

تحلیل پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی با وجود تنش‌های اولیه تحت ضربه‌ی سرعت پایین

رحمت الله قاجار*
کرامت ملک‌زاده
محسن غلامی

استاد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک
دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع هوافضائی
کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک

چکیده

در این مقاله پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی با وجود تنش‌های اولیه به صورت کششی، فشاری، به‌ویژه پیش‌تنش برشی، تحت ضربه‌ی سرعت پایین به روش تحلیلی بررسی می‌شود. معادلات حرکت بر اساس تئوری مرتبه اول برشی (FSDT) برای شرایط مرزی ساده استخراج می‌گردد. تاریخچه‌ی نیروی تماسی از دو مدل جرم و فنر بهبود یافته و مدل کامل با استفاده از قانون غیر خطی تماس هرگز پیش‌بینی و با هم مقایسه می‌شوند. با در نظر گرفتن مولفه‌های جابه‌جایی به صورت سری فوریه دوگانه، با نوشتن کد در نرم‌افزار Matlab و استفاده از روش گالرکین معادلات حرکت پوسته و ضربه‌زننده به صورت کوپل محاسبه می‌گردند. اثر تنش‌های اولیه کششی، فشاری و برشی و همچنین اثر افزایش پیش‌تنش‌ها تا نزدیک مقدار بحرانی کمانش، روی پاسخ ضربه توسط هر دو مدل بررسی و مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: پاسخ دینامیکی ضربه، پوسته‌ی کامپوزیتی دوانحنایی، مدل جرم و فنر، مدل کامل، تنش‌های اولیه.

Analysis of Dynamic Response of Doubly Curved Composite laminates Shells Initially Stressed under Low Velocity Impact

R. Ghajar Professor, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering
K. Malekzadeh Associate professor, Malek-Ashtar University of Technology, University Complex mechanical and aerospace
M. Gholami M. Sc, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

Abstract

In this paper, analysis of dynamic impact response of doubly curved composite shells initially stressed is studied analytically. The governing equations based on the first-order deformation theory (FSDT) are derived for simply supported boundary conditions. The contact force history is predicted using two models of improved spring-mass and complete couple model. Considering the displacement components as the doubly Fourier series, equations of motion of the shell and impactor are solved analytically by writing a code in Matlab software using Galerkin method, so that the dynamic response of shell is obtained. The effects of parameters, such as curvature changes, aspect ratio (curvature length ratio), fiber orientation, tension, compression and shear initial stresses on the impact response are studied. Obtained results from both presented models are compared.

Keywords: Impact, Dynamic response, Doubly curved shell, Spring-mass model, Complete model, Initial stresses.

۱- مقدمه

امروزه سازه‌های کامپوزیتی به خاطر ویژگی‌هایی چون استحکام، سفتی مخصوص بالا و مقاومت در برابر خستگی و خوردگی، به طور گسترده‌ای در صنایع هوا و فضا، تجهیزات ورزشی، لوله‌های فشار و قسمت‌های مختلف خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرند. تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی چندلایه تحت بار ضربه در سال‌های اخیر به خاطر حساسیت مواد کامپوزیتی در برابر ضربه مورد توجه قرار گرفته است.

علی‌رغم این‌که رفتار سازه‌های کامپوزیتی در برابر ضربه‌ی کم سرعت توسط محققان زیادی به صورت تجربی، عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است، اما تحقیقات کمی در مورد ضربه‌ی کم سرعت روی پوسته‌ها با وجود پیش‌تنش انجام شده است. همچنین امکان دارد که سازه‌های کامپوزیتی در فرآیند ساخت یا مونتاژ تحت پیش‌تنش قرار گیرند. از جمله این موارد می‌توان به سازه‌های هوایی اشاره کرد که تحت پیش‌تنش بوده و امکان برخورد با یک جسم مثلاً پرنده را دارند. این موضوع اهمیت بررسی پاسخ ضربه روی سازه‌ها با وجود پیش‌تنش را نشان می‌دهد که در این تحقیق به آن پرداخته می‌شود. با توجه به اهمیت موضوع به بعضی از تحقیقات انجام شده اشاره می‌گردد.

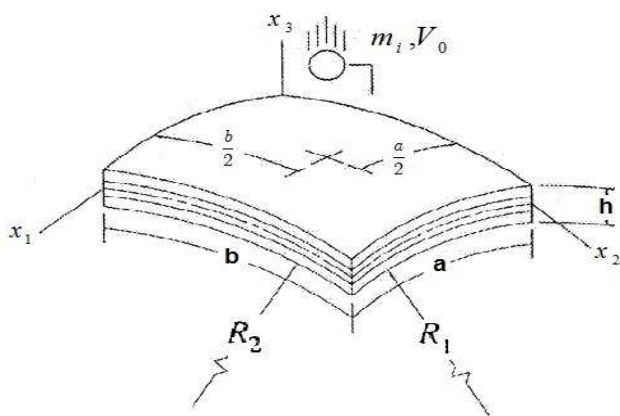
چان هر و چنگ لیانگ [۱] پاسخ دینامیکی پوسته‌های چندلایه‌ی کامپوزیتی در برابر ضربه را با استفاده از نرم افزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA مطالعه کردند. در این مطالعه آسیب و لایه‌لایه شدن لایه‌ها بررسی شده است. کریشنامارتی و همکاران [۲] و همچنین گاناپاسی و راثو [۳] پاسخ ضربه و آسیب پوسته‌های کامپوزیتی استوانه‌ای و کروی چندلایه را با استفاده از قانون تماس هرتز بررسی نمودند. یمینگ و همکاران [۴] به بررسی آسیب و پاسخ دینامیکی یک پوسته کروی کامپوزیتی پرداخته و از قانون تماس الاستو پلاستیک بهبود یافته برای تعیین تاریخچه نیرو استفاده کرده‌اند. خلیلی و همکاران [۵] به تحلیل ضربه کم سرعت پوسته‌ی استوانه‌ای و صفحه کامپوزیتی با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS پرداخته‌اند.

سان و چن [۶ و ۷]، پاسخ ضربه روی صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه با تنش‌های اولیه به صورت تک‌محوره و یا دومحوره را به روش عددی بررسی نموده‌اند. در این مطالعه، از الگوریتم زمانی نیومارک برای حل معادلات وابسته به زمان صفحه و ضربه‌زننده استفاده شده است. خلیلی و محمدپناه [۸]، به تحلیل یک صفحه کامپوزیتی تحت ضربه‌ی کم سرعت با وجود تنش‌های اولیه به روش تحلیلی پرداخته‌اند. در این مطالعه از تئوری کلاسیک برای تشکیل معادلات حرکت استفاده شده است. تاریخچه‌ی نیروی تماسی از تئوری تماس اسوکلو برای مواد ارتوتروپیک برای توصیف تماس بین صفحه و ضربه‌زننده

استفاده شده است. زنگ و بنیا [۹]، تحلیل پاسخ ضربه روی یک صفحه‌ی کامپوزیتی تحت پیش‌تنش را بررسی کرده‌اند. در این تحقیق برای به دست آوردن تاریخچه‌ی نیروی تماس از قانون خطی الاستو پلاستیک که در آن، اثر فرورفتگی ماندگار، در طول ضربه در نظر گرفته شده به کار رفته است. معادلات حرکت پوسته و ضربه‌زننده با بسط سری فوریه و تکنیک تبدیل لاپلاس به روش تحلیلی حل شده است. جعفری و همکاران [۱۰ و ۱۱]، پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت تنش‌های اولیه (نیروی محوری و فشار داخلی) و بار ایمپالس جانبی معلوم وارد بر یک سطح مستطیلی بر اساس تئوری مرتبه اول و تقریب اول لاو مطالعه کرده‌اند. اثر زاویه الیاف، شرایط مرزی، بار محوری فشاری و پارامترهای هندسی را روی رفتار دینامیکی پوسته بررسی کردند.

بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهند که تا به حال پاسخ دینامیکی پوسته‌های دوانحنایی در برابر ضربه با وجود تنش‌های اولیه به خصوص تنش برشی به روش تحلیلی و کاربرد مدل کامل و جرم و فنر بهبود یافته بررسی نشده است. لذا در تحقیق حاضر این موضوع مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. تاریخچه‌ی نیروی تماس از دو مدل جرم و فنر بهبود یافته و مدل کامل با استفاده از قانون غیرخطی هرتز پیش‌بینی و با هم مقایسه می‌شوند. در مدل کامل معادلات حرکت پوسته و ضربه‌زننده به صورت کوپل با نوشتن کد در نرم‌افزار Matlab حل و نتایج به دست آمده را با نتایج سایر محققین مقایسه و اثر تنش‌های اولیه کششی، فشاری و برشی، و همچنین اثر افزایش پیش‌تنش‌ها تا نزدیک مقدار بار بحرانی کمانش، به خصوص پیش‌تنش برشی روی پاسخ ضربه از هر دو مدل تعیین و با هم مقایسه می‌گردند.

۱-۱- معادلات حرکت



شکل ۱- یک پوسته چندلایه دوانحنایی

$$\delta K = \int_V \rho(\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{u}_3 \delta u_3) dV \quad (5)$$

$$\delta U_e = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + 2\sigma_{23} \delta \varepsilon_{23}] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} (1 + \frac{h}{2R_1})(1 + \frac{h}{2R_2}) q \delta w_0 dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_2} (\hat{N}_{11} \delta u_0 + \hat{M}_{11} \delta \phi_1 + \hat{N}_{12} \delta v_0 + \hat{M}_{12} \delta \phi_2 + \hat{Q}_{13} \delta w_0) dx_2 + \int_{\Gamma_1} (\hat{N}_{22} \delta v_0 + \hat{M}_{22} \delta \phi_2 + \hat{N}_{21} \delta u_0 + \hat{M}_{21} \delta \phi_1 + \hat{Q}_{23} \delta w_0) dx_1 \quad (7)$$

q بار عرضی وارد بر روی سطح بالایی پوسته و \hat{N}_{11} ، \hat{M}_{11} ، \hat{Q}_{23} ، \hat{Q}_{13} ، \hat{N}_{21} ، \hat{N}_{12} ، \hat{N}_{22} ، \hat{M}_{21} ، \hat{M}_{12} ، \hat{M}_{22} گشتاورهای لبه‌ای در مرز پوسته، Ω سطح میانی و Γ مرز آن می‌باشند.

انرژی کرنشی مجازی ناشی از تنش‌های اولیه به صورت رابطه‌ی (۸) بیان می‌شود [۱۴]:

$$\delta U_i = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^0 + \sigma_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^0 + \sigma_{12}^i \delta \varepsilon_{12}^0) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (8)$$

σ_{22}^i و σ_{11}^i تنش‌های اولیه غشائی محوری به ترتیب در راستای محورهای x_1 و x_2 و σ_{12}^i تنش اولیه غشایی برشی می‌باشند. به دلیل این که پوسته ممکن است تحت تنش‌های اولیه بالا قرار گیرد لازم است، علاوه بر عبارت خطی کرنش سطح میانی، عبارت‌های غیرخطی مرتبه دوم کرنش که بیانگر تغییر شکل‌های بزرگ غشائی در پوسته هستند نیز در کرنش‌های رابطه (۳) لحاظ گردد.

با جایگذاری روابط (۵) تا (۸) در رابطه اصل همیلتون (۴) معادلات حرکت پوسته‌ی دوانحنایی با وجود تنش‌های اولیه به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + C_0 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + \frac{Q_{13}}{R_1} + \frac{\dot{N}_{11}}{R_1} (\frac{\partial w_0}{\partial x_1} - \frac{u_0}{R_1}) + \frac{\dot{N}_{12}}{R_1} (\frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{v_0}{R_2}) &= I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_1 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} - C_0 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{Q_{23}}{R_2} + \frac{\dot{N}_{22}}{R_2} (\frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{v_0}{R_2}) + \frac{\dot{N}_{12}}{R_2} (\frac{\partial w_0}{\partial x_1} - \frac{u_0}{R_1}) &= I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_2 \end{aligned}$$

شکل ۱ مشخصات هندسی یک پوسته‌ی چندلایه دو انحنایی را نشان می‌دهد. x_1 ، x_2 و x_3 محورهای مختصات منحنی الخط متعامد می‌باشند به طوری که محورهای x_1 و x_2 روی صفحه‌ی میانی ($x_3 = 0$) و محور عمود بر صفحه‌ی میانی می‌باشند. R_1 و R_2 به ترتیب شعاع‌های اصلی انحنای صفحه‌ی میانی در جهت محورهای x_1 و x_2 ، پارامترهای a و b طول کمان‌های صفحه‌ی میانی می‌باشند. میدان جابه‌جایی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول [۱۲] به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= u_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= v_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_2(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= w_0(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (1)$$

u_0 ، v_0 و w_0 ، جابه‌جایی نقاط صفحه میانی پوسته در راستای-
 x_1 ، x_2 و x_3 ، ϕ_1 و ϕ_2 چرخش‌های عمود عرضی به ترتیب حول محور x_2 و x_1 می‌باشند. روابط کرنش و جابه‌جایی یک پوسته‌ی دوانحنایی به صورت زیر است [۱۲]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^0 + x_3 k_{11}^0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + x_3 k_{22}^0 \\ \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23}^0 = \varepsilon_{23}^0, \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}^0 = \varepsilon_{13}^0 \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{12}^0 + x_3 k_{12}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \text{ و } \varepsilon_{11}^0 &\text{ مولفه‌های کرنش عمودی، } \varepsilon_{12}^0 \text{ مولفه‌ی کرنش برشی و } \varepsilon_{23}^0 \text{ و } \varepsilon_{13}^0 \text{ مولفه‌های کرنش برشی عرضی صفحه میانی،} \\ &k_{11}^0, k_{22}^0 \text{ و } k_{12}^0, \text{ انحنای صفحه میانی پوسته می‌باشند.} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{u_0}{R_1}, \quad k_{11}^0 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{v_0}{R_2}, \quad k_{22}^0 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2}, \quad k_{12}^0 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - C_0 (\frac{\partial v_0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2}) \\ \varepsilon_{23}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \phi_2 - \frac{v_0}{R_2}, \quad \varepsilon_{13}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \phi_1 - \frac{u_0}{R_1} \\ \gamma_0 &= \frac{1}{2} (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \end{aligned} \quad (3)$$

پارامتر C_0 بر اساس تئوری ساندرز [۱۳] برای جلوگیری از چرخش جسم صلب در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت با فرض ثابت بودن شعاع انحنا و با استفاده از اصل همیلتون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^T \delta L dt = \int_0^T [\delta K - (\delta U_e + \delta U_i) + \delta W_{ext}] dt = 0 \quad (4)$$

δK انرژی جنبشی مجازی، δU_e انرژی کرنشی مجازی، δU_i انرژی کرنشی مجازی ناشی از تنش‌های اولیه و δW_{ext} انرژی پتانسیل مجازی ناشی از نیروهای خارجی می‌باشند که از روابط زیر به دست می‌آیند:

باید تعیین شوند. همچنین تابع نیروی $q(x_1, x_2, t)$ به صورت سری فوریه‌ی دو گانه (۱۲) تعریف می‌شود [۹]:

$$q(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2 \quad (12)$$

۳- تعیین تاریخچه‌ی نیروی ضربه

برای تعیین تاریخچه نیرو، دو مدل کامل و جرم و فنر بهیود یافته ارائه می‌گردد.

۳-۱- مدل کامل

در مدل کامل از قانون غیرخطی بهیود یافته تماس هرتر برای به دست آوردن تاریخچه‌ی نیروی تماسی استفاده می‌شود. قانون تماس هرتر برای بارگذاری استاتیکی روی یک نیم‌فضای الاستیک خطی ارائه شده است [۴]. این قانون با انجام تصحیحاتی، برای مسائل ضربه روی سازه‌های کامپوزیتی نیز به کار می‌رود که به صورت زیر می‌باشد [۱۱]:

$$F(t) = k_c \alpha^{1.5} = k_c (W_i(t) - W_s(x_{1c}, x_{2c}, t))^{1.5} \quad (13)$$

$$W_s(x_{1c}, x_{2c}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^0(t) \sin \frac{m\pi}{a} x_{1c} \sin \frac{n\pi}{b} x_{2c} \quad (14)$$

$$x_{1c} = \frac{a}{2}, \quad x_{2c} = \frac{b}{2}$$

α میزان فرورفتگی، W_i جابه‌جایی ضربه‌زننده، W_s جابه‌جایی پوسته و k_c سفتی تماسی هرتر که برای تماس بین ضربه‌زننده‌ی کروی صلب و پوسته‌ی دوانحنایی به صورت زیر ارائه شده است [۱۷]:

$$\zeta_c = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \quad (15)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_i^2}{E_i} + \frac{1-\nu_s^2}{E_s}, \quad \frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

اندیس‌های i و s به ترتیب مربوط به ضربه‌زننده و سازه هدف می‌باشند. با جایگذاری روابط (۳)، (۹)، (۱۱) و (۱۲) در معادلات حرکت (۹) و استفاده از روش توابع وزنی گالرکین معادلات حرکت پوسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^a \int_0^b ([L_{ij}] \{\phi\} - \{H\}) \{\psi\} dx_1 dx_2 = \{0\} \quad (16)$$

$$H = \{0, 0, q, 0, 0\}$$

L_{ij} مولفه‌های عملگر دیفرانسیلی، $\{H\}$ بردار نیرو، $\{\phi\}$ بردار میدان جابه‌جایی و $\{\psi\}$ بردار توابع وزنی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} - \left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) + N_{11}^i \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) \\ & + N_{22}^i \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial v_0}{\partial x_2} \right) + N_{12}^i \left(\frac{2\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_2} \frac{\partial v_0}{\partial x_1} \right) + q = I_0 \ddot{w}_0 \\ & \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{13} = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_1 \\ & \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{23} = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \rho^k (x_3)^i dx_3 \quad (i = 0, 1, 2)$$

I_i ممان اینرسی جرمی، N_{11}^i ، N_{22}^i و N_{12}^i برای تنش‌های اولیه محوری و برشی می‌باشند. روابط بنیانی برای یک پوسته‌ی کامپوزیتی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

A_{ij} و B_{ij} و D_{ij} به ترتیب سفتی کششی، سفتی کوپل کششی خمشی و سفتی چندلایه است. k_s ضریب تصحیح برشی است که بر اساس تحقیقات میندلین [۱۵] معمولاً برابر $\pi^2/12$ در نظر گرفته می‌شود.

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, x_3, x_3^2) dx_3 = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \int_{x_3^{(k)}}^{x_3^{(k+1)}} (1, x_3, x_3^2) dx_3 \quad (10)$$

۲- شرایط مرزی

برای پوسته‌ی دوانحنادار مورد نظر، شرایط مرزی به صورت ساده در نظر گرفته می‌شود. به منظور ارضای شرایط مرزی میدان جابه‌جایی به صورت بسط سری فوریه‌ی دوگانه زیر منظور می‌گردد [۱۲]:

$$u_0(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2$$

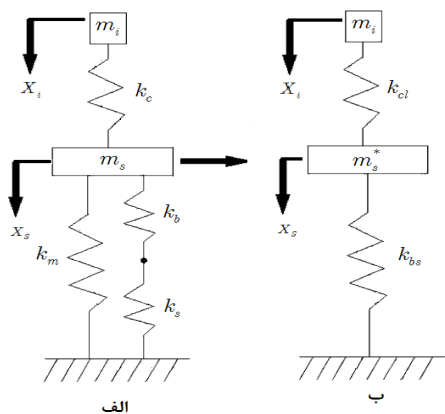
$$v_0(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2$$

$$w_0(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2$$

$$\phi_1(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2$$

$$\phi_2(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2 \quad (11)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$



شکل ۲- الف - مدل جرم و فنر دو درجه آزادی غیرخطی شیواکومار
ب- مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهبود یافته

با استفاده از مدل خطی چوی، قانون خطی هرتز جایگزین قانون غیرخطی هرتز شده و نیروی تماسی به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۲۰]:

$$F(t) = k_{cl}(x_i - x_s) \quad (21)$$

$$k_{cl} = F_m^{1/3} k_c^{2/3}$$

در رابطی بالا k_{cl} معرف سفتی تماسی خطی شده در قانون خطی چوی و F_m بیشینه نیروی تماسی پیش‌بینی شده می‌باشند. معادلات دیفرانسیل سیستم جرم و فنر خطی چوی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_i \ddot{x}_i + k_{cl}(x_i - x_s) = 0 \quad (22)$$

$$m_s^* \ddot{x}_s + k_{bs} x_s - k_{cl}(x_i - x_s) = 0$$

با فرض پاسخ هارمونیک برای این سیستم دو درجه‌آزادی، فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{cl}}{m_i} + \frac{k_{cl} + k_{bs}}{m_s^*} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} \left(\frac{k_{cl}}{m_i} + \frac{k_{cl} + k_{bs}}{m_s^*} \right)^2 - \frac{k_{cl} k_{bs}}{m_i m_s^*} \right)} \quad (23)$$

با توجه به شرایط اولیه $x_s(0) = x_i(0) = \dot{x}_s(0) = 0$ و $\dot{x}_i(0) = V_0$ به رابطه (۲۱) تبدیل می‌گردد:

$$F(t) = k_{cl}[C_1(A_1 - 1)\sin\omega_1 t + C_2(A_2 - 1)\sin\omega_2 t]$$

$$A_1 = \frac{k_{cl}}{1 - m_i \omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{k_{cl}}{1 - m_i \omega_2^2} \quad (24)$$

$$C_1 = \frac{V_0}{\omega_1(A_1 - A_2)}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_2(A_2 - A_1)}$$

با اعمال نیروی استاتیکی واحد به صورت فشاری در محل ضربه و جایگذاری در رابطه (۲۰)، سفتی معادل پوسته k_{bs} به دست می‌آید [۲۱]:

$$k_{bs} = \frac{1}{W_s(x_{1c}, x_{2c})} \quad (25)$$

W_s خیز به دست آمده از تحلیل استاتیکی در نقطه‌ی محل اعمال بار است. در تحلیل‌های انجام شده توسط شیواکومار و

$$\phi = \begin{Bmatrix} U_{mn}^0(t) \cos\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2 \\ V_{mn}^0(t) \sin\alpha_m x_1 \cos\beta_n x_2 \\ W_{mn}^0(t) \sin\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2 \\ X_{mn}^0(t) \cos\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2 \\ Y_{mn}^0(t) \sin\alpha_m x_1 \cos\beta_n x_2 \end{Bmatrix}, \psi = \begin{Bmatrix} \cos\alpha_p x_1 \sin\beta_q x_2 \\ \sin\alpha_p x_1 \cos\beta_q x_2 \\ \sin\alpha_p x_1 \sin\beta_q x_2 \\ \cos\alpha_p x_1 \sin\beta_q x_2 \\ \sin\alpha_p x_1 \cos\beta_q x_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

با انتگرال‌گیری رابطه‌ی (۱۶) و دسته بندی ضرایب، معادله حرکت به صورت رابطه‌ی (۱۸) خلاصه می‌شود. در مدل کامل معادلات حرکت پوسته (۱۸) و ضربه‌زننده (۱۹) به صورت کوپل ode45 با نرم‌افزار مطلب و با استفاده از تابع حلگر (روش رانگ-کوتا) حل و با تعیین W_s و W_i ، تاریخچه نیروی تماس از رابطه‌ی (۱۳) و پاسخ دینامیکی (خیز پوسته) از رابطه (۱۴) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{Q\}, \quad X(t=0) = [0] \quad (18)$$

$$m_i \ddot{W}_i + F(t) = 0, \quad W_i(t=0) = 0, \quad \dot{W}_i(t=0) = V_0 \quad (19)$$

$$\{X\} = \{U_{mn}^0, V_{mn}^0, W_{mn}^0, X_{mn}^0, Y_{mn}^0\}^T$$

$$\{Q\} = \{0, 0, Q_{mn}, 0, 0\}$$

M و K به ترتیب ماتریس مربعی جرمی و سفتی پوسته به ابعاد $(5mn) \times (5mn)$ و بردار نیروی ضربه به ابعاد $(5mn) \times 1$ می‌باشد. W_i و m_i جابه‌جایی و جرم ضربه‌زننده هستند. برای یک بار متمرکز که به وسط پوسته در نقطه‌ی (x_{1c}, x_{2c}) مطابق شکل وارد می‌شود، ضریب زمانی $Q_{mn}(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود [۹]:

$$Q_{mn}(t) = \frac{4F(t)}{ab} \sin\alpha_m x_{1c} \sin\beta_n x_{2c} \quad (20)$$

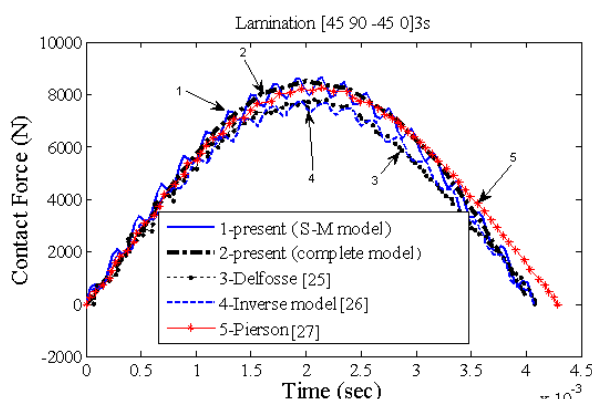
$$x_{1c} = \frac{a}{2}, \quad x_{2c} = \frac{b}{2}$$

۳-۲- مدل جرم و فنر بهبود یافته

شیواکومار و همکاران [۱۸] در سال ۱۹۸۵ از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی غیرخطی مطابق شکل الف استفاده کردند. در این تحقیق از سیستم دو درجه آزادی جرم و فنر مطابق شکل ب، برای تعیین تاریخچه‌ی نیروی تماسی استفاده شده است. m_s^* جرم موثر پوسته k_{cl} سفتی تماسی خطی اصلاح شده k_{bs} سفتی معادل پوسته (سفتی خمشی و برشی که همان سفتی استاتیکی است) k_m سفتی غشایی هستند. در این تحقیق از فنر غیرخطی ناشی از اثرات غشایی k_m به دلیل این که مقدار آن در سرعت‌های کم و تغییرشکل‌های کوچک در مواد کامپوزیتی ناچیز است صرف نظر شده است [۱۹].

جدول ۱- هندسه و جنس صفحه و ضربه‌زننده فولادی [۲۵]

مشخصات هندسی صفحه کامپوزیتی: $a = 127 \text{ mm}, b = 76.2 \text{ mm}, R_1 = R_2 = \infty$ $h = 4.65 \text{ mm}$ $lay - up = [45, 90, -45, 0]_{3s}$
خواص ماده کامپوزیتی: $E_{11} = 129 \text{ GPa}, E_{22} = 7.5 \text{ GPa}$ $G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}, G_{23} = 2.6 \text{ GPa}$ $\nu_{12} = 0.33, \rho = 1540 \text{ kgm}^{-3}$
خواص ضربه‌زننده: $E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7971 \text{ kgm}^{-3}$ $diameter = 25.4 \text{ mm}$ $m_i = 6.15 \text{ kg}, V_i = 1.76 \text{ ms}^{-1}$



شکل ۳- مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از نتایج تجربی دلفوز، مدل معکوس کیریستوفرو، مدل تحلیلی پیرسن، مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته پیشنهادی

داده های شکل تطابق بسیار خوب نتایج این تحقیق را با نتایج محققین دلفوز، کیریستوفرو و پیرسن را نشان می‌دهد. از بین دو مدل کامل و جرم و فنر بهبودیافته، مدل کامل بیشینه‌ی نیروی تماس را به بیشینه‌ی نیروی تماس تجربی دلفوز نزدیک‌تر پیش‌بینی می‌کند. مدت زمان تماس پیش‌بینی شده توسط مدل کامل و جرم و فنر، نسبت به حل تحلیلی پیرسن، به مدت زمان تماس تجربی دلفوز نزدیک‌تر می‌باشد. در مدل معکوس تاریخچه‌ی نیرو از حل تحلیلی بر اساس مقایسه و اصلاح با نتایج تجربی به دست آمده است. علت تفاوت کم بین نتایج مدل کامل با مدل تحلیلی پیرسن و مدل معکوس کیریستوفرو این است که در هر سه مدل معادلات حرکت از تئوری برشی مرتبه اول تشکیل و برای به دست آوردن تاریخچه‌ی نیروی تماس از قانون غیر خطی هرگز استفاده شده است.

در مثال دوم یک پوسته کامپوزیتی دو انحنایی و یک جرم‌ضربه زننده کروی کوچک مشخصات جدول (۲) در نظر گرفته

همکاران [۱۸] و گانگ [۲۲]، جرم موثر سازه، یک چهارم جرم کل سازه در نظر گرفته شده است. سوانسون [۲۱] نشان داد که نسبت جرم موثر سازه به جرم کل آن به هندسه‌ی سازه، ضخامت جداره‌ی سازه، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی ماده بستگی دارد. سوانسون رابطه‌ای تقریبی و ساده‌ای برای محاسبه‌ی جرم موثر سازه‌های کامپوزیتی به صورت زیر ارائه داد:

$$m_s^* \approx \frac{k_{bs}}{\omega_f^2} \quad (26)$$

ω_f کوچکترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل ارتعاشات آزاد به دست می‌آید.

در روش خطی‌سازی گانگ [۲۲]، با برابر قرار دادن ایمپالس (سطح زیر نمودار نیروی تماس-زمان) حاصل از قانون تماس خطی با ایمپالس حاصل از قانون تماس غیرخطی، سفتی خطی شده k_{cl} با استفاده از تابع گاما با شرط $m_i > 10m_s$ به دست می‌آید. در این مقاله با حدس اولیه F_m و به کارگیری الگوریتم تکرار، سفتی اصلاح شده k_{cl} بدون هیچ شرطی برای نسبت جرم ضربه‌زننده به سازه به روش تحلیلی تعیین و سپس تاریخچه‌ی نیروی تماسی از رابطه‌ی (۲۴) محاسبه شده است. اصلاح سفتی تماسی باعث نزدیک‌تر شدن تاریخچه‌ی نیرو حاصل از این مدل به تاریخچه‌ی نیرو حاصل از مدل کامل می‌شود. حداکثر نیروی تماس برای حدس اولیه از مدل جرم و فنر یک درجه آزادی تعیین می‌شود [۲۳]:

$$F_m^{(1)} = V_0 \sqrt{k_{bs} m_i} \quad (27)$$

در مدل جرم و فنر خیز پوسته را می‌توان با توجه به رابطه‌ی (۲۸) به دست آورد:

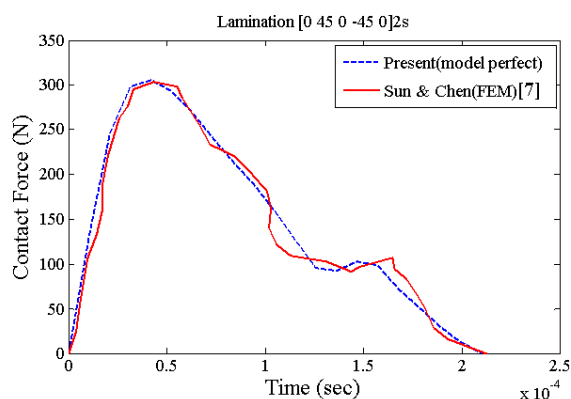
$$v_s = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t \quad (28)$$

تاریخچه‌ی نیروی تماسی به شکل سینوسی وقتی اتفاق می‌افتد که جرم ضربه‌زننده سنگین‌تر از جرم چندلایه (سازه هدف) باشد [۲۰]. سوانسون نشان داد که پاسخ شبه استاتیکی زمانی اتفاق می‌افتد که جرم ضربه‌زننده از ۸ برابر جرم موثر سازه هدف ($m_i \geq 8m_s^*$) بیشتر باشد [۲۱]. در نتیجه مدل جرم و فنر برای جرم‌های سنگین‌تر از سازه هدف دقت بسیار خوبی دارد.

۴- صحنه‌گذاری نتایج

برای صحنه‌گذاری نتایج سه مثال ارائه می‌گردد. مشخصات صفحه کامپوزیتی و ضربه‌زننده مثال اول در جدول (۱) ارائه شده است. تاریخچه‌ی نیروی تماس حاصل از مدل کامل و جرم و فنر بهبود یافته پیشنهادی (S-M) با نتایج تجربی دلفوز [۲۵]، مدل معکوس کیریستوفرو [۲۶] و مدل تحلیلی پیرسن [۲۷] در شکل (۳) مقایسه شده‌اند.

دارد که مقدار بسیار کمی است. علت این اختلاف کم این است که در هر دو مدل معادلات حرکت از تئوری برشی مرتبه اول تشکیل و برای به دست آوردن تاریخچه‌ی نیرو از قانون غیر خطی هرترز استفاده شده است. با این تفاوت که در کار سان و چن پاسخ دینامیکی ضربه به روش المان محدود به دست آمده و از الگوریتم زمانی نیومارک برای حل معادلات وابسته به زمان صفحه و ضربه‌زننده استفاده شده است.



شکل ۵- مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از حل (FEM) سان و چن و مدل کامل پیشنهادی

جدول ۳- هندسه و جنس صفحه و ضربه‌زننده فولادی [۷]

مشخصات هندسی صفحه کامپوزیتی $a = 127 \text{ mm}, b = 76.2 \text{ mm}, R_1 = R_2 = \infty$ $h = 4.65 \text{ mm}$ $lay - up = [45, 90, -45, 0]_{3s}$
خواص ماده کامپوزیتی $E_{11} = 129 \text{ GPa}, E_{22} = 7.5 \text{ GPa}$ $G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}, G_{23} = 2.6 \text{ GPa}$ $\nu_{12} = 0.33, \rho = 1540 \text{ kgm}^{-3}$
خواص ضربه‌زننده $E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7971 \text{ kgm}^{-3}$ $d_i = 25.4 \text{ mm}, m_i = 6.15 \text{ kg}, V_i = 1.76 \text{ ms}^{-1}$

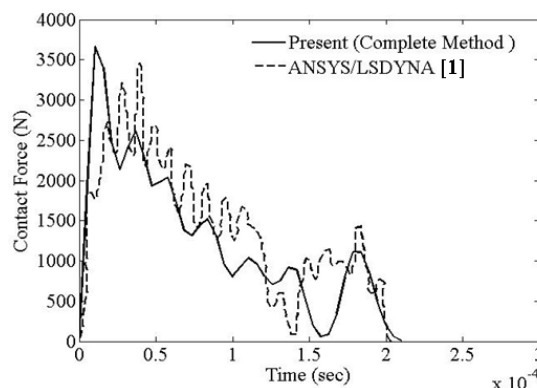
۵- بحث و نتایج

ابتدا تاریخچه نیرو و خیز حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته را مقایسه نموده و سپس، اثر تنش‌های اولیه کششی، فشاری، برشی، افزایش مقدار پیش‌تنش تا نزدیک مقدار بار بحرانی کمانش، به خصوص بار بحرانی کمانش برشی و همچنین اثر جرم ضربه‌زننده روی پاسخ ضربه بررسی و نتایج به دست آمده از دو مدل کامل و جرم و فنر با هم مقایسه و بحث می‌گردند. به دلیل این که مدل جرم و فنر برای جرم ضربه‌زننده بزرگتر از جرم سازه هدف، دقت خوبی دارد [۲۱]، لذا در این مقاله برای مقایسه با مدل کامل، جرم ضربه‌زننده سنگین‌تر از

می‌شود. تاریخچه نیروی به دست آمده از مدل کامل با تاریخچه نیروی تماس چان هر و چنگ لیانگ [۱] مطابق شکل (۴) مقایسه شده است و از تطابق خوبی برخوردار است. هر و چنگ در این تحقیق تاریخچه نیروی تماس را از قانون تماس هرترز با استفاده از نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA به دست آورده‌اند. در این مثال ضربه‌زننده نسبت به مثال اول سبک‌تر است.

جدول ۲- هندسه و جنس پوسته کروی و ضربه‌زننده فولادی [۱].

مشخصات هندسی پوسته مرکب دو انحنایه $a = b = 25.4 \text{ mm}, h = 2.54 \text{ mm},$ $R_1 = R_2 = 1.27 \text{ m}, lamination = [0 / 90 / 90 / 0]$
خواص پوسته مرکب دو انحنایه $E_{11} = 144.8 \text{ GPa}, E_{22} = 9.65 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 7.1 \text{ GPa}$ $G_{23} = 5.92 \text{ GPa}, V_{12} = 0.3, \rho = 1389.2 \text{ kgm}^{-3}$
خواص ضربه‌زننده $E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7870 \text{ kgm}^{-3}$ $d_i = 12.7 \text{ mm}, m_i = 0.00844 \text{ kg}, V_i = 30 \text{ ms}^{-1}$

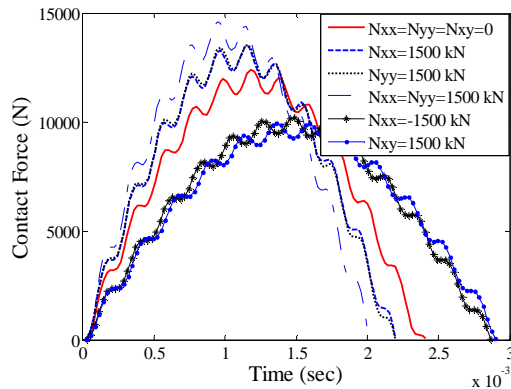


شکل ۴- مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از حل (FEM) سان و چن و مدل کامل پیشنهادی

در مثال سوم صفحه کامپوزیتی تحت نیروی پیش‌تنش کششی دو محوره به مقدار $(N_{xx} = N_{yy} = 3N_{cr} = 240.6 \text{ kN/m})$ با یک جسم کروی صلب برخورد می‌کند. مشخصات و جنس صفحه‌ی کامپوزیتی و ضربه‌زننده مطابق جدول (۳) می‌باشد. مقدار بار بحرانی کمانش در این مسئله طبق مرجع [۷]، $(N_{cr} = 80.2 \text{ kN/m})$ انتخاب شده است. تاریخچه‌ی نیروی به دست آمده از مدل کامل و حل اجزا محدود سان و چن در شکل (۵) مقایسه و نشان می‌دهد که تاریخچه و بیشینه نیرو مطابق بسیار خوبی با منحنی سان و چن دارد. بیشینه نیروی تماس به دست آمده از مدل کامل حاضر $30.5/6$ نیوتن است که با مقدار به دست آمده توسط سان و چن 0.69 درصد اختلاف

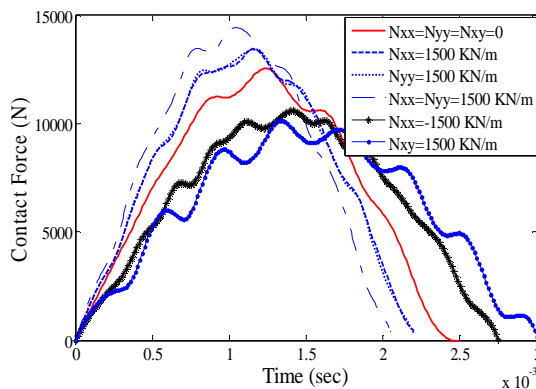
۵-۱- بررسی اثر پیش‌تنش‌های کششی، فشاری و برشی

اثر پیش‌تنش کششی، فشاری و برشی روی تاریخچه نیرو و خیز در شکل‌های (۸) تا (۱۱) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که پیش‌تنش کششی باعث افزایش سفتی پوسته و در نتیجه افزایش نیروی تماس بیشینه، کاهش بیشینه خیز و مدت زمان تماس می‌گردد. پیش‌تنش فشاری و برشی باعث کاهش سفتی و در نتیجه موجب کاهش بیشینه نیروی تماس، افزایش خیز بیشینه و مدت زمان تماس می‌شود.



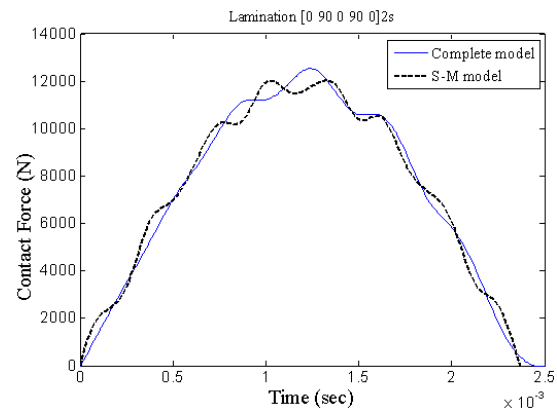
شکل ۸- اثر پیش‌تنش بر تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل جرم و فنر بهبودیافته

با اعمال پیش‌تنش فشاری و برشی به مقدار یکسان، پیش‌تنش برشی باعث کاهش بیشتر مقدار بیشینه نیرو و افزایش بیشتر خیز بیشینه و مدت زمان تماس شده است. همچنین تغییرات بیشینه نیرو، بیشینه خیز و مدت زمان تماس پیش‌تنش فشاری نسبت به پیش‌تنش کششی (با مقادیر یکسان) بیشتر است. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو و خیز حاصل از مدل جرم و فنر نسبت به مدل کامل در حالت اعمال پیش‌تنش فشاری- N_{xx} به ترتیب ۴۵٪ و ۱۱۱٪ می‌باشد



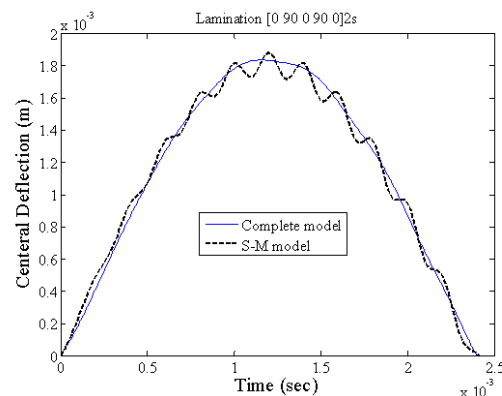
شکل ۹- اثر پیش‌تنش بر تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل

جرم پوسته در نظر گرفته شده است. مشخصات جنس پوسته کامپوزیتی و ضربه زننده فولادی مطابق جدول (۱) می‌باشد. پوسته کامپوزیتی دارای ۲۰ لایه و لایه چینی به صورت متعامد $[0\ 90\ 0\ 90\ 0]_{2s}$ می‌باشد. مشخصات پوسته به صورت $(a = b = 200\ mm, R_1 = R_2 = 200\ mm)$ و سرعت و جرم ضربه‌زننده به ترتیب $3\ ms^{-1}$ و $3\ kg$ می‌باشد. تاریخچه نیروی تماسی و خیز حاصل از دو مدل کامل و جرم و فنر بهبودیافته در شکل‌های (۶) و (۷) نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که تاریخچه نیروی تماسی و خیز به دست آمده از دو مدل به هم نزدیکند.

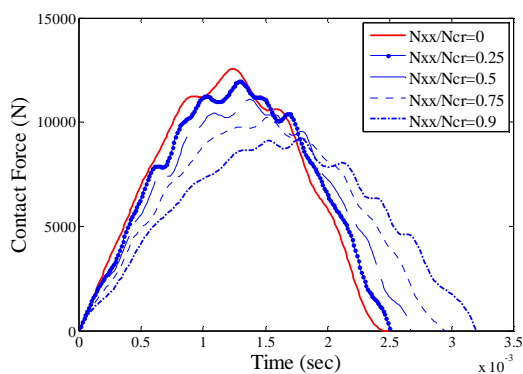


شکل ۶- مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته برای کامپوزیت متعامد

مقدار بیشینه نیروی تماس در مدل کامل کمی بیشتر از مدل جرم و فنر می‌باشد. همچنین مقدار بیشینه خیز در مدل کامل کمی کمتر از مدل جرم و فنر است ولی مدت زمان تماس در هر دو مدل تقریباً با هم برابراند. این نتایج نشان می‌دهد که نتایج مدل جرم و فنر بهبود یافته در ضربه‌زننده با جرم‌های بزرگ تطابق بسیار خوبی با مدل کامل دارد.

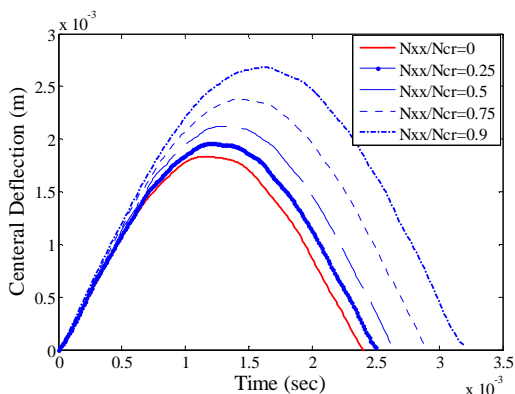


شکل ۷- مقایسه تاریخچه خیز محل ضربه حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته برای کامپوزیت متعامد

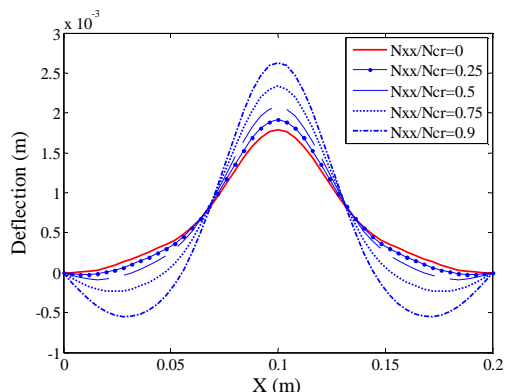


شکل ۱۳- اثر پیش‌تنش فشاری تا نزدیک بار بحرانی کماتش بر تاریخچه نیروی تماس حاصل از مدل کامل

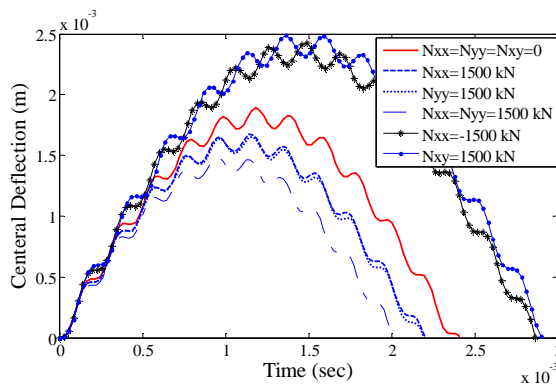
بیشینه‌ی نیرو در حالت بدون پیش‌تنش، نسبت به حالت با پیش‌تنش فشاری (تا ۰/۹ مقدار بحرانی کماتش) در مدل جرم و فنر، و مدل کامل به ترتیب ۲۵/۶۶٪ و ۲۵/۸۱٪ کاهش یافته‌اند. در حالی که خیز محل ضربه به ترتیب ۴۴/۳۶٪ و ۲۵/۸۱٪ افزایش یافته‌اند. شکل‌های (۱۵) و (۱۶) نشان می‌دهند که هر چه پیش‌تنش فشاری به مقدار بار بحرانی کماتش نزدیکتر می‌شود، پوسته در نزدیک تکیه‌گاه تغییر شکل بیشتری می‌دهد و خیز محل ضربه نیز بیشتر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که خیز نقاط نزدیک تکیه‌گاه منفی می‌گردند.



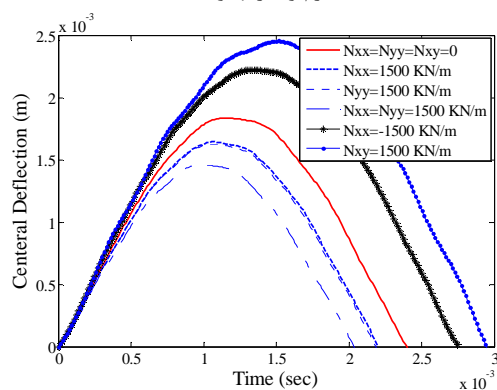
شکل ۱۴- اثر پیش‌تنش فشاری تا نزدیک بار بحرانی کماتش بر تاریخچه خیز، حاصل از مدل کامل



شکل ۱۵- اثر پیش‌تنش فشاری تا نزدیک بار بحرانی کماتش بر خیز راستای محور x_1 ، حاصل از مدل کامل



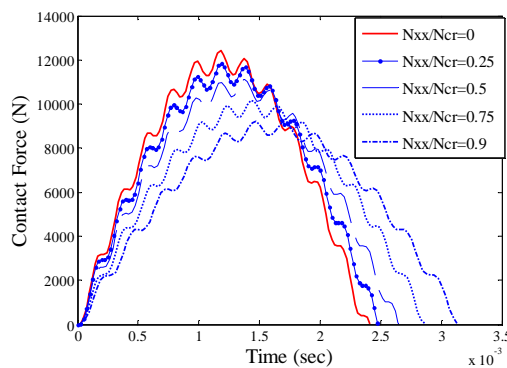
شکل ۱۰- اثر پیش‌تنش بر تاریخچه خیز محل ضربه حاصل از مدل جرم و فنر بهبود یافته



شکل ۱۱- اثر پیش‌تنش بر تاریخچه خیز محل ضربه حاصل از مدل کامل

۵-۲- اثر پیش‌تنش فشاری تا نزدیک مقدار بار بحرانی کماتش پوسته

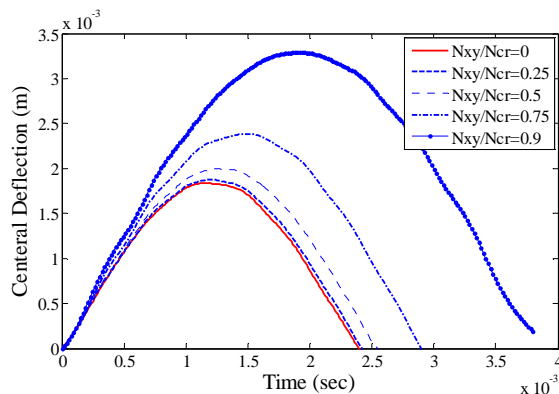
اثر پیش‌تنش فشاری تا حوالی بار بحرانی کماتش روی تاریخچه‌ی نیرو و خیز در شکل‌های (۱۲) تا (۱۴) ارائه شده است. همچنین اثرات پیش‌تنش فشاری بر خیز پوسته در راستای x_1 ($x_2 = b/2$) در شکل (۱۵) و تغییر شکل پوسته به صورت سه بعدی در شکل (۱۶) نشان داده شده است. در این مثال مقدار بار بحرانی کماتش فشاری $2.444 \times 10^3 \text{ kN/m}$ می‌باشد [۲۸].



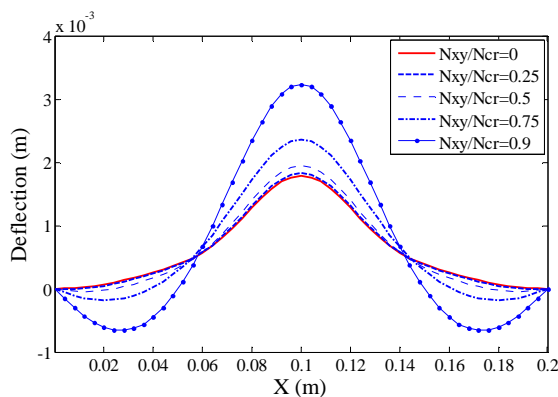
شکل ۱۲- اثر پیش‌تنش فشاری تا نزدیک بار بحرانی کماتش بر تاریخچه نیروی تماس حاصل از مدل جرم و فنر بهبودیافته

بیشینه‌ی نیرو در حالت بدون پیش‌تنش، نسبت به حالت با پیش‌تنش برشی (تا ۰/۹ مقدار بحرانی کمانش) در مدل جرم و فنر، و مدل کامل به ترتیب ۳۷/۵۳٪ و ۴۱/۷۹٪ کاهش یافته‌اند. در حالی که خیز محل ضربه به ترتیب ۷۷/۲۲٪ و ۸۰/۷۶٪ افزایش یافته‌اند. بنابراین تغییرات خیز نسبت به بیشینه نیرو بیشتر است. با مقایسه این نتایج با نتایج بخش قبل مشاهده می‌شود که تغییرات نیرو و خیز در نزدیکی بار بحرانی برشی نسبت به فشاری بیشتر است

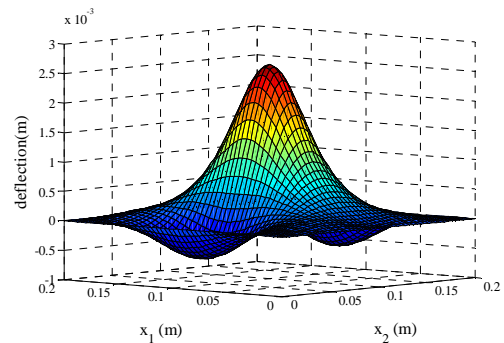
در شکل (۲۰) هر چقدر پیش‌تنش برشی به مقدار بار بحرانی کمانش نزدیکتر می‌شود، تغییر شکل پوسته در محل ضربه و نزدیک تکیه‌گاه‌ها بیشتر می‌گردد. علت این است که سفتی سازه در نزدیک بار بحرانی کمانش به شدت کاهش می‌یابد.



شکل ۱۹- اثر پیش‌تنش برشی تا نزدیک بار بحرانی کمانش بر تاریخچه خیز حاصل از مدل کامل



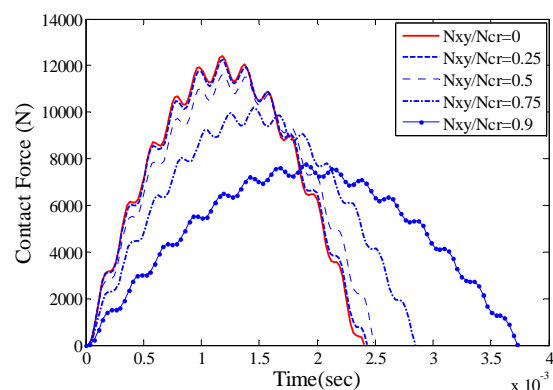
شکل ۲۰- اثر پیش‌تنش برشی تا نزدیک بار بحرانی کمانش بر خیز در راستای x_1 حاصل از مدل کامل



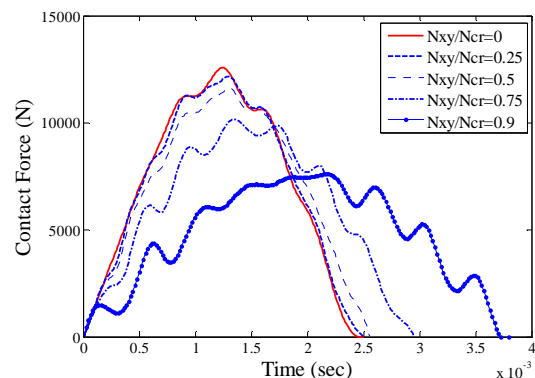
شکل ۱۶- تغییر شکل پوسته در حالت اعمال پیش‌تنش تا مقدار ۰/۹ بار بحرانی کمانش فشاری

۵-۳- اثر پیش‌تنش برشی تا نزدیک مقدار بار بحرانی کمانش برشی پوسته

در این قسمت اثر پیش‌تنش برشی (تا حوالی بار بحرانی کمانش) روی تاریخچه‌ی نیرو و خیز در شکل‌های (۱۷) تا (۱۹) و اثر پیش‌تنش برشی بر خیز پوسته در راستای x_1 در $x_2 = b/2$ و شکل (۲۰) و همچنین تغییر شکل پوسته به صورت سه بعدی در شکل (۲۱) نشان داده شده‌اند. در این مثال مقدار بار بحرانی کمانش برشی $1.948 \times 10^3 \text{ kN/m}$ است [۲۸].



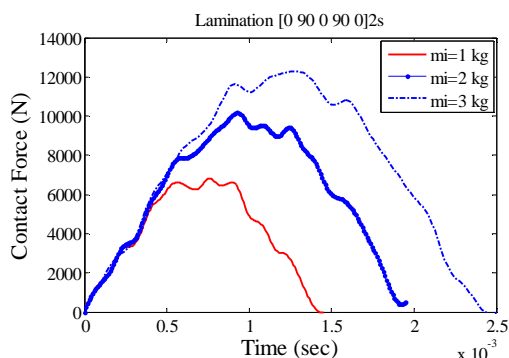
شکل ۱۷- اثر پیش‌تنش برشی تا نزدیک بار بحرانی کمانش بر تاریخچه نیروی تماس حاصل از مدل جرم و فنر بهبود یافته



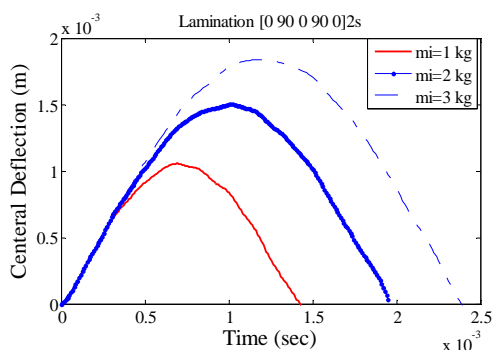
شکل ۱۸- اثر پیش‌تنش برشی تا نزدیک بار بحرانی کمانش بر تاریخچه نیروی تماس حاصل از مدل کامل

۵-۴- بررسی اثر جرم ضربه‌زننده

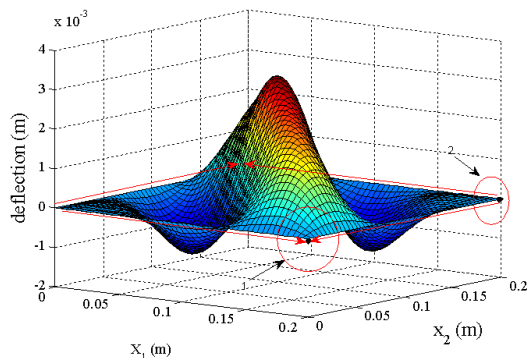
در این قسمت به بررسی اثر جرم ضربه‌زننده بر پارامترهای نیروی تماس و خیز حاصل از مدل کامل پرداخته می‌شود. اثر جرم ضربه‌زننده بر تاریخچه‌ی نیرو و خیز حاصل از مدل کامل در شکل‌های (۲۴) و (۲۵) برای سه جرم مختلف نشان داده شده است. تغییرات تاریخچه‌ی نیرو و خیز نشان می‌دهند که با افزایش جرم ضربه‌زننده، بیشینه نیروی تماس، مدت زمان تماس و خیز افزایش می‌یابند. در حالت ضربه‌زننده به جرم ۳ کیلوگرم نسبت به ضربه‌زننده ۱ کیلوگرمی، بیشینه نیرو به میزان 78.98% افزایش، زمان تماس مدل کامل 73.28% و بیشینه‌ی خیز 82.17% افزایش یافته‌اند. نکته‌ی قابل توجه این مثال این است که بر خلاف مثال‌های دیگر با افزایش بیشینه نیرو، مدت زمان تماس و خیز افزایش می‌یابند. علت این پدیده را می‌توان اینطور بیان کرد: در مثال‌های اول و دوم سرعت و جرم ضربه‌زننده (انرژی جنبشی ضربه‌زننده) ثابت در نتیجه سطح زیر نمودار نیرو-زمان (ایمپالس) ثابت و با افزایش نیرو، مدت زمان تماس کاهش و سفتی پوسته تغییر می‌کند. ولی در این مثال سفتی سازه ثابت است ولی جرم ضربه‌زننده (انرژی جنبشی ضربه‌زننده) تغییر می‌کند.



شکل ۲۴- اثر جرم ضربه‌زننده بر تاریخچه‌ی نیرو تماسی حاصل از مدل کامل

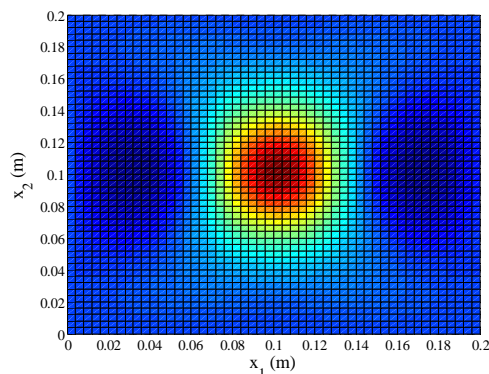


شکل ۲۵- اثر جرم ضربه‌زننده بر تاریخچه‌ی خیز حاصل از مدل کامل

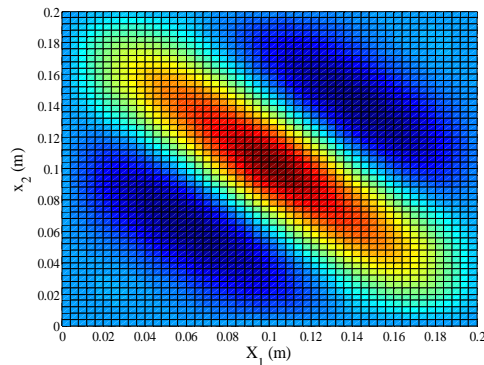


شکل ۲۱- تغییر شکل پوسته در حالت اعمال پیش‌تنش تا مقدار 0.9 بار بحرانی کماتش برشی

مطابق شکل (۲۱)، تغییر شکل در همسایگی نزدیک نقطه ۱ (گوشه لبه پوسته) که پیش‌تنش‌های برشی اعمالی به لبه‌ها به آن نزدیک می‌شوند بیش از تغییر شکل در همسایگی نقطه ۲ (گوشه لبه پوسته) که پیش‌تنش‌های برشی از آن دور می‌شوند، می‌باشد. در شکل‌های (۲۲) و (۲۳) تغییر شکل پوسته در دو حالت اعمال پیش‌تنش برشی به مقدار 0.9 بار بحرانی کماتش آن و پیش‌تنش فشاری به مقدار 0.9 بار بحرانی کماتش آن، کاملاً متفاوت می‌باشد و در حالت اعمال پیش‌تنش برشی، تغییر شکل پوسته به صورت قطری و بیضوی شکل می‌باشد.



شکل ۲۲- کانتور خیز پوسته در حالت اعمال پیش‌تنش فشاری به مقدار 0.9 بار بحرانی کماتش فشاری



شکل ۲۳- کانتور خیز در حالت اعمال پیش‌تنش برشی به مقدار 0.9 بار بحرانی کماتش برشی

۶- نتیجه‌گیری

پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی تحت ضربه کم سرعت با وجود پیش‌تنش براساس تئوری مرتبه برشی اول و با استفاده از روش سری فوریه استخراج و معادلات حرکت به روش توابع وزنی گالرکین حل شد. تاریخچه‌ی نیروی تماس از دو مدل کامل و جرم و فنر محاسبه و مقایسه گردید. اهم نتایج به دست آمده عبارتند از:

اعمال پیش‌تنش کششی موجب افزایش سفتی پوسته می‌گردد. در نتیجه بیشینه نیرو افزایش، بیشینه خیز و مدت زمان تماس کاهش می‌یابد. اعمال پیش‌تنش‌های فشاری و برشی موجب کاهش سفتی پوسته می‌گردد. در نتیجه بیشینه نیرو کاهش، بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش می‌یابد. به ازای پیش‌تنش‌های فشاری و برشی یکسان، مقدار کاهش بیشینه نیرو و افزایش بیشینه خیز، در حالت پیش‌تنش برشی بیشتر است.

تغییرشکل پوسته در محل اعمال ضربه در حالت پیش‌تنش فشاری به صورت دایروی و متقارن است ولی در حالت اعمال پیش‌تنش برشی به صورت قطری و تقریباً بیضوی شکل است. مقدار تغییرات بیشینه نیرو، خیز و مدت زمان تماس در حالت پیش‌تنش فشاری نسبت به کششی با مقادیر مساوی، بیشتر است.

تغییرات بیشینه خیز نسبت به تغییرات بیشینه نیرو در اثر اعمال پیش‌تنش، بیشتر است. با افزایش جرم ضربه زننده، بیشینه نیروی تماس، مدت زمان تماس و خیز افزایش می‌یابد.

پیوست

مولفه‌های عملگر دیفرانسیلی پوسته‌ی کامپوزیت دوانحنایی با وجود تنش‌های اولیه:

$$L_{13} = -L_{31} = \left[\frac{(A_{11} + K_S A_{55})}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right] \frac{\partial}{\partial X_1} + C_0 \left(\frac{B_{16}}{R_1} + \frac{B_{26}}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{N_{11}}{R_1} \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{N_{12}}{R_1} \frac{\partial}{\partial X_2}$$

$$L_{14} = L_{41} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + (B_{66} + C_0 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{K_S A_{55}}{R_1} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{15} = L_{51} = (B_{12} + B_{66} + C_0 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} + B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2}$$

$$L_{22} = (A_{66} - 2C_0 B_{66} + C_0^2 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} -$$

$$2C_0 B_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{K_S A_{44}}{R_2^2} - \frac{N_{22}}{R_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23} = -L_{32} = -C_0 \left(\frac{B_{16}}{R_1} + \frac{B_{26}}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial X_1} + \left[\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{1}{R_2} (A_{22} + K_S A_{44}) \right] \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{N_{22}}{R_2} \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{N_{12}}{R_2} \frac{\partial}{\partial X_1}$$

$$L_{24} = L_{42} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + (B_{12} + B_{66} - C_0 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$$L_{25} = L_{52} = (B_{66} - C_0 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{K_S A_{44}}{R_2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{33} = K_S A_{55} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + K_S A_{44} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{A_{11}}{R_1^2} - \frac{2A_{12}}{R_1 R_2} -$$

$$\frac{A_{22}}{R_2^2} + \frac{N_{11}}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{N_{22}}{R_2^2} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2 \frac{N_{12}}{R_1 R_2} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{34} = -L_{43} = \left[K_S A_{55} - \left(\frac{B_{11}}{R_1} + \frac{B_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial X_1} \right] - \left(\frac{B_{16}}{R_1} + \frac{B_{26}}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial X_2}$$

$$L_{35} = -L_{53} = \left[K_S A_{44} - \left(\frac{B_{12}}{R_1} + \frac{B_{22}}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial X_2} \right] - \left(\frac{B_{16}}{R_1} + \frac{B_{26}}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial X_1}$$

$$L_{44} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - K_S A_{55} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{45} = L_{54} = (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$$L_{55} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - K_S A_{44} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + (A_{66} + 2C_0 B_{66} + C_0^2 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} +$$

$$2C_0 B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{K_S A_{55}}{R_1^2} - \frac{N_{11}}{R_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = -C_0 B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + C_0 B_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} +$$

$$(A_{12} + A_{66} - C_0 D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{N_{12}}{R_1 R_2}$$

منابع

- [1] Shih-Chuan, Her., Yu-Cheng, Liang. "The finite element analysis of composite laminates and shell structures subjected to low velocity impact", Composite Structures, Vol. 66, pp. 277-285, 2004.
- [2] Krishnamurthy, KS., Mahajan, P., Mittal, RK. "A parametric study of the impact response and damage of laminated cylindrical composite shells" Compos Sci, Vol, 61, pp. 1655-69, 2001.
- [3] S. Ganapathy., K.P. Rao. " Failure analysis of laminated composite cylindrical/spherical shell panels subjected to low-velocity impact " Computers & Structures, Vol, 68, pp. 627-641, 1998.

- [18] Shivakumar, K.N. and Elber, W. and Illg, W. "Prediction of impact force and duration due to low velocity on circular composite Laminates", *Journal of Mechanics*, Vol. 52, pp. 674-680, 1985.
- [19] Shokuhfar, A., Khalili, S.M.R., Ashenai Ghasemi, F., Malekzadeh, K., Raissi, S. " Analysis and optimization of smart hybrid composite plates subjected to low-velocity impact using the response surface methodology (RSM)", *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, pp. 1204-12, 2008.
- [20] Choi, I.H., Lim, C.H. " Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law", *Compos Struct*, Vol. 66, pp. 125-32, 2004.
- [21] Swanson, S.R. "Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures", *Comp Engng*, Vol. 2, pp. 261-7, 1992.
- [22] Gong, S.W., Toh, S.L., Shim, V.P.W. "The elastic response of orthotropic laminated cylindrical shells to low-velocity impact", *Composites Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 241-266, 1994.
- [۲۳] داوود. ع. "تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای از جنس FML و FGM در معرض بارگذاری ضربه عرضی"، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، ۱۳۸۹.
- [۲۴] قاجار. ع، ملک‌زاده. ک، غلامی. م. " تحلیل پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دو انحنایی تحت ضربه‌ی سرعت پایین به روش مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته"، مجله علمی پژوهشی مکانیک هوافضا دانشگاه امام حسین (ع)، جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۹۳.
- [25] Delfosse, D., Vaziri, R., Pierson, M.O., Poursartip, A. "Analysis of the non-penetrating impact behavior of CFRP laminates", In: *Proceeding of the 9th International Conference on Composite Materials (Madrid, Spain)*, Cambridge, England, UK: Woodhead Publishing, Vol. 5, pp. 366-73, 1993.
- [26] Christoforou, A.P., Abdallah, A.E., Lotfi, H.G. "An inverse solution for low velocity impact in composite plates", *Computers and structures*, Vol. 79, pp. 2607 - 2619, 2001.
- [27] Pierson, M.O., Vaziri, R. "Analytical solution for low-velocity impact response of composite plates", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 8, pp. 1633-1640, 1996.
- [۲۸] غلامی. م، " پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دو انحنایی تحت ضربه کم سرعت با پیش‌تنش اولیه"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، ۱۳۹۰.
- [4] Fu Yiming., Mao Yiqi., Tian Yanping. " Damage analysis and dynamic response of elasto-plastic laminated composite shallow spherical shell under low velocity impact", *Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 126-137, 2010.
- [5] S.M.R. Khalili., M. Soroush., A. Davar., O. Rahmani. " Finite element modeling of low-velocity impact on laminated composite plates and cylindrical shells ", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1363-1375, 2011.
- [6] Sun, C.T., Chattopadhyay, S. "Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mass", *J. Appl. Mech*, Vol. 42, No. 5, pp. 693-698, 1975.
- [7] Sun, C.T., Chen, J.K., "On the impact of initially stressed composite laminates", *J. Compos Material*, Vol. 19, No. 6, pp. 490-504, 1985.
- [8] Khalili, S.M.R., Mittal, R. K and Mohammad Panah, N. "Analysis of fiber reinforced composite plates subjected to transverse impact in the presence of initial stresses", *Compos; Struct.*, Vol. 77, No. 2, pp. 263-268, 2007.
- [9] Zheng, D., Binienda, W.K., "Analysis of impact response of composite laminates under prestress", *10.1061/(ASCE)0893-1321:4(197)*, 2008.
- [10] Jafari, A.A., Khalili, S.M.R., Azarafza, R. "Transient dynamic response of composite circular cylindrical shells under radial impulse load and axial compressive loads", *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, pp. 1763-1786, 2005.
- [11] Khalili, S.M.R., Azarafza, R., Davar, A. "Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load", *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 275-284, 2009.
- [12] Reddy, J.N. "Mechanics of laminated composite plates and shells", 2nd ed, United States of America, CRC Press, 2004.
- [13] Sanders, Jr.J.L. "An improved first approximation theory for thin shells", *NASA THR24, to impact loads*, *Compos Struct*, Vol. 34, pp.55-63, 1959.
- [14] Leissa, A.W. "Vibration of shells", *NASA SP-288*, US Government Printing office, Washington D . C, Reprinted by the Acoustical Society of America, 1993, 1973.
- [15] Mindlin, R.D. " Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- [16] Abrate, S. " Modeling of impacts on composite structures", *Compos Struct*, Vol. 51, pp. 129-38, 2001.
- [17] Chandrashekhara, K., Schroeder., T. " Nonlinear impact analysis of laminated cylindrical and doubly curved shells", *J Comp Mater*, Vol, 29, pp. 2160-79, 1995.