

تحلیل عددی شتاب لحظه‌ای کره درون سیال تراکم‌ناپذیر با جرم افزوده در جریان‌های پایا و ناپایا

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

سید اسماعیل رضوی

دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه آتاترک

فراز افشاری*

چکیده

در این پژوهش معادلات ناویر-استوکس برای تحلیل حرکت شتابدار کره صلب داخل سیال تراکم‌ناپذیر به کار رفته‌اند. ایده حرکت شتاب لحظه‌ای کره برای اولین بار مطرح شده است. تکانش در یک لحظه کوچک به وجود آمده و سرعت قبل و بعد از تکانش ثابت در نظر گرفته می‌شود. جریان آرام و ناپایا در رینولدزهای مختلف حل شده است. در یک لحظه عدد رینولدز از یک مقدار ثابت تغییر پیدا کرده و موجب تغییرات اساسی پسا می‌شود. برای حل سایر حرکت‌های شتابدار (مانند حرکت نوسانی) نوع مدل دیگر (مانند زیردریایی‌های کره مانند) این روش قابل اعمال می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: شتاب لحظه‌ای، تطبیق شبکه، معادلات ناویر-استوکس، جریان آرام، جرم افزوده، ضریب پسا، جریان ناپایا، جریان متقارن محوری

Investigation of Sphere Acceleration in Viscous Flow with Added Mass at Steady-Unsteady Cases

S. E. Razavi

Associate Professor, School of Mechanical Engineering, University of Tabriz

F. Afshari

PhD. Student, Ataturk University

Abstract

In this study, accelerating motion of a sphere in incompressible fluid has been investigated by the Navier-Stokes equations. The motion is set in a small time interval, having the constant velocities out of it. The laminar and unsteady flow has been solved in various Reynolds numbers. In a short moment the Reynolds number is risen which cause large variations in the drag force. This method is applicable to other accelerating motions such as oscillation and also spherical submarines.

Keywords: Acceleration, Adaptive grid, Navier-Stokes equations, Laminar flow, Added mass, Drag coefficient.

۱- مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریان اطراف کره صلب با شتاب لحظه‌ای (افزایش یا کاهش) در سرعت‌های مختلف توسط بلاکندر و وکوبا بررسی شده است. جرم افزوده کاملاً مستقل بوده و ربطی به شتاب و حالت جریان قبل از شتاب‌گیری ندارد. نتایج آزمایشات در بازه‌های زمانی مختلف بر روی جریان به دست آمده و تحلیل شده است [۱]. در مورد کره شتابدار Odar (۱۹۶۶) معادله‌ای پیشنهاد داد که برای محاسبه نیروهای وارد بر کره شتابدار در سیال لزج می‌باشد [۲]. او با مقایسه سرعت کره سقوط کننده بر اثر گرانش داخل سیال، معادلات دقیقی به دست آورد. در مواردی که ذره تحت تاثیر جریان محدود ناپایا می‌باشد نیروی هیدرودینامیک به عنوان پسای جریان همراه با ایجاد گردابه و چرخش‌های منجر به برا، گردایان فشار و جرم افزوده مطرح می‌شود. تاثیر جرم افزوده روی کره شتابدار کاملاً روشن شده است و این هم برای جریانهای لزج و هم استوکس صادق می‌باشد. محاسبات شامل میدان جریان اطراف کره بوده و اندازه‌ی دقیق جرم افزوده برای کره تقریباً برابر ۰/۵ محاسبه شده است. شبکه بندی فشرده و محاسبات دقیق روی سطح کره بوده و در میدانهای دور از آن صفر گرفته شده است. ابتدا مقادیر عددی بر اساس وجود جریان پایا و یکنواخت در سطح کره و برابر صفر در خارج از میدان می‌باشد. در یک لحظه شتابی به کره وارد می‌شود، و بعد از این بازه زمانی دومرتبه سرعت ثابت باقی خواهد ماند [۳ و ۴]. همچنین ادر (۱۹۶۶) برای حرکت شتابدار کره با روش تجربی و در اعداد رینولدز کم رابطه نظری پیشنهاد و ضرابی به دست آورد [۵ و ۶]. Balachandar و Bagchi تاثیر جریان غیر یکنواخت روی نیروها در جریان اطراف کره صلب در رینولدزهای ۱۰ تا ۳۰۰ را بررسی کردند. شبیه‌سازی عددی (DNS) برای حل جریان غیر یکنواخت سه بعدی در اطراف کره ساکن و متحرک استفاده شد [۷]. Chang شبیه‌سازی عددی مستقیم بر اساس روش طیفی برای محاسبات و معادلات موجود در متغیر زمان، و جریان متقارن محوری اطراف کره صلب را آزمایش کرد [۸]. همچنین جریان شتابدار نوسانی و لحظه‌ای را در محدوده اعداد رینولدز کم تا متوسط حول کره بررسی کرد و نشان داد که در جریان شتابدار متناظر با رینولدزهای نزدیک به ۲۰ جریان گردابه‌ای پشت کره به وجود می‌آید که در حالت پایا این اتفاق نمی‌افتد. Mei و همکاران با روش حل عددی جریان نوسانی دامنه کوچک حول کره را بررسی کردند. آنها ضریب جرم افزوده را معادل همان مقدار پیش بینی شده یعنی ۰/۵ به دست آوردند [۹]. Mohammed در سال ۲۰۰۶ تحقیقات زیادی درباره نحوه تعیین نیروی هیدرودینامیکی بین اجسام کروی در سیال تراکم

ناپذیر انجام داد. او همچنین نیروی هیدرودینامیکی بین ذرات کروی را که در امتداد یک خط بصورت افقی یا قائم قرار گرفته‌اند بدست آورد [۱۰]. Lovalenti و Brady نیروی هیدرودینامیکی وارد بر کره صلب متحرک با حرکت غیر منظم را در طول زمان با جریان سیال وابسته به زمان در اعداد رینولدز کوچک محاسبه کردند. Lovalenti و Brady نشان دادند که مدل جریان ناپایای استوکس روند کندتری را برای رسیدن به جریان پایا پس از یک شتاب لحظه‌ای نشان می‌دهد [۴].

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر این پدیده معادلات ناویر-استوکس می‌باشند که عبارتند از:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) / 2 = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2)$$

با فرض جریان خزشی در اعداد رینولدز کوچک ($\text{Re} \ll 1$) و

با توجه به قانون استوکس می‌توان رابطه $C_D = \frac{24}{\text{Re}}$ و

با $F_D = 3\pi\mu v D$ را به کار برد. روش محاسبه ضریب پسا با معادله استوکس در کلیه مقادیر رینولدز امکان پذیر نخواهد بود. مقدار کل نیروی وارد بر کره $\sum F_i$ بوده و مانند زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum F_i = \frac{1}{2} C_D u^2 \rho A \quad (3)$$

در این معادله C_D ضریب پسا، u سرعت در امتداد محور x ، ρ چگالی سیال و A تصویر سطح جسم بر روی صفحه عمود بر مسیر جریان می‌باشد. در هنگام حرکت شتابدار علاوه بر مهم بودن جرم جسم، جرم سیال شتاب گیرنده نیز موثر است.

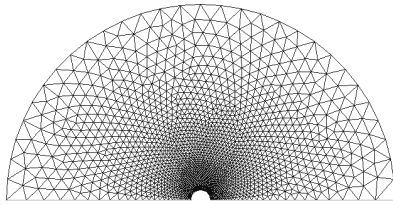
$$\sum F_i = (C_{VM} M') a_x \quad (4)$$

$M' = \rho_f V_s$ ضریب جرم افزوده، M' جرم افزوده، V_s حجم جسم مورد نظر و $\sum F_i$ برابند نیروهای وارد بر جسم در امتداد شتاب که همان محور x هاست. هنگامی که هر دو گزینه سیال و جسم نسبت به همدیگر دارای حرکت باشند برای حل مساله ابتدا سرعت نسبی محاسبه خواهد شد:

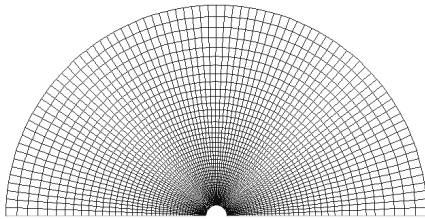
$$u_r^* = (U^* - V^*) \quad (5)$$

این رابطه نشان‌دهنده اختلاف سرعت بین سیال و جسم مورد نظر است که مقدار سرعت نسبی را برآورده می‌کند، در نتیجه عدد رینولدز به شکل زیر محاسبه می‌شود:

سرعت‌ها با برون‌یابی فشار اعمال می‌شود. در مرز دور شرایط جریان آزاد منظور شده است.



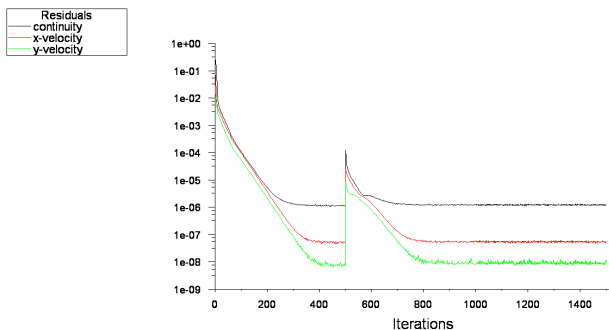
شکل ۱- شبکه بندی مثلثی



شکل ۲- شبکه بندی با سلولهای چهارضلعی

۴- نتایج عددی

با انتخاب دقت مناسب و تکرار حل معادلات نتایج مناسبه دست آمده‌اند. برای رینولدز ۵۰ در حل جریان پایا، بعد از ۱۰۰۰ تکرار مساله به همگرایی می‌رسد (شکل ۳). برای گرفتن نتایج در مرحله جریان ناپایا Δt زمان اعمال شتاب وارد مسئله شده و ضریب جرم افزوده از ΔC_D در گستره‌ای از شتاب‌ها محاسبه می‌شود. مثبت یا منفی بودن A_C نشان دهنده مثبت یا منفی بودن سرعت می‌باشد. قبل از شروع شتابگیری رینولدز برابر ۵۰ گرفته می‌شود و در بازه $\Delta t = 0.0025$ عدد رینولدز افزایش یافته و به ۶۲/۵ می‌رسد (شکل ۴).



شکل ۳- تاریخچه‌ی همگرایی

$$Re = \left| u_r^* \right| D / \nu \quad (6)$$

کل نیروی هیدرودینامیکی وارد بر جسم و ضریب پسا از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_f \left| u_r^* \right|^2 \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2} \quad (7)$$

$$F = \int_s (-p e_r + \tau_{r\theta} e_\theta) dS$$

با استفاده از معادله (۸) ضریب جرم افزوده مانند زیر محاسبه می‌شود [۱]:

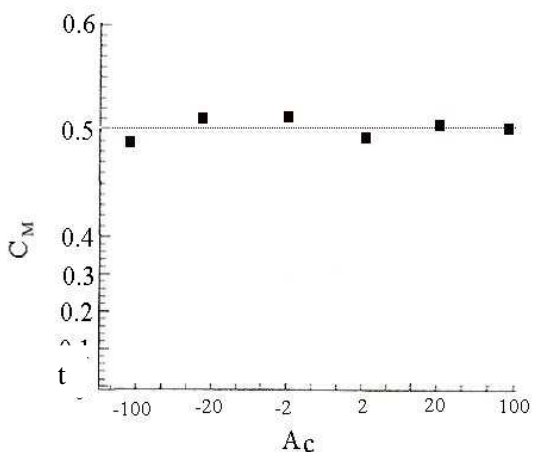
$$C_M = \frac{3}{4} \frac{\Delta C_D}{A_C}, A_C = \frac{Re_2 - Re_1}{Re_1 \Delta t} \quad (8)$$

که در آن Re_1 و Re_2 به ترتیب مربوط به سرعت‌های اولیه و ثانویه می‌باشد و Δt بازه زمانی بی بعد می‌باشد.

۳- تولید شبکه و شرایط مرزی

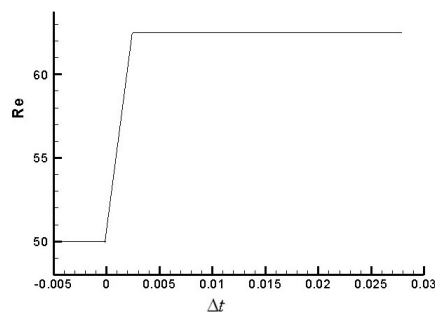
مسأله به صورت دو بعدی در جهت X-Y حل شده است، تعداد شبکه‌های سطح جسم مورد نظر، تراکم آنها و شکل سلول‌ها از مهمترین پارامترهای مورد بررسی در شبکه بندی می‌باشد. نتایج حاصل برای اطمینان از صحت مدلسازی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردیده است. با سلولهای چهارضلعی و تراکم شبکه در اطراف دیوارهای صلب، با توجه به حرکت جریان اطراف دیواره نتایج عددی به دست آمده است. (حداقل قطر نیم دایره برای شبکه بندی برابر با $D.x = \pm 50$ می‌باشد). در این مرحله کره داخل سیال که به عنوان دیوار صلب در نظر گرفته شده است، در مرکز شرایط شبیه سازی شده قرار گرفته است شکل ۱ این هندسه را نشان می‌دهد. در شکل‌های ۲ و ۱ چند نمونه از شبکه‌بندی‌ها برای مقایسه ارائه شده است (برای رسیدن به نتایج دقیق شبکه‌بندی‌های مختلفی آزمایش شده است مانند مثلثی و چهارضلعی 20×40 ، 30×60 ، 40×80 و 80×160 که مورد آخر در محاسبات استفاده شده است و به علت وجود گرادیان فشار در اطراف کره شبکه بندی در آن قسمت فشرده‌تر در نظر گرفته شده است). در روش اول هر شبکه، در چندین رینولدز مختلف حل شده است و با افزایش شبکه به بیش از 80×160 همگرایی در جوابها مشاهده می‌شود. در روش دوم هر شبکه یک مرتبه و در رینولدز ثابت و مشترکی حل می‌شود (عدد رینولدز برابر ۵۰ گرفته شده است). با نمودار فشارهای استاتیک هر شبکه مشاهده می‌شود با افزایش سلولها منحنی‌های بر یکدیگر منطبق خواهد بود. شرایط مرزی جامد و دور روی سطح کره شرط عدم لغزش

مقایسه‌ای از تغییرات ضریب پسا را بر حسب زمان ارائه می‌دهد. در شکل ۶ این مقدار ۱۰۰- در نظر گرفته شده است. قبل از مرحله شتاب لحظه‌ای و در رینولدز ۵۰، گردابه‌های پشت کره به صورت متقارن بوده و چسبیده به کره‌اند، در لحظه شتاب لحظه‌ای در بازه‌های زمانی بسیار کوچک مساله مورد آزمایش قرار گرفته و برای مقایسه در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در آغاز شتاب لحظه‌ای ابتدا گردابه‌ها کوچک شده و با گذشت زمان از کره دور شده و در نهایت از بین می‌روند. ضرایب جرم افزوده در چندین آزمایش مختلف محاسبه شده‌اند که جدول ۱ و شکل ۷ آنها را نشان می‌دهد. A_C های مختلف نشان دهنده چگونگی تغییر عدد رینولدز است که بر اساس تغییر سرعت و شتاب لحظه‌ای می‌باشد.



شکل ۷- ضریب جرم افزوده‌های تحقیق و مقایسه آن با مرجع که عدد ۰٫۵ می‌باشد. [۱]

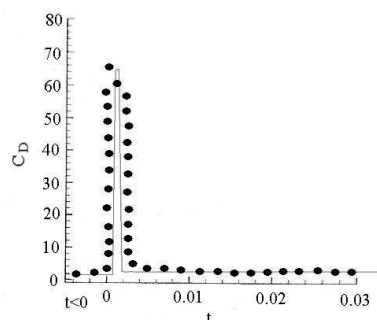
طبق قانون کلی پیوستگی افزایش جرم در حجم کنترل برابر با ورود جرم خالص به حجم کنترل است [۵ و ۱۱] و نتیجه مهم این که ضریب جرم افزوده در کلیه آزمایشات به عدد $C_M=0.5$ میل می‌کند. جدول ۲ نشان دهنده ثابت شدن ضریب پسا بعد از گذر از مرحله شتاب لحظه‌ای می‌باشد. همانطور که در نمودارهای ضریب پسا در شتاب لحظه‌ای مشاهده شد، در بازه زمانی Δt_{rest} ضریب پسا به پایداری دوم می‌رسد و مقدار ثابتی خواهد داشت.



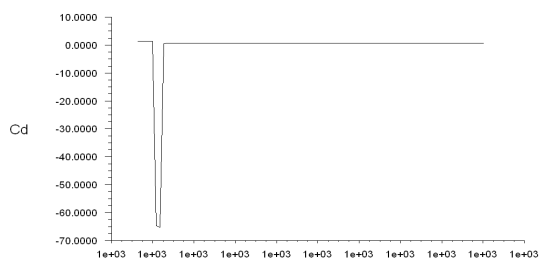
شکل ۴- افزایش عدد رینولدز از ۵۰ به ۶۲٫۵ در $\Delta t = 0.0025$

قبل و بعد از مرحله شتاب‌گیری $A_C=0$ و تنها در بازه زمانی شتاب‌گیری تغییر می‌کند.

در شکل ۵ و ۶ نمودار تغییر ضریب پسا برای دو شتاب لحظه‌ای مختلف ارائه شده است که نشان دهنده پرش ناگهانی ضریب در لحظه آغاز شتاب می‌باشد. در شکل ۵ مقدار A_C مثبت و برابر ۱۰۰ گرفته شده است همچنین



شکل ۵ - مقایسه تغییر ضریب پسا در لحظه آغاز شتاب در $A_C=100$ با مرجع [۱]



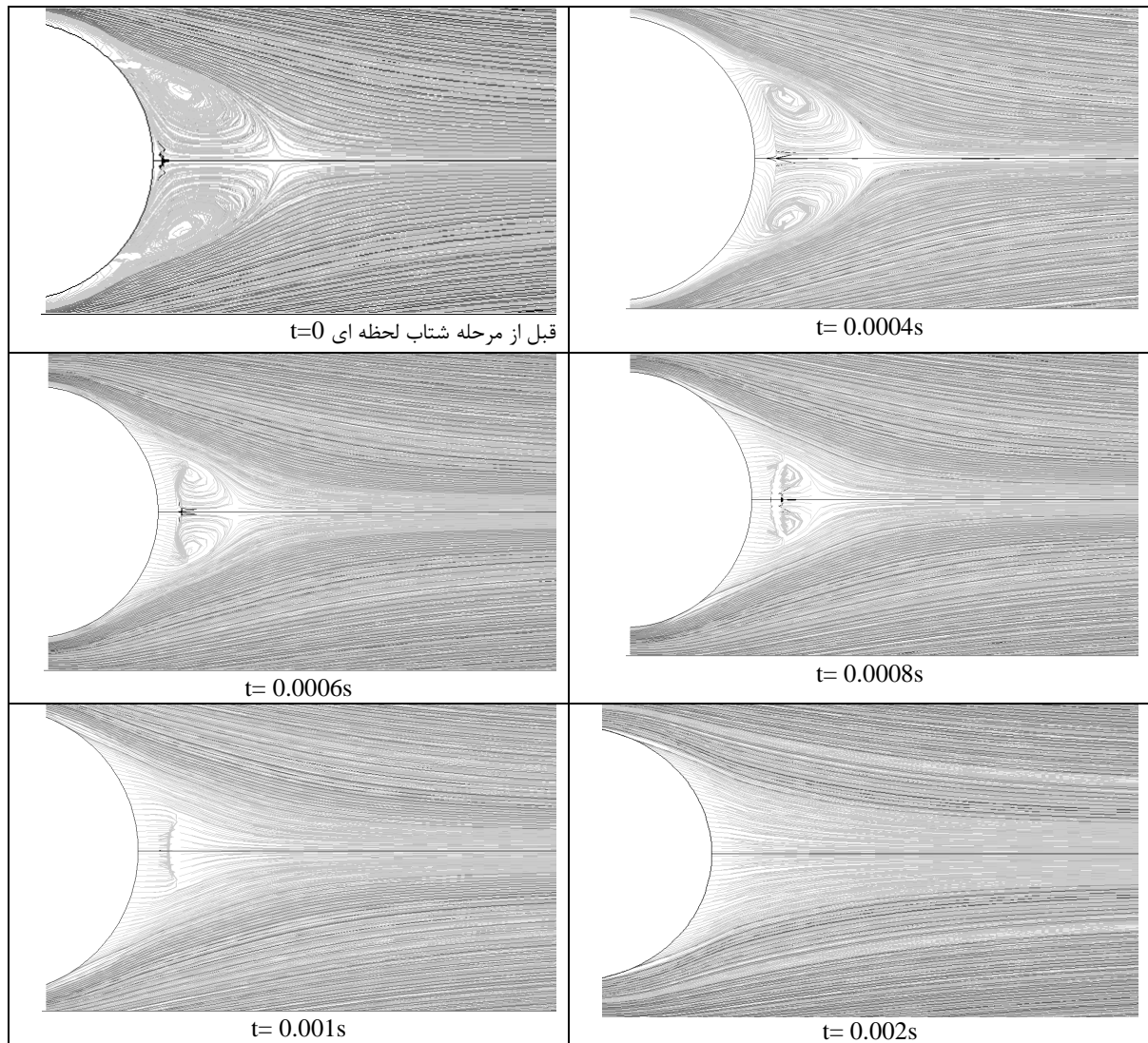
شکل ۶ - نمودار تغییر ضریب پسا در لحظه آغاز شتاب در $A_C=-100$ و ضریب جرم افزوده $C_M=0.499$

جدول ۱- نتایج جرم افزوده با مقادیر A_C در حل مسائل

A_C	$A_C = -20$	$A_C = 2$	$A_C = 20$	$A_C = 100$
C_M	$C_M = 0.5015$	$C_M = 0.490$	$C_M = 0.5011$	$C_M = 0.499$

جدول ۲- نتایج زمان ثابت شدن ضریب پسا پس از شتاب لحظه‌ای برحسب A_C

A_C	$A_C = -20$	$A_C = 2$	$A_C = 20$	$A_C = 100$
Δt_{rest}	$\Delta t_{rest} = 0.0027$	$\Delta t_{rest} = 0.0018$	$\Delta t_{rest} = 0.0036$	$\Delta t_{rest} = 0.0027$



شکل ۸- کانتورهای خطوط جریان در شتاب لحظه‌ای در بازه زمانی بسیار کوچک

۵- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر نشان داده شد که مقدار ضریب پسا در شتاب لحظه‌ای به صورت یک پرش ناگهانی در نمودار دیده می‌شود و با شروع شتاب لحظه‌ای گردابه‌های پشت کره به مرور از کره فاصله گرفته و در نهایت به شکل افقی درمی‌آیند.

نتایج بررسی‌ها در مورد شتاب لحظه‌ای کره، نتایج تجربی را تصدیق می‌کند و مقدار جرم افزوده در تمامی آزمایشات مقدار ثابتی می‌باشد. در شتاب‌های منفی مشاهده می‌شود که پرش ناگهانی ضریب پسا به سمت پایین بوده و در یک لحظه در ضرایب پسا کاهش شدیدی مشاهده می‌شود. در کلیه

Flows at Moderate Reynolds Number", Journal of Fluid Mechanics, vol. 481, pp.105-148, 2003.

[8] Euge. J. Chang., Martin R. Maxey, "Unsteady Flow About a Sphere at Low to Moderate Reynolds Number", Journal of Fluid Mechanics, vol. 303, pp.133-153, 1995.

[9] Renwei. Mei., Christopher. Lawrence, Ronald J. Adrian, "Unsteady Drag on a Sphere at Finite Reynolds Number with Small Fluctuations in the Free Stream Velocity", Journal of Fluid Mechanics, vol. 233, pp.613-631, 1991.

[10] Mohammed. S. A. M., "Hydrodynamic Interaction between Two Spheres", PhD. Thesis, Dept. of Chem. Eng., College of Engineering; University of Baghdad, 2006.

آزمایشات ضریب جرم افزوده تقریباً برابر ۰٫۵ به دست می‌آید و وابسته به مقدار عدد رینولدز و شتاب لحظه‌ای و شرایط خاص مساله نمی‌باشد. بردارهای سرعت و خطوط جریان برای جریان پایا اطراف کره و جریان ناپایا در لحظات مختلف به دست آمده‌اند. نشان داده شده است که ضریب پسا بعد از گذر از مرحله شتاب لحظه‌ای عدد ثابتی می‌شود.

نمادها

سطح مقطع	A
شتاب	a
ضریب جرم افزوده	C_M
ضریب پسا	C_d
قطر کره	D
نیرو	F
فشار	P
عدد رینولدز	Re
زمان	t
سرعت نسبی	$ u^* $
مولفه‌های سرعت و اندازه	V, v, u, w
سرعت	
مختصات مکانی	X, y
چگالی	ρ

مراجع

[1] Wakaba, L., Balachandar, S., "On the Added Mass Force at Finite Reynolds and Acceleration Number", Theoretical and Computational Fluid Dynamics, vol. 21, pp. 147-153, 2007.

[2] Hamilton, W.S., Odar, F., "Force on a Sphere Accelerating in a Viscous Fluid", Journal. Fluid Mech. vol. 18, pp. 302-314, 1964.

[3] Barkla, H. M., Auchterlonie, L.J., "The Magnus Effect on Rotating Spheres", J. Fluid Mech., vol. 47, p. 3, 1971.

[4] Phillip, M., Lovalenti, John., Brady, F., "The Hydrodynamic Force on a Rigid Particle Undergoing Arbitrary Time-Dependent Motion at Small Reynolds Number", Journal of Fluid Mechanics, vol. 256, pp.561-605, 1993.

[5] White. F. M., "Viscous Fluid Flow", Mc. Graw-Hill, New York, 1991.

[6] Fuat. Odar., "Calculation of the Force on a Sphere Accelerating in a Viscous Fluid", Journal of Fluid Mechanics, vol. 25, Issue 3, pp.591-592, 1996.

[7] Bagchi. F., Balachandar. S., "Inertial and Viscous Forces on a Rigid Sphere in Straining