

# تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر متخلخل هدفمند یک‌سرگیردار معلق و ایستاده در مقیاس نانو با بهره‌گیری از نظریه عمومی غیرمحلی

لیا آقایی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

شیرکو فاروقی\*

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

اسعد غفوری

مربی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد واحد سنندج، سنندج، ایران

## چکیده

این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای یک‌سرگیردار معلق و ایستاده هدفمند متخلخل (FGM) در مقیاس نانو با بهره‌گیری از نظریه عمومی غیرمحلی و مدل تیر تیموشنکو می‌پردازد. هدف اصلی، تحلیل اثر پارامترهای غیرمحلی، میزان تخلخل و نیروی وزن بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی در دو حالت تیر معلق و ایستاده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج و به کمک روش هم‌مکانی چبیشف حل گردیده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهد که افزایش پارامتر غیرمحلی و تخلخل، به دلیل کاهش سفتی مؤثر، موجب کاهش فرکانس‌های بالایی می‌شود؛ با این حال در برخی شرایط، این عوامل می‌توانند افزایشی در فرکانس ایجاد کنند. همچنین، تیر با شرایط مرزی ایستاده فرکانس‌های بالاتری نسبت به حالت معلق از خود نشان می‌دهد. تأثیر نیروی وزن نیز از طریق کاهش سفتی محوری، منجر به افت فرکانس طبیعی می‌گردد. مقایسه نتایج با مطالعات پیشین، تطابق و دقت قابل قبولی را نشان می‌دهد. دستاوردهای این تحقیق می‌تواند در طراحی و بهینه‌سازی حسگرهای نانومقیاس، رزوناتورهای دقیق، فیلترهای فرکانس بالا و همچنین در کاربردهای زیست‌پزشکی و تولید انرژی مانند ایمپلنت‌های زیستی و ژنراتورهای پیزوالکتریک مورد استفاده قرار گیرد. **واژه‌های کلیدی:** ارتعاشات آزاد، تیر یک‌سرگیردار، نظریه غیرمحلی، مواد تابعی، روش چبیشف، تخلخل

## " Analysis and investigation of the free vibration of a clamped-free functionally graded porous nanobeam in suspended and standing configurations based on the general nonlocal theory "

Laya Aqaei

Master's Student, Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Shirko Faroughi\*

Professor, Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Asad Ghafari

Department of Mechanical Engineering, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran

## Abstract

This study investigates the free vibration behavior of clamped-free functionally graded porous (FGM) nanobeams in suspended and standing based on the general nonlocal elasticity theory and the Timoshenko beam model. The main objective is to explore the effects of the nonlocal parameter, porosity, and self-weight on the natural frequencies and mode shapes of both suspended and standing beams. The governing equations are derived using Hamilton's principle and solved through the Chebyshev collocation method. Numerical results reveal that increasing the nonlocal parameter and porosity generally decreases the natural frequencies due to the reduction in effective stiffness; however, in certain cases, a slight frequency increase is observed. Moreover, the standing beam exhibits higher frequencies compared to the suspended one. The self-weight, by reducing the axial stiffness, leads to a further decrease in the frequencies. Validation through comparison with previously published results demonstrates good agreement and accuracy. The outcomes of this research provide useful insights for the design and optimization of nano- and micro-electromechanical systems (NEMS/MEMS) such as nanosensors, high-frequency resonators, and filters, as well as for biomedical and energy-harvesting applications, including bio-implants and piezoelectric nanogenerators.

**Keywords:** Free Vibration, Cantilever Beam, Nonlocal Theory, Functionally Graded Material, Chebyshev Method, Porosity.

لایه‌ها در کامپوزیت‌های سنتی را کاهش داده و در کاربردهایی نظیر حسگرهای نانوالکترومکانیکی (NEMS)، محرک‌های دقیق در تجهیزات پزشکی، و قطعات سبک‌وزن در صنایع هوافضا و خودروسازی استفاده می‌شوند [۳، ۴، ۲۶]. تیرهای متخلخل هدفمند، که خواص مکانیکی آن‌ها به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند، تحت بارهای دینامیکی رفتار بی‌پایه‌ای از خود نشان می‌دهند [۵، ۶، ۲۷]. این پیچیدگی ناشی از

## ۱- مقدمه

مواد هدفمند متخلخل (FGM) به دلیل خواص مکانیکی قابل تنظیم و نسبت بالای مقاومت به وزن، جایگاه ویژه‌ای در طراحی سازه‌های پیشرفته در مقیاس میکرو و نانو یافته‌اند [۱، ۲، ۲۵]. این مواد با توزیع پیوسته خواص از فلز به سرامیک، مشکلات جدایش

اثرات مقیاس کوچک، تخلخل ماده، و شرایط مرزی خاص (مانند حالت‌های معلق یا ایستاده) است که تحلیل دقیق ارتعاشات آزاد آن‌ها را به چالشی مهم تبدیل کرده است [۷، ۸، ۲۸].

تحلیل ارتعاشات تیرها از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بوده است. مدل‌های کلاسیک اویلر-برنولی و تیموشنکو برای توصیف رفتار دینامیکی تیرهای همگن در مقیاس ماکرو توسعه یافتند [۹، ۱۰]. ابرموویچ [۹] ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تحت بار گرانشی را با مدل اویلر-برنولی بررسی کرد و نشان داد که نیروی وزن سفتی محوری را کاهش می‌دهد. وانگ و همکاران [۱۰] با مدل تیموشنکو، اثرات برشی و چرخشی را در تیرهای ماکرو مدل‌سازی کردند، اما این مدل‌ها برای نانومقیاس، که اثرات مقیاس کوچک غالب است، ناکافی هستند [۲، ۲۸]. نظریه‌های غیرمحلّی ارینگن با معرفی پارامترهای غیرمحلّی، تعاملات بین‌ذره‌ای در مقیاس نانو را مدل‌سازی می‌کنند [۱۱، ۱۲]. عطیقه و همکاران [۱۱] ارتعاشات ورق‌های نانوکامپوزیتی را با نظریه غیرمحلّی تحلیل کردند و کاهش فرکانس‌ها را با افزایش ضریب غیرمحلّی گزارش دادند. با این حال، مدل‌های غیرمحلّی ساده در توصیف مواد متخلخل هدفمند با توزیع غیر یکنواخت خواص و تخلخل محدودیت‌هایی دارند [۱۳، ۲۷].

نظریه غیرمحلّی عمومی [۱۴] با تعریف ثابت‌های غیرمحلّی، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر اثرات مقیاس کوچک و تخلخل را فراهم می‌کند. شعاع و عبدل‌کفی [۱۴] نشان دادند که این نظریه سفتی و جرم مؤثر را در نانو‌سازه‌ها با دقت بیشتری پیش‌بینی می‌کند. حسینی و همکاران [۵] با اعمال این نظریه به تیرهای نانومقیاس FGM، اثر تخلخل را بر کاهش سفتی و فرکانس‌ها بررسی کردند. صبحه [۷] و صالحی‌پور و همکاران [۸] ارتعاشات نانوپلاکت‌های FGM را با نظریه غیرمحلّی تحلیل کردند و تأثیر شرایط مرزی و بستر الاستیک را بر فرکانس‌ها نشان دادند. لیو و همکاران [۱۲] نیز با مدل غیرمحلّی، ارتعاشات نانوپلاکت‌های دو لایه FGM را بررسی کردند و اثر ویسکوالاستیسیته را گزارش دادند. چن و همکاران [۱۵] ارتعاشات تیرهای تیموشنکو FGM را بررسی کردند و نتایج آن‌ها برای اعتبارسنجی مدل‌های غیرمحلّی استفاده شده است. به‌طور مشابه، هادجی [۲۷] ارتعاشات آزاد نانوتیرهای متخلخل هدفمند را با نظریه غیرمحلّی تحلیل کرد و کاهش فرکانس‌های طبیعی را با افزایش تخلخل و ضریب غیرمحلّی تأیید نمود. کاربردهای صنعتی تیرهای متخلخل هدفمند، از جمله حسگرهای زیستی برای تشخیص مولکول‌ها، فیلترهای نانویی در صنایع شیمیایی، و اجزای مقاوم در برابر ارتعاش در توربین‌های هوافضا، نیاز به مدل‌سازی دقیق رفتار ارتعاشی را برجسته می‌کند [۴، ۱۶، ۲۶]. مطالعات پیشین نشان داده‌اند که تخلخل سفتی را کاهش داده و فرکانس‌های طبیعی را کم می‌کند [۵، ۱۷، ۲۵]. چاندل [۲۵] در تحلیل ارتعاشات تیرهای نانومقیاس متخلخل هدفمند، نشان داد که توزیع تخلخل بر سفتی مؤثر و فرکانس‌های طبیعی تأثیر قابل‌توجهی دارد. یوکویاما [۱۸] ارتعاشات تیرهای تیموشنکو تحت بار گرانشی را بررسی کرد و فرکانس‌های بالاتر در حالت ایستاده نسبت به معلق را گزارش داد. زی و همکاران [۲] اثر نیروی وزن را بر تیرهای نانومقیاس تأیید کردند. رحیمی و همکاران [۱۹] با مدل غیرمحلّی کسری، ارتعاشات غیرخطی تیرهای نانومقیاس FGM را بررسی کردند و کاهش فرکانس‌ها را با افزایش تخلخل گزارش دادند. فام [۲۶] نیز ارتعاشات

آزاد نانوپلاکت‌های متخلخل هدفمند را با مدل غیرمحلّی بررسی کرد و اثر تخلخل بر رفتار دینامیکی را برجسته نمود. اوزون [۲۹] اثر بستر الاستیک و فنر پیچشی را بر دینامیک غیرمحلّی نانوتوب‌های متخلخل هدفمند تحلیل کرد و تغییرات فرکانس‌ها را تحت شرایط مرزی مختلف نشان داد. با این حال، تحلیل جامع تیرهای متخلخل هدفمند با در نظر گرفتن اثرات همزمان ضریب غیرمحلّی، تخلخل، و نیروی وزن کمتر مورد توجه قرار گرفته است [۶، ۷، ۳۰]. شریعتی و همکاران [۳۰] ارتعاشات غیرخطی و کماتش تیرهای نانومقیاس متخلخل هدفمند را بررسی کردند و تأثیر ترکیبی تخلخل و اثرات غیرمحلّی بر رفتار دینامیکی را گزارش دادند.

مزایای نظریه غیرمحلّی شامل توانایی مدل‌سازی تعاملات پیچیده بین‌ذره‌ای، انطباق با داده‌های تجربی در مقیاس نانو، و قابلیت تعمیم به مواد مدرج و متخلخل است [۱۴، ۲۸]. این نظریه، برخلاف مدل‌های کلاسیک، اثرات مقیاس کوچک را با دقت بیشتری در نظر می‌گیرد و امکان پیش‌بینی رفتار دینامیکی سازه‌های نانومقیاس تحت شرایط مختلف را فراهم می‌کند [۲۱، ۲۲، ۲۷]. صیاد [۲۸] در مروری بر مکانیک نانوتیرهای هدفمند، به اهمیت نظریه‌های غیرمحلّی و روش‌های عددی پیشرفته برای مدل‌سازی دقیق‌تر تأکید کرد.

همچنین، استفاده از روش‌های عددی طیفی مانند **روش هم‌مکانی چیبیشف**، که به دلیل دقت بالا و توزیع بهینه نقاط برای حل معادلات دیفرانسیل مناسب است، در این زمینه محدود بوده است [۲۰]. **روش هم‌مکانی چیبیشف** به‌عنوان یک روش طیفی، در حل مسائل با جواب‌های هموار، با استفاده از تعداد کمی نقاط محاسباتی همگرایی نمایی و دقت بسیار بالایی ارائه می‌دهد و از این نظر کارآمدتر از روش اجزای محدود یا روش تفاضل محدود است [۲۰]. این روش نیز با توزیع بهینه نقاط در نزدیکی مرزها، خطای عددی را به حداقل می‌رساند و برای تحلیل تیرهای با شرایط مرزی پیچیده مناسب است [۲۰].

با این وجود، شکاف‌های پژوهشی در تحلیل ارتعاشات تیرهای متخلخل هدفمند همچنان باقی است، به‌ویژه در بررسی اثر ترکیبی پارامترهای غیرمحلّی، تخلخل، و نیروی وزن بر فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود در حالت‌های معلق و ایستاده [۸، ۲۳، ۳۰].

این پژوهش با هدف پر کردن این شکاف‌ها، به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای یک‌سرگیر متخلخل هدفمند در مقیاس نانو می‌پردازد. با استفاده از نظریه غیرمحلّی تعمیم یافته و مدل تیر تیموشنکو، معادلات حاکم استخراج و با **روش هم‌مکانی چیبیشف** حل شده‌اند. در این پژوهش، تیر تحت بار گرانشی قرار دارد و ویژگی‌های ماده هدفمند تابعی، مانند مدول الاستیسیته و چگالی، فرض شده است که بر حسب ضخامت تیر و طبق روابط تابع توان تغییر می‌کنند. در حالی که نظریه غیرمحلّی عمومی دو پارامتر جهت‌دار را معرفی می‌کند و امکان پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار وابسته به اندازه، به‌ویژه در مواد هدفمند تابعی یا غیرهمسانگرد، را فراهم می‌آورد. در مطالعه حاضر اثرات افزایش ضریب غیرمحلّی، تخلخل، و شرایط مرزی ایستاده نسبت به معلق روی فرکانس‌های طبیعی بررسی می‌شود. مطالعه حاضر می‌تواند ایده جدید و کاربردی برای طراحی بهینه سازه‌های نانومقیاس در کاربردهای صنعتی نظیر حسگرهای نانویی و قطعات هوافضا ارائه دهد. این تیرها در فناوری‌های هوافضا، و قطعات پیشرفته مورد توجه قرار گرفته‌اند. افزون بر این، در عرصه‌های پزشکی و تولید انرژی نیز چنین تیرهایی

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \\ \sigma_x &= E(z)\epsilon_x, \tau_{xz} = G(z)\gamma_{xz} \\ G(z) &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (6)$$

معادلات حاکم شامل جابه‌جایی عرضی و چرخش مقاطع عرضی هستند:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [kGA(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi)] \\ \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [EI \frac{\partial \phi}{\partial x}] + kGA(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi) \end{aligned} \quad (7)$$

### ۲-۳- نظریه غیرمحملی عمومی

نظریه غیرمحملی عمومی (GNT) اثرات مقیاس کوچک را با دو ثابت غیرمحملی  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  مدل‌سازی می‌کند [۱۴]. رابطه تنش-کرنش غیرمحملی به‌صورت زیر است:

$$(1 - \epsilon_1 \nabla^2)(1 - \epsilon_2 \nabla^2)\sigma_{ij} = \lambda(1 - \epsilon_2 \nabla^2)\epsilon_{rr}\delta_{ij} + 2\mu(1 - \epsilon_1 \nabla^2)\epsilon_{ij} \quad (9)$$

این نظریه دقت بالایی برای سازه‌های نانو فراهم می‌کند [۲۱، ۱۳]. در این رابطه  $\nabla$  عملگر گرادینان می‌باشد.

### ۲-۴- استخراج معادلات حاکم

برای مدل‌سازی ارتعاشات آزاد تیر معلق یا ایستاده، معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون استخراج می‌شوند [۸، ۲]. خواص مواد با قانون توانی (شاخص  $n$ ) و پارامتر تخلخل  $\alpha$  تغییر می‌کنند. نیروی وزن تیر، که به‌صورت  $S(x) = \rho(z)Ag(L-x)$  تعریف می‌شود، اثر گرانش را مدل‌سازی می‌کند [۱۸]. انرژی کرنشی تیر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [-M_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + N_{xz}(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi)] dx \quad (10)$$

که در آن  $M_x = -EI(\frac{\partial \phi}{\partial x})$  گشتاور خمشی و  $N_{xz}GA(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi)$  نیروی برشی است. کار نیروی وزن، که به کاهش سفتی مؤثر تیر منجر می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$W_E = - \int_0^L S(x) \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \quad (11)$$

انرژی جنبشی ناشی از حرکت تیر:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho A (\frac{\partial w}{\partial t})^2 + \rho I (\frac{\partial \phi}{\partial t})^2] dx \quad (12)$$

با اعمال اصل همپلتون

$$\Pi = \delta \int_0^L (U - T - W_E) dt = 0$$

به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - N_{xz} + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{\partial N_{xz}}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} [S(x) \frac{\partial w}{\partial x}] = 0 \quad (14)$$

برای در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک در مقیاس نانو، نظریه غیرمحملی عمومی اعمال می‌شود. روابط تنش-کرنش غیرمحملی به‌صورت زیر هستند:

$$(1 - \epsilon_1 \nabla^2)(1 - \epsilon_2 \nabla^2)\sigma_{xx} = \lambda(1 - \epsilon_2 \nabla^2)\epsilon_{xx} + 2\mu(1 - \epsilon_1 \nabla^2)\epsilon_{xx} \quad (15)$$

$$(1 - \epsilon_1 \nabla^2)(1 - \epsilon_2 \nabla^2)\sigma_{xz} = 2\mu(1 - \epsilon_1 \nabla^2)\epsilon_{xz} \quad (16)$$

به‌عنوان بخش‌هایی از ایمپلنت‌های زیستی و ژنراتورهای پیزوالکتریک در مقیاس نانو استفاده می‌شوند. کنترل رفتار ارتعاشی آنها در سامانه‌های نانورباتیک و مدارهای انعطاف‌پذیر، موجب افزایش پایداری و دقت عملکرد می‌گردد.

## ۲- مدل‌سازی

در این بخش، مدل ریاضی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای یک‌سرگردار معلق و ایستاده ساخته‌شده از مواد تابعی متخلخل (FGM) در مقیاس نانو ارائه می‌شود. مدل‌سازی بر اساس نظریه غیرمحملی عمومی (GNT) و نظریه تیر تیموشنکو انجام شده است که اثرات مقیاس کوچک و تغییر شکل برشی را در نظر می‌گیرند [۱۴، ۲]. خواص مواد به‌صورت مدرج از مس (Cu) در یک سمت به سرامیک (BaO) در سمت دیگر تغییر می‌کند [۱]. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و با روش هم‌مکانی چبیشف حل می‌شوند [۲۰].

### ۲-۱- مدل‌سازی مواد مدرج تابعی و متخلخل

مواد مدرج تابعی (FGM) کامپوزیت‌های پیشرفته‌ای با خواص مکانیکی متغیر به‌صورت پیوسته هستند که مشکلات جدایش لایه‌ها در کامپوزیت‌های سنتی را رفع می‌کنند [۲، ۱]. خواص مواد (مدول یانگ  $E$ ، مدول های لامه  $\lambda$  و  $\mu$  و چگالی  $\rho$  در راستای محور افقی تیر با قانون توانی و شاخص  $n$  تغییر می‌کنند [۶، ۵]. برای مدل‌سازی این تغییرات خواص مکانیکی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(z) = (f_2 - f_1)(\frac{z}{h} + \frac{1}{2})^n + f_1 - \frac{\alpha}{2}(f_1 + f_2) \quad (1)$$

$$f(z) = \{E, \rho, \mu, \lambda\}(z)$$

و فاصله محور خنثی  $d$  به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۵]:

$$d = \frac{(E_r - 1)nh}{2(2 + n)(E_r + n - \frac{\alpha}{2}(n + 1)(1 + E_r))} \quad (2)$$

$$E_r = \frac{E_2}{E_1}$$

که  $f_1$  و  $f_2$  معرف خواص مکانیکی به‌ترتیب در سطوح سمت چپ ( $z = -\frac{h}{2}$ ) و راست ( $z = +\frac{h}{2}$ ) تیر هستند. پارامتر تخلخل  $\alpha$  توزیع منافذ را مشخص می‌کند و می‌تواند یکنواخت یا غیریکنواخت باشد:

$$\alpha(z) = \alpha_0 \text{ (یکنواخت)} \quad (3)$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 \cos(\frac{z\pi}{h})^m \text{ (غیریکنواخت)}$$

این مدل‌سازی خواص مکانیکی را بهبود می‌دهد.

### ۲-۲- نظریه تیر تیموشنکو

نظریه تیموشنکو اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در تحلیل تیرها در نظر می‌گیرد و برای تیرهای ضخیم دقیق‌تر از اویلر-برنولی است [۹، ۲]. میدان تغییر مکان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= -z\phi(x, t) \\ u_y(x, y, z, t) &= 0 \\ u_z(x, y, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

که زاویه چرخش  $\phi$  و  $w$  جابه‌جایی عرضی است. کرنش‌ها و تنش‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5)$$

گشتاور خمشی و نیروی برشی غیرمحملی:

$$(1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)\nabla^2 + \epsilon_1\epsilon_2\nabla^4)M_x = (A_2\epsilon_2 + 2\epsilon_1B_2)\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} - (A_2 + 2B_2)\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (17)$$

$$(1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)\nabla^2 + \epsilon_1\epsilon_2\nabla^4)N_{xz} = -B_0\epsilon_1\frac{\partial^3w}{\partial x^3} + B_0\frac{\partial w}{\partial x} + B_0\epsilon_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - B_0\phi \quad (18)$$

که در آن ضرایب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A_2 = \int_A \lambda(z)z^2 dA \quad (19)$$

$$(B_0, B_2) = \int_A \mu(z)(k, z^2) dA$$

دیفرانسیل استفاده می کند و به دلیل دقت بالا برای تحلیل معادلات حاکم مناسب است [۲۰]. **نقاط هم مکانی**، که برای گسسته سازی معادلات استفاده می شوند، به صورت زیر تعریف می شوند:

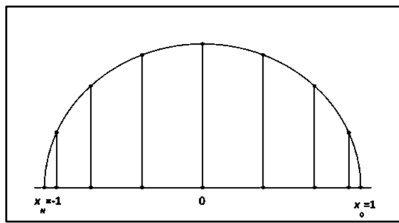
$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), j = 0, 1, \dots, N \quad (26)$$

ماتریس مشتق اول، که برای محاسبه مشتقات در **نقاط هم مکانی** لازم است، به صورت زیر است:

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, (D_N)_{ij} = \frac{-x_j}{2(1 + x_j^2)} \quad (27)$$

$$D_N)_{ij} = \frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(x_i - x_j)}, c_i = \begin{cases} 2 & i = 0, N \\ 1 & \text{غیر اینصورت} \end{cases}$$

این روش معادلات بی بعد (۲۴ و ۲۵) را به سیستم معادلات جبری تبدیل کرده و فرکانس های طبیعی و شکل های مود را با دقت بالا محاسبه می کند [۲۰].



شکل ۱- نقاط چبیشف در دامنه [۱،-۱] [۲۳]

برای حل معادلات، بردار حالت به صورت زیر تعریف می شود که شامل مقادیر زاویه چرخش  $\phi$  و جابه جایی عمودی  $w$  در **نقاط هم مکانی** است:

$$[U]^T = [\varphi_1 \quad \widehat{w}_1 \quad \varphi_{N+1} \quad \widehat{w}_{N+1} \quad \dots \quad \varphi_N \quad \widehat{w}_N]^T \quad (28)$$

معادلات حاکم به فرم ماتریسی زیر گسسته سازی می شوند:

$$\begin{bmatrix} LH_1 \\ LH_2 \end{bmatrix} [U] = \Omega^2 \begin{bmatrix} RH_1 \\ RH_2 \end{bmatrix} [U] \quad (29)$$

ماتریس های LH و RH نمایانگر طرفین چپ و راست معادلات دیفرانسیل پس از گسسته سازی هستند و شامل اصطلاحات مربوط به اینرسی، نیروهای برشی، و اثرات غیرمحملی و تداخل می باشند. این ماتریس ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$LH_1: \begin{pmatrix} \frac{s}{r} \widetilde{A}_2 \widehat{\epsilon}_2 + \frac{2}{r} \widehat{\epsilon}_1 \widetilde{B}_2 \\ -\left(\frac{s}{r} \widetilde{A}_2 + \frac{2}{r} \widetilde{B}_2 + \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1\right) \\ + \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \cdot [1 \quad 0] \otimes [I] + \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1 \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_3] \\ - \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_1] \end{pmatrix} \cdot [1 \quad 0] \otimes [D_4] \quad (30)$$

$$RH_1: \begin{pmatrix} \bar{I} \cdot [1 \quad 0] \otimes [I] - \bar{I}(\widehat{\epsilon}_1 + \widehat{\epsilon}_2) \cdot [1 \quad 0] \otimes [D_2] \\ + \bar{I} \widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \cdot [1 \quad 0] \otimes [D_4] \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$LH_2: \begin{pmatrix} \gamma \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_1] - \gamma \cdot [0 \quad 1] \otimes [\text{dia}(1 - \widehat{x}) * D_2] \\ - \frac{1}{r} \widetilde{B}_0 \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_2] - 3(\widehat{\epsilon}_1 + \widehat{\epsilon}_2) \gamma \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_3] \\ + (\widehat{\epsilon}_1 + \widehat{\epsilon}_2) \gamma \cdot [0 \quad 1] \otimes [\text{dia}(1 - \widehat{x}) * D_4] \\ + \frac{1}{r} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1 \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_4] + 5\widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \gamma \cdot [0 \quad 1] \otimes [D_5] \\ - \widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \gamma \cdot [0 \quad 1] \otimes [\text{dia}(1 - \widehat{x}) * D_6] \\ - \frac{1}{r} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1 \cdot [1 \quad 0] \otimes [D_3] + \frac{1}{r} \widetilde{B}_0 \cdot [1 \quad 0] \otimes [D_1] \end{pmatrix} \quad (32)$$

## ۲-۵- بی بعدسازی معادلات

برای ساده سازی تحلیل و حذف وابستگی به واحدهای فیزیکی، معادلات بی بعدسازی می شوند. پارامترهای بی بعد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\widehat{w} = \frac{w}{L}, \widehat{z} = \frac{z}{h}, \widehat{x} = \frac{x}{L} \quad (20)$$

$$\widehat{t} = t \sqrt{\frac{I_0 \mu_1}{\rho_1 A_0 L^4}}, \Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho_1 A_0 L^4}{I_0 \mu_1}}$$

ضرایب بی بعد به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\widetilde{B}_2 = 12 \int_{-d-0.5}^{0.5-d} [(\mu_r - 1)(\widehat{z} + \widehat{d} + 0.5)]^n + 1 - \frac{\alpha}{2} (\mu_r + 1)] \widehat{z}^2 d\widehat{z} \quad (21)$$

$$\widetilde{B}_0 = \kappa \int_{-d-0.5}^{0.5-d} [(\mu_r - 1)(\widehat{z} + \widehat{d} + 0.5)]^n + 1 - \frac{\alpha}{2} (\mu_r + 1)] d\widehat{z} \quad (22)$$

$$\widetilde{A}_2 = 12 \int_{-d-0.5}^{0.5-d} [(\lambda_r - 1)(\widehat{z} + \widehat{d} + 0.5)]^n + 1 - \frac{\alpha}{2} (\lambda_r + 1)] \widehat{z}^2 d\widehat{z} \quad (23)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها  $\widehat{w}(\widehat{x}, \widehat{t}) = \widehat{w}(\widehat{x})e^{j\Omega t}$  معادلات بی بعد نهایی برای محاسبه فرکانس های طبیعی به دست می آیند:

$$\left(\frac{s}{r} \widetilde{A}_2 \widehat{\epsilon}_2 + \frac{2}{r} \widehat{\epsilon}_1 \widetilde{B}_2\right) \frac{d^4\phi}{d\widehat{x}^4} - \left(\frac{s}{r} \widetilde{A}_2 + \frac{2}{r} \widetilde{B}_2 + \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1\right) \frac{d^2\phi}{d\widehat{x}^2} + \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \phi + \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1 \frac{d^3\widehat{w}}{d\widehat{x}^3} - \frac{1}{r^2} \widetilde{B}_0 \frac{d\widehat{w}}{d\widehat{x}} = \Omega^2 [\bar{I} \phi - \bar{I}(\widehat{\epsilon}_1 + \widehat{\epsilon}_2) \frac{d^2\phi}{d\widehat{x}^2} + \bar{I} \widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \frac{d^4\phi}{d\widehat{x}^4}] \quad (24)$$

$$\gamma \frac{d\widehat{w}}{d\widehat{x}} - \left[\gamma(1 - \widehat{x}) + \frac{1}{r} \widetilde{B}_0\right] \frac{d^2\widehat{w}}{d\widehat{x}^2} - 3(\widehat{\epsilon}_1 + \widehat{\epsilon}_2) \gamma \frac{d^3\widehat{w}}{d\widehat{x}^3} + 5\widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \gamma \frac{d^5\widehat{w}}{d\widehat{x}^5} - \widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \gamma (1 - \widehat{x}) \frac{d^6\widehat{w}}{d\widehat{x}^6} - \frac{1}{r} \widetilde{B}_0 \widehat{\epsilon}_1 \frac{d^3\phi}{d\widehat{x}^3} + \frac{1}{r} \widetilde{B}_0 \frac{d\phi}{d\widehat{x}} = \Omega^2 [\bar{R} \widehat{w} - \bar{R}(\widehat{\epsilon}_1 + \widehat{\epsilon}_2) \frac{d^2\widehat{w}}{d\widehat{x}^2} + \bar{R} \widehat{\epsilon}_1 \widehat{\epsilon}_2 \frac{d^4\widehat{w}}{d\widehat{x}^4}] \quad (25)$$

این معادلات، که رفتار دینامیکی تیر را توصیف می کنند، با روش عددی چبیشف حل می شوند تا فرکانس های طبیعی و شکل های مود تعیین شوند [۲۰].

## ۲-۶- روش هم مکانی چبیشف

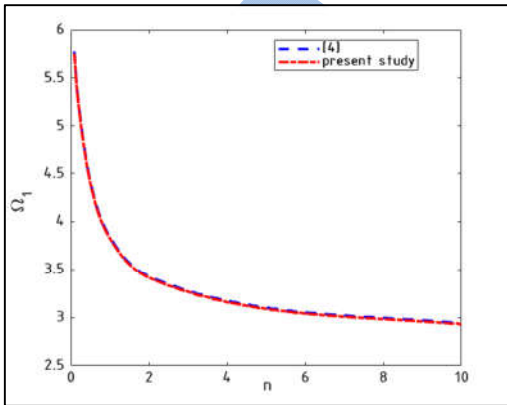
در این مقاله از **روش هم مکانی چبیشف** برای حل عددی معادلات

### ۳-۱- اعتبارسنجی

برای ارزیابی اعتبار و صحت مدل حاضر، نتایج آن با مطالعه چن و همکاران (۲۰۱۸) مقایسه شده است. با قرار دادن ضرایب غیرمحملی  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  برابر صفر، اثرات غیرمحملی حذف شده و مدل به فرم کلاسیک نظریه تیموشنکو، هم‌راستا با فرمول‌بندی چن و همکاران، تقلیل می‌یابد. این مقایسه برای تیر FGM با شرایط مرزی دوسر گیردار (CC) و موادی شامل سیلیکون نیتریت Si3N4، (E1=348.43 GPa,  $\rho=2370$  kg) و فولاد ضدزنگ SUS304 (E2=201.04 GPa,  $\rho=8166$  kg/m3) با ضریب پواسون  $\nu=0.28$  انجام شده است. در حالت همگن، شاخص توانی  $p=0$ ، که تیر کاملاً از Si3N4 تشکیل شده، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ( $\lambda_n$ ) برای نسبت‌های  $L/h=5$  و  $L/h=20$  محاسبه شده و در جدول ۲ با نتایج مرجع مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که فرکانس‌ها با حداکثر خطای کمتر از ۰.۴٪ با مقادیر گزارش‌شده توسط چن و همکاران همخوانی دارند، که صحت مدل را در شرایط پایه تأیید می‌کند.

### جدول ۲- دو فرکانس اول پژوهش حاضر و مقاله چن و همکاران-۲۰۱۸

| $\gamma = 0, \alpha = 0, CC, \lambda_n = \frac{\omega_n L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}$ |         |         |         |                  |     |
|--|---------|---------|---------|------------------|-----|
| n=5  | n=2     | n=0.5   | n=0     | $\lambda$        | L/h |
| ۶/۶۵۲۰۰  | ۷/۱۸۸۰  | ۸/۶۷۰۵  | ۹/۹۹۶۵  | $[۴]\lambda_1$   | ۵   |
| ۶/۶۲۸۹۶  | ۷/۱۸۲۴  | ۸/۶۹۷۲۹ | ۹/۹۷۷۵  | حاضر $\lambda_1$ |     |
| ۸/۱۶۸۵   | ۸/۶۰۴۰۱ | ۱۰/۴۲۲۸ | ۱۲/۲۲۰۱ | $[۴]\lambda_1$   | ۲۰  |
| ۸/۱۸۶۸   | ۸/۶۱۷۹۶ | ۱۰/۴۱۸۵ | ۱۲/۲۰۷۸ | حاضر $\lambda_1$ |     |

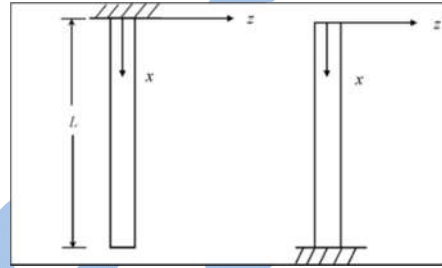


$$RH_2: \bar{R}(\epsilon_1 \epsilon_2, [0 \ 1] \otimes [D_4] - \bar{R}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot [0 \ 1] + \bar{R} \cdot [0 \ 1] \otimes [I]) \quad (33)$$

این معادلات ماتریسی، معادلات حاکم را به یک سیستم جبری تبدیل می‌کنند که با حل آن، فرکانس‌های طبیعی  $\Omega$  و شکل‌های مود به دست می‌آیند [۲۰]. روش هم‌مکانی چبیشف به دلیل استفاده از توابع پایه طیفی، دقت بالایی داشته و نیاز به تعداد نقاط محاسباتی زیاد را کاهش می‌دهد.

### ۲-۷- شرایط مرزی

در این مقاله، شرایط مرزی برای دو حالت معلق و ایستاده تیر یک‌سرگیردار تعریف شده‌اند. جدول ۱ شرایط مرزی را در چهار حالت فرضی بیان می‌کند [۱۸].



شکل ۲- شرایط مرزی تیر در دو حالت معلق و ایستاده [۱۴].

### جدول ۱- شرایط مرزی تیر با استفاده از ماتریس تفاضلات چبیشف

| شرایط مرزی | x=-1 |  |
|------------|------|--|
| سرگیردار   |      | $[0 \ 1] \otimes [1 \ 0 \ \dots \ 0][U] = 0$                               |
|            |      | $[1 \ 0] \otimes [1 \ 0 \ \dots \ 0][U] = 0$                               |
| سرآزاد     |      | $([0 \ 1] \otimes [D(1, :)] - [1 \ 0] \otimes [1 \ 0 \ \dots \ 0])[U] = 0$ |
|            |      | $[1 \ 0] \otimes [D(1, :)] [U] = 0$  |

| شرایط مرزی | x=1 |  |
|------------|-----|--|
| آویزان     |     | $([0 \ 1] \otimes [D(N+1, :)] - [1 \ 0] \otimes [0 \ 0 \ \dots \ 1])[U] = 0$ |
|            |     | $[1 \ 0] \otimes [D(N+1, :)] [U] = 0$  |
| ایستاده    |     | $[1 \ 0] \otimes [0 \ 0 \ \dots \ 1][U] = 0$                                 |
|            |     | $[1 \ 0] \otimes [D(1, :)] [U] = 0$  |

### ۳- نتایج و تحلیل

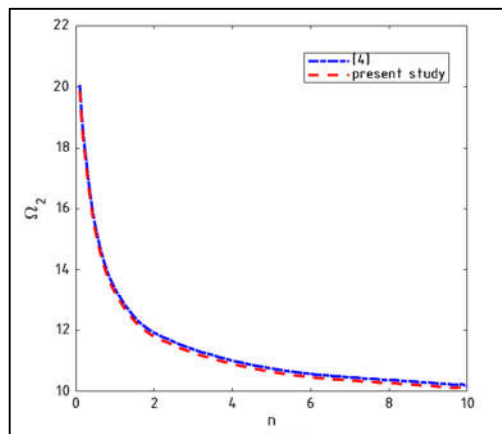
در ابتدا نتایج معادلات به دست آمده را با نتایج مقالات دیگر برای نشان دادن صحت نتایج بدست آمده، مقایسه می‌شود...

### ۳-۲- اثر تخلخل

در این بخش، اثر پارامتر تخلخل  $\alpha$  بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر یک‌سرگردار معلق هدفمند بررسی می‌شود. در این تحلیل ( $l=10h$ ،  $h=2\text{nm}$ ) در نظر گرفته شده است. برای این منظور، در شکل ۴ سه فرکانس اول در سه نمودار جداگانه برحسب  $\alpha$  نمایش داده شده‌اند. پارامترهای عددی مورد استفاده در تحلیل به شرح زیر هستند. در این نمودار نسبت ضخامت به طول ثابت فرض شده و ضرایب غیر محلی نیز ثابت می‌باشد. تیر معلق را بر حسب  $\alpha$  برای  $\kappa = 5/6$ ،  $n = 0.1, 2$ ،  $(\gamma = 50, \gamma = 0)$  (5) نشان می‌دهد. در ادامه به بررسی روند نمودارها پرداخته می‌شود. شکل ۴-الف اثر تقویت‌کننده تخلخل ( $n = 0.1$ ):

نشان می‌دهد با افزایش  $\alpha$  از ۰ به ۰.۷، فرکانس‌های طبیعی به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد. کاهش چگالی مؤثر ناشی از تخلخل بر کاهش سفتی مؤثر غلبه دارد؛ بنابراین نسبت سفتی به وزن افزایش یافته و  $\alpha$  نقش سخت‌کننده در رفتار ارتعاشی ایفا می‌کند. برای پارامتر وزن  $\gamma$  مشاهده می‌شود که افزایش مقدار آن موجب افزایش بیشتر فرکانس‌ها می‌گردد. شکل ۴-ب تعدیل اثر تخلخل ( $n = 2$ ): در این حالت، با افزایش  $\alpha$ ، تغییرات فرکانس‌های طبیعی ملایم‌تر است و در برخی نواحی کاهش جزئی مشاهده می‌شود. این رفتار نشان می‌دهد که با افزایش شاخص مدرج‌شدگی، اثر سخت‌کنندگی تخلخل تضعیف شده و دو پدیده‌ی کاهش سفتی و کاهش چگالی تقریباً متعادل می‌شوند. در مقایسه‌ی دو مقدار  $\gamma = 0$  و  $\gamma = 50$ ، منحنی‌های مربوط به  $\gamma = 0$  سطوح بالاتری از فرکانس قرار دارند، که بیانگر اثر کاهنده‌ی وزن مؤثر ( $\gamma$ ) بر فرکانس طبیعی است. شکل ۴-پ اثر کاهنده تخلخل ( $n = 5$ ):

در این حالت، با افزایش  $\alpha$ ، فرکانس‌های طبیعی ( $\Omega$ ) به‌طور قابل‌توجهی کاهش می‌یابند. در این شرایط، کاهش سفتی مؤثر ناشی از افزایش تخلخل غالب است و منجر به کاهش سفتی کلی تیر و در نتیجه کاهش فرکانس‌ها می‌شود. اثر پارامتر  $\gamma$  همچنان مشهود است و خطوط مربوط به  $\gamma = 50$  در مقایسه با  $\gamma = 0$  مقادیر پایین‌تری از فرکانس را نشان می‌دهند. تخلخل معمولاً با کاهش سفتی و چگالی ماده همراه است. اما در این مدل، با فرض‌های به‌کاررفته در تعریف  $E(z)$  و  $\rho(z)$ ، به‌ویژه در ترکیب با  $n$  و توزیع FGM، به‌نظر می‌رسد که کاهش چگالی مؤثر غالب‌تر از کاهش سفتی است؛ که نتیجه آن افزایش فرکانس‌های طبیعی است. به‌طور کلی، تخلخل ( $\alpha$ ) موجب کاهش هم‌زمان چگالی و سفتی ماده می‌شود، اما بسته به مقدار شاخص توزیع مواد ( $n$ )، یکی از این دو اثر می‌تواند غالب شود. در مقادیر پایین  $n$ ، کاهش چگالی نقش تعیین‌کننده دارد و موجب افزایش  $\Omega$  می‌شود (اثر سخت‌کنندگی تخلخل). در مقادیر بالاتر  $n$ ، کاهش سفتی بر رفتار دینامیکی غلبه کرده و موجب کاهش  $\Omega$  می‌شود. همچنین افزایش



شکل ۳- تطابق دو فرکانس مقاله [۴] و پژوهش حاضر با

شرایط ذکرشده

مقایسه نتایج بدست‌آمده با داده‌های مرجع حاکی از تطابق بالایی است، که صحت و دقت مدل حاضر را تأیید می‌کند. در این مطالعه، روش هم‌مکانی چبیشف برای تحلیل تمامی مسائل ارتعاشی به کار گرفته شده است. به منظور دستیابی به استقلال از شبکه، تعداد ۲۱ نقطه هم‌مکانی انتخاب شده است، که با توجه به توزیع متراکم نقاط در نزدیکی مرزها، دقت قابل‌توجهی را تضمین می‌کند. این روش نسبت به رویکردهای وابسته به شبکه، نظیر روش اجزای محدود، دقت بیشتری ارائه می‌دهد و هزینه محاسباتی کمتری را در بر دارد. نتایج مقایسه‌ای نشان داد که روش چبیشف زمان محاسبات را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد و انعطاف‌پذیری بیشتری در تحلیل شرایط مرزی پیچیده، از جمله شرایط دوسر گردار، فراهم می‌کند. استقلال از شبکه، که به معنای عدم وابستگی نتایج به تعداد یا اندازه المان‌های شبکه است، با استفاده از ۲۱ نقطه هم‌مکانی در این مدل به‌خوبی تحقق یافته است، که کارایی و قابلیت اطمینان مدل را در تحلیل‌های ارتعاشی تقویت می‌کند. در ادامه، فرض بر این است که تیر از مس (Cu) در سمت چپ و سرامیک باریوم اکسید (BaO) در سمت راست تشکیل شده است، خواص مکانیکی این مواد در جدول ۳ ارائه شده است. این چیدمان، که نمایانگر یک گرادیان عملکردی از فلز به سرامیک است، به‌عنوان پایه‌ای برای تحلیل رفتار ارتعاشی تیر مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول ۳- خواص مواد متناسب با فلز مس و سرامیک

| نام ماده          | $\mu$ (GPa) | $\lambda$ (GPa) | $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | E (GPa) | a (nm) | $\epsilon_1$ (nm <sup>2</sup> ) | $\epsilon_2$ (nm <sup>2</sup> ) |
|-------------------|-------------|-----------------|-----------------------------|---------|--------|---------------------------------|---------------------------------|
| مس خالص (Cu)      | 78          | 25              | 8960                        | 120     | 0.3597 | 0.17 a <sup>2</sup>             | 0.03 a <sup>2</sup>             |
| سرامیک خالص (BaO) | 38.8        | 48.1            | 5720                        | 155     | 0.5537 | 0.15 a <sup>2</sup>             | 0.045 a <sup>2</sup>            |

پارامتر وزن ( $\gamma$ ) در تمامی حالت‌ها سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

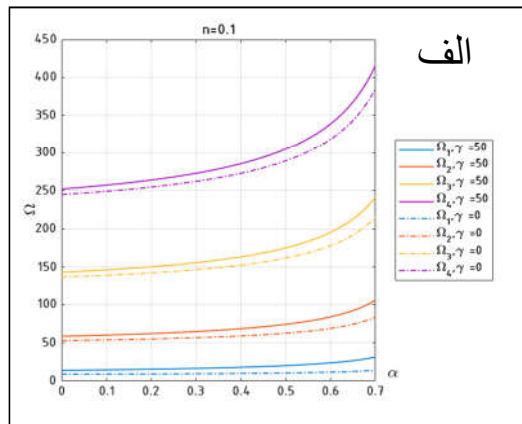
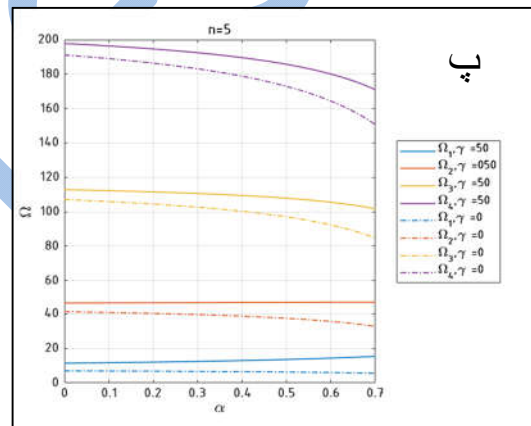
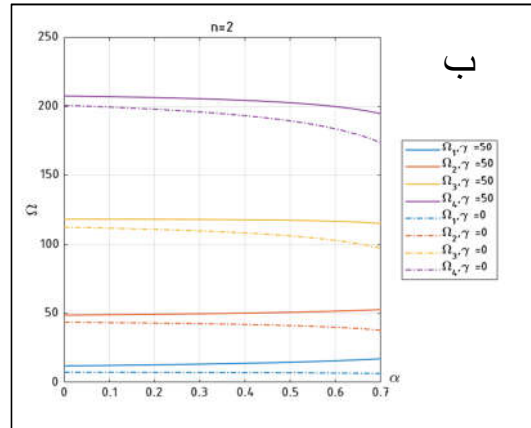
شکل ۴- نمودار چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر معلق بر حسب آلفا با شرایط ( $\gamma = 0, 50, \frac{l}{h} = 10, \kappa = \frac{5}{6}$ )  
 الف) ( $n = 0.1$ ) ب) ( $n = 2$ ) پ) ( $n = 5$ )

### ۳-۳- اثر وزن ( $\gamma$ )

$\gamma$  که بیانگر اثر نیروی وزن است، نقش قابل توجهی در تغییر رفتار ارتعاشی تیرهای متخلخل تابعی دارد. نیروی وزن در تیرهای عمودی و یکسرگردار به عنوان یک نیروی محوری در نظر گرفته می‌شود که می‌تواند بر سفتی کلی تیر تأثیر بگذارد. در این تحلیل ( $l=10h$ ) در این تحلیل در شکل‌های ۵-الف و ۵-ب، تأثیر پارامتر  $\gamma$  (نماینده‌ی نیروی وزن در راستای طولی تیر) بر چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول  $\Omega_1$  تا  $\Omega_4$  تیر هدفمند متخلخل بررسی شده است. شکل ۵-الف مربوط به تیر یکسرگردار معلق و شکل ۵-ب مربوط به تیر ایستاده است. برخلاف انتظار کلاسیک مبنی بر کاهش فرکانس‌های طبیعی با افزایش  $\gamma$ ، نتایج عددی حاصل از مدل حاضر نشان می‌دهند که در هر دو حالت تیر معلق و ایستاده، افزایش  $\gamma$  موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

این پدیده می‌تواند ناشی از ویژگی‌های خاص مدل‌سازی تیرهای تابعی (FGP) باشد. در این مدل، پارامتر  $\gamma$  نه تنها نیروی وزن، بلکه تغییر در توزیع چگالی و سفتی مؤثر در راستای طول تیر را نیز در بر می‌گیرد. اگر افزایش  $\gamma$  باعث کاهش مؤثر جرم بیشتر از سفتی شود، نسبت  $E/\rho$  افزایش می‌یابد و در نتیجه، فرکانس‌های طبیعی رشد می‌کنند. به علاوه، تعریف خاص  $\gamma$  در مدل حاضر ممکن است موجب شود این پارامتر، به جای یک نیروی تضعیف‌کننده، نقش نیروی پایدارکننده یا سفتی‌بخش را ایفا کند. این اثر در تیر ایستاده (شکل ۵-ب) به دلیل شرایط مرزی متفاوت، شدت بیشتری دارد. در هر دو نمودار، روند افزایش فرکانس‌ها نسبت به  $\gamma$  تقریباً یکنواخت است و این افزایش در مدهای بالاتر (به ویژه در  $\Omega_3$  و  $\Omega_4$ ) چشمگیرتر می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر وزن  $\gamma$  تأثیر قابل توجهی بر پاسخ ارتعاشی تیر دارد و در طراحی و تحلیل ارتعاشات مدهای بالاتر باید با دقت لحاظ شود.

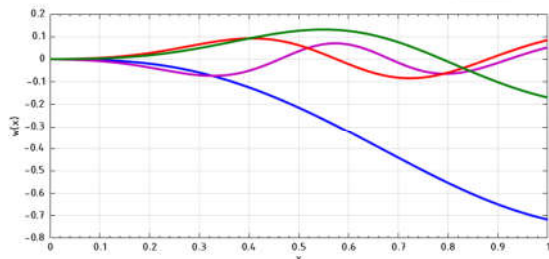
به طور خلاصه، رفتار مشاهده شده بیانگر آن است که در تیرهای FG متخلخل، افزایش  $\gamma$  می‌تواند منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی شود، به ویژه در شرایطی که اثر جرم مؤثر غالب‌تر از سفتی نباشد.



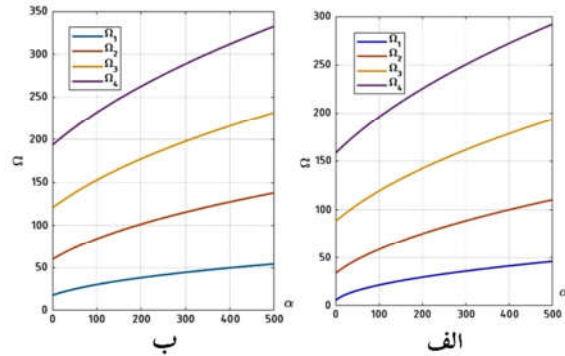
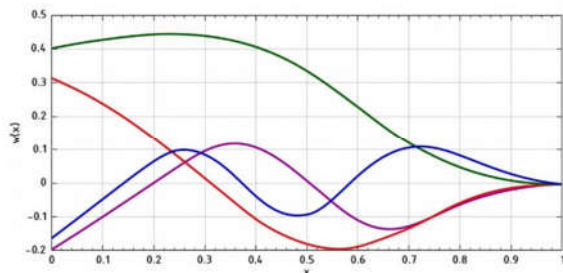
شکل ۷ (تیر ایستاده): در این حالت، تیر به صورت عمودی قرار گرفته است؛ یعنی سر پایینی گیردار و سر بالایی آزاد است. اگرچه تعداد گره‌ها در مودهای مختلف مشابه حالت معلق است، اما توزیع دامنه‌ی ارتعاش و موقعیت گره‌ها به‌طور محسوسی تغییر کرده است:

- در مودهای بالاتر، تمرکز تغییر شکل در نیمه‌ی پایین تیر بیشتر است، زیرا نیروی وزن ( $\gamma=150$ ) باعث تجمع جرم مؤثر در نواحی پایینی می‌شود.
- گره‌ها به سمت پایه (پایین تیر) جابه‌جا شده‌اند، که بیانگر اثر جهت‌دار نیروی وزن در کاهش سفتی مؤثر ناحیه‌ی فوقانی است.
- بخش پایین تیر رفتاری سخت‌تر و فشرده‌تر دارد، در حالی‌که در نزدیکی انتهای آزاد، نوسان با شیب غیرصفر و دامنه‌ی بالاتر دیده می‌شود.

به‌طور کلی، مقایسه‌ی دو حالت معلق و ایستاده نشان می‌دهد که وزن طولی ( $\gamma$ ) نه تنها بر مقدار فرکانس‌های طبیعی تأثیر می‌گذارد، بلکه شکل مودها و توزیع انرژی ارتعاشی را نیز تغییر می‌دهد. اثر تخلخل ( $\alpha=0.3$ ) نیز با تغییر چگالی مؤثر و سفتی نسبی، موجب تغییر دامنه‌ی نوسانات در طول تیر می‌شود.



شکل ۶- نمودار چهار مود اول تیر معلق بر حسب طول  
تیر ( $w(x)_x$ ) با شرایط ( $\gamma = 150, \alpha = 0.3, \kappa = \frac{5}{6}$ )



شکل ۵- نمودار چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول الف) معلق  
ب) ایستاده بر حسب گاما با شرایط ( $n = 0.5, \alpha = 0.5, \kappa = \frac{5}{6}, \frac{L}{h} = 10$ )

### ۳-۴- شکل‌های مود ارتعاشی

شکل‌های مود اول تا چهارم در شکل‌های بالا برای تیرهای معلق (شکل ۶) و ایستاده (شکل ۷) با پارامترهای  $\gamma=150$ ،  $\alpha=0.3$  و  $\kappa=5/6$  ارائه شده‌اند. این شکل‌ها چهار مود ارتعاشی اول تیر هدفمند متخلخل (FGP) را در دو حالت مختلف نشان می‌دهند. در این تحلیل، اثر وزن ( $\gamma=150$ ) و تخلخل ( $\alpha=0.3$ ) در نظر گرفته شده‌اند تا رفتار مودهای ارتعاشی تحت این شرایط بررسی شود، و ضریب برشی بر اساس نظریه تیموشنکو برابر  $\kappa=5/6$  فرض شده است. شکل ۶ (تیر معلق): در این حالت، تیر از یک انتها گیردار و از انتهای دیگر آزاد است. مودها به صورت زیر مشاهده می‌شوند:

- **مود اول:** شامل یک منحنی نرم و بدون گره است. بیشترین تغییر مکان در انتهای آزاد رخ می‌دهد و شیب غیرصفر در این ناحیه با شرایط مرزی آزاد سازگار است.
- **مود دوم:** دارای یک گره در حدود یک‌سوم طول تیر است و دو ناحیه‌ی ارتعاشی را نشان می‌دهد.
- **مود سوم:** با دو گره، شامل سه ناحیه‌ی نوسان است که دامنه‌ی تغییر شکل در ناحیه‌ی آزاد بیشتر است.
- **مود چهارم:** سه گره دارد و الگوی نوسان پیچیده‌تری با دامنه‌های متناوب مثبت و منفی نشان می‌دهد.

اثر وزن و تخلخل باعث جابجایی محل گره‌ها و تغییر دامنه‌ی ارتعاش در نواحی مختلف می‌شود. در نزدیکی سر آزاد، دامنه‌ی تغییر شکل بیشتر و در محل گیردار تقریباً صفر است که کاملاً با شرایط مرزی مطابقت دارد.

- [6] Fang VN, et al. Isogeometric analysis of static and free vibration of functionally graded porous nanoplates. *Composite Structures*. 2019;225:110–25.
- [7] Sobhy M, Radwan A. A new quasi-3D nonlocal theory for vibration and buckling of functionally graded nanoplates. *Composite Structures*. 2017;170:100–15.
- [8] Salehipour H, et al. Analytical solutions for free vibration of functionally graded micro/nano plates. *Journal of Vibration and Control*. 2015;21:200–15.
- [9] Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*. 1921;41:744–6.
- [10] Wang CM, et al. Vibration of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*. 2000;230:1–15.
- [11] Eringen AC. Nonlocal polar elastic continua. *International Journal of Engineering Science*. 1972;10:1–16.
- [12] Eringen AC. *Nonlocal continuum field theories*. Springer; 2002.
- [13] Nazemnezhad R, Hosseini-Hashemi S. Nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams. *Composite Structures*. 2014;110:50–65.
- [14] Shaat M. General nonlocal theory for wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*. 2017;400:150–70.
- [15] Chen D, et al. Vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams. *Composite Structures*. 2018;194:567–76.
- [16] Daikh A, et al. Buckling of sandwich functionally graded porous nanoplates under thermal effects. *Journal of Thermal Stresses*. 2019;42:150–65.
- [17] Babaei H, et al. A comprehensive review on saturated functionally graded porous structures. *Materials Today*. 2022;50:100–20.
- [18] Yokoyama T. Vibration of suspended Timoshenko beams under gravity. *Journal of Sound and Vibration*. 1990;140:200–15.
- [19] Rahimi GH, et al. Nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams using nonlocal fractional model. *Composite Structures*. 2018;190:100–15.
- [20] Trefethen LN. *Spectral methods in MATLAB*. SIAM; 2000.
- [21] Sahmani S, Aghdam M. Temperature-dependent nonlocal instability of hybrid functionally graded nanoshells. *Journal of Thermal Stresses*. 2017;40:200–15.
- [22] Abdulbaqi A. Free vibration of simply supported functionally graded nanoplates. *Journal of Computational Mechanics*. 2019;65:200–15.
- [23] Sari M, et al. Mode veering in functionally graded beams with nonlocal residuals. *Journal of Sound and Vibration*. 2017;400:120–35.
- [24] Boyce WE, DiPrima RC. *Elementary differential equations*. Wiley; 2012.
- [25] Chandel VS. Vibration analysis of functionally graded porous nano-beams. *J. Mech. Behav. Mater*. 2023.
- [26] Pham QH. Nonlocal free vibration of functionally graded porous nanoplates. *Compos. Struct*. 2023.
- [27] Hadji L. Nonlocal free vibration analysis of porous FG nanobeams. *J. Mech. Eng. Sci*. 2021.
- [28] Sayyad AS. On the mechanics of FG nanobeams: A review with recent developments. *Int. J. Mech. Sci*. 2023.
- [29] Uzun B. Elastic medium and torsional spring effects on the nonlocal dynamic of functionally graded porous nanotubes. *J. Vib. Control*. 2024.

### شکل ۷- نمودار چهار مود اول تیر ایستاده بر حسب طول

$$\text{تیر } (w(x)_x) \text{ با شرایط } \left( \gamma = 150, \alpha = 0.3, \kappa = \frac{5}{6} \right)$$

### ۳-۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار ارتعاشی آزاد یک تیر یک‌سرگردار هدفمند متخلخل (FGP) با استفاده از نظریه تیموشنکو و مدل غیرمحملی شات تحلیل شد. برای حل معادلات حاکم، روش عددی هم‌مکانی چپیشف به کار گرفته شد. اثرات تخلخل ( $\alpha$ )، وزن ( $\gamma$ )، و مدرج بودن ماده ( $n$ ) بر فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج عددی به‌وضوح نشان دادند که:

با افزایش تخلخل  $\alpha$ ، علی‌رغم کاهش سفتی، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند که ناشی از کاهش سریع‌تر جرم مؤثر نسبت به سفتی در مدل حاضر است. و در بعضی حالات باعث کاهش فرکانس طبیعی نیز می‌شود.

افزایش وزن  $\gamma$  برخلاف انتظار کلاسیک، منجر به افزایش فرکانس طبیعی در هر دو حالت معلق و ایستاده شد. این نتیجه می‌تواند از اثر پیچیده وزن در نسبت جرم/سفتی در مواد هدفمند و در مقیاس‌های غیرمحملی ناشی شده باشد.

شکل مودهای ارتعاشی به‌طور محسوس با شرایط مرزی تغییر می‌کند؛ در تیر ایستاده، تمرکز انرژی ارتعاشی در نیمه پایین بیشتر است و گره‌ها به پایه نزدیک‌ترند. در مجموع، یافته‌ها نشان می‌دهند که در تحلیل ارتعاشات آزاد سازه‌های FGP، فرضیات ساده‌ی کلاسیک ممکن است پاسخ‌گوی رفتار دقیق نباشند. اثرات ترکیبی غیرمحملی، تخلخل و توزیع ماده می‌توانند نقش تعیین‌کننده‌ای در پایداری دینامیکی سازه‌های نانومقیاس ایفا کنند. نتایج به‌دست‌آمده می‌توانند به‌عنوان مرجعی برای طراحی سازه‌هایی مانند نانوتیرها، حسگرهای ارتعاشی، و اجزای میکرومکانیکی عملگرها مورد استفاده قرار گیرند.

### ۴- مراجع

- [1] Eskandarzadeh M, et al. Functionally graded materials for electronic, biocompatible, and thermal resistant applications. *Journal of Material Science*. 2020;55:123–35.
- [2] Reddy JN. Nonlocal theories for bending, buckling, and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*. 2007;45:288–307.
- [3] Rahmani O, et al. Wave propagation in viscoelastic rotating functionally graded nanobeams. *Composite Structures*. 2023;300:115–30.
- [4] Zhang Y, et al. MEMS/NEMS applications in nanotechnology. *Journal of Nanoscience*. 2005;5:100–15.
- [5] Hosseini M, et al. Surface effects on biaxial buckling and free vibration of functionally graded nanoplates. *Composite Structures*. 2017;175:120–35.

nanoscaled beams. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 2018;40:1–15.

[30] Shariati M, Shafiei N, Bidgoli MR. Nonlinear vibration and buckling of functionally graded porous

In Press