

## بررسی و مقایسه روش‌های مختلف حل جریان گرما-شاره با شبکه‌های هم‌مکان و جابه‌جا شده در همرفت طبیعی

کارشناس ارشد، دانشگاه یزد، دانشکده مهندسی مکانیک

دانشیار، دانشگاه یزد، دانشکده مهندسی مکانیک

استادیار، دانشگاه یزد، دانشکده مهندسی عمران

علی‌رضا جعفری‌نیا\*

علی‌اکبر دهقان

محمد رضا هادیان

چکیده

در دینامیک سیالات محاسباتی دو نوع شبکه برای حل معادلات حاکم وجود دارد: شبکه جابه‌جاشده<sup>۱</sup> و شبکه هم‌مکان<sup>۲</sup>؛ که تفاوت آن‌ها در مکان ذخیره‌سازی سرعت است و همچنین پیچیدگی هندسی شبکه جابه‌جاشده نسبت به شبکه هم‌مکان زیادتر می‌باشد. زمانی که معادلات حاکم در شبکه هم‌مکان حل می‌شوند، مشکل نوسانات فشار به وجود می‌آید. برای حل این مشکل روش‌های مختلفی مطرح است که در این مطالعه سه روش اصلی درون‌یابی مومنتوم<sup>۳</sup>، درون‌یابی گرادیان فشار<sup>۴</sup> و تصحیح فشار هموارساز<sup>۵</sup> بررسی شده‌اند. نتایج این سه روش و روش شبکه جابه‌جاشده برای همرفت طبیعی درون محفظه بسته، مقایسه گردیده است. برای حل معادلات از الگوریتم سیمپل بر پایه روش حجم محدود استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی مدل عددی، نتایج با حل‌های معتبر موجود مقایسه و عدد ناسلت متوسط ارائه شده است. با توجه به نتایج حاصله ملاحظه می‌شود که روش درون‌یابی گرادیان فشار توانایی حل مشکل نوسانات فشار را به طور کامل نداشته و فقط آن را کاهش داده است. روش درون‌یابی مومنتوم و تصحیح فشار هموارساز در نزدیکی دیوار بالایی موفق عمل نکرده‌اند و هنوز فشار و سرعت دارای نوسان هستند. از طرف دیگر با توجه به نتایج به دست آمده، مدت زمان همگرایی و تعداد تکرار در روش شبکه هم‌مکان نسبت به شبکه جابه‌جاشده کمتر است. در مسأله حاضر شبکه جابه‌جاشده نتایج بهتری را ارائه داده است. شبکه جابه‌جاشده، سرعت و فشار را به‌خوبی پیش‌بینی نموده است.

واژه‌های کلیدی: شبکه هم‌مکان، شبکه جابه‌جاشده، درون‌یابی مومنتوم، درون‌یابی گرادیان فشار، تصحیح فشار هموارساز.

### Investigation and Comparison of Different Methods for Solving Fluid Flow with Heat Transfer on Collocated and Staggered Grids in Natural Convection Problem

A. R. Jafarinia

A. A. Dehghan

M. R. Hadian

M. Sc. Student, Yazd University, Department of Mechanical Engineering

Associate Professor, Yazd University, Department of Mechanical Engineering

Assistant Professor, Yazd University, Department of Civil Engineering

#### Abstract

To solve governing equations in computational fluid dynamics, there are two kind of grids: collocated and staggered; the difference is where to store the velocity. There is much geometric complexity in staggered grid and implementing boundary conditions is more difficult than the collocated grid. When governing equations are solved on collocated grids, the problem of checkerboard prediction of pressure is encountered. Some interpolating methods are available to overcome this problem. Here, three basic methods including momentum interpolation, pressure gradient interpolation and smoothing pressure correction techniques are used and their results are compared with the results of staggered grid in the problem of natural convection in a square cavity. To solve fluid flow SIMPLE algorithm on the basis of finite volume method is used. Velocity, pressure and temperature profiles are showed and it is seen that the pressure gradient interpolation method has not totally removed the checkerboard pressure and just alleviated it. Momentum interpolation and smoothing pressure correction methods have not succeeded near the upper wall and velocity and pressure still have oscillations. On the other hand according to the results, convergence time and number of iterations required in the collocated grid is less than the staggered one. The staggered grid, in this problem, provided better result than the collocated and predict the pressure and velocity well. The Nusselt number in staggered grid is exactly the same as one of the standard solutions.

**Keywords:** Collocated Grid, Staggered Grid, Momentum Interpolation, Pressure Gradient Interpolation, Smoothing Pressure Correction.

<sup>1</sup> Staggered

<sup>2</sup> Collocated

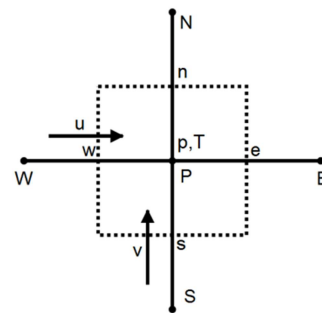
<sup>3</sup> Momentum Interpolation

<sup>4</sup> Pressure Gradient Interpolation

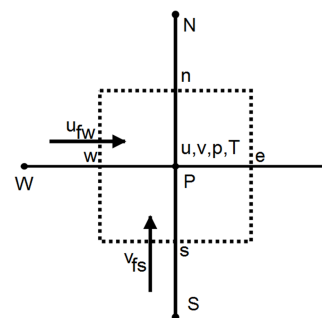
<sup>5</sup> Smoothing Pressure Correction

## ۱- مقدمه

در دینامیک سیالات محاسباتی برای حل جریان سیال و به دست آوردن میدان سرعت و فشار همواره دو روش شبکه‌بندی مورد توجه قرار گرفته است: شبکه جابه‌جاشده و شبکه هم‌مکان. زمانی که سرعت و فشار در مرکز حجم کنترل ذخیره می‌شوند، استفاده از درون‌یابی خطی برای تعیین سرعت روی سطوح حجم کنترل و تقریب تفاضل مرکزی برای محاسبه گرادیان فشار در معادلات مومنتوم، باعث به وجود آمدن نوسان در میدان فشار می‌گردد. زیرا فشار نقاط در معادله مومنتوم و سرعت نقاط در معادله پیوستگی به صورت یک در میان ظاهر می‌شوند و به این مشکل عدم کوپل شدن سرعت و فشار گفته می‌شود. برای حل این مشکل دو روش وجود دارد. روش اول استفاده از شبکه جابه‌جاشده (۱) می‌باشد؛ به عبارتی سرعت و فشار در نقاط مختلف از هم ذخیره می‌شوند. روش دوم استفاده از شبکه هم‌مکان (۲) است، با در نظر گرفتن این نکته که باید به نحوی نوسانات فشار را از بین برد.



شکل ۱- حجم کنترل در شبکه جابه‌جاشده



شکل ۲- حجم کنترل در شبکه هم‌مکان

استفاده از شبکه جابه‌جاشده مشکلاتی را در پی دارد که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود. پیچیدگی هندسی این نوع شبکه زیاد است زیرا باید برای محاسبه کمیت‌های فیزیکی مختلف از

گره‌ها و شبکه‌های گوناگون استفاده نمود. هم‌چنین استفاده از شبکه هم‌مکان برای محاسبات جریان‌های سه‌بعدی در هندسه‌های پیچیده که دارای شبکه‌های غیرمتعامد<sup>۱</sup> و منحنی‌شکل هستند، نتایج سودمندی را در پی دارد.

اولین بار ری و چاو [۱] روشی به نام درون‌یابی مومنتوم برای محاسبه سرعت روی سطوح حجم کنترل پیشنهاد کردند که از نوسانات فشار جلوگیری می‌کند. روش آن‌ها بدین صورت بود که جهت محاسبه سرعت سطوح، به جای استفاده از درون‌یابی خطی، یک رابطه با درون‌یابی معادله مومنتوم به دست آوردند. این رابطه شامل عبارت درون‌یابی خطی بین گره‌ای قبل و بعد از سطح مورد نظر و عبارتی به نام عبارت تصحیح می‌باشد. برای همگرا شدن حل عددی در الگوریتم‌های مختلف حل جریان سیال، همواره به ضرایب فروتخفیف<sup>۲</sup> نیاز است و مطلوب این است که نتایج به مقادیر آن‌ها وابستگی نداشته باشند. ماجومدار [۲] عنوان کرد که نتایج حل‌های ری و چاو [۱] به ضرایب فروتخفیف وابستگی دارد و برای حل این مشکل بر روی رابطه آن‌ها تصحیحاتی انجام داد تا به حل مستقل از ضرایب فروتخفیف رسید. میلر و اشمیت [۳] بیان کردند که با اعمال روش درون‌یابی مومنتوم در الگوریتم سیمپل‌سی می‌توان به حل مستقل از ضرایب فروتخفیف رسید. آن‌ها برای مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک، این روش را اعمال کردند و نتایج به دست آمده به ضرایب فروتخفیف وابسته نبودند. کوبایاشی و دیگران [۴] تکنیک ساده‌ای برای رسیدن به حل مستقل از ضرایب فروتخفیف بیان کردند، به این صورت که می‌توان ضرایب فروتخفیف را در رابطه محاسبه سرعت سطوح حجم کنترل حذف کرد.

دیت [۵] قوانینی برای محاسبه سرعت سطوح بیان کرده است و رابطه‌ای ارائه نموده که حالت خاص آن همان روش ری و چاو می‌باشد. دیت هم‌چنین نتایج را برای مسأله جریان داخل حفره با درپوش متحرک با شبکه جابه‌جاشده مقایسه نموده است و تطابق خوبی بین نتایج وجود داشته است. دیت [۵] در مطالعه خود روش دیگری برای از بین بردن نوسانات فشار در شبکه هم‌مکان به نام روش درون‌یابی گرادیان فشار ارائه داده است. نتایج او برای مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک مطابق با نتایج شبکه جابه‌جاشده به دست آمده است.

چوی [۶] بیان کرد که نتایج حل‌های ری و چاو در مسائل غیرپایا به مقدار بازه زمانی نیز وابسته است و از این رو برای درون‌یابی سرعت سطوح حجم کنترل در مسائل غیرپایا

<sup>1</sup> Non-orthogonal

<sup>2</sup> Under Relaxation Factor

فشار، میدان سرعت هموار به دست می‌آید. با توجه به این که فشار نقاط در عبارت چشمه معادلات مومنتوم ظاهر می‌شود، به نظر می‌رسد نیاز است میدان سرعت با دقت بیشتری مورد بررسی قرار گیرد. لذا هدف سوم در این مطالعه بررسی تأثیر نتایج میدان فشار بر میدان سرعت می‌باشد و در پژوهش حاضر با توجه به استدلالی که انجام شده است به نحوی متفاوت از تحقیقات گذشته به بررسی میدان سرعت پرداخته شده است. در مطالعه حاضر روش‌های موجود در شبکه هم‌مکان؛ درون‌یابی مومنتوم ری و چاو، درون‌یابی گرادیان فشار و تصحیح فشار هموارساز مورد بررسی و مقایسه با یکدیگر و شبکه جابه‌جاشده قرار گرفته‌اند. بقیه روش‌های موجود تفاوت چندانی با روش درون‌یابی مومنتوم ری و چاو نداشته‌اند. ابتدا هندسه مسأله و معادلات حاکم بیان شده‌اند، پس از آن به معرفی روابط روش‌ها پرداخته شده و در نهایت بحث در مورد نتایج و نتیجه‌گیری انجام گرفته است.

## ۲- شرح مسأله

### ۲-۱- روش و فرضیات حل

حل عددی بر پایه روش حجم محدود می‌باشد. کد برنامه به زبان فرترن نوشته شده است و الگوریتم مورد استفاده سیمپل می‌باشد. بررسی اعتبارسنجی کد با مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج دیت [۹]، دیویس [۱۲] و مرزهب [۱۳] انجام شده است.

برای مدل‌سازی یک سری فرضیات انجام شده است که سبب ساده‌سازی فرآیند حل می‌شود. این فرضیات به صورت زیر می‌باشد:

(الف) جریان دوبعدی، آرام، پایا و تراکم‌ناپذیر

(ب) شرط عدم لغزش در دیواره‌ها

(ج) سیال نیوتنی و برقرار بودن معادلات ناویر-استوکس

(د) کاربرد تقریب بوزینسک<sup>۱</sup>

### ۲-۲- هندسه و شرایط مرزی

در شکل ۳ هندسه و شرایط مرزی نشان داده شده است. دیوارهای بالا و پایین عایق هستند، دیوار سمت چپ گرم و دیوار سمت راست سرد هستند و در حالت بدون بعد، دارای دمای بدون بعد، به ترتیب ۱ و ۰ هستند. در مسأله همرفت طبیعی سرعت روی دیواره‌ها برابر با صفر و در مسأله جریان درون حفره با در پوش متحرک سرعت افقی بدون بعد در

تصحیحاتی بر روی رابطه ری و چاو انجام داد. پایاگرگاکوپلوس [۷] و همکاران نوعی درون‌یابی نمایی برای سرعت سطوح حجم کنترل و گرادیان فشار استفاده کردند که ویژگی‌های اصلی درون‌یابی مومنتوم را دارا بود. یو و همکاران [۸] روش‌هایی به خصوص برای مسائل غیر پایا ارائه نمودند و ادعا کرده‌اند در بعضی از موارد جواب‌های بهتری نسبت به چوی [۶] گرفته‌اند. دیت [۹] توضیح داد که دلیل اصلی نوسانات فشار، نبود معادله تصحیح فشار مناسب برای شبکه هم‌مکان می‌باشد. او با یک معادله جبری، عبارتی به معادله تصحیح فشار اضافه نمود که نقش هموارسازی نوسانات فشار را بر عهده داشت. نتایج روش تصحیح فشار هموارساز نیز در مطالعه او هم‌خوانی خوبی با شبکه جابه‌جاشده داشته است. دیت در تحقیقی دیگر [۱۰] معادله تصحیح فشار جدید را دقیق‌تر بررسی کرده است و روابط را برای جریان تراکم‌پذیر نیز به دست آورده است.

در مطالعات انجام شده در ارزیابی روش‌های موجود در شبکه هم‌مکان که تا اینجا مطرح شدند، بحث انتقال گرما مطرح نبوده است. سعیدی و اسکویی [۱۱] در سال ۲۰۱۲ نتایج حل در هر دو شبکه هم‌مکان و جابه‌جاشده را در مسأله همرفت طبیعی درون حفره مقایسه کرده‌اند. روش مورد استفاده آن‌ها در شبکه هم‌مکان روش درون‌یابی مومنتوم ری و چاو [۱] بوده است. نتایج آن‌ها در هر دو شبکه هم‌خوانی خوبی با یکدیگر داشته است. البته آن‌ها پروفیل‌های فشار و دما را بررسی نکرده‌اند و نحوه بررسی و مقایسه پروفیل‌های سرعت نیز متفاوت از مطالعه حاضر است که در بخش نتایج توضیح داده شده است.

در مطالعه حاضر سه هدف اصلی دنبال شده است. هدف اول این است که روش‌های مختلف حل در شبکه هم‌مکان در یک مسأله و در کنار یکدیگر مورد مقایسه قرار گیرند و نقاط ضعف و قوت آن‌ها در مقایسه با یکدیگر و شبکه جابه‌جاشده مشخص گردد.

با توجه به اینکه مسأله انتقال گرما به غیر از روش درون‌یابی مومنتوم، در روش‌های دیگر حل در شبکه هم‌مکان بررسی نشده؛ در این پژوهش مسأله همرفت طبیعی درون حفره مورد بررسی قرار گرفته است. لذا هدف دوم این است که مشاهده شود هر روش میدان دما را به چه صورت پیش‌بینی می‌کند و نوسانات میدان فشار چه تأثیری بر میدان دما دارد.

در همه مطالعات گذشته که در ابتدا بیان شدند، نتایج بیشتر در میدان فشار مورد بررسی قرار گرفته‌اند و سرعت کمتر بررسی شده است. همچنین پروفیل مولفه‌های سرعت به شیوه‌ای بررسی شده بودند که نتایج مناسب و مطابق با شبکه جابه‌جاشده به دست آمده بود. در واقع در نتایج تحقیقات گذشته اینگونه بیان شده است که در هنگام نوسانات میدان

<sup>1</sup> Boussinesq Approximation

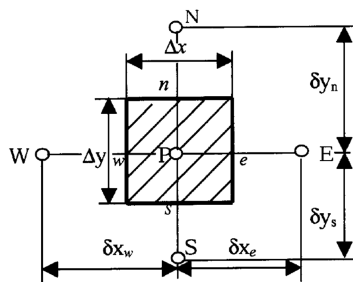
$$\frac{\partial UU}{\partial X} + \frac{\partial VU}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial UV}{\partial X} + \frac{\partial VV}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + T \quad (9)$$

$$\frac{\partial UT}{\partial X} + \frac{\partial VT}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (10)$$

#### ۴- معرفی روش‌های حل در شبکه هم‌مکان

در این بخش هر سه روش حل در شبکه هم‌مکان معرفی شده و روابط آن‌ها آورده شده است. در شکل ۴ آرایش شبکه هم‌مکان نشان داده شده است.



شکل ۴- آرایش شبکه هم‌مکان

#### ۴-۱- درون‌یابی مومنتوم

در رابطه (۱۱) معادله مومنتوم گسسته در جهت  $X$  با اعمال فروتخفیف ارائه شده است. در این رابطه،  $U_p^*$  مربوط به سرعت گره در تکرار قبلی است.

$$\frac{a_{p_u} U_p}{\alpha} = \sum a_{nb} U_{nb} + b_u - \frac{\partial P}{\partial X} \Delta \nabla \quad (11)$$

$$b_u = S c_u + \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) a_{p_u} U_p^*$$

از رابطه (۱۱) می‌توان برای نمونه سرعت در سطح شرقی حجم کنترل (سطح  $e$ ) را به صورت رابطه (۱۲) به دست آورد.

$$U_{fe} = \frac{\alpha}{(a_{p_u})_e} \left( \sum a_{nb} U_{nb} + b_u \right)_e \quad (12)$$

$$-\left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\alpha \Delta \nabla}{a_{p_u}} \right)_e$$

نکته مهم این است که عبارت اول رابطه (۱۲) به صورت خطی درون‌یابی می‌شود، اما گرادیان فشار روی سطح حجم کنترل محاسبه می‌شود. نحوه درون‌یابی خطی عبارت اول در رابطه (۱۳) نشان داده شده است و در رابطه (۱۴) نحوه محاسبه ضریب وزنی  $h_e$  نشان شده است.

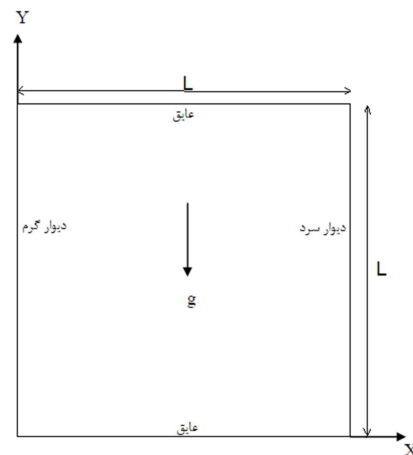
$$\frac{\left( \sum a_{nb} u_{nb} + b_u \right)_e}{(a_{p_u})_e} = h_e \frac{\left( \sum a_{nb} u_{nb} + b_u \right)_E}{(a_{p_u})_E} \quad (13)$$

$$+(1-h_e) \frac{\left( \sum a_{nb} u_{nb} + b_u \right)_P}{(a_{p_u})_P}$$

$$h_e = \frac{\Delta x_P}{2\delta x_e} \quad (14)$$

$Y=1$  برابر با یک است. برای شرایط مرزی معادلات فشار و تصحیح فشار در کنار مرز از رابطه (۱) استفاده شده است [۹]. در مدل عددی حاضر از مشتق دو نقطه‌ای برای محاسبه (۱) استفاده شده است. در این رابطه  $n$  بیان گر جهت عمود بر دیوار است.

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial P'}{\partial n} = 0 \quad (1)$$



شکل ۳- هندسه و شرایط مرزی

#### ۳- معادلات حاکم

معادلات پایستاری جرم، بقای مومنتوم و انرژی برای جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی با خواص ثابت به شرح زیر است [۱۴].

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial u u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (t - t_c) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u t}{\partial x} + \frac{\partial v t}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

معادلات (۲) تا (۵) با تعاریف رابطه (۶) به فرم بدون بعد معادلات (۷) الی (۱۰) تبدیل می‌شوند.

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{u}{u_{ref}}, \quad V = \frac{v}{u_{ref}} \\ P &= \frac{p}{\rho u_{ref}^2}, \quad u_{ref} = \sqrt{g \beta (t_h - t_c) L} \\ T &= \frac{t - t_c}{t_h - t_c}, \quad Gr = \frac{g \beta (t_h - t_c) L^3}{\nu^2} \\ \alpha &= \frac{k}{\rho c_p}, \quad pr = \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (7)$$

ترتیب عمل می‌شود.

#### ۳-۴- تصحیح فشار هموارساز

در این روش سرعت سطوح حجم کنترل به صورت خطی درون‌یابی می‌شوند و عبارت گرادیان فشار در معادلات مومنوم از روش تقریب تفاضل مرکزی محاسبه می‌شود. تصحیح فشار جدید دارای عبارتی به نام عبارت هموارساز<sup>۱</sup> است. همچنین با این معادله تصحیح فشار جدید کدنویسی برنامه‌ی کامپیوتری آسان‌تر شده است. در این روش معادله تصحیح فشار مانند قبل حل می‌شود و سپس هموارسازی انجام می‌گردد. برای این کار از رابطه‌های (۱۹) تا (۲۱) استفاده می‌شود [۹]. در رابطه (۱۹) همان عبارت هموارساز است که در محاسبه آن از فشار متوسط استفاده شده است. نحوه محاسبه فشار متوسط به صورت چند بعدی است که در روابط (۲۰) و (۲۱) مشاهده می‌شود.

$$p'_P = p'_P - p'_{s,P} = p'_P - .5(p_P - \bar{p}_P) \quad (19)$$

$$\bar{p}_P = \frac{\bar{p}_{x,P} + \bar{p}_{y,P}}{2} \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{p}_{x,P} &= \frac{\delta x_e p_W + \delta x_w p_E}{\delta x_e + \delta x_w} \\ \bar{p}_{y,P} &= \frac{\delta y_n p_S + \delta y_s p_N}{\delta y_n + \delta y_s} \end{aligned} \right. \quad (21)$$

#### ۵- اعتبارسنجی

اعتبارسنجی مدل عددی در دو بخش ابتدا با مقایسه عدد ناسلت متوسط به دست آمده از این پژوهش با نتایج مراجع معتبر و سپس با مقایسه پروفیل سرعت افقی روی خط عمودی وسط در مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک صورت گرفته است. در تمامی موارد، عدد ناسلت که شیب دمایی بدون بعد است با روش مشتق سه نقطه‌ای محاسبه گردیده است. در جدول ۱ اعداد ناسلت متوسط به دست آمده برای مساله مورد بررسی، جریان همرفت طبیعی در حفره نمایش داده شده است. نتایج به دست آمده کاملاً مطابق با مراجع معتبر می‌باشد. در بخش ۶ دلیل یکسان بودن عدد ناسلت متوسط ذکر شده است. همچنین در جدول ۱ نتایج دیویس [۱۲] و مزرهب و همکارانش [۱۳] آورده شده است.

در نتیجه برای سرعت روی سطح شرقی  $e$  داریم [۱]:

$$U_{fe} = h_e U_E + (1 - h_e) U_P + h_e \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\alpha \Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_E + (1 - h_e) \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\alpha \Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_P - \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\alpha \Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_e \quad (15)$$

همان‌طور که در رابطه (۱۵) مشاهده می‌شود، سرعت روی سطح علاوه بر بخش درون‌یابی خطی، شامل عبارت‌های دیگری است که به بخش تصحیح معروف هستند و باعث از بین رفتن نوسانات فشار می‌شوند. البته برای این که جواب‌ها به ضریب فروتخفیف وابسته نباشند، در حل مسأله مطالعه حاضر ضریب فروتخفیف از رابطه (۱۵) حذف شده است. برای محاسبه سرعت بقیه سطوح حجم کنترل نیز به همین ترتیب عمل می‌شود.

#### ۴-۲- درون‌یابی گرادیان فشار

درون‌یابی گرادیان فشار به عنوان یک تقریب توسط دیت [۵] در نظر گرفته شده است. در این روش سرعت روی سطوح حجم کنترل به صورت خطی درون‌یابی می‌شود ولی در عوض گرادیان فشار در گره‌ها با استفاده از گرادیان فشار سطوح و گره‌های اطراف محاسبه می‌گردد. در [۵] روابطی برای شبکه یکنواخت و بدون ضریب فروتخفیف به دست آمده‌اند که در کار حاضر روابط در حالت کلی بیان می‌شود. رابطه (۱۶) سرعت سطح شرقی  $e$  را در این روش نشان می‌دهد.

$$U_{fe} = h_e U_E + (1 - h_e) U_P \quad (16)$$

رابطه (۱۷) گرادیان فشار گره مرکزی  $P$  را به گرادیان فشار نقاط همسایه قبل و بعد (در اینجا  $E$  و  $W$ ) و همچنین به گرادیان فشار سطوح شرقی و غربی حجم کنترل مرتبط می‌نماید. ضریب وزنی  $h_w$  نیز در رابطه (۱۸) آورده شده است.

$$\left( \frac{\partial P}{\partial X} \Delta \nabla \right)_P = \frac{(a_{P_u})_P}{2 - h_e - h_w} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_e + \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_w - h_e \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_E - h_w \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\Delta \nabla}{a_{P_u}} \right)_W \right] \quad (17)$$

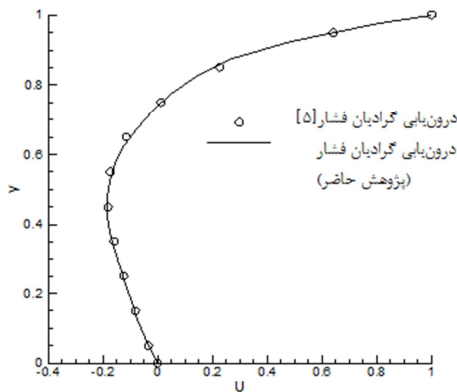
$$h_w = \frac{\Delta x_P}{2 \delta x_w} \quad (18)$$

در نتیجه طبق رابطه (۱۷) دیگر فشار نقاط در عبارت گرادیان فشار معادله مومنوم به صورت یک در میان ظاهر نمی‌شوند. برای معادله مومنوم در جهت  $y$  هم نیز به همین

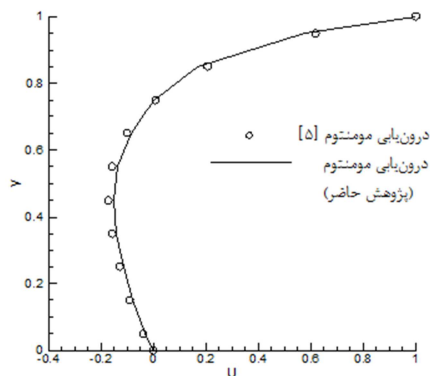
<sup>1</sup> Smoothing term

جدول ۱- عدد ناسلت متوسط برای جریان همرفت طبیعی

روش‌ها و مراجع	عدد ناسلت متوسط (عدد رایلی $10^5$ ) عدد پرانتل ۰٫۷
درون‌یابی مومنوم	۴٫۵۲۰
تصحیح فشار هموار ساز	۴٫۵۲۰
درون‌یابی گرادیان فشار	۴٫۵۲۰
درون‌یابی خطی	۴٫۵۲۰
شبکه جابه‌جاشده	۴٫۵۱۹
دیویس [۱۲]	۴٫۵۱۹
مزرهب و همکاران [۱۳]	۴٫۵۲۲



شکل ۶- پروفیل مولفه افقی سرعت روش درون‌یابی گرادیان فشار در مقایسه با دیت [۵] روی خط عمودی وسط در مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک ( $Re = 100$ )



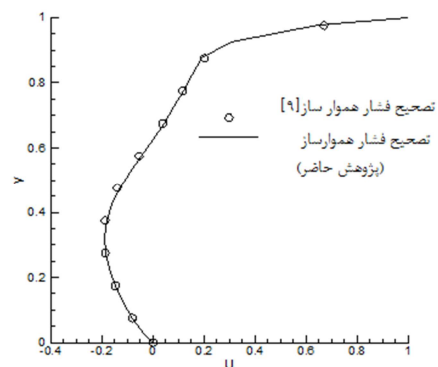
شکل ۷- پروفیل مولفه افقی سرعت روش درون‌یابی مومنوم در مقایسه با دیت [۵] روی خط عمودی وسط در مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک ( $Re = 100$ )

### ۶- بحث در مورد نتایج

تمام مسأله‌های مورد بررسی برای جریان همرفت طبیعی در حفره با دمای ثابت دیواره‌های چپ و راست و برای عدد رایلی  $10^5$  و عدد پرانتل ۰٫۷ ارائه شده است. در مسأله همرفت طبیعی گرادیان‌ها در راستای شتاب جاذبه شدیدترند لذا جهت مقایسه، نمودارهای ارائه شده برای متغیرهای میدان بیشتر بر روی خط عمودی وسط رسم شده‌اند. تمام کمیت‌های نشان داده شده روی نمودارها بدون بعد هستند.

ابتدا مسأله برای حالتی که تقریب خطی برای سرعت سطوح حجم کنترل و تقریب تفاضل مرکزی برای محاسبه گرادیان فشار در نظر گرفته شده است، حل شده تا بتوان مشکل تولید نوسانات فشار را نشان داد. این روش بر روی شکل‌ها با نام درون‌یابی خطی مشخص شده است. در شکل ۸ پروفیل فشار بر روی خط عمودی وسط برای شبکه هم‌مکان در

در ادامه اعتبار سنجی با مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک آورده شده است. در شکل ۵ پروفیل مولفه افقی سرعت در مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک در پژوهش حاضر با نتایج دیت [۹] مقایسه شده است و نتایج به خوبی بر یکدیگر منطبق هستند. در این مطالعه، عدد بدون بعد رینولدز برابر با ۴۰۰ در نظر گرفته شده است. در شکل‌های ۶ و ۷ پروفیل مولفه افقی سرعت روی خط عمودی وسط در روش‌های درون‌یابی گرادیان فشار و درون‌یابی مومنوم با نتایج دیت [۵] مقایسه شده‌اند که در اینجا نیز تطابق بسیار خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. در شکل‌های ۶ و ۷ عدد رینولدز برابر با ۱۰۰ می‌باشد.



شکل ۵- پروفیل مولفه افقی سرعت روش تصحیح فشار هموار ساز در پژوهش حاضر در مقایسه با دیت [۹] روی خط عمودی وسط در مسأله جریان درون حفره با درپوش متحرک ( $Re = 400$ )

**جدول ۲-** عدد ناسلت متوسط در تعداد شبکه‌های متفاوت برای عدد رایلی  $10^5$

شبکه جابه‌جاشده	درون‌یابی گرادیان فشار	تصحیح فشار هموارساز	درون‌یابی مومنتوم	روش‌ها تعداد شبکه
۴,۵۹۸	۴,۵۵۸	۴,۵۹۷	۴,۵۹۷	۵۰×۵۰
۴,۵۳۲	۴,۵۳۴	۴,۵۳۲	۴,۵۳۳	۱۰۰×۱۰۰
۴,۵۲۵	۴,۵۲۸	۴,۵۲۶	۴,۵۲۶	۱۵۰×۱۵۰
۴,۵۲۲	۴,۵۲۲	۴,۵۲۲	۴,۵۲۲	۲۰۰×۲۰۰
۴,۵۲۰	۴,۵۲۱	۴,۵۲۱	۴,۵۲۰	۲۵۰×۲۵۰
۴,۵۱۹	۴,۵۲۰	۴,۵۲۰	۴,۵۲۰	۳۰۰×۳۰۰
۴,۵۱۹	۴,۵۲۰	۴,۵۲۰	۴,۵۲۰	۳۵۰×۳۵۰

در شکل ۱۰ و شکل ۱۱ پروفیل فشار برای روش‌های مختلف حل در شبکه هم‌مکان در مقایسه با شبکه جابه‌جاشده روی خط عمودی وسط رسم شده است.

از شکل ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که روش درون‌یابی مومنتوم به خوبی نوسانات فشار را از بین برده است ولی در نزدیک دیوار بالایی نتایج کاملاً بر نتایج شبکه جابه‌جاشده منطبق نیست و گرادیان فشار متفاوت است.

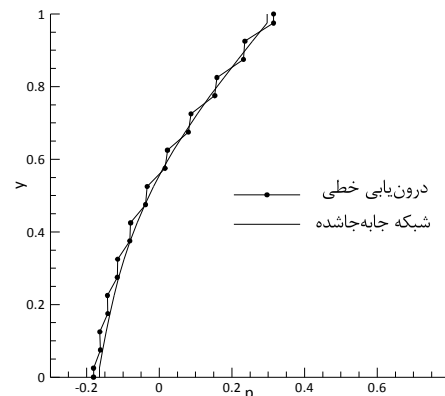
از شکل ۱۱ می‌توان نتیجه گرفت که روش درون‌یابی گرادیان فشار، فقط بازه نوسانات را کاهش داده است اما نتوانسته آن را به طور کامل حذف نماید. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در مکان‌هایی که تغییرات فشار شدید است، این روش دقت خوبی برای پیش‌بینی فشار ندارد از شکل ۱۱ همچنین می‌توان نتیجه گرفت که روش تصحیح فشار هموارساز نیز نوسانات فشار را حذف کرده است، اما فشار نقاط در این روش نیز هنوز در نزدیک دیوار بالایی دارای نوسان می‌باشند. اختلاف فشار این روش با شبکه جابه‌جاشده در نزدیک دیوار بیش از بقیه روش‌ها می‌باشد.

در شکل ۱۲ پروفیل فشار روی خط عمودی وسط برای روش تصحیح فشار هموارساز و شبکه جابه‌جاشده رسم شده است. مشخص است که روش تصحیح فشار هموارساز به غیر از نزدیک دیوار بالایی تطابق خوبی با شبکه جابه‌جاشده دارد.

در پروفیل‌هایی که در این بخش رسم شده است، مشخص است که روش‌های مختلف حل در شبکه هم‌مکان در محاسبه گرادیان فشار در نزدیک دیوار بالایی با شبکه جابه‌جاشده دارای اختلاف هستند. در واقع دلیل این اختلافات مربوط به مسأله مورد بررسی است. البته این نکته مورد توجه است که در مطالعات گذشته که در بخش مقدمه عنوان شدند، پروفیل‌های فشار مانند شکل ۱۲ در کل دامنه رسم شده‌اند که در این حالت تفاوت‌ها بسیار کم به نظر می‌آیند. در مطالعه حاضر پروفیل‌ها برای مقایسه بهتر و مشخص شدن تفاوت‌ها در نزدیک

حالت درون‌یابی خطی در مقایسه با شبکه جابه‌جاشده رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در شبکه هم‌مکان فشار به صورت نوسانی به دست آمده است. البته اگر فشار به صورت خطی تغییر کند و یا تغییرات فشار اندک باشد، در فشار نقاط نوسان نخواهیم داشت.

در جریان همرفت طبیعی مساله حاضر هر چه در جهت عمودی به سمت بالا حرکت شود، گرادیان فشار شدیدتر می‌شود، لذا نوسانات شدیدتر که مربوط به گرادیان‌های بیشتر فشار می‌شود؛ در ارتفاع‌های بالای هندسه بیشتر مشهود است. این مسأله را در شکل ۸ نیز می‌توان مشاهده کرد.



**شکل ۸-** پروفیل فشار روی خط عمودی وسط در شبکه هم‌مکان با تقریب خطی و شبکه جابه‌جاشده

#### ۱-۶-۱- مقایسه نتایج روش‌ها

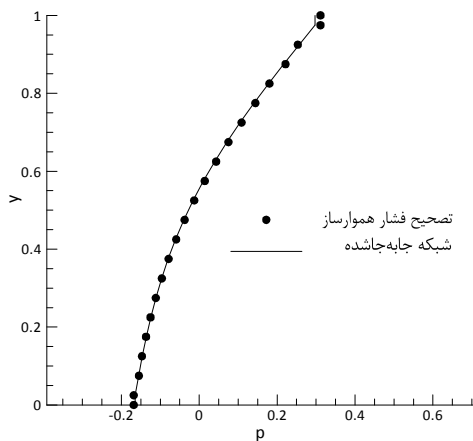
در این بخش نتایج سه روش معرفی شده با هم و با شبکه جابه‌جاشده، مقایسه شده است. تعداد شبکه استفاده شده برای مسأله ۲۰ در ۲۰ است. تعداد سلول‌های شبکه کم انتخاب شده است تا بتوان تفاوت‌ها و نقاط قوت و ضعف هر روش را مشاهده کرد. البته افزایش تعداد شبکه نتایج هر روش را بهبود می‌بخشد، اما در مقایسه روش‌ها تأثیری ندارد و تفاوت روش‌ها در شبکه‌هایی با تعداد سلول زیاد نیز مشاهده شده است.

#### ۱-۶-۱-۱- حل مستقل از شبکه

در این بخش برای مقایسه و مشخص شدن تعداد نقاط شبکه مناسب برای محاسبه عدد ناسلت و حل مستقل از شبکه، در جدول ۲ عدد ناسلت متوسط برای چند شبکه متفاوت و برای روش‌های مورد بررسی ارائه شده است.

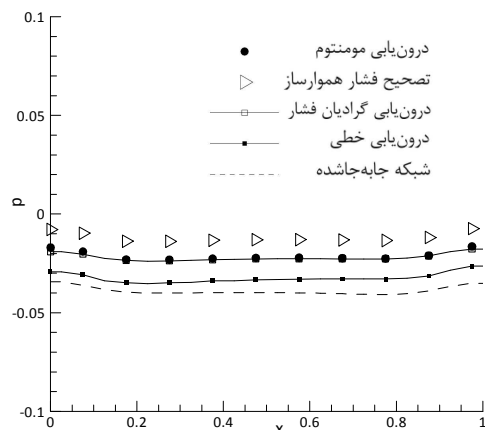
#### ۱-۶-۲- پروفیل فشار

در شکل ۹ پروفیل فشار روی خط افقی وسط رسم شده است و مشاهده می‌شود که نوسان در فشار بسیار کم است زیرا روی این خط که در جهت افقی حرکت شود، گرادیان فشار بسیار اندک است و فشار تقریباً به صورت خطی تغییر می‌کند.



شکل ۱۲- پروفیل فشار شبکه جابه‌جاشده و تصحیح فشار هموار ساز روی خط عمودی وسط

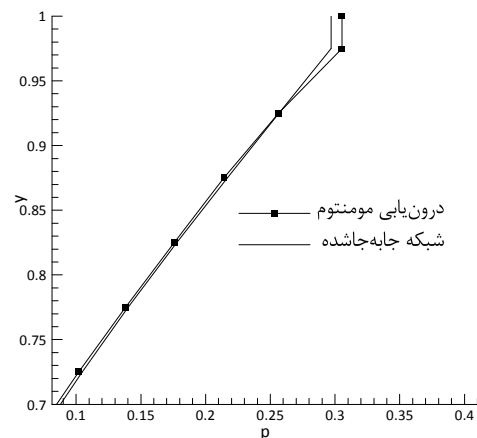
دیوار بالایی که فشار به میزان قابل توجهی از حالت خطی فاصله دارد بررسی شده‌اند.



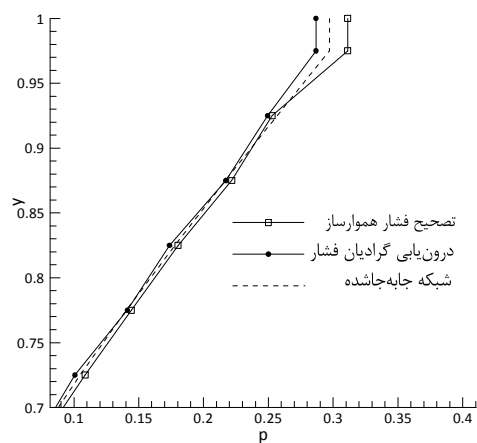
شکل ۹- پروفیل فشار روی خط افقی وسط در روش‌های حل در شبکه هم‌مکان در مقایسه با شبکه جابه‌جاشده

### ۶-۱-۳- پروفیل سرعت

در معادلات مومنتوم، گرادیان فشار در عبارت چشمه ظاهر می‌شود، لذا اگر فشار دارای نوسان باشد، انتظار می‌رود که مولفه‌های سرعت نیز دچار نوسان شوند. در مطالعات گذشته همانطور که در بخش مقدمه بیان شد، میدان سرعت در هنگام نوسانات فشار هموار به دست آمده است. شیوه بررسی گذشتگان به این صورت بوده است که پروفیل مولفه افقی سرعت روی خطوط عمودی و پروفیل مولفه عمودی سرعت روی خطوط افقی رسم شده است. در اینجا اگر به همین صورت پروفیل مولفه افقی سرعت روی خط عمودی وسط (شکل ۱۳) و پروفیل مولفه عمودی سرعت روی خط افقی وسط (شکل ۱۴) رسم شود، در مولفه‌های سرعت نوسان دیده نمی‌شود و مانند گذشته می‌توان این نتیجه را گرفت که میدان سرعت در حضور نوسانات میدان فشار، هموار به دست آمده است. اما این نتیجه‌گیری اشتباه می‌باشد زیرا که در عبارت چشمه معادله مومنتوم مولفه افقی سرعت، گرادیان فشار افقی و در عبارت چشمه معادله مومنتوم مولفه عمودی سرعت، گرادیان فشار عمودی تأثیر گذار است. لذا در مطالعه حاضر با توجه به استدلال انجام شده برای مشخص شدن این موضوع که نوسانات میدان فشار چه تأثیری بر مولفه‌های سرعت دارد، پروفیل مولفه افقی سرعت روی خط افقی وسط حفره در شکل ۱۵ و پروفیل مولفه عمودی سرعت روی خط عمودی وسط حفره در شکل ۱۶ رسم شده است. در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود که به غیر از روش درون‌یابی خطی نتایج بقیه روش‌ها هموار به دست آمده و نتایج هم‌خوانی خوبی با شبکه جابه‌جاشده دارد. دلیل این است که در راستای افقی تغییرات فشار کم است و پروفیل فشار همانطور که در شکل ۹ نشان داده شد به حالت خطی نزدیک می‌باشد. در مسأله حاضر چون گرادیان فشار در راستای عمودی شدیدتر است، در شکل ۱۶ نتایج متفاوت از شبکه جابه‌جاشده



شکل ۱۰- پروفیل فشار درون‌یابی مومنتوم و شبکه جابه‌جاشده در  $0.7 \leq Y \leq 1$  روی خط عمودی وسط



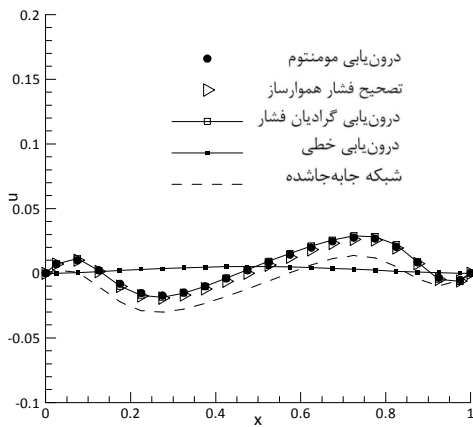
شکل ۱۱- پروفیل فشار درون‌یابی گرادیان فشار، تصحیح فشار هموار ساز و شبکه جابه‌جاشده در  $0.7 \leq Y \leq 1$  روی خط عمودی وسط



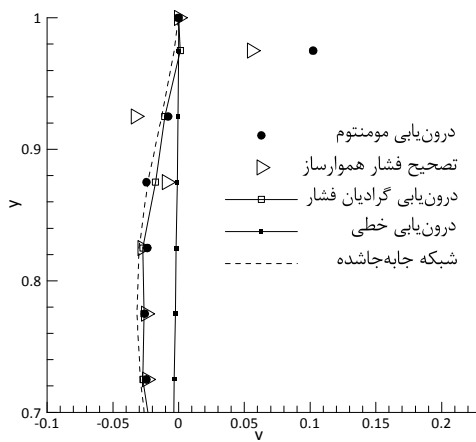
کاملاً مشخص است.

در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود که روش درون‌یابی مومنتوم و تصحیح فشار هموارساز در نزدیک دیوار بالایی در ارتفاع  $Y=0.98$  با شبکه جابه‌جاشده حدود ۴۰ درصد اختلاف دارند که دلیل آن، اختلاف در مقادیر گرادیان فشار در معادله مومنتوم است.

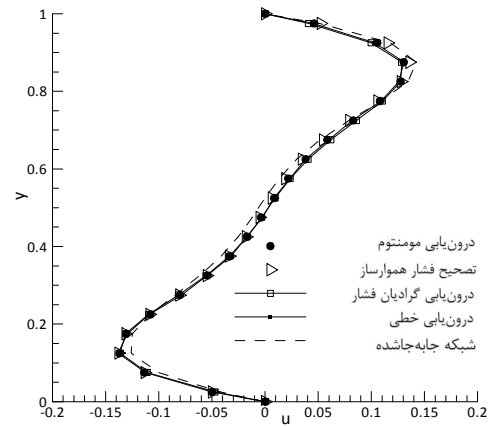
روش درون‌یابی خطی و درون‌یابی گرادیان فشار به دلیل داشتن مشکل نوسانات فشار، در این‌جا نیز دارای نوسان و نتایج غیر فیزیکی در مولفه عمودی سرعت هستند. با توجه به نتایج به دست آمده مشخص شد که نوسانات میدان فشار بر روی مولفه‌های سرعت تأثیر گذار است.



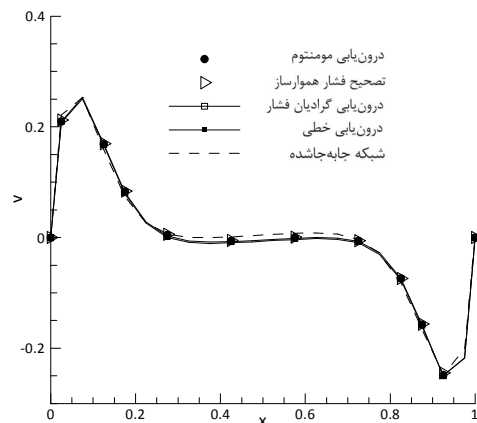
شکل ۱۵- پروفیل مولفه افقی سرعت روی خط افقی وسط



شکل ۱۶- پروفیل سرعت عمودی در  $0.7 \leq Y \leq 1$  روی خط عمودی وسط



شکل ۱۳- پروفیل مولفه افقی سرعت روی خط عمودی وسط



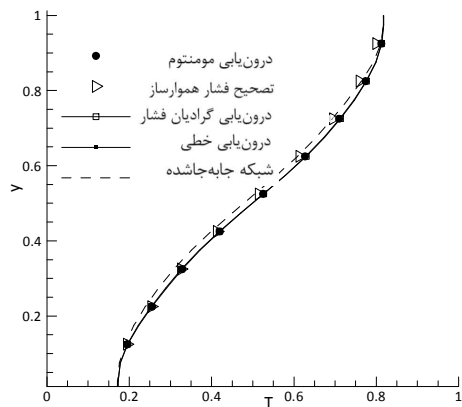
شکل ۱۴- پروفیل مولفه عمودی سرعت روی خط افقی وسط

#### ۶-۱-۴- پروفیل دما

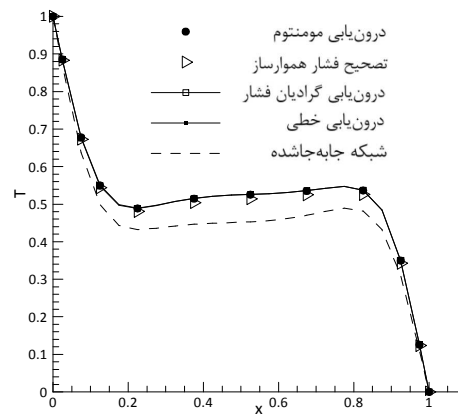
یک از اهداف این مطالعه بررسی روش‌های حل در شبکه هم‌مکان در محاسبه میدان دما بود. در این بخش پروفیل‌های دما مقایسه شده‌اند و دلیل عدد ناسلت یکسان در روش‌ها بیان شده است در شکل ۱۷ پروفیل دما روی خط افقی وسط هندسه رسم شده است. از این شکل چند نتیجه به دست می‌آید. اول این که پروفیل دما در روش‌های مختلف شبکه هم‌مکان تفاوت چندانی ندارند، حتی زمانی که دارای نوسانات فشار هستیم.

نتیجه دوم این است که شیب دمای بدون بعد، نزدیک دیواره در همه حالات تقریباً یکسان است. بنابراین نمی‌توان انتظار تفاوت محسوسی در عدد ناسلت را داشت. اگر چه شکل ۱۷ مربوط به وسط هندسه می‌باشد، ولی در ارتفاع‌های دیگر نیز نتیجه به همین شکل است. برای نشان دادن این موضوع پروفیل دما در گره‌های نزدیک دیوار گرم در شکل ۱۸ رسم شده

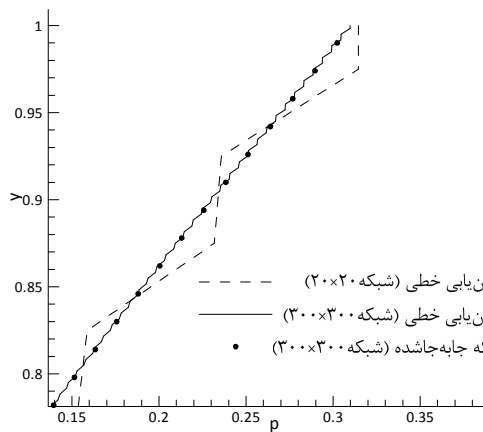
است که در همه روش‌ها تقریباً بر هم منطبق هستند. در شکل ۱۹ پروفیل دما روی خط عمودی وسط رسم شده است. از شکل ۱۷ و شکل ۱۹ می‌توان نتیجه گرفت که نوسانات میدان فشار و سرعت، باعث ایجاد نوسان در میدان دما نشده و میدان دما هموار به دست آمده است.



شکل ۱۹- پروفیل دما روی خط عمودی وسط



شکل ۱۷- پروفیل دما روی خط افقی وسط



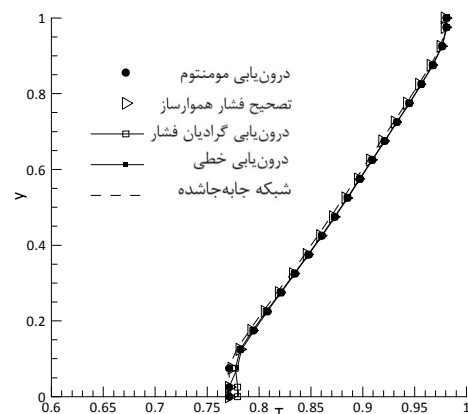
شکل ۲۰- تأثیر افزایش شبکه بر نوسانات فشار در درون‌یابی خطی

### ۳-۶- مقایسه سرعت همگرایی

در جدول ۲ زمان‌های همگرایی و تعداد تکرار روش‌های درون‌یابی مومنتوم، درون‌یابی گرادیان فشار و تصحیح فشار هموارساز در شبکه هم‌مکان و همچنین در شبکه جابه‌جا شده برای مقایسه در تعداد شبکه‌های مختلف آورده شده است.

روش شبکه جابه‌جاشده بیشترین تعداد تکرار و زمان همگرایی را دارد. پس از آن به ترتیب درون‌یابی مومنتوم، درون‌یابی گرادیان فشار و در نهایت تصحیح فشار هموارساز کمترین زمان همگرایی را دارا هستند.

گفتنی است که در جدول ۲ زمان‌ها و تعداد تکرار در شرایط یکسان برای روش‌های مختلف به دست آمده است. منظور از شرایط یکسان این است که در کدهای اجرا شده تنها تفاوت، خود روش‌ها می‌باشند و موارد تأثیرگذار در زمان همگرایی و تعداد تکرار مانند ضرایب زیر تخفیف یکسان هستند.



شکل ۱۸- پروفیل دما در نزدیک دیوار گرم

### ۲-۶- تأثیر افزایش نقاط شبکه

با افزایش تعداد نقاط شبکه در نتایج حاصل تغییری به وجود نمی‌آید. به عنوان مثال با ریز کردن شبکه در روش درون‌یابی خطی نوسانات فشار حذف خواهد شد و فقط بازه نوسانات کمتر می‌شود. این مسأله در شکل ۲۰ نشان داده شده است. در واقع تعداد نقاط شبکه در مقایسه روش‌ها تأثیری نداشته است.

جدول ۳- زمان همگرایی و تعداد تکرار

شبهه	شبهه	شبهه	تعداد شبکه	
			روند همگرایی	
شبهه ۱۳۰×۱۳۰	شبهه ۹۰×۹۰	شبهه ۵۰×۵۰	زمان همگرایی (s)	درون یابی
۲۳۰,۳۹	۵۹,۸۵	۸,۳۷	تعداد تکرار	مومنوم
۵۰,۶۷	۲۹,۰۲	۱۳۲۰	زمان همگرایی (s)	تصحیح
۱۳۰,۲۹	۳۷,۵۰	۴,۷۹	تعداد تکرار	فشار هموار
۳۵۳۷	۲۲۳۸	۹۱۵	زمان همگرایی (s)	ساز
۱۹۰,۶۹	۴۹,۸۵	۶,۹۴	تعداد تکرار	درون یابی
۴۶,۰۳	۲۶۸۴	۱۱۹۲	زمان همگرایی (s)	گرادیان
۲۷۸,۷۸	۶۸,۴۴	۹,۹۸	تعداد تکرار	فشار
۷۸۴۷	۴۳۵۵	۲۰۶۴	زمان همگرایی (s)	شبکه
			تعداد تکرار	جابه جاشده

### ۷- نتیجه گیری

نتایج به دست آمده در این مطالعه به طور خلاصه به شرح زیر است:

۱- نوسانات میدان فشار باعث به دست آمدن نتایج غیر فیزیکی در میدان سرعت شده است.

۲- روش های درون یابی مومنوم و تصحیح فشار هموارساز با وجود نتایج نزدیک به شبکه جابه جاشده در پروفیل فشار، نتایج آن ها برای مولفه عمودی سرعت در نزدیک دیوار بالایی متفاوت از شبکه جابه جاشده می باشد.

۳- روش درون یابی گرادیان فشار فقط بازه نوسانات میدان فشار و سرعت را کاهش داده و آن ها را از بین نبرده است. البته باوجود نوسانات، نتایج میدان سرعت در این روش نسبت به روش های درون یابی مومنوم و تصحیح فشار هموارساز به شبکه جابه جاشده نزدیکتر می باشد.

۴- نوسانات فشار و سرعت بر روی میدان دما تأثیر گذار نبوده و پروفیل های دما هم خوانی خوبی با شبکه جابه جاشده دارد.

۵- عدد ناسلت متوسط در روش های مختلف حل در شبکه هم مکان یکسان به دست آمده و تفاوت آن با شبکه جابه جاشده بسیار اندک است.

۶- روش شبکه جابه جاشده و روش تصحیح فشار هموارساز به ترتیب بیشترین و کمترین تعداد دفعات تکرار و زمان همگرایی را دارا هستند.

۷- با افزایش تعداد نقاط شبکه میزان اختلاف روش های شبکه هم مکان کاهش یافته و هم خوانی بیشتری با شبکه جابه جاشده مشاهده می شود.

۸- با توجه به نتایج به دست آمده در مسأله حاضر نتایج روش شبکه جابه جاشده از حل در شبکه هم مکان دقیق تر بوده است.

### فهرست علائم

ضریب گره مرکزی	$a_{pu}$
ضریب گره های همسایه	$a_{nb}$
نقاط گرهی	$P, E, W, N, S$
سطوح سلول	$e, w, n, s$
مولفه های سرعت (بدون بعد)	$U, V$
لزجت دینامیکی ( $N \cdot s / m^2$ )	$\mu$
چگالی ( $kg / m^3$ )	$\rho$
شتاب گرانش ( $m / s^2$ )	$g$
رسانندگی گرمایی ( $W / m \cdot K$ )	$k$
ظرفیت گرمایی ویژه ( $kJ / kg \cdot K$ )	$c_p$
دمای دیوار گرم ( $K$ )	$T_h$
دمای دیوار سرد ( $K$ )	$T_c$
عدد پرانتل	$pr$
حجم سلول (بدون بعد)	$\Delta V$
ضریب زیر تخفیف	$\alpha$
ضریب انبساط حجمی	$\beta$
ضریب وزنی	$h_e$
عدد گراش	$Gr$
عبارت چشمه معادله مومنوم $U$	$Sc_u$
سرعت روی سطح $e$	$U_{fe}$
فاصله افقی گره مرکزی و سمت راست	$\delta x_e$
ابعاد حجم کنترل	$\Delta x_p, \Delta y_p$

### مراجع

- [1] Rhie C. M., Chow W. L., "Numerical Study of Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", AIAA, vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- [2] Majumdar S., "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids", Numerical Heat Transfer, vol. 13, Part B, pp. 125-132, 1988.
- [3] Miller T. F., Schmidt F. W., "Use of Pressure-Weighted Interpolation Method for The Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid", Numerical Heat Transfer, vol. 14, pp. 213-233, 1988.
- [4] Pereira J. C. F., Kobayashi M. H., "Numerical comparison of momentum interpolation methods and pressure-velocity algorithms using non-staggered grids", Numerical Methods in Biomedical

- Engineering, vol. 7, pp. 173-186, 1991.
- [5] Date A. W., "Solution of Navier-Stokes equations on non-staggered grid", Heat Mass Transfer, vol. 36, pp. 1913-1922, 1993.
- [6] Choi S. K., "Note on the Use of Momentum Interpolation Method for Unsteady Flows", Numerical Heat Transfer, vol. 36, Part A, pp. 545-550, 1999.
- [7] Papageorgakopoulos J., Arampatzis G., Assimacopoulos D., Markatos N. C. J., "Enhancement of the momentum interpolation method on non-staggered grids", International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 33, pp.1-22, 2000.
- [8] Yu B., Tao W., Wei J., "Discussion on Momentum Interpolation Method for Collocated Grids of Incompressible Flow", Numerical Heat Transfer, vol. 42, Part B, pp. 141-166, 2002.
- [9] Date A. W., "Complete Pressure Algorithm For Solution of Incompressible Navier-Stokes Equation on a Nonstaggered Grid", Numerical Heat Transfer, vol. 29, Part B, pp. 441-458, 1996.
- [10] Date A. W., "Fluid Dynamical View of Pressure Checkerboarding Problem and Smoothing Pressure Correction on Meshes with Colocated Variables", Heat and Mass Transfer, vol. 46, pp. 4885-4898, 2003.
- [11] Saeedi M., Oskuie S. N., "Laminar Natural Convection Heat Transfer in Different Tilt Angles and Aspect Ratios Using Staggered and Collocated Approaches", World Applied Sciences Journal, vol. 17, PP 882-890, 2012.
- [12] Davis D. V., "Natural Convection in Air in Square Cavity :A Benchmark Numerical Solution", Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [13] Mezrhab A., Bouali H., Amaoui H., Bouzidi M., "Computation of Combined Natural Convection and Radiation Heat Transfer in a Cavity Having a Square Body at Its Center", Applied Energy, vol. 83, pp. 1004-1023, 2006.
- [14] Versteeg H. K., Malalaskera W., "An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method", Harlow, England: Longman Scientific & Technical, 1995.