایج نشان می‌دهد که با افزودن آرایش کروی فنرها برای بررسی اثر نیروهای غیرمحلی، مقادیر فرکانسهای طبیعی افزایش می‌یابد. با این وجود در شکل مودهای بالاتر (مود ۵ به بالا) اثر نیروهای غیرمحلی قابل چشم‌پوشی است.

- نتایج حاصل از حل تحلیلی همواره بزرگتر از نتایج حاصل از حل عددی است. علت این امر، درجات آزادی بیشتر در شبیه‌سازی عددی و انعطاف‌پذیری بیشتر آن نسبت به حل تحلیلی می‌باشد. البته این اختلاف در نسبت منظرهای کم (حدود ۱۰) قابل توجه بوده و در مودهای بالا به حدود ۸ درصد نیز می‌رسد.

## مراجع

- [1] Chiu H. Y., Hung P., Postma H. W. C., and Bockrath M., "Atomic-Scale Mass Sensing Using Carbon Nanotube Resonators, Nano Letters, vol. 8, pp. 4342-46, 2008 .
- [2] Aykol M., Hou B., Dhall R., Chang S. W., Branham W., Qiu J., and Cronin S. B., "Clamping Instability and van der Waals Forces in Carbon

در جدول ۵ آورده شده است. مطابق نتایج جدول، اختلاف بین دو مدل در مودهای ارتعاشی پایین به حدود ۳ درصد نیز می‌رسد. اما این اختلاف در مودهای بالا کاهش می‌یابد.

همچنین، اختلاف نتایج دو مدل در نسبت منظرهای بزرگتر بیشتر از نسبت منظرهای کوچک است. علت این امر آن است که تعامل نیروهای غیر محلی و اندروالس در طول نانولوله بزرگتر افزایش می‌یابد. نکته دیگر آنکه، با افزایش قطر داخلی نانولوله، تأثیر نیروهای غیر محلی و اندروالس کاهش می‌یابد. علت این امر، کاهش اثر نیروهای غیر محلی و اندروالس نسبت به نیروهای کلاسیک محلی در ابعاد نسبتاً بزرگتر است.

جدول ۵- مقادیر اختلاف (درصد) مدل اجزاء محدود - غیر محلی نسبت به مدل اجزاء محدود-محلی

شماره مود (n)	شعاع داخلی (نانومتر)	۱۰	۵۰	۱۰۰
۱	۰٫۳۵	۰٫۱	۱٫۴۴	۲٫۸۴
۲	۰٫۵	۰٫۰۹	۱٫۲	۲٫۴۱
	۱	۰٫۰۵	۰٫۷۴	۰٫۵۶
۳	۰٫۳۵	۰٫۱۵	۰٫۵۲	۱٫۱
	۰٫۵	-۰٫۱۳	۰٫۴۳	۰٫۹۴
۴	۱	-۰٫۰۹	۰٫۸۱	۰٫۵۶
	۰٫۳۵	-۰٫۶۸	۰٫۲۸	۰٫۷
۵	۰٫۵	-۰٫۵۹	۰٫۲۴	۰٫۵۹
	۱	-۰٫۳۲	۰٫۱۴	۰٫۳۵

در شکل ۶، شکل مودهای اول تا پنجم برای ارتعاش آزاد نانولوله دوجداره با نسبت منظر ۱۰ و شعاع داخلی ۰٫۵ نانومتر ترسیم شده است.

## ۶- نتیجه گیری

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد نانولوله دو جداره به صورت تحلیلی و شبیه‌سازی عددی بررسی شد. برای بررسی تحلیلی از تئوری تغییر شکل برشی در تیرها استفاده شد. در شبیه‌سازی المان محدود، از المانهای تیر خطی شامل دو گره و المانهای فنر خطی که سختی آنها تابعی از طول فنر می‌باشد، بعنوان نیروهای واندروالس استفاده شد. برای اولین بار، اثر نیروهای غیر محلی در مدلسازی المان محدود به صورت آرایش کروی فنرهای خطی مورد بررسی قرار گرفت. اهم نتایج حاصل از پژوهش حاضر به صورت زیر است:

- حل عددی غیر محلی نسبت به حل عددی محلی که در آن تنها نیروهای واندروالس به صورت شعاعی در نظر گرفته می‌شود، مقادیر فرکانس پایه را حدود ۳ درصد بیشتر پیش‌بینی می‌کند. این اختلاف در نسبت منظرهای بالا (حدود



- Nanotube Mechanical Resonators", *Nano Lett.*, vol. 14, pp. 2426-30, 2014 .
- [3] He X. Q., Eisenberger M., and Liew K. M., "The effect of van der Waals interaction modeling on the vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes", *J. App. Phy.*, vol. 100, no. 12, pp. 1243-17, 2006.
- [4] Aydogdu M., "Vibration of multi-walled carbon nanotubes by generalized shear deformation theory", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 50, pp. 837-844, 2008.
- [5] Mahmoudinezhad E., Ansari R., Basti A., and Hemmatnezhad M., "An accurate spring-mass finite element model for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes", *Comput. Mat. Sci.*, vol. 85, pp. 121-126, 2014.
- [6] Ansari R., and Hemmatnezhad M., "Nonlinear finite element analysis for vibrations of double-walled carbon nanotubes", *Nonlinear Dyn.*, vol. 67, pp. 373-383, 2012.
- [7] Strozzi M., Manevitch L. I., Pellicano F., Smirnov V. V., and Shepelev D. S., "Low-frequency linear vibrations of single-walled carbon nanotubes: Analytical and numerical models", *J. Sound & Vib.*, Vol. vol. 333, no. 13, pp. 2936-57, 2014.
- [8] Kelly S. G., and Nicely C., "Free Vibrations of a series of beams connected by viscoelastic layers", *Adv. Acous. & Vib.*, vol. 2015, pp. 1-8, 2015.
- [9] Shokrieh M. M., and Rafiee R., "Prediction of mechanical properties of an embedded carbon nanotube in polymer matrix based on developing an equivalent long fiber", *Mech. Res. Comm.*, vol. 37, no. 2, pp. 235-240, 2010 .
- [10] Reddy J. N., "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J. App. Mech*, vol. 51, no. 4, pp. 745-752, 1984 .
- [11] Aydogdu M., "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 47, no. 11, pp. 1740-55, 2005 .
- [12] Yoon J., Ru C. Q., and Mioduchowski A., "Vibration of an embedded multiwall carbon nanotube", *Comp. Sci. & Tech.*, vol. 63, no. 11, pp. 1533-1542, 2003.
- [13] Girifalco L. A., and Lad R. A., "Energy of cohesion, compressibility, and the potential energy functions of the graphite system", *J. Chem. Phy.*, vol. 25, no. 4, pp. 693-697, 1956.