

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم مدرج تابعی دوجہتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

فرشید اله کرمی
دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
استادیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، پژوهشکده فناوری خودرو

مریم قصاب‌زاده سریزدی*

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوجہتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات مکانیکی مواد انتخاب شده به طور پیوسته در دو جهت ضخامت و طول تغییر می‌کنند. تغییرات مشخصات مکانیکی بر اساس قانون توانی توزیع کسر حجمی تعیین می‌شود. با بکارگیری تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و استفاده از اصل همپلتون، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله حاصل می‌گردد. با توجه به اینکه حل بسته‌ای برای این معادلات وجود ندارد، معادلات دیفرانسیل حاکم با فرض شرایط مرزی از نوع تکیه گاه ساده برای دو طرف پوسته، به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل می‌شوند. به منظور صحت سنجی، نتایج به دست آمده در این تحقیق با نتایج حاصل از نرم افزار اجزا محدود و کارهای دیگران مقایسه می‌شوند. این مقایسه نشان می‌دهد که اختلاف بین نتایج این مقاله با نتایج اجزا محدود و سایر مقالات ناچیز است. در نهایت اثر پارامترهای هندسی و ثابت‌های قانون توانی بر روی فرکانس طبیعی و شکل مودهای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوجہتی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند در شرایط یکسان هندسی، فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوجہتی بیشتر از پوسته‌های مدرج تابعی معمولی است. در واقع می‌توان در پوسته‌های مدرج تابعی دوجہتی فرکانس طبیعی ارتعاش را با انتخاب درست مواد پایه و استفاده از پارامترهای بیشتر، کنترل نمود.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجہتی، مربعات تفاضلی تعمیم یافته، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی.

Free Vibration Analysis of Thin and Relatively Thick Two Dimensional Functionally Graded Cylindrical Shell Based on First Order Shear Deformation Theory

F. Allahkarami

Ph.D. Student, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Department of Mechanical and Aerospace Engineering

M. Gh. saryazdi

Assistant Professor, Amirkabir University of Technology, Vehicle Research Technology Institute

Abstract

In this paper, the free vibration of a two dimensional functionally graded (2D-FG) cylindrical shell is studied. The mechanical properties of the material alter continuously through its both length and thickness of cylindrical shell based on the power law distribution of volume fraction. The governing equations of motion are achieved by using Hamilton's principal based on the first order shear deformation theory. Since there is no closed form solution, the generalized differential quadrature (GDQ) method is applied for solving equations with assuming simply supported for both end of cylindrical shell. To verify the results, they are compared with the finite element analysis and the results of other literatures. It is shown there is a good agreement between the results. Finally, the effects of shell geometry parameters and the volume fraction exponent on the natural frequencies and the mode shapes of 2D-FG cylindrical shell are investigated. The results show that the natural frequencies of the 2D-FG cylindrical shells are higher than the conventional FG cylindrical shells at the same geometric conditions. In fact, the natural frequency of 2D-FG cylindrical shell can be controlled using more parameters and proper selection of basic material.

Keywords: Free vibration, Two dimensional functionally graded cylindrical shell, Generalized differential quadrature (GDQ), First order shear deformation theory.

۱- مقدمه

با توجه به کاربردهای گسترده پوسته‌ها در صنعت از جمله سازه‌های فضایی، دریایی و ساختمانی، تحقیقات بسیار زیادی در زمینه پوسته‌ها ثبت گردیده است. در این میان آنالیزهای ارتعاشی، کمانشی، حرارتی و... پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی، در کانون توجه بسیاری از محققان حوزه مهندسی مکانیک قرار گرفته است.

مواد مدرج تابعی، مواد کامپوزیتی با ریز ساختارهای غیر همگن می‌باشند که نوع رایج آن‌ها از ترکیب پیوسته فلز و سرامیک ساخته می‌شود. بطوریکه مثلاً یک سطح از جنس فلز خالص و سطح دیگر از جنس سرامیک خالص می‌باشد و بین این دو سطح، ترکیب پیوسته‌ای از هر دو ماده است. خواص این مواد بطور پیوسته و بر اساس کسر حجمی فازهای تشکیل دهنده قابل تغییر هستند. این تغییرات را می‌توان با انتخاب یک تابع معین (تابع نمایی، خطی و یا غیرخطی) بوجود آورد. مواد مدرج تابعی اولین بار توسط دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ ساخته شدند. این مواد در ابتدا به عنوان حفاظ‌های حرارتی برای سازه‌های هوافضا و راکتورهای همجوشی طراحی شدند و در حال حاضر نیز به عنوان کاربردهای عمومی در اجزای ساختاری در محیط‌های با دمای بالا توسعه یافته‌اند [۱].

در سال‌های اخیر، تحقیقات زیادی در زمینه ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای انجام شده است. واربرتن و هیگز [۲]، در تحقیقی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای نازک کنسولی را با استفاده از حل معادلات فلوگه و حل تقریبی ریلی ریتز محاسبه نمودند. بیمارادی [۳]، از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی برای تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای استفاده کرد. کیویو و همکارانش [۴]، از تکنیک تجزیه دامنه برای حل مسئله ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای یکنواخت و پله‌دار با شرایط مرزی دلخواه استفاده کردند. آنها همچنین اثرات میرایی سازه، تغییرات ضخامت و شرایط مرزی در پاسخ ارتعاشات پوسته استوانه‌ای پله دار را مورد بررسی قرار دادند.

بختیاری نژاد و موسوی [۵]، ارتعاش آزاد غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای پیش تنیده واقع بر بستر وینکلر-پاسترناک را مورد مطالعه قرار دادند. به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ، آنها از تئوری پوسته غیرخطی سندر-کوینر به منظور استخراج روابط کرنش-جابجایی استفاده نمودند. همچنین اثرات همزمان شرایط پیش تنش و بستر الاستیک را بر روی فرکانس طبیعی پوسته با شرایط مرزی مختلف بررسی کردند.

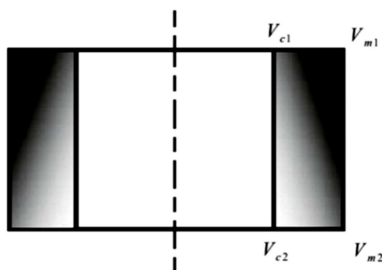
ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با استفاده از روابط کرنش-جابجایی تئوری پوسته لاو، توسط لوی و همکارانش [۶] بررسی شد. شنگ و وانگ [۷] ارتعاش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی و محوری

را با استفاده از روش مقیاس چندگانه مورد مطالعه قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که اثر غیر خطی به دلیل افزایش بار حرارتی و بار فشاری محوری با توجه به کاهش سختی ساختاری پوسته مدرج تابعی مشهود است. برای ارتعاش آزاد و اجباری پوسته‌های مدرج تابعی ناهمسانگرد باتکیه گاه‌های ساده، ول [۸]، یک راه حل دقیق ارائه کرد. او نتیجه گرفت فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با استفاده از روش همگن موری تاناکا^۱ با نتایج حاصل از روش همگن بسط مجانبی یکسان است. نجفی زاده و عیسوندزیبایی [۹]، ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با پشتیبان حلقوی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در تحقیقشان از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی جهت به دست آوردن معادلات حرکت حاکم بر پوسته استفاده نمودند. در تحقیقات [۶-۹]، فرض شده کسر حجمی و خصوصیات مکانیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی فقط در یک جهت تغییر کند. با توجه به اینکه در سازه‌های پیشرفته مهندسی، بار، دما، توزیع تنش و دامنه ارتعاشی ممکن است در دو یا سه جهت تغییر کنند. می‌توان مواد مدرج تابعی را به گونه‌ای طراحی نمود که خصوصیات مکانیکی آنها در دو یا سه جهت، بر اساس قانون توانی برای اهداف مورد نظر تغییر کند که این امر باعث انعطاف و دقت در طراحی سازه‌های مدرج تابعی خواهد شد. روش‌های نوین تولید، شاید ما را در ساخت این چنین موادی یاری دهند. با پیشرفت فزاینده پرینترهای سه بعدی امکان ساخت مواد مدرج تابعی چند جهتی، دور از دسترس نیست [۱۰].

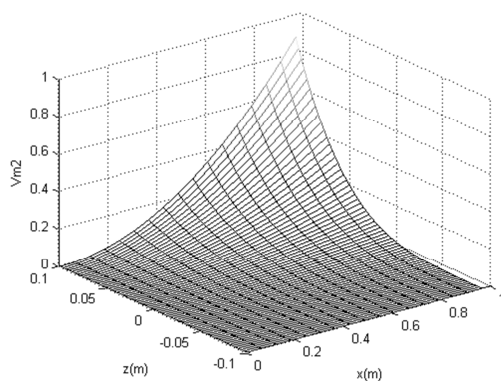
سبحانی عراق و هدایتی [۱۱]، پاسخ ایستا و ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای باز مدرج تابعی دوجتهی با شرایط مرزی مختلف را ارائه کردند. در این تحقیق کسر حجمی سرامیک، توسط قانون توانی دوجتهی بیان شده است. آن‌ها در تحقیقشان از تئوری الاستیسیته سه بعدی برای بیان معادلات حرکت استفاده نمودند و این معادلات را با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل نمودند. در تحقیقی مشابه، هدایتی و همکارانش [۱۲]، راه حل نیمه تحلیلی به منظور مطالعه ویژگی-های ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای باز مدرج تابعی دوجتهی سرامیک-فلز، بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی ارائه نمودند. عسگری و اخلاقی [۱۳]، نیز با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی رفتار فرکانس طبیعی یک استوانه‌ای ضخیم توخالی مدرج تابعی دوجتهی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به منظور حل معادلات از روش اجزا محدود استفاده نمودند. ابراهیمی و نجفی زاده [۱۴]، ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی را با استفاده از تئوری پوسته لاو بررسی کردند و از دو مدل موری تاناکا و ویت^۲ برای توصیف خواص ماده مدرج تابعی دوجتهی

¹ Mori-Tanaka² Voigt

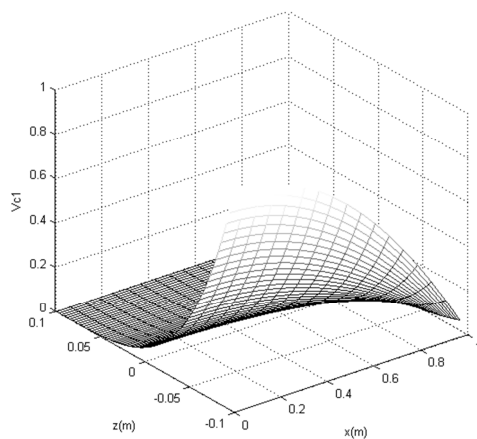
دوجهتی را نشان می‌دهد. به عنوان مثال تغییرات کسرهای حجمی برای فلز ۲ و سرامیک ۱ در شکل‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است در این شکل‌ها طول پوسته ۱ متر و ضخامت آن ۰/۲ متر در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- توزیع مواد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی



شکل ۲- توزیع کسر حجمی فلز ۲



شکل ۳- توزیع کسر حجمی سرامیک ۱ ($n_z=4, n_x=2$)

۳- معادلات حرکت حاکم

یک پوسته استوانه‌ای به شعاع R ، ضخامت h و به طول L مطابق شکل ۴ در نظر گرفته می‌شود. بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، میدان جابجایی در هر نقطه دلخواه در پوسته نسبت به مولفه‌های جابجایی سطح میانی در راستای x ، θ و z

استفاده نمودند. آن‌ها در تحقیقی مشابه، اثرات بستر الاستیک را بر روی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی مورد مطالعه قرار دادند [۱۵].

تاکنون، اغلب تحقیقات انجام شده در زمینه تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مدرج تابعی دوجهتی، محدود به تئوری الاستیسیته سه بعدی و تئوری پوسته لاو می‌باشد. در این مقاله، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم مدرج تابعی دوجهتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. خواص مکانیکی پوسته استوانه‌ای بر اساس قانون توانی توزیع کسر حجمی، به صورت پیوسته در دو راستای طول و ضخامت پوسته تغییر می‌کند. معادلات دیفرانسیل حرکت با استفاده از اصل همپلتون به دست می‌آیند. این معادلات به صورت عددی و به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل می‌شوند. در نهایت اثر پارامترهای هندسی مانند نسبت طول به شعاع پوسته، نسبت ضخامت به شعاع و ثابت‌های قانون توانی بر روی فرکانس طبیعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- خصوصیات مکانیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی

خواص مکانیکی موثر پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی به صورت ترکیب خطی خواص مواد پایه پوسته در نظر گرفته شده است. در این تحقیق، دو سرامیک و دو فلز انتخاب شده است و خواص به صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$P = P_{m1}V_{m1} + P_{m2}V_{m2} + P_{c1}V_{c1} + P_{c2}V_{c2} \quad (1)$$

در رابطه بالا پارامتر P می‌تواند معرف مدول الاستیسیته یا چگالی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی باشد. V_{m1} ، V_{c1} ، V_{m2} و V_{c2} به ترتیب توابع توزیع کسر حجمی توانی سرامیک ۱، سرامیک ۲، فلز ۱ و فلز ۲ می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۳]:

$$\begin{aligned} V_{c1}(z, x) &= \left(1 - \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^{n_z}\right) \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^{n_x}\right) \\ V_{c2}(z, x) &= \left(1 - \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^{n_z}\right) \left(\frac{x}{L}\right)^{n_x} \\ V_{m1}(z, x) &= \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^{n_z} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^{n_x}\right) \\ V_{m2}(z, x) &= \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^{n_z} \left(\frac{x}{L}\right)^{n_x} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن x و z به ترتیب، مختصات یک نقطه دلخواه در راستای شعاعی و راستای طولی را نشان می‌دهند. n_z و n_x نمای قانون توانی در جهت‌های z و x می‌باشند و می‌توانند مقادیری بین صفر تا بینهایت را به خود اختصاص دهند. همچنین L و h معرف طول و ضخامت پوسته هستند. شکل ۱ نحوه تغییرات مواد پایه در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E(x, z)}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E(x, z)}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{x\theta} &= \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta} \\ \tau_{xz} &= \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)}\gamma_{\theta z}\end{aligned}\quad (6)$$

منتجه‌های تنش پوسته استوانه‌ای بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷]:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz, \quad \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} dz\end{aligned}\quad (7)$$

در رابطه فوق کمیت‌های $(M_x, M_\theta, M_{x\theta})$ منتجه‌های ممان، $(N_x, N_\theta, N_{x\theta})$ منتجه‌های تنش درون صفحه‌ای و (Q_x, Q_θ) منتجه‌های برشی می باشند. همچنین K_s ضریب اصلاح برشی است و مقدار آن مطابق [۱۶] برابر $5/6$ در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری روابط (۴) تا (۶) در روابط (۷)، نیروها و ممان‌های منتجه به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned}N_x &= A_{11}\epsilon_x^0 + A_{12}\epsilon_\theta^0 + B_{11}k_x + B_{12}k_\theta \\ N_\theta &= A_{12}\epsilon_x^0 + A_{11}\epsilon_\theta^0 + B_{12}k_x + B_{11}k_\theta \\ M_x &= B_{11}\epsilon_x^0 + B_{12}\epsilon_\theta^0 + D_{11}k_x + D_{12}k_\theta \\ M_\theta &= B_{12}\epsilon_x^0 + B_{11}\epsilon_\theta^0 + D_{12}k_x + D_{11}k_\theta \\ N_{x\theta} &= A_{22}\gamma_{x\theta}^0 + B_{22}k_{x\theta} \\ M_{x\theta} &= B_{22}\gamma_{x\theta}^0 + D_{22}k_{x\theta} \\ Q_x &= k_s A_{22}\gamma_{xz}^0 \\ Q_\theta &= k_s A_{22}\gamma_{\theta z}^0\end{aligned}\quad (8)$$

که در آن، ضرایب سختی A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} با رابطه زیر بیان می‌شوند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (9)$$

در این رابطه، Q_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{11} = \frac{E(x, z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(x, z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{22} = \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

انرژی پتانسیل کل پوسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}] R dz d\theta dx \quad (11)$$

با جایگذاری روابط (۴) الی (۶) در رابطه (۱۱)، انرژی پتانسیل محاسبه می‌شود. انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای برابر است با:

(u_0, v_0, w_0) و چرخش نسبت به محورهای x و θ (ϕ_x, ϕ_θ) به صورت زیر بیان می‌شوند:

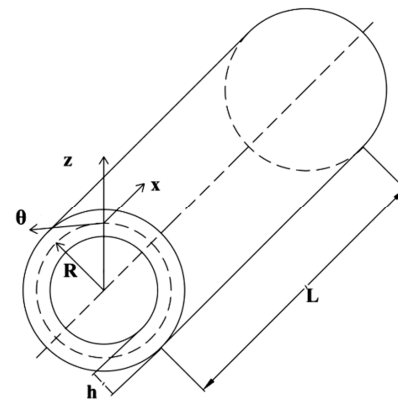
$$\begin{aligned}u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + z\phi_x(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) + z\phi_\theta(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t)\end{aligned}\quad (3)$$

روابط کرنش‌ها برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z k_x^0, \quad \epsilon_\theta = \epsilon_\theta^0 + z k_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + z k_{x\theta}^0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0, \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^0\end{aligned}\quad (4)$$

که در آن ϵ_x^0 ، ϵ_θ^0 و $\gamma_{x\theta}^0$ کرنش‌های صفحه میانی، γ_{xz}^0 و $\gamma_{\theta z}^0$ کرنش‌های برشی عرضی و k_x^0 ، k_θ^0 و $k_{x\theta}^0$ به ترتیب انحناهای صفحه‌ای میانی و پیچش صفحه‌ای میانی می‌باشند که از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,\theta} + w_0 \\ \frac{u_{0,\theta} + v_{0,x}}{R} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^0 \\ k_\theta^0 \\ k_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{\theta,\theta} \\ \frac{\phi_{x,\theta} + \phi_{\theta,x}}{R} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{0,x} \\ \phi_\theta + \frac{w_{0,\theta}}{R} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (5)$$



شکل ۴- سیستم مختصات و هندسه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجبهتی

مطابق فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، σ_z و ϵ_z برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. بدین ترتیب روابط تنش-کرنش به صورت زیر به دست می‌آیند:

استفاده شد. جزئیات گسترش این روش در مکانیک جامدات را می‌توان در مقاله برت و مالیک [۱۹] یافت. روش مربعات تفاضلی در حل معادلات با مقدار مرزی و مقدار اولیه با طبیعت خطی و غیرخطی به کار می‌رود. در این روش با تعداد نسبتاً کمی از نقاط، نتایجی با دقت نسبتاً بالا به دست می‌آید. روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته^۱ (GDQ) در واقع شکل بهبود یافته روش مربعات تفاضلی می‌باشد که در بخش بعدی جزئیات آن تشریح می‌شود.

۳-۱- روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته (GDQ)

در روش GDQ، مشتق $\ln$ تابع $f(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود [۲۰]:

$$\frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(n)} f(x_k), \quad i=1,2,\dots,N \quad (18)$$

که در رابطه فوق، $C_{ik}^{(n)}$ ضرایب وزنی^۲ و N تعداد نقاط شبکه در راستای x است. نکته اساسی در این روش، محاسبه ضرایب وزنی و چگونگی توزیع نقاط شبکه است. در روش GDQ ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول، به صورت یک فرمول بندی ساده جبری به کمک توابع درونیاب لاگرانژ و ضرایب وزنی مشتق مرتبه دوم و مرتبه‌های بالاتر با یک عبارت بازگشتی محاسبه می‌شوند. ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول از رابطه زیر به دست می‌آیند [۲۰]:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad i, j=1,2,\dots,N, i \neq j \quad (19)$$

که در آن:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (20)$$

ضرایب وزنی مشتقات مراتب بالاتر از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_{ij}^{(n)} = n \left(C_{ii}^{(n-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad i, j=1,2,\dots,N, i \neq j \quad (21)$$

$$C_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(n)}, \quad i, j=1,2,\dots,N, n=2,3,\dots$$

توزیع نقاط شبکه، نقش مهمی در سرعت همگرایی و پایداری روش GDQ دارد. معمولاً با توزیع غیریکنواخت نقاط، نتایج بهتری به دست می‌آید. کوان و چنگ (۱۹۸۹)، اثر مش‌های غیریکنواخت را در سرعت همگرایی بررسی نمودند و نتیجه گرفتند که نقاط شبکه به دست آمده از چند جمله‌ای چبیشف نوع اول در همه موارد آزمایش شده، مطلوب‌ترین توزیع

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x,z) [u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2] R dz d\theta dx \quad (12)$$

که پانویس t ، نشان دهنده مشتق نسبت به زمان است. فانکشنال انرژی با استفاده از تابع لاگرانژ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi = K - U \quad (13)$$

معادلات دیفرانسیل حرکت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی، با یکارگیری اصل همپیلتون از کمینه کردن فانکشنال زیر به دست می‌آیند:

$$\delta \int_{t_0}^t \Pi dt = \delta \int_{t_0}^t (K - U) dt = 0 \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۱۴) و جمع آوری ضرایب δu_0 ، δv_0 ، δw_0 ، $\delta \phi_x$ و $\delta \phi_\theta$ معادلات حرکت به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} &= I_0 u_{0,tt} + I_1 \phi_{x,tt} \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta,\theta} + \frac{1}{R} Q_\theta &= I_0 v_{0,tt} + I_1 \phi_{\theta,tt} \\ Q_{x,x} + \frac{1}{R} Q_{\theta,\theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= I_0 w_{0,tt} \\ M_{x,x} + \frac{1}{R} M_{x\theta,\theta} - Q_x &= I_1 u_{0,tt} + I_2 \phi_{x,tt} \\ M_{x\theta,x} + \frac{1}{R} M_{\theta,\theta} - Q_\theta &= I_1 v_{0,tt} + I_2 \phi_{\theta,tt} \end{aligned} \quad (15)$$

در روابط (۱۵) I_0 و I_1 و I_2 ممان اینرسی‌های تعمیم یافته هستند که از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,z) (1, z, z^2) dz \quad (16)$$

در این بررسی، شرایط مرزی برای دو انتهای پوسه استوانه‌ای از نوع تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. بنابراین شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w = v = \phi_\theta = N_x = M_x = 0, \quad x = 0, L \quad (17)$$

۳- حل معادلات

روش‌های عددی، کاربرد زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در زمینه‌های مختلف مهندسی دارند. روش‌های کلاسیک مانند روش‌های تفاضل محدود و اجزا محدود به خوبی شناخته شده و کاربرد آنها توسعه یافته است. در این روش‌ها، برای رسیدن به دقت کافی در محاسبات باید از نقاط زیادی استفاده نمود. از این رو پژوهش در مورد یافتن روش‌های عددی با محاسبات کمتر همواره مطرح بوده است. یکی از این روش‌ها، روش مربعات تفاضلی است. این روش اولین بار توسط بلمن و همکارانش [۱۸]، در سال ۱۹۷۲ به عنوان یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به کار گرفته شد. و بعدها توسط برت و مالیک برای حل معادلات مکانیک جامدات

¹ Generalized Differential Quadrature

² Weighting Coefficient

می‌باشد [۲۱]. شو و ریچاردز (۱۹۹۲) نقاطی را پیشنهاد دادند که نسبت به چند جمله‌ای لاگرانژ و چبیشف نتایج بهتری به دست می‌آید [۲۲]. برت و مالیک (۱۹۹۶) نشان دادند توزیع بهینه نقاط شبکه به نوع مساله بستگی دارد و پیشنهاد کردند در مسائل مکانیک سازه‌ای از روش چبیشف-گوس-لوباتو^۱ برای توزیع نقاط شبکه استفاده شود. بر این اساس، در این تحقیق نیز از این نقاط استفاده می‌شود که به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۹]:

$$x_i = \frac{1}{2} (1 - \cos(\frac{i-1}{N-1} \pi)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

۲-۳- اعمال روش GDQ بر معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی

با اعمال روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، معادلات حرکت (۱۵) گسسته سازی می‌شوند. بدین منظور ابتدا باید توابع جابجایی را به گونه‌ای حدس زد که در این معادلات صدق کنند. این توابع به صورت توابع مجهول در راستای طول استوانه و توابع مثلثاتی در راستای محیطی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= U(x) \cos n\theta \cos \omega t \\ v_0 &= V(x) \sin n\theta \cos \omega t \\ \phi_x &= X(x) \cos n\theta \cos \omega t \\ \phi_\theta &= Y(x) \sin n\theta \cos \omega t \\ w_0 &= W(x) \cos n\theta \cos \omega t \end{aligned} \quad (23)$$

در این روابط n و ω به ترتیب بیانگر عدد موج محیطی و فرکانس طبیعی ارتعاش هستند. با جایگذاری روابط (۲۳) در روابط (۵) و به کمک روابط (۸)، معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای بر حسب ترم‌های جابجایی بسط داده می‌شوند که نتایج آن در پیوست ارائه گردیده است. با استفاده از روابط (۱۹) الی (۲۲) و بکارگیری روابط پیوست، معادلات دیفرانسیل حرکت به فرم زیر گسسته سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{nW_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{12}(x_j) \right) \right. \\ & + \frac{W_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{12}(x_j) \right) + \frac{n\nu A_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} V_j \right) \\ & + \frac{\nu A_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} W_j \right) \\ & + \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{11}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} U_j \right) \\ & + A_{11}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} U_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} B_{11}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) + B_{11}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} X_j \right) \\ & + \frac{nV_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{12}(x_j) \right) + \frac{n\nu B_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} Y_j \right) \\ & + \frac{1}{2+2\nu} \left(-\frac{n^2 A_{22}(x_i) U_i}{R^2} + \frac{nA_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} V_j \right) \right. \\ & \left. - \frac{n^2 B_{22}(x_i) X_i}{R^2} + \frac{nB_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} Y_j \right) \right) \\ & = -I_1(x_i) U_i \omega^2 - I_2(x_i) X_i \omega^2 \\ & \frac{1}{2+2\nu} \left(\left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{22}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} V_j \right) \right. \end{aligned} \quad (1-24)$$

$$\begin{aligned} & + A_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} V_j \right) - \frac{nU_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{22}(x_j) \right) \\ & - \frac{nA_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j \right) - \frac{nX_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{22}(x_j) \right) \\ & + \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{22}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} Y_j \right) \\ & - \frac{nB_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) + B_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} Y_j \right) \\ & + \frac{A_{22}(x_i) Y_i}{R} - \frac{nA_{22}(x_i) W_i}{R^2} - \frac{A_{22}(x_i) V_i}{R^2} \\ & + \frac{1}{1-\nu^2} \left(-\frac{n\nu A_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j \right) - \frac{n^2 A_{11}(x_i) W_i}{R^2} \right. \\ & - \frac{nA_{11}(x_i) W_i}{R^2} - \frac{n\nu B_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) \\ & \left. - \frac{n^2 B_{11}(x_i) Y_i}{R^2} \right) = -I_1(x_i) W_i \omega^2 - I_2(x_i) Y_i \omega^2 \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2+2\nu} \left(X_i \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{22}(x_j) \right) \right. \\ & + \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} A_{22}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} W_j \right) \\ & + A_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) + A_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j \right) \\ & + \frac{nA_{22}(x_i) Y_i}{R} - \frac{n^2 A_{22}(x_i) W_i}{R^2} - \frac{nA_{22}(x_i) V_i}{R^2} \\ & - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{nA_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j \right) - \frac{nA_{11}(x_i) W_i}{R^2} \right. \\ & - \frac{A_{11}(x_i) W_i}{R^2} - \frac{\nu B_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) \\ & \left. - \frac{nB_{11}(x_i) Y_i}{R^2} \right) = -I_1(x_i) W_i \omega^2 \end{aligned} \quad (3-24)$$

³ Chebyshev-Gauss-Lobatto

$$\frac{1}{1-\nu^2} \left(A_{11}(x_1) \sum_{j=1}^N C_{1j}^{(1)} U_j + B_{11}(x_1) \sum_{j=1}^N C_{1j}^{(1)} X_j \right. \\ \left. + \frac{n\nu}{R} (A_{12}(x_1) \mathcal{V}_1 + A_{12}(x_1) \mathcal{W}_1 + B_{12}(x_1) \mathcal{Y}_1) \right) = 0 \quad (25)$$

در $x=L$ شرایط مرزی با گسسته سازی رابطه (۱۷) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$W_N = V_N = Y_N = 0 \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left(B_{11}(x_N) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(1)} U_j + D_{11}(x_N) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(1)} X_j \right. \\ \left. + \frac{n\nu}{R} (B_{12}(x_N) \mathcal{V}_N + B_{12}(x_N) \mathcal{W}_N + D_{12}(x_N) \mathcal{Y}_N) \right) = 0 \quad (26) \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left(A_{11}(x_N) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(1)} U_j + B_{11}(x_N) \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(1)} X_j \right. \\ \left. + \frac{n\nu}{R} (A_{12}(x_N) \mathcal{V}_N + A_{12}(x_N) \mathcal{W}_N + B_{12}(x_N) \mathcal{Y}_N) \right) = 0$$

به منظور محاسبه فرکانس طبیعی از معادلات مقدار ویژه، متغیرها در تمام دامنه محاسباتی به دو بخش تقسیم می‌شوند. متغیرهای بخش اول که شامل نقاط داخلی می‌باشند، با پانویس d و متغیرهای بخش دوم که شامل نقاط مرزی هستند، با پانویس b نمایش داده می‌شوند. این متغیرها در فرم برداری به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\{d_d\}^T = \{U_i, V_i, W_i, X_i, Y_i\} \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \{d_b\}^T = \{U_1, U_N, V_1, V_N, W_1, W_N, X_1, X_N, Y_1, Y_N\} \quad (27)$$

با استفاده از تعریف فوق، معادلات حرکت (۱-۲۴) تا

(۵-۲۴) در فرم ماتریسی به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$[S_{db}]\{d_b\} + [S_{dd}]\{d_d\} = -\omega^2 [M]\{d_d\} \quad (28)$$

که M ماتریس جرم و ماتریسهای S_{db} و S_{dd} به ترتیب شامل ضرایب نقاط دامنه و مرز در معادلات دامنه یا حرکت می‌باشند و به عنوان ماتریس سختی تعریف می‌شوند. به طور مشابه فرم ماتریسی شرایط مرزی (۲۵) و (۲۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[S_{bb}]\{d_b\} + [S_{bd}]\{d_d\} = 0 \quad (29)$$

که در این معادله، ماتریسهای سختی S_{bb} و S_{bd} به ترتیب شامل ضرایب نقاط دامنه و مرز در معادلات شرایط مرزی هستند. برای حل معادلات به عنوان یک مسئله مقدار ویژه، روابط (۲۸) و (۲۹) به فرم زیر باز نویسی می‌شوند:

$$([S_{dd}] - [S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}] + \omega^2 [M])\{d_d\} = 0 \quad (30)$$

با حل رابطه (۳۰) می‌توان مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی را محاسبه نمود.

$$\frac{1}{1-\nu^2} \left(\left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{11}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j \right) \right. \\ \left. + B_{11}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} U_j \right) + \frac{nW_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{12}(x_j) \right) \right. \\ \left. + \frac{W_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{12}(x_j) \right) + \frac{n\nu B_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{V}_j \right) \right. \\ \left. + \frac{\nu B_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{W}_j \right) \right. \\ \left. + \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} D_{11}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) + D_{11}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} X_j \right) \right. \\ \left. + \frac{nY_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} D_{12}(x_j) \right) + \frac{n\nu D_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{Y}_j \right) \right) \\ \left. + \frac{1}{2+2\nu} \left(-\frac{n^2 B_{22}(x_i) U_i}{R^2} + \frac{nB_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{V}_j \right) \right. \right. \\ \left. - \frac{n^2 D_{22}(x_i) X_i}{R^2} + \frac{nD_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{Y}_j \right) \right. \\ \left. - A_{22}(x_i) X_i - A_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{W}_j \right) \right) \\ = -I_2(x_i) U_i \omega^2 - I_3(x_i) X_i \omega^2 \quad (24-4)$$

$$\frac{1}{2+2\nu} \left(\left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{22}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{V}_j \right) \right. \\ \left. - \frac{nU_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} B_{22}(x_j) \right) - \frac{nB_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j \right) \right. \\ \left. + B_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \mathcal{V}_j \right) - \frac{nX_i}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} D_{22}(x_j) \right) \right. \\ \left. + \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} D_{22}(x_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \mathcal{Y}_j \right) \right. \\ \left. - \frac{nD_{22}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) + D_{22}(x_i) \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \mathcal{Y}_j(x) \right) \right. \\ \left. - A_{22}(x_i) \mathcal{Y}_i + \frac{nA_{22}(x_i) \mathcal{W}_i}{R} + \frac{A_{22}(x_i) \mathcal{Y}_i}{R} \right) \\ \left. + \frac{1}{1-\nu^2} \left(-\frac{n\nu B_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j \right) - \frac{n^2 B_{11}(x_i) \mathcal{V}_i}{R^2} \right. \right. \\ \left. - \frac{nB_{11}(x_i) X_i}{R^2} - \frac{n\nu D_{12}(x_i)}{R} \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} X_j \right) \right. \\ \left. - \frac{n^2 D_{11}(x_i) \mathcal{Y}_i}{R^2} \right) = -I_2(x_i) \mathcal{V}_i \omega^2 - I_3(x_i) \mathcal{Y}_i \omega^2 \quad (24-5)$$

در روابط (۱-۲۴) تا (۵-۲۴) $C_{ij}^{(1)}$ و $C_{ij}^{(2)}$ به ترتیب بیانگر ضرایب وزنی مرتبه اول و دوم می‌باشند. با توجه به شرایط مرزی در $x=0$ ، رابطه (۱۷) نیز به صورت زیر گسسته می‌شود:

$$W_1 = V_1 = Y_1 = 0 \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left(B_{11}(x_1) \sum_{j=1}^N C_{1j}^{(1)} U_j + D_{11}(x_1) \sum_{j=1}^N C_{1j}^{(1)} X_j \right. \\ \left. + \frac{n\nu}{R} (B_{12}(x_1) \mathcal{V}_1 + B_{12}(x_1) \mathcal{W}_1 + D_{12}(x_1) \mathcal{Y}_1) \right) = 0$$

۴- نتایج و بحث

همان‌طور که در بخش ۳ ذکر شد، سرعت همگرایی پاسخ در روش GDQ، به تعداد و توزیع نقاط شبکه بستگی دارد. برای تعیین تعداد نقاط بهینه برای شبکه، معادلات پوسته‌ای استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی با شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتها، به کمک روش GDQ حل می‌شوند. مشخصات مواد در جدول ۱ ارائه شده است. در این تحلیل $L/R=1$ و $h/R=0.02$ فرض شده‌اند. فرکانس طبیعی پوسته برحسب N (تعداد نقاط در راستای x) در جدول ۲ مرتب شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای $N \geq 15$ تغییرات چندانی در مقدار فرکانس طبیعی رخ نمی‌دهد و با دقت 10^{-5} به یک مقدار ثابت می‌رسد. این امر نشان دهنده همگرایی بسیار سریع روش GDQ می‌باشد. به این ترتیب به منظور یک حاشیه اطمینان، تمامی نتایج حاصل از این پژوهش با تعداد نقاط شبکه $N=25$ محاسبه شده‌اند.

جدول ۱- خواص مواد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی

خاصیت ماده	فولاد ضدزنگ	نیکل
$E(\text{GPa})$	۲۰۷٫۷۷۸	۲۰۵٫۰۹۸
$\rho(\text{Kg/m}^3)$	۸۱۶۶	۸۹۰۰
ν	۰٫۳۱۷۷۵۶	۰٫۳۱

جدول ۲- تغییرات فرکانس طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی در مقابل تعداد نقاط شبکه ($h/R=0.02$, $L/R=1$, $N_z=2$)

ω	N
۸۳٫۹۹۵۹	۷
۸۳٫۹۹۲۱	۱۰
۸۳٫۹۸۲۲	۱۵
۸۳٫۹۸۲۲	۲۰
۸۳٫۹۸۲۲	۲۵

۴-۱- صحت سنجی روش GDQ

برای صحت سنجی نتایج، ابتدا پوسته استوانه‌ای از نوع مدرج تابعی معمولی، بطوریکه خواص مکانیکی آن فقط در راستای ضخامت تغییر می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش GDQ با نتایج لوی و همکارانش [۶]، مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج عددی به دست آمده با استفاده از روش GDQ، هم خوانی خوبی با نتایج حاصل از این مرجع دارد. در هر n ثابت بیشترین درصد اختلاف در $N_z=1$ یا $N_z=2$ رخ می‌دهد. بطوریکه بیشترین درصد اختلاف ($N_z=1$ و $N_z=7$) برابر ۰٫۴۹ درصد است. با توجه به متفاوت بودن تئوری مورد استفاده در این پژوهش با

تئوری بکار گرفته شده در مرجع [۶]، این درصد اختلاف ناچیز دور از انتظار نیست.

جدول ۳- فرکانس طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی با تکیه‌گاه ساده در دو طرف ($L/R=20$, $h/R=0.02$)

n	n_z	GDQ	[۶]	اختلاف (%)
۱	۱	۱۳٫۱۷۶	۱۳٫۲۱۲	۰٫۲۷
	۲	۱۳٫۰۶۸	۱۳٫۱۰۳	۰٫۴۷
	۵	۱۲٫۹۶۳	۱۲٫۹۹۵	۰٫۲۴
	۱۵	۱۲٫۸۹۸	۱۲٫۹۳۳	۰٫۲۷
	۳۰	۱۲٫۸۷۹	۱۲٫۹۱۴	۰٫۲۷
۴	۱	۷٫۰۰۷۵	۷٫۰۳۸۴	۰٫۴۳
	۲	۶٫۹۵۳۲	۶٫۹۸۲۰	۰٫۴۱
	۵	۶٫۸۹۹۴	۶٫۹۲۵۱	۰٫۳۷
	۱۵	۶٫۸۶۳۵	۶٫۸۸۵۶	۰٫۳۲
	۳۰	۶٫۸۵۲۲	۶٫۸۷۲۶	۰٫۲۹
۷	۱	۲۲٫۵۴۲	۲۲٫۶۳۵	۰٫۴۹
	۲	۲۲٫۳۶۷	۲۲٫۴۵۴	۰٫۳۸
	۵	۲۲٫۱۹۵	۲۲٫۲۷۳	۰٫۳۵
	۱۵	۲۲٫۰۷۹	۲۲٫۱۴۸	۰٫۳۱
	۳۰	۲۲٫۰۴۲	۲۲٫۱۰۸	۰٫۲۹
۱۰	۱	۴۶٫۷۱۲	۴۶٫۹۰۵	۰٫۴۱
	۲	۴۶٫۳۵۱	۴۶٫۵۲۹	۰٫۳۸
	۵	۴۵٫۹۹۳	۴۶٫۱۵۵	۰٫۳۵
	۱۵	۴۵٫۷۵۳	۴۵٫۸۹۷	۰٫۳۱
	۳۰	۴۵٫۶۷۷	۴۵٫۸۱۳	۰٫۲۹

علاوه بر این به منظور صحت سنجی، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی، توسط نرم افزار اجزاء محدود Ansys نیز محاسبه شده است. در این تحلیل پوسته استوانه‌ای با المان چهار ضلعی Shell99 به صورت دستی مش‌بندی شده است. با توجه به اینکه خواص مواد مدرج تابعی بطور پیش فرض در این نرم افزار قابل تعریف نیست، در یک فایل میکرو خواص پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی، از جمله مدول الاستیسیته و چگالی موثر طبق رابطه (۱) کد نویسی شده است. جهت مدرج نمودن پوسته استوانه‌ای در راستای مورد نظر، تعداد مشخصی لایه با ضخامت یکسان تعریف می‌شوند. با فراخوانی فایل میکرو، ثابت‌های حقیقی متناظر با خواص پوسته استوانه‌ای به هرلایه اختصاص داده می‌شود. در جدول ۴ مقادیر فرکانس طبیعی اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی، با نتایج حاصل از

نسبت طول به شعاع ثابت، فرکانس طبیعی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

جدول ۵- خواص مواد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی

اجزا	ماده	$\rho(\text{Kg/m}^3)$	$E(\text{GPa})$
سرامیک ۱	SiC	۳۲۱۰	۴۴۰
سرامیک ۲	Al_2O_3	۳۷۲۰	۳۰۰
فلز ۱	Ti6Al4V	۴۵۱۵	۱۱۵
فلز ۲	Al1100	۲۷۱۵	۶۹

جدول ۶- فرکانس اصلی (Hz) پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی با تکیه گاه ساده در دو طرف در مقابل n_z ($h/R=0/0.2$)
($L/R=1$)

n_z	n_x	GDQ	Ansys	اختلاف (%)
۰	۰	۱۲۵,۸۵(۱۱)	۱۲۶,۱۶	۰,۲۴
۱	۱	۱۳۴,۲۹(۱۱)	۱۳۴,۳۲	۰,۰۲۲
۴	۱	۱۳۹,۲۸(۱۱)	۱۳۹,۲۷	۰,۰۰۷۱
۷	۷	۱۴۰,۳۴(۱۱)	۱۴۰,۳۹	۰,۰۳۵
۱۰	۱۰	۱۴۰,۷۲(۱۱)	۱۴۰,۶۸	۰,۰۲۸
۰	۰	۱۴۰,۳۵(۱۱)	۱۴۰,۷۶	۰,۲۹
۱	۱	۱۵۶,۵۷(۱۱)	۱۵۶,۵۲	۰,۰۳۱
۴	۴	۱۶۷,۹۳(۱۱)	۱۶۷,۶۸	۰,۱۴
۷	۷	۱۷۰,۲۶(۱۱)	۱۶۹,۹۷	۰,۱۷
۱۰	۱۰	۱۷۱,۰۷(۱۱)	۱۷۰,۷۸	۰,۱۶
۰	۰	۱۴۴,۷۵(۱۱)	۱۴۴,۹۲	۰,۱۱
۱	۱	۱۶۳,۱۰(۱۱)	۱۶۲,۸۰	۰,۱۸
۴	۷	۱۷۶,۵۳(۱۱)	۱۷۵,۹۴	۰,۳۳
۷	۷	۱۷۹,۳۱(۱۱)	۱۷۸,۶۷	۰,۳۵
۱۰	۱۰	۱۸۰,۲۷(۱۱)	۱۷۹,۶۱	۰,۳۶
۰	۰	۱۴۷,۰۰(۱۱)	۱۴۶,۹۹	۰,۰۰۶
۱	۱	۱۶۶,۴۲(۱۱)	۱۶۵,۸۶	۰,۳۳
۴	۱۰	۱۸۰,۸۳(۱۱)	۱۷۹,۹۶	۰,۴۸
۷	۷	۱۸۳,۹۰(۱۱)	۱۸۲,۸۹	۰,۵۴
۱۰	۱۰	۱۸۴,۹۳(۱۱)	۱۸۳,۹۱	۰,۵۵

نرم افزار Ansys مقایسه شده است. همان طور که دیده می‌شود مقادیر به دست آمده از روش GDQ با نتایج روش اجزا محدود نیز هم خوانی بسیار خوبی دارد.

جدول ۴- فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی بر حسب توان نمایی در جهت ضخامت ($n=11$, $L/R=1$, $h/R=0/0.2$)

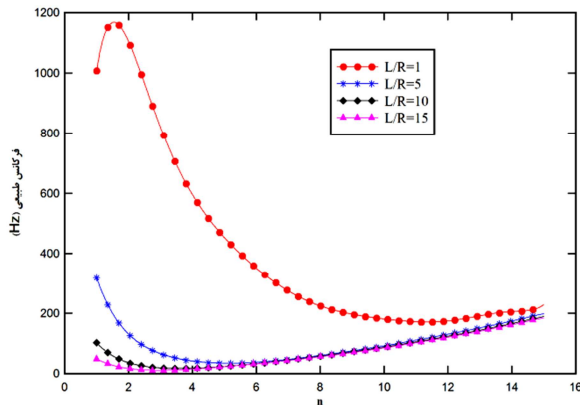
n_z	GDQ	Ansys
۱	۸۴,۷۹۷	۸۴,۸۱۰
۲	۸۴,۱۲۵	۸۴,۱۳۸
۵	۸۳,۴۵۹	۸۳,۴۸۴
۱۵	۸۳,۰۳۸	۸۳,۰۸۲
۳۰	۸۲,۹۰۶	۸۲,۹۹۴

۴-۲- نتایج پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی

برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی، چهار نوع ماده در نظر گرفته شده است. در جدول ۵ مقادیر مربوط به خواص مکانیکی این مواد آورده شده است. از آنجا که نسبت پواسون هر چهار ماده انتخابی به هم نزدیک هستند مقدار آن ثابت و برابر ۰,۳ در نظر گرفته شده است. سطح داخلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی از سرامیک و سطح خارجی از فلز تشکیل می‌شود. برای صحت سنجی و تایید نتایج مربوط به فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی، مقایسه‌ای با نتایج حاصل از نرم افزار Ansys در جدول ۶ انجام شده است. جهت مدرج نمودن پوسته استوانه‌ای در دو راستای طولی و شعاعی از روش توضیح داده شده در بخش ۴-۱ استفاده شده است. اعداد داخل پرانتز در جدول ۶ نشان دهنده عدد موج محیطی هستند که فرکانس‌های اصلی در آن رخ می‌دهد. در $n_x > 0$ ، با افزایش n_z درصد اختلاف افزایش می‌یابد، بطوریکه بیشترین درصد اختلاف در این جدول در $n_z = n_x = 10$ رخ داده است. با توجه به مقادیر درصد اختلاف، نتایج روش GDQ تطابق خوبی با Ansys دارد. در این جدول با ثابت بودن n_z و افزایش n_x ، فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی افزایش می‌یابد. افزایش فرکانس با ثابت ماندن n_x و افزایش n_z نیز دیده می‌شود اما در این حالت، افزایش فرکانس اصلی محسوس‌تر است.

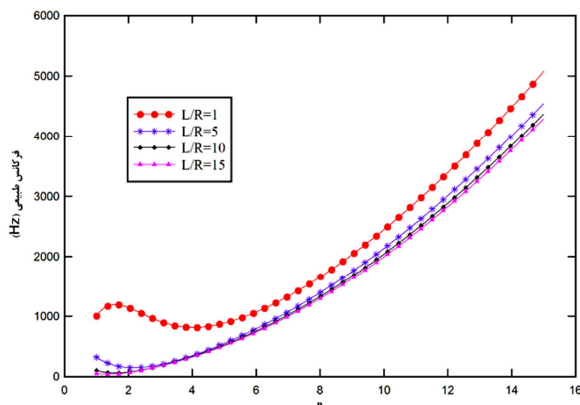
همان طور که در شکل ۵ نشان داده شده است با افزایش نماها در دو راستا، فرکانس اصلی افزایش می‌یابد ولی در مقادیر بالاتر به دلیل آنکه خواص موثر به یکی از خواص مواد انتخابی میل می‌کند، فرکانس اصلی به یک مقدار ثابت همگرا می‌شود. شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی را برای نسبت ضخامت به شعاع ۰,۰۰۲ نشان می‌دهد. در این نمودار با افزایش عدد موج محیطی در یک

پوسته‌های بلند نازک و نسبتاً ضخیم در عدد موج محیطی کمتر از ۵ ($n < 5$) رخ می‌دهد. به عنوان مثال برای پوسته‌هایی با نسبت ضخامت به شعاع ۰/۰۲ و ۰/۰۸، فرکانس‌های اصلی به ترتیب در عدد موج محیطی ۴ و ۱ اتفاق می‌افتد.

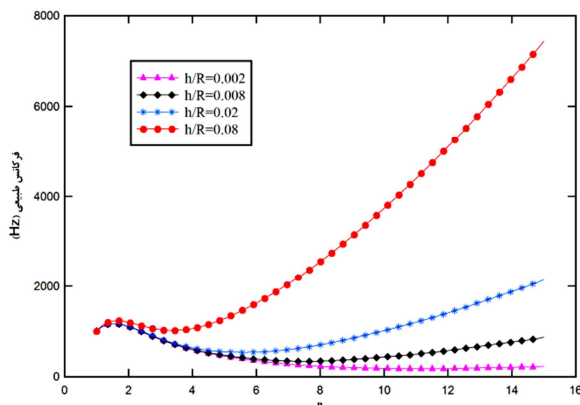


شکل ۵- تغییرات فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی برحسب نماهای قانون توانی ($L/R=1, h/R=0.05$)

شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی (Hz) برحسب عدد موج محیطی در مقادیر مختلف L/R ($n_z = n_x = 5, h/R = 0.02$)



شکل ۷- تغییرات فرکانس طبیعی (Hz) برحسب عدد موج محیطی در مقادیر مختلف L/R ($n_z = n_x = 5, h/R = 0.05$)

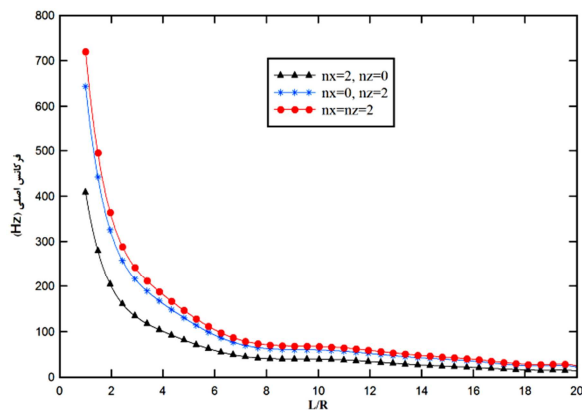


شکل ۸- تغییرات فرکانس طبیعی (Hz) برحسب عدد موج محیطی در مقادیر مختلف h/R ($n_z = n_x = 5, L/R = 1$)

فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی، با افزایش نسبت طول به شعاع در اعداد موج پایین‌تری رخ می‌دهد. به عنوان مثال برای نسبت طول به شعاع ۱ و ۱۵، فرکانس اصلی به ترتیب در اعداد موج محیطی ۱۱ و ۳ رخ داده است. منحنی‌های فرکانس طبیعی برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع با افزایش عدد موج محیطی، تقریباً همگرا می‌شوند. این رفتار برای پوسته استوانه‌ای با نسبت ضخامت به شعاع ۰/۰۵ کمی متفاوت است. همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، روند کاهشی فرکانس طبیعی برای پوسته‌هایی با نسبت طول به شعاع ۱۰ و ۱۵ (پوسته استوانه‌ای نسبتاً بلند) بسیار کم است، بطوریکه کمترین مقدار فرکانس طبیعی که همان فرکانس اصلی پوسته است، در عدد موج محیطی ۱ یا ۲ اتفاق می‌افتد. با افزایش عدد موج محیطی، فرکانس طبیعی به شدت افزایش می‌یابد.

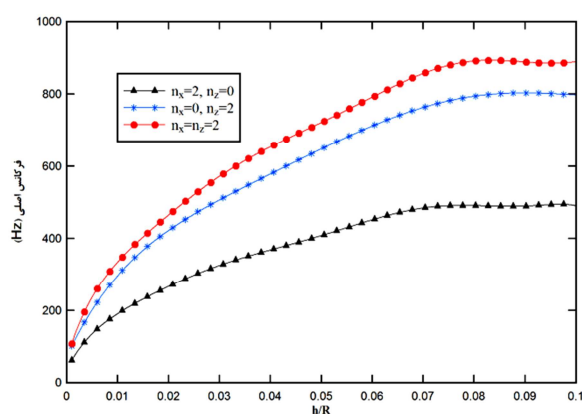
در شکل‌های ۸ و ۹، تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجتهی برحسب عدد موج محیطی برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع ترسیم شده است. شکل ۸ این تغییرات را در نسبت طول به شعاع ۱ نشان می‌دهد. با افزایش عدد موج محیطی، فرکانس طبیعی به طور کلی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. تا عدد موج محیطی ۲، پرش کوچکی در منحنی‌های فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی در اعداد موج پایین‌تری رخ می‌دهد. به عنوان مثال برای پوسته‌های کوتاه نازک ($h/R = 0.02$) فرکانس اصلی در عدد موج محیطی ۱۱ ($n=11$) و برای پوسته‌های کوتاه نسبتاً ضخیم ($h/R = 0.08$) در عدد موج محیطی ۳ رخ می‌دهد.

شکل ۹ تغییرات فرکانس طبیعی را در نسبت طول به شعاع ۱۰ نشان می‌دهد. منحنی‌های فرکانس طبیعی در این حالت دارای روند بسیار ناچیز کاهشی و سپس افزایشی هستند. با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی به شدت افزایش می‌یابد. با توجه به شکل، فرکانس‌های اصلی برای

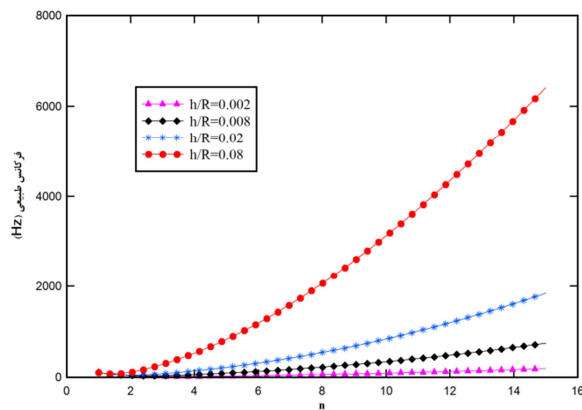


شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی اصلی (Hz) برحسب L/R با آرایش‌های متفاوت نماهای قانون توانی ($h/R=0.05$)

با آرایش‌های مختلف نماهای قانون توانی نمایش داده شده است. در شکل ۱۲ با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، ابتدا برای هر سه نوع آرایش، فرکانس طبیعی اصلی دارای روندی افزایشی است، اما در نهایت برای نسبت ضخامت به شعاع بزرگ‌تر از ۰.۰۷ به مقداری ثابت میل می‌کند. با توجه به شکل، فرکانس طبیعی برای آرایش $n_z = n_x = 2$ (پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوجبهتی) نسبت به دو آرایش دیگر ($n_z = 2$ یا $n_x = 0$ و $n_z = 0$) بزرگتر است. در شکل ۱۳ همین رفتار برای نسبت طول به شعاع ۱۰ (پوسته‌های استوانه‌ای نسبتاً بلند) مشاهده می‌شود. در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ شکل مود ارتعاشی مربوط به فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجبهتی، برای نسبت طول به شعاع ۱ نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با تغییر نسبت ضخامت به شعاع، شکل مودهای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجبهتی تغییر می‌کنند.



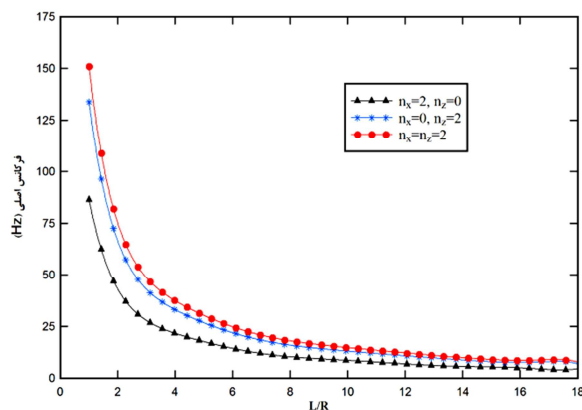
شکل ۱۲- تغییرات فرکانس طبیعی اصلی (Hz) برحسب h/R با آرایش‌های متفاوت نماهای قانون توانی ($L/R=1$)



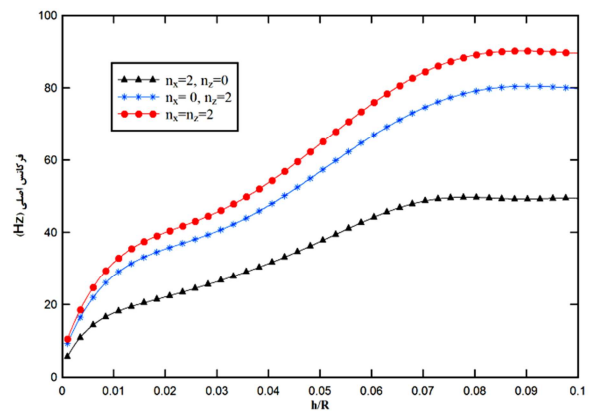
شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی (Hz) برحسب عدد موج محیطی در مقادیر مختلف h/R ($n_z = n_x = 5, L/R = 10$)

به منظور بررسی اثر ثابت‌های قانون توانی در دو راستای طول و ضخامت بر روی فرکانس اصلی، آرایش‌های متفاوتی از نماها در نظر گرفته شده است. برای پوسته نازک با نسبت شعاع به ضخامت ۰.۰۲، تغییرات فرکانس اصلی در مقابل پارامتر بی بعد L/R در شکل ۱۰ ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نسبت‌های کوچک L/R ($L/R < 5$) فرکانس‌های اصلی برای آرایش‌های مختلف نماها اختلاف زیادی نسبت به انتهای نمودار دارند. در این شکل فرکانس‌های اصلی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوجبهتی با $n_z = n_x = 2$ از پوسته‌های استوانه‌ای مدرج معمولی با $n_z = 2$ یا $n_x = 0$ و $n_z = 0$ و $n_x = 2$ بزرگتر هستند. همین رفتار برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم در شکل ۱۱ دیده می‌شود، با این تفاوت که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس‌های اصلی نسبت به حالت قبلی مقادیر بالاتری به خود اختصاص داده‌اند.

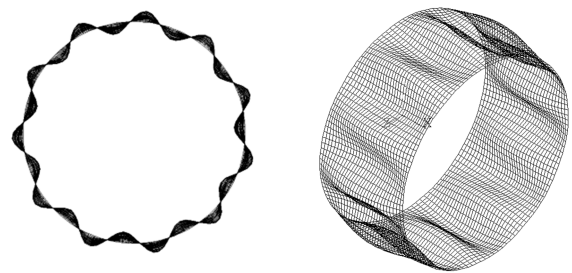
تأثیر نسبت ضخامت به شعاع بر روی فرکانس اصلی پوسته‌های مدرج تابعی کوتاه و نسبتاً بلند در شکل‌های ۱۲ و ۱۳



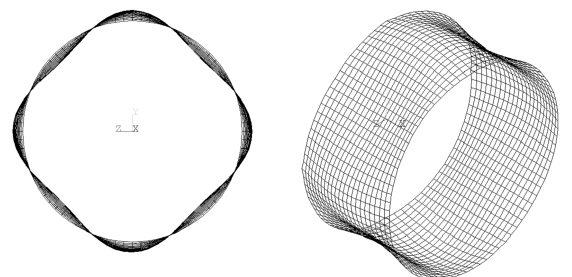
شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی اصلی (Hz) برحسب L/R با آرایش‌های متفاوت نماهای قانون توانی ($h/R=0.02$)



شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی اصلی (Hz) برحسب h/R با آرایش‌های متفاوت نماهای قانون توانی ($L/R=10$)



شکل ۱۴- شکل مود پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی با فرکانس اصلی ۱۵۱۰۱۵ هرتز ($n_z=n_x=2, L/R=1, h/R=0.02$) ($n=1$)



شکل ۱۵- شکل مود پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی با فرکانس اصلی ۷۲۰۸۸۰ هرتز ($n_z=n_x=2, L/R=1, h/R=0.05$) ($n=4$)

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی، بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد بررسی قرار گرفت. مشخصات مکانیکی مواد انتخاب شده برای پوسته استوانه‌ای، بر اساس قانون توانی توزیع کسر حجمی به طور پیوسته در دو جهت ضخامت و طول تغییر می‌کند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله با فرض شرایط تکیه‌گاهی از نوع تکیه‌گاه ساده، به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل شدند. به منظور صحت سنجی، نتایج پوسته استوانه‌ای با

خواص متغیر در جهت ضخامت با مرجع [۶]، مقایسه گردید. اختلاف ناچیز در نتایج، به دلیل متفاوت بودن تئوری‌های بکار رفته مشاهده شد. در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دلیل اعمال شدن اثرات برش و اینرسی، فرکانس طبیعی پوسته در مقایسه با تئوری لاو [۶]، مقادیر کمتری را به خود اختصاص می‌دهد. علاوه بر این نتایج پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی، با نتایج نرم افزار Ansys مقایسه و نشان داده شد نتایج روش GDQ مطابقت بسیار خوبی با نتایج روش اجزاء محدود دارد. در ادامه اثرات پارمترهای بی بعد هندسی و ثابت-های قانون توانی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی مورد ارزیابی قرار گرفت که اهم نتایج عبارتند از:

- ۱- به طور کلی افزایش نماهای قانون توانی در دو جهت، افزایش فرکانس طبیعی را در پی دارد. در حقیقت فرکانس طبیعی به علت حضور بیشتر فاز با مدول الاستیسیته بالا در ترکیب ماده مدرج تابعی، افزایش می‌یابد. اما فرکانس طبیعی در مقادیر بالای نماها به یک مقدار ثابت می‌رسد، زیرا خواص موثر پوسته به خواص یکی از مواد انتخابی میل می‌کند.
- ۲- با افزایش نسبت طول به شعاع، در یک نسبت ضخامت به شعاع ثابت، فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی در اعداد موج پایین‌تری رخ می‌دهد.
- ۳- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، در محدوده پوسته‌های نازک، فرکانس اصلی افزایش می‌یابد ولی در محدوده پوسته‌های نسبتاً ضخیم فرکانس طبیعی مستقل از نسبت ضخامت به شعاع و تقریباً ثابت است. همچنین با افزایش ضخامت به شعاع، فرکانس اصلی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی در اعداد موج پایین‌تری رخ می‌دهد.
- ۴- به طور کلی در شرایط هندسی یکسان، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوجهتی بیشتر از فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی معمولی است.

پیوست

فرم بسط یافته معادلات حرکت بر حسب ترم‌های جابجایی:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-\nu^2} \left(\left(\frac{dB_{11}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) + B_{11}(x) \left(\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right) \right. \\
 & + \frac{nW(x)}{R} \left(\frac{dB_{12}(x)}{dx} \right) + \frac{vW(x)}{R} \left(\frac{dB_{12}(x)}{dx} \right) \\
 & + \frac{n\nu B_{12}(x)}{R} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) + \frac{\nu B_{12}(x)}{R} \left(\frac{dW(x)}{dx} \right) \\
 & + \left(\frac{dD_{11}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) + D_{11}(x) \left(\frac{d^2X(x)}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{nY(x)}{R} \left(\frac{dD_{12}(x)}{dx} \right) + \frac{n\nu D_{12}(x)}{R} \left(\frac{dY(x)}{dx} \right) \Bigg) \\
 & + \frac{1}{2+2\nu} \left(-\frac{n^2B_{22}(x)U(x)}{R^2} + \frac{nB_{22}(x)}{R} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) \right. \\
 & - \frac{n^2D_{22}(x)X(x)}{R^2} + \frac{nD_{22}(x)}{R} \left(\frac{dY(x)}{dx} \right) \\
 & - A_{22}(x)X(x) - A_{22}(x) \left(\frac{dW(x)}{dx} \right) \Bigg) \\
 & = -I_2(x)U(x)\omega^2 - I_3(x)X(x)\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{24-d}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2+2\nu} \left(\left(\frac{dB_{22}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) - \frac{nU(x)}{R} \left(\frac{dB_{22}(x)}{dx} \right) \right. \\
 & - \frac{nB_{22}(x)}{R} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) + B_{22}(x) \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right) \\
 & - \frac{nX(x)}{R} \left(\frac{dD_{22}(x)}{dx} \right) + \left(\frac{dD_{22}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dY(x)}{dx} \right) \\
 & - \frac{nD_{22}(x)}{R} \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) + D_{22}(x) \left(\frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{nA_{22}(x)W(x)}{R} + \frac{A_{22}(x)Y(x)}{R} - A_{22}(x)Y(x) \Bigg) \\
 & + \frac{1}{1-\nu^2} \left(-\frac{n\nu B_{12}(x)}{R} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) - \frac{n^2B_{11}(x)Y(x)}{R^2} \right. \\
 & - \frac{nB_{11}(x)X(x)}{R^2} - \frac{n\nu D_{12}(x)}{R} \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) \\
 & \left. - \frac{n^2D_{11}(x)Y(x)}{R^2} \right) = -I_2(x)Y(x)\omega^2 - I_3(x)Y(x)\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{24-e}$$

مراجع

- [1] Koizumi M., "Functionally gradient materials the concept of FGM", Ceramic Transactions, vol. 34, pp. 3-10, 1993.
- [2] Warburton G.B., Higgs J., "Natural frequencies of thin cantilever cylindrical shells", Journal of Sound and Vibration, vol. 11, pp. 335-338, 1970.
- [3] Bihmaraddi A., "A higher order theory for free vibration of circular cylindrical shells", International Journal of Solids and Structures, vol. 20, pp. 623-630, 1984.
- [4] Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G., "Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method", Applied Acoustics, vol. 74, pp. 425-439, 2013.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{nW(x)}{R} \left(\frac{dA_{12}(x)}{dx} \right) + \frac{W(x)}{R} \left(\frac{dA_{12}(x)}{dx} \right) \right. \\
 & + \frac{n\nu A_{12}(x)}{R} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) + \frac{\nu A_{12}(x)}{R} \left(\frac{dW(x)}{dx} \right) \\
 & + \left(\frac{dA_{11}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) + A_{11}(x) \left(\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right) \\
 & + \left(\frac{dB_{11}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) + B_{11}(x) \left(\frac{d^2X(x)}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{nY(x)}{R} \left(\frac{dB_{12}(x)}{dx} \right) + \frac{n\nu B_{12}(x)}{R} \left(\frac{dY(x)}{dx} \right) \Bigg) \\
 & + \frac{1}{2+2\nu} \left(-\frac{n^2A_{22}(x)U(x)}{R^2} + \frac{nA_{22}(x)}{R} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) \right. \\
 & - \frac{n^2B_{22}(x)X(x)}{R^2} + \frac{nB_{22}(x)}{R} \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) \Bigg) \\
 & = -I_1(x)U(x)\omega^2 - I_2(x)X(x)\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{24-f}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2+2\nu} \left(\left(\frac{dA_{22}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) + A_{22}(x) \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right) \right. \\
 & - \frac{nU(x)}{R} \left(\frac{dA_{22}(x)}{dx} \right) - \frac{nA_{22}(x)}{R} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) \\
 & - \frac{nX(x)}{R} \left(\frac{dB_{22}(x)}{dx} \right) + \left(\frac{dB_{22}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dY(x)}{dx} \right) \\
 & - \frac{nB_{22}(x)}{R} \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) + B_{22}(x) \left(\frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right) \\
 & - \frac{n^2B_{11}(x)Y(x)}{R^2} + \frac{A_{22}(x)Y(x)}{R} - \frac{nA_{22}(x)W(x)}{R^2} \\
 & - \frac{1A_{22}(x)Y(x)}{R^2} + \frac{1}{1-\nu^2} \left(-\frac{n\nu A_{12}(x)}{R} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) \right. \\
 & - \frac{n^2A_{11}(x)Y(x)}{R^2} - \frac{nA_{11}(x)W(x)}{R^2} \\
 & \left. - \frac{n\nu B_{12}(x)}{R} \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) \right) = -I_1(x)Y(x)\omega^2 \\
 & - I_2(x)Y(x)\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{24-b}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2+2\nu} \left(X(x) \left(\frac{dA_{22}(x)}{dx} \right) + \left(\frac{dA_{22}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dW(x)}{dx} \right) \right. \\
 & + A_{22}(x) \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) + A_{22}(x) \left(\frac{d^2W(x)}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{nA_{22}(x)Y(x)}{R} - \frac{n^2A_{22}(x)W(x)}{R^2} \\
 & - \frac{nA_{22}(x)Y(x)}{R^2} \Bigg) + \frac{1}{1-\nu^2} \left(-\frac{nA_{12}(x)}{R} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right) \right. \\
 & - \frac{nA_{11}(x)Y(x)}{R^2} - \frac{A_{11}(x)W(x)}{R^2} \\
 & - \frac{\nu B_{12}(x)}{R} \left(\frac{dX(x)}{dx} \right) - \frac{nB_{11}(x)Y(x)}{R^2} \Bigg) \\
 & = -I_1(x)W(x)\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{24-c}$$

- [16] Reddy J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis", Second edition, Boca Raton, CRC Press, 2004.
- [17] Khdeir A. A., Reddy J.N., Frederick D., "study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories", International Journal of Engineering Science, vol. 27, pp. 1337- 1351, 1989.
- [18] Belman R., Kashef B.G., Casti j., "Differential quadrature: A technique for a rapid solution of nonlinear partial differential equations", Journal of Computational Physics, vol. 10, pp. 40-52, 1972.
- [19] Bert C.W., Malik M., "Differential quadrature method in computational mechanics: a review", Applied Mechanics Review, vol. 49, pp. 1-27, 1996.
- [20] Shu C., "Differential quadrature and its application in engineering", First edition, Berlin, Springer, 2000.
- [21] Quang J. R., Chang C.T., "New insights in solving distribution system equations by the quadrature method-II analysis", Computers and Chemical Engineering, vol. 13, pp. 779-788, 1989.
- [22] Shu C., Richards B.E., "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes equation", International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, Vol. 15, pp. 791-798, 1992.
- [5] Bakhtiari nejad F., Mousavi Bideleh S.M., "Nonlinear free vibration analysis of prestressed circular cylindrical shells on the Winkler/Pasternak foundation", Thin -Walled Structures, vol. 53, pp. 26-39, 2012.
- [6] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J. N., "Vibration of functionally graded cylindrical shells", International Journal of Mechanical Sciences, vol. 41, no. 3, pp. 309-324, 1999.
- [7] Sheng G.G., Wong, X., "An analytical study of the non-linear vibrations of functionally graded cylindrical shells subjected to thermal and axial loads ", Composite Structures, vol. 97, pp. 261-268, 2013.
- [8] Vel, S.S., "Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells", Composite Structures, vol. 92, pp. 2712-2727, 2010.
- [9] Najafizadeh M.M., Isvandzibaei M. R., "Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support" , Acta Mechanica, vol. 191, pp. 75-91, 2007.
- [10] Chiu W.K., Yu K.M., "Direct digital manufacturing of three-dimensional functionally graded material objects", Computer-Aided Design, vol. 40, pp. 1080-1093, 2008 .
- [11] Sobhani Aragh B., Hedayati H., "Static response and free vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions", Acta Mechanica, vol. 223, pp. 309-330, 2012.
- [12] Hedayati H., Hedayati M., Sobhani Aragh B., Borzabadi Farahani E., "Two-Dimensional Differential Quadrature Solution for Vibration Characteristics of Two-Dimensional Functionally Graded Metal/Ceramic Open Cylindrical Shells." Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 21, pp. 305-320, 2014.
- [13] Asgari M., Akhlaghi M., "Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equations", European Journal of Mechanics- A/Solids, vol. 30, pp. 72-81, 2011.
- [14] Ebrahimi M. J., and Najafizadeh M. M., "Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells", Applied Mathematical Modelling, vol. 38, pp. 308-324, 2014.
- [۱۵] ابراهیمی محمدجواد، نجفی‌زاده محمد مهدی "تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی روی بستر الاستیک"، مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک تربیت مدرس، دوره ۵، شماره ۱۳، صفحه ۲۷-۳۸، مرداد ۱۳۹۲.