

حل کامل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه الاستیسیته صفحه‌ای غیرخطی

کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، majide2001@gmail.com
 استاد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، mghannadk@shahroodut.ac.ir

مجید چنارانی
مهدی قنّاد*

چکیده

در این مقاله، معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت بارگذاری فشاری یکنواخت و گرمایی پایا، با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET) استخراج شده است. به دلیل وجود تغییرشکل‌های بزرگ در جهت شعاع و در نتیجه معادلات سینماتیک با جملات غیرخطی، معادله دیفرانسیل حاکم از نوع مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیر است که به کمک تکنیک اغتشاشات در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای حل شده است. با توجه به معادلات تعادل، شرایط مرزی فیزیکی و همچنین شرایط انتهایی متفاوت استوانه، تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی به صورت تحلیلی به دست آمده است. با توجه به نتایج حاصل از حل تحلیلی، تأثیر متغیرهای بارگذاری، ضخامت، جنس و شرایط مرزی بر مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی در پوسته‌ی استوانه‌ای، بررسی شده است. به منظور راستی‌آزمایی نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی اجزای محدود استوانه‌ی مذکور به کمک نرم‌افزار ANSYS انجام و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این پژوهش نشان می‌دهد که روند حل تحلیلی ارائه شده برای پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری و گرمایی از دقت خوبی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: استوانه‌ی جدار ضخیم، تحلیل ترموالاستیک، تحلیل غیرخطی، تغییرشکل بزرگ، نظریه کلاسیک، تکنیک اغتشاشات.

Complete Thermoelastic Solution of Pressurized Thick Cylinders with Large Deformation Using Nonlinear Plane Elasticity Theory

M. Chenarani

Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

M. Ghannad

Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

In this paper, the governing equation of axisymmetric thick-walled cylinders under uniform pressure and steady-state thermal loading, made of homogeneous and isotropic materials with large deformations is derived using the Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET). Because of large deformations along the radial direction and hence existence of nonlinear terms in kinematic equations, the governing equation is a nonlinear second-order equation with variable coefficients, which is solved in plane stress and plane stress states using perturbation theory. According to the equilibrium equation, physical boundary conditions and different end conditions of the cylinder; radial and circumferential normal stresses and radial displacement in cylindrical shells are calculated analytically. The effect of loading, thickness, material and boundary conditions on stresses and displacement in cylindrical shell is studied by the results obtained from analytical solution. For investigating the accuracy of the results obtained from the analytical solution, the numerical finite element modeling of mentioned cylinder is done with ANSYS software and the results of the two methods are compared. This research reveals that the obtained results by the mentioned analytical solution procedure have good accuracy for cylindrical shells under pressure and thermal loading.

Keywords: Thick-walled cylinder, Elastic analysis, Large deformation, Classical theory, Perturbation technique.

۱- مقدمه

باشد، جدار ضخیم می‌نامند [۱]. نظریه‌های مطرح شده برای پوسته‌های جدار ضخیم بر پایه‌ی نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (PET)^۱ و نظریه‌ی تغییرشکل برشی (SDT)^۲ می‌باشند. استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار و گرما در حوزه‌های صنعتی گوناگون کاربرد دارند. در نیروگاه‌ها، به‌ویژه در طراحی مخازن تحت فشار و رآکتورهای هسته‌ای، تحلیل غیرخطی با تغییرشکل‌های بزرگ موجب پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار و افزایش ایمنی می‌شود. در صنایع هوافضا و دفاعی، محفظه موتورهای راکت و اجزای فشارقوی نیازمند ارزیابی دقیق الاستیسیته‌ی غیرخطی هستند تا پایداری سازه در برابر فشار و دمای شدید تضمین گردد.

پوسته‌ها، سازه‌های خمیده‌ای هستند که ضخامت آنها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها، فراوان‌ترین و متنوع‌ترین سازه‌هایی هستند که در طبیعت و صنعت مشاهده می‌شوند. در چند دهه‌ی گذشته، مطالعه‌ی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای، به دلیل فراوانی کاربرد و مقاومت مطلوب در برابر بارگذاری‌های مختلف، بیش از انواع دیگر سازه‌های پوسته‌ای، توجه پژوهشگران را جلب کرده است. پوسته‌ها در دو گروه طبقه‌بندی می‌شوند؛ پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم. اگر نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی پوسته (h/R)، کوچک‌تر از ۱/۲۰ باشد، پوسته را جدار نازک و بزرگ‌تر از ۱/۲۰

¹ Plane Elasticity Theory (PET)

² Shear Deformation Theory (SDT)

نخستین بار، لامه در سال ۱۸۵۲، تحلیل الاستیک خطی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی را با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک الاستیسیته یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای ارائه کرد [۱]. نقدی و کوپر در سال ۱۹۵۶ نظریه‌ی تغییرشکل برشی را با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، برای پوسته‌ها معرفی کردند [۲]. میرسکی و هرمان در سال ۱۹۵۸ تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT)^۱، ارائه کردند [۳]. گرینسپن در سال ۱۹۶۰ مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های مختلف تحلیل خطی پوسته‌های استوانه‌ای متقارن محوری را انجام داد [۴]. سنדרز در سال ۱۹۶۳ با ارائه نظریه‌های غیرخطی برای پوسته‌های جدار نازک، نظریه‌ای دقیق برای تغییرشکل‌های بزرگ پوسته‌های جدار نازک ارائه کرد [۵]. هاگس و لیو در سال ۱۹۸۱ روش اجزای محدود غیرخطی را برای آنالیز شبه‌استاتیکی سه‌بعدی در پوسته‌هایی که تغییرشکل‌های بزرگ توأم با چرخش دارند، ارائه کردند [۶]. فوکویی و یاماناکا در سال ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رونگه-کوتا حل کردند [۷]. آباتا و نودا در سال ۱۹۹۴ تنش‌های گرمایی پایا را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را به‌دست آوردند [۸]. روحی و همکاران در سال ۲۰۰۵ یک راه حل نیمه‌تحلیلی برای تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با طول محدود از مواد با خواص متغیّر تابعی را ارائه کردند [۹]. ژیفای و همکاران در سال ۲۰۰۷ حل دقیق استوانه‌های توخالی از ماده‌ی ناهمگن FG را با روش چندلایه‌ای کردن استوانه که هر لایه به‌صورت ماده‌ی همگن با خواص مکانیکی ثابت در نظر گرفته شده، ارائه کردند [۱۰]. بیچ و تانگ در سال ۲۰۱۱ با ارائه‌ی حل تحلیلی، رفتار غیرخطی پوسته‌های کروی متقارن دومحوری کم‌عمق تحت بارگذاری فشاری خارجی یکنواخت و تحت تأثیر دما را بررسی کردند [۱۱]. قنّاد و زمانی‌نژاد در سال ۲۰۱۲ حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد FG را بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (PET) برای شرایط مرزی تنش صفحه‌ای^۲ و کرنش صفحه‌ای^۳ ارائه نمودند [۱۲]. آنها در سال ۲۰۱۲ بر مبنای نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT)، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم FGM را در حالت کلی استخراج و سپس برای استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای) به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند و با نتایج حل نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای مقایسه کردند [۱۳]. قنّاد و قارونی در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های متقارن محوری FGM تحت فشار را برای شرایط مرزی دو سر گیردار به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا (HSDT)^۴ ارائه نمودند [۱۴]. قنّاد و همکاران در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل

برشی و تکنیک اغتشاشات^۵ ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۱۵].

در سازه‌های فضاکار مانند خرپاها و گنبدها؛ همچنین در خمش تیرها، قاب‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها، ممکن است، تغییرشکل‌های بزرگ در هندسه‌ی سازه ایجاد شود، لذا تحلیل غیرخطی و بررسی آثار این رفتارها ضروری است. عارفی در سال ۲۰۱۳ تحلیل غیرخطی ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم پیزوالکتریک با خواص تابعی تحت بارهای گرمایی، مکانیکی و الکتریکی را با استفاده از ترکیب اصلاح‌شده‌ی روش تجزیه‌ی آدومیان و تقریب‌های پیایی ارائه کرد [۱۶]. ایشان در سال ۲۰۱۵ تحلیل گرمایی غیرخطی استوانه‌ی توخالی FGM با خواص وابسته به دما را با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی تقریب‌های پیایی ارائه کرد [۱۷]. موسائی در سال ۲۰۱۶ تحلیل ترموالاستیک غیرخطی استوانه‌ی جدار ضخیم FGM با خواص وابسته به دما را انجام داد. در این پژوهش معادلات غیرخطی به کمک تکنیک اغتشاشات حل شد و توزیع جابه‌جایی و تنش برای ماده‌ی الاستیک تراکم‌ناپذیر به‌دست آمد [۱۸]. کار و پندا در سال ۲۰۱۶ رفتار تغییرشکل ترمومکانیکی خطی و غیرخطی پل پوسته‌ی کروی FGM با خواص وابسته به دما را بر اساس قاعده‌ی میکرومکانیکی وویگت و نظریه تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا بررسی کردند. معادلات غیرخطی حاکم با استفاده از اصل تغییرات استخراج و به کمک روش اجزای محدود غیرخطی و حل تکراری مستقیم تحلیل شدند [۱۹]. عارفی و زنگور در سال ۲۰۱۷ تحلیل ترموالاستیک خطی و غیرخطی پوسته‌ی کروی FGM تحت بارهای گرمایی و مکانیکی را با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی به کمک تانسور کرنش لاگرانژ و روش تجزیه‌ی آدومیان ارائه کردند [۲۰]. تحلیل الاستیک و ترموالاستیک مواد فراکشسان (هایپرالاستیک)^۶ نیز از موضوعات قابل توجه پژوهشگران می‌باشد تا بتوانند درک صحیحی از رفتار آنها بیابند و گام مؤثری در طراحی و ساخت سازه‌ها بردارند. قارونی و قنّاد در سال ۲۰۱۹ حل غیرخطی استوانه‌های جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد فراکشسان بر مبنای مدل نئوهوکی^۷ را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و تکنیک اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۲۱]. سپس ایشان حل غیرخطی استوانه‌های جدار متغیّر تحت فشار نایکنواخت، ساخته‌شده از مواد فراکشسان بر مبنای مدل مونی-ریولین^۸ را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و روش مجانب‌های انطباق‌یافته (MAM)^۹ ارائه کردند [۲۲]. هاشمی و جعفری در سال ۲۰۲۰ ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های مفصلی از جنس مواد متغیّر تابعی دوجبهته را به‌صورت کاملاً تحلیلی بررسی کردند. ایشان براساس نظریه‌ی کلاسیک ورق‌ها، معادلات غیرخطی حرکت را استخراج کردند [۲۳]. سعیدی و همکاران در ۲۰۲۱ رفتار ترمو-الاستو-پلاستیک یک استوانه‌ی جدار ضخیم FGM را تحت فشار داخلی و گرادیان دما، با استفاده از روش تقریب پی‌درپی مورد تحلیل قرار دادند و توزیع تنش و کرنش در

⁵ Perturbation technique

⁶ Hyperelastic

⁷ Neo-Hookean

⁸ Mooney-Rivlin

⁹ Matched Asymptotic Method (MAM)

¹ First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

² Plane stress

³ Plane strain

⁴ Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT)

از بارگذاری و تغییرشکل، هم‌چنان مستوی و عمود بر آن باقی می‌مانند. معنای آن نادیده گرفتن اثر برش و در نتیجه قطری شدن تانسور تنش و تانسور کرنش می‌باشد. به بیانی دیگر، جابه‌جایی‌های شعاعی و طولی به صورت $u_r(r)$ و $u_x(x)$ می‌شوند.

در غیاب نیروهای حجمی، معادلات تعادل^۳ تنش عبارتند از:

$$\text{div} \vec{\sigma} = \vec{0} \quad \begin{cases} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ \sigma_{x,x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

σ_r ، σ_θ و σ_x به ترتیب تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی هستند. جنس استوانه از مواد تراکم‌ناپذیر با تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک می‌باشد. در این پژوهش از مدل غیرخطی سن‌ونان-کیرششف^۴ (کرنش‌های پیکربندی مرجع) با جابه‌جایی‌های بزرگ استفاده شده است. با توجه به حضور میدان دمایی پایا، معادلات سینماتیک^۵ غیرخطی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^T + (\vec{\nabla} \vec{u})^T (\vec{\nabla} \vec{u}) \right] + \alpha (\Delta T) \vec{I} \quad (2)$$

$$\Delta T = \Theta = T - T^*$$

که T^* دمای مرجع و Θ اختلاف دما می‌باشد.

با توجه به تقارن محوری استوانه (هندسه، جنس و بارگذاری) و جابه‌جایی‌های بزرگ در راستای شعاعی، معادلات سینماتیک (روابط کرنش-جابه‌جایی) عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2 \\ \varepsilon_x = u_{x,x} \\ \varepsilon^T = \alpha(\Delta T) = \alpha\Theta \end{cases} \quad (3)$$

ε_r ، ε_θ و ε_x به ترتیب کرنش‌های شعاعی، محیطی و طولی هستند. ε^T کرنش گرمایی و α ضریب انبساط گرمایی می‌باشند. با توجه به شرایط هندسی، مادی و مرزی خاص پوسته، تغییرشکل زاویه‌ای (کرنش برشی) و تغییرمکان زاویه‌ای (چرخش صلب) وجود ندارد و لذا از معادلات ساختاری^۶ خطی هوکی و تنش کوشی استفاده شده است. معادلات ساختاری (روابط تنش-کرنش) برای مواد هوکی همگن و همسانگرد و در حالت‌های مختلف، به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود [۱۲].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - E \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \alpha \Theta \quad (4)$$

E مدول یانگ و ν نسبت پواسون، خواص مکانیکی ماده‌ی استوانه هستند. A، B و C با توجه به شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شوند. الف) تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

$$\sigma_x = 0, \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \alpha\Theta \neq 0$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2}, \quad B = \frac{\nu}{1-\nu^2}, \quad C = \frac{1}{1-\nu} \\ \nu^* = \frac{B}{A} = \nu \end{cases} \quad (5)$$

راستای ضخامت را بر اساس ویژگی‌های ماده و شرایط بارگذاری ترمومکانیکی ارائه نمودند [۲۴]. حمدی و ابراهیم در سال ۲۰۲۲ فرضیه‌ی ترموالاستیسیته‌ی غیرخطی را برای مواد ترموالاستیک ناهمسانگرد به منظور تحلیل آثار گرمایی ناشی از تغییرشکل مکانیکی مطرح کردند و معادلات حاکم این مدل با یک زمان آسایش را برای نیم‌فضای یک‌بعدی، همگن و همسانگرد حل کردند [۲۵].

بهادرانی و همکاران به تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی، با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET)^۱ و تکنیک اغتشاشات برای تغییرشکل‌های بزرگ در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای پرداختند [۲۶]. دهقان و همکاران تحلیل ترموالاستیسیته‌ی غیرخطی استوانه‌ی جدار ضخیم FGM با خواص وابسته به دما را تحت فشار داخلی به کمک تکنیک اغتشاشات و روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته (GDQ)^۲ ارائه کردند [۲۷]. نصرالهی و همکاران، تحلیل کره‌های جدار ضخیم با تقارن دومحوری را تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی، با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی و تکنیک اغتشاشات برای تغییرشکل‌های بزرگ انجام دادند [۲۸]. رضایی و همکاران در سال ۲۰۲۴ تحلیل ترموالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت بار مکانیکی و گرمایی دوبعدی را که از دو طرف مقید شده بود، انجام دادند [۲۹]. جانی و همکاران در سال ۲۰۲۴ تحلیل ترموالاستیسیته‌ی غیرخطی کره‌ی جدار ضخیم پیزوالکتریک FGM تحت شوک گرمایی را با در نظر گرفتن خواص وابسته به شعاع و بر پایه‌ی نظریه لرد و شالمن انجام دادند. معادلات حاکم با استفاده از GDQ، روش نیومارک و الگوریتم پیکارد حل شدند [۳۰]. بهادرانی و همکاران در سال ۲۰۲۵ معادله حاکم بر استوانه‌های متقارن محوری FGM تحت فشار را با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های بزرگ با استفاده از NPET و به کمک تکنیک اغتشاشات، استخراج و سپس حل کردند [۳۱].

در مقاله‌ی حاضر با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET) و تکنیک اغتشاشات، حل عمومی استوانه‌های متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی و بار گرمایی پایا با تغییرشکل‌های بزرگ در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای ارائه و در نهایت مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی اجزای محدود انجام می‌شود. نظریه‌ی کلاسیک که برای حل خطی استوانه (با تغییرشکل‌ها و کرنش‌های کوچک) استفاده می‌شود، امکان تحلیل غیرخطی پوسته‌ها با تغییرشکل‌های بزرگ را ندارد؛ در صورتی که روش ارائه‌شده در این پژوهش، امکان تحلیل خطی (با تغییرشکل‌های کوچک) و غیرخطی پوسته‌ها (با تغییرشکل‌های بزرگ) را دارد.

۲- فرمول‌بندی مسئله

در نظریه‌ی کلاسیک یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (مستوی)، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر لایه‌ی میانی استوانه، پس

³ Equilibrium equations

⁴ Saint Venant-Kirchhoff

⁵ Kinematic equations

⁶ Constitutive equations

¹ Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET)

² Generalized Differential Quadrature (GDQ)

(ب) کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته)

$$\varepsilon_x = 0, \quad \sigma_x = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha\Theta \neq 0$$

$$\begin{cases} A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C = \frac{1}{1-2\nu} \\ \nu^* = \frac{B}{A} = \frac{\nu}{1-\nu} \end{cases} \quad (6)$$

برای تابع توزیع دما در حالت پایا و بدون منبع گرمایی داخلی، از معادله انتقال گرما به صورت زیر استفاده می‌شود که در این معادله k_t رسانایی گرمایی می‌باشد.

$$\nabla^2(k_t T) = 0 \quad (7)$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_t r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_t \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (8)$$

در حالت پایا و جریان گرمای یک‌بعدی شعاعی $(T(r))$ $\partial T / \partial \theta = 0$ و $\partial T / \partial x = 0$ (تقارن محوری) و نیز ثابت بودن رسانایی گرمایی، نتیجه می‌شود.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow T(r) = D_1 \ln r + D_2 \quad (9)$$

لایه‌ی داخلی استوانه تحت دمای T_i و لایه خارجی آن تحت دمای T_0 قرار دارد، بنابراین:

$$\text{B.C.} \begin{cases} T(r=r_i) = T_i \\ T(r=r_o) = T_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{T_0 - T_i}{\ln k} \\ D_2 = T_i \end{cases} \quad (10)$$

با تعریف دمای مازاد به صورت $\Theta = T - T_i$ و استفاده از شرایط مرزی، توزیع دما به صورت زیر خواهد بود.

$$T(r) = T_i + (T_0 - T_i) \frac{\ln \bar{r}}{\ln k} \rightarrow \Theta(r) = \Theta_i + (\Theta_0 - \Theta_i) \frac{\ln \bar{r}}{\ln k} \quad (11)$$

$$\bar{r} = \frac{r}{r_i} \quad \& \quad k = \frac{r_o}{r_i}$$

که در آن Θ_i و Θ_0 دمای مازاد در جدار درونی و بیرونی استوانه است. با جای‌گذاری معادله‌ی (۴) در معادله‌ی (۱):

$$[E(A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta) - EC\alpha\Theta]_{,r} + \frac{1}{r} [E(A-B)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)] = 0 \quad (12)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۳) در معادله‌ی (۱۲):

$$\left[A \left[u_{r,r} + \frac{1}{2} (u_{r,r})^2 \right] + B \left[\frac{1}{r} u_r + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_r \right)^2 \right] - C\alpha\Theta \right]_{,r} \quad (13)$$

$$+ \frac{(A-B)}{r} \left[\left[u_{r,r} + \frac{1}{2} (u_{r,r})^2 \right] - \left[\frac{1}{r} u_r + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_r \right)^2 \right] \right] = 0$$

پس از مشتق‌گیری و ساده کردن، نتیجه می‌شود.

$$(1 + u_{r,r}) u_{r,rr} + \left(1 + \frac{\nu^*}{r} u_r + \frac{1-\nu^*}{2} u_{r,r} \right) \frac{1}{r} u_{r,r} - \quad (14)$$

$$\left(1 + \frac{1+\nu^*}{2r} u_r \right) \frac{1}{r^2} u_r = \frac{C\alpha}{A} \Theta_{,r}$$

معادله‌ی (۱۵)، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیر می‌باشد که برای حل آن از روش بسط اغتشاشی مستقیم^۱ استفاده می‌شود. در این راستا، ابتدا باید معادله دیفرانسیل را به کمک پارامترهای معرفی شده در پیوست الف، بی‌بعد کرد.

$$\left(1 + \frac{h}{R} u_{r,r}^* \right) \frac{h}{R^2} u_{r,r}^* + \left(1 + \frac{\nu^* h}{R r} u_r^* + \frac{(1-\nu^*) h}{2R} u_{r,r}^* \right) \frac{h}{R^2} u_{r,r}^* - \left(1 + \frac{(1+\nu^*) h}{2R r} u_r^* \right) \frac{h}{R^2} u_{r,r}^* = \frac{C\alpha}{AR} \Theta_{,r}^* \quad (15)$$

با توجه به این‌که مشتقات مراتب بالاتر نسبت به مشتقات مراتب پایین‌تر، غالب نیستند؛ بنابراین معادله‌ی (۱۵) معرف یک مسأله‌ی اغتشاشی غیرتکین (منظم)^۲ است. جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به شکل بسط اغتشاشی زیر قابل بازنویسی است.

$$u_r^* = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (16)$$

با استفاده از جای‌گذاری بسط اغتشاشی (۱۶) در معادله‌ی (۱۵) و سپس مرتب کردن معادله‌ی حاصل بر اساس توان‌های مختلف پارامتر اغتشاشی ε ، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{h}{R^2} \left(u_{0,r}^{**} + \frac{1}{r^*} u_{0,r}^{**} - \frac{1}{r^{*2}} u_0 \right) + \varepsilon \frac{h}{R^2} \left[\left(u_{1,r}^{**} + \frac{1}{r^*} u_{1,r}^{**} - \frac{1}{r^{*2}} u_1 \right) + \left(u_{0,r}^{**} \right) u_{0,r}^{**} + \left(\frac{\nu^*}{r^*} u_0 + \frac{1-\nu^*}{2} u_{0,r}^* \right) \frac{1}{r^*} u_{0,r}^* - \left(\frac{1+\nu^*}{2r^*} u_0 \right) \frac{1}{r^{*2}} u_0 \right] + 0(\varepsilon^2) = \frac{C\alpha}{AR} \Theta_{,r}^* \quad (17)$$

از آن‌جا که ε عدد بسیار کوچکی است، معادله‌ی (۱۷) زمانی برقرار است که ضرایب توان‌های مختلف ε ، برابر صفر باشند. بنابراین می‌توان یک معادله‌ی پیچیده‌ی غیرخطی را تبدیل به چندین معادله‌ی خطی ساده‌تر نمود که از نظر مرتبه‌ی بزرگی با یکدیگر متفاوت هستند. معادله اصلی با مرتبه‌ی صفر (ضریب ε^0) عبارت است از:

$$\frac{h}{R^2} \left[u_{0,r}^{**} + \frac{1}{r^*} u_{0,r}^{**} - \frac{1}{r^{*2}} u_0 \right] = \frac{C\alpha}{AR} \frac{d\Theta}{dr^*} \quad (18)$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{r^*} \left(r^* u_0 \right)_{,r^*} \right)_{,r^*} = \frac{C\alpha R}{Ah} \Theta_{,r^*}$$

که یک معادله‌ی دیفرانسیل اویلر-کوشی است و پاسخ آن عبارت است از:

$$u_0(r^*) = r^{*m} \Rightarrow u_0 = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} + \frac{C\alpha R}{Ah} \frac{1}{r^*} \quad (19)$$

$$I^* = \int_{r_i}^{r_o} \Theta(r) r^* dr^*$$

که $u_r^* = u_0$ پاسخ خطی (PET) مسأله می‌باشد. معادله‌ی بعدی، مرتبه‌ی یک (ضریب ε^1) است.

$$u_{1,r}^{**} + \frac{1}{r^*} u_{1,r}^{**} - \frac{1}{r^{*2}} u_1 = - \left[\left(u_{0,r}^{**} \right) u_{0,r}^{**} + \left(\frac{\nu^*}{r^*} u_0 + \frac{1-\nu^*}{2} u_{0,r}^* \right) \frac{1}{r^*} u_{0,r}^* - \left(\frac{1+\nu^*}{2r^*} u_0 \right) \frac{1}{r^{*2}} u_0 \right] \quad (20)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۱۹) در معادله‌ی (۲۰) و پس از مشتق‌گیری و ساده‌سازی نتیجه می‌شود.

² Nonsingular (regular) perturbed problem

¹ Straightforward perturbed expansion method

$$\begin{cases} \sigma_{r|_{r=r_1}}^* = -P_1^* \\ \sigma_{r|_{r=r_0}}^* = -P_0^* \end{cases} \quad (24)$$

با جای گذاری روابط تنش در شرایط مرزی (۲۴)، دو رابطه با توان‌های مختلفی از ϵ به دست می‌آید که اگر توان‌های مختلف ϵ در دو طرف تساوی برابر قرار داده شوند، شرایط مرزی مربوط به هر معادله به دست می‌آید. بنابراین برای به دست آوردن ثابت‌های معادلات (۱۹) و (۲۲) از شرایط مرزی زیر استفاده می‌شود.

الف) شرایط مرزی بی‌بعدشده‌ی معادله‌ی (۱۹):

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r_1^*} \right] - (A-B)\frac{C\alpha R}{Ah} \frac{I_1^*}{r_1^{*2}} = -P_1^* \\ \text{b)} & \left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r_0^*} \right] - (A-B)\frac{C\alpha R}{Ah} \frac{I_0^*}{r_0^{*2}} = -P_0^* \end{aligned} \quad (25)$$

با حل دستگاه معادلات (۲۵)، ثابت‌های C_1 و C_2 به دست می‌آید.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_1^* - k^2 P_0^*}{(A+B)(k^2-1)} + \frac{(A-B)C\alpha R}{Ah} \frac{I_0^*}{(k^2-1)r_1^{*2}} \\ C_2 = \frac{(P_1^* - P_0^*)r_0^{*2}}{(A-B)(k^2-1)} + \frac{C\alpha R}{Ah} \frac{I_0^*}{(k^2-1)} \end{cases} \quad (26)$$

$$I_0^* = \int_{r_1^*}^{r_0^*} \Theta(r) r^* dr^*$$

ب) شرایط مرزی بی‌بعدشده‌ی معادله‌ی (۲۲): به کمک نرم‌افزار Maple به دست آمدند و همچنین با استدلال مشابه، ثابت‌های C_3 و C_4 نیز به صورت پارامتری به کمک نرم‌افزار مذکور به دست می‌آیند. بنابراین جابه‌جایی شعاعی به صورت زیر قابل بازنویسی است.

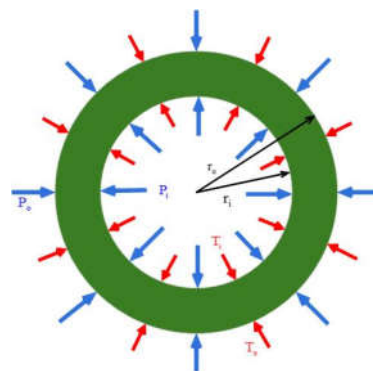
$$\begin{aligned} u_r^* &= \left[C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} + \frac{C\alpha R}{Ah r^*} \left(\frac{\Theta_i - (-r_1^*)^2 + (r^*)^2}{2} + \frac{(\Theta_o - \Theta_i)}{2 \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)} \right) (r^*)^2 \right. \\ & \left. \ln \frac{r^*}{r_1^*} + \frac{(r_1^*)^2}{2} - \frac{(r^*)^2}{2} \right] + \epsilon \left[C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + \frac{1}{8(r^*)^3 A^2 h^2 \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)} \right. \\ & \left(2 \left(-\frac{\alpha \Theta_i CR (r_1^*)^2}{2} + Ah C_2 \right) (1+v^*) \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) + 4R(\Theta_i - \Theta_o) \right. \\ & \left. \left(\frac{\Theta_i CR ((r_1^*)^2 v^* + (r^*)^2) \alpha}{2} + Ah(C_1 (r^*)^2 - C_2 v^*) \right) (r^*)^2 \right. \\ & \left. \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) + \frac{\Theta_i CR}{4} (v^* (r^*)^2 (r_1^*)^2 - (r^*)^4 + \frac{(r_1^*)^2 (1+v^*)}{2}) \alpha - \right. \\ & \left. \frac{Ah}{2} (C_1 (r^*)^4 + C_2 v^* (r^*)^2 + \frac{C_2 (1+v^*) (r_1^*)^2}{2}) \alpha C \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) - \right. \\ & \left. R^2 (\Theta_i - \Theta_o)^2 \left(\ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) \right)^2 (r^*)^4 - \frac{1}{2} (r^*)^2 (1+v^*) (r^*)^2 + 2(r_1^*)^2 v^* \right) \\ & \left. \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) + \left(\frac{(1+v^*) (r^*)^4}{4} - \frac{v^* (r^*)^2 (r_1^*)^2}{2} - \frac{(r_1^*)^4 (1+v^*)}{8} \right) \alpha^2 C^2 \right] \end{aligned} \quad (27)$$

حال برای به دست آوردن تنش‌های شعاعی، محیطی و محوری بی‌بعد، دو حالت در نظر گرفته می‌شود.
الف) اگر $u_r^* = u_0^*$ (حل خطی):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r^*} (r^* u_1)_{,r^*} \right)_{,r^*} &= -\frac{1}{2A^2 h^2 r^{*5} \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)^2} \left[-4 \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. \alpha \Theta_i CR (r_1^*)^2 - \frac{1}{2} \alpha \Theta_i CR (r_1^*)^2 \right) (1+v^*) \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)^2 - 2 \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{2} \left((1+v^*) r_1^{*4} - r^{*2} v^* r_1^{*2} + r^{*4} \right) CR \Theta_i \alpha + h \right. \right. \\ & \left. \left. (-C_2 (1+v^*) r_1^{*2} + C_1 r^{*4} + C_2 r^{*2} v^*) A \right) CR (\Theta_i - \Theta_o) \right. \\ & \left. \alpha \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) + C^2 R^2 (\Theta_i - \Theta_o)^2 \left(\ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) r^{*4} - \frac{1}{4} (r^* + r_1^*) \right. \right. \\ & \left. \left. \left((-v^* - 1) r_1^{*2} + r^{*2} (v^* - 1) \right) (r^* - r_1^*) \right) \alpha^2 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

با حل معادله‌ی (۲۱)، مقدار u_1 به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} u_1 &= C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + \frac{1}{8r^{*3} A^2 h^2 \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)^2} \\ & \left[2 \left(-\frac{\alpha \Theta_i CR (r_1^*)^2}{2} + Ah C_2 \right)^2 (1+v^*) \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)^2 + 4C(\Theta_i - \Theta_o) \right. \\ & \left[\frac{\Theta_i CR ((r_1^*)^2 v^* + r^{*2}) \alpha}{2} + Ah(C_1 r^{*2} - C_2 v^*) \right] r^{*2} \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) - \\ & \left. \frac{\Theta_i C}{4} \left(r^{*4} - r^{*2} v^* r_1^{*2} - \frac{(1+v^*) r_1^{*4}}{2} \right) R \alpha \right. \\ & \left. - \frac{hA}{2} \left(C_1 r^{*4} + C_2 r^{*2} v^* + \frac{C_2 (1+v^*) (r_1^*)^2}{2} \right) \right] \alpha R \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) \\ & - C^2 \left[\ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right)^2 r^{*4} - (1+v^*) r^{*2} + 2r_1^{*2} v^* \right] \frac{r^{*2}}{2} \ln\left(\frac{r_0^*}{r_1^*}\right) \\ & \left. + \frac{(1+v^*) r^{*4}}{4} - \frac{r^{*2} v^* r_1^{*2}}{2} - \frac{(1+v^*) r_1^{*4}}{8} \right] (\Theta_i - \Theta_o)^2 \alpha^2 R^2 \end{aligned} \quad (22)$$

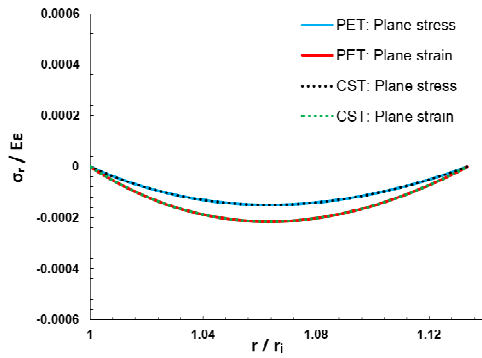


شکل ۱- مقطع استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار و دما

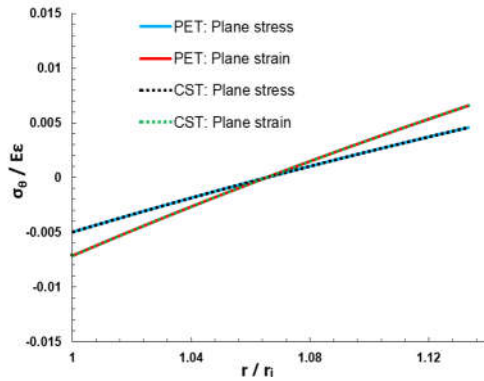
از آنجا که بارگذاری به صورت فشار داخلی و خارجی است، شرایط مرزی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_{r|_{r=r_1}} = -P_i \\ \sigma_{r|_{r=r_0}} = -P_o \end{cases} \quad (23)$$

برای اعمال شرایط مرزی، ابتدا باید آنها را با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در پیوست الف، بی‌بعد کرد.

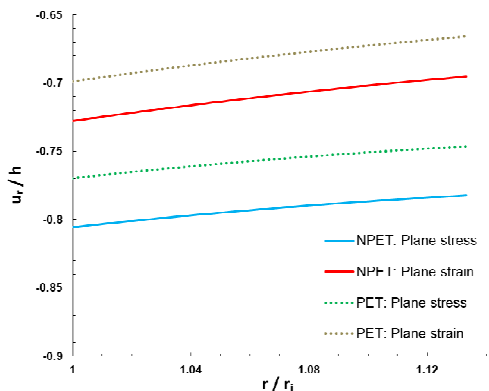


شکل ۴- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد (بارگذاری گرمایی)



شکل ۵- توزیع تنش محیطی بی‌بعد (بارگذاری گرمایی)

شکل‌های ۳ تا ۵، مقایسه‌ی مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش محیطی را با استفاده از حل خطی (PET) این مقاله با نظریه‌ی کلاسیک (CST) نشان می‌دهد. نمودارها نشان می‌دهند که نتایج تحلیل خطی با روش کنونی با نتایج تحلیل با نظریه‌ی کلاسیک یکسان هستند.



شکل ۶- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد (بارگذاری فشاری و گرمایی)

$$\sigma_r^* = \left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r_*^2} \right] - (A-B)\frac{C\alpha R}{Ah}\frac{I^*}{r_*^2}$$

$$\sigma_\theta^* = \left[(A+B)C_1 + (A-B)\frac{C_2}{r_*^2} \right] - (A-B)\frac{C\alpha R}{Ah}\left(\Theta - \frac{I^*}{r_*^2}\right) \quad (28)$$

$$\sigma_x^* = \nu\left(\sigma_r^* + \sigma_\theta^*\right) - \frac{\alpha\Theta}{\epsilon}$$

$$= \nu\left(2C_1(A+B) - (A-B)\frac{C\alpha R}{Ah}\Theta\right) - \frac{\alpha\Theta}{\epsilon}$$

ب) اگر $u_r^* = u_0 + \epsilon u_1$ باشد، حل غیرخطی به دست می‌آید. تنش مؤثر با توجه به رابطه‌ی فن میزس محاسبه می‌شود.

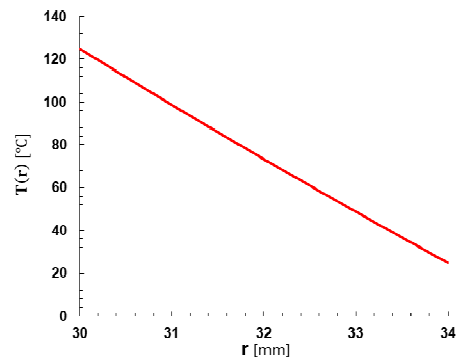
$$\sigma_{eff}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_r^* - \sigma_\theta^*)^2 + (\sigma_\theta^* - \sigma_x^*)^2 + (\sigma_x^* - \sigma_r^*)^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

۳- اعتبارسنجی نتایج

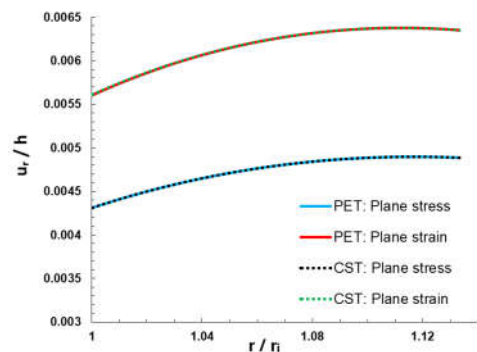
به منظور بررسی نتایج به دست آمده، مقایسه‌هایی انجام شده است.

۳-۱- مقایسه حل خطی با حل غیرخطی استوانه

ابتدا توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه‌ی جدار ضخیم، با حل خطی حاصل از نظریه‌ی کلاسیک (CST) [۳۲] مقایسه شده است. استوانه‌ی به شعاع داخلی $r_1 = 30 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_0 = 34 \text{ mm}$ تحت فشار خارجی $P_0 = 8 \text{ MPa}$ ، دمای داخلی $T_1 = 125^\circ \text{C}$ ، دمای خارجی $T_0 = 25^\circ \text{C}$ ، دمای مرجع (دمای محیط) $T^* = 25^\circ \text{C}$ و مدول کشسانی $E = 0.7 \text{ GPa}$ در نظر گرفته شده است. شرط مرزی طولی استوانه در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای هستند.



شکل ۲- توزیع دما در راستای ضخامت



شکل ۳- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد (بارگذاری گرمایی)

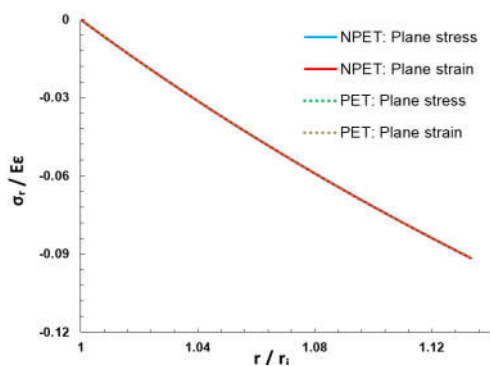
شکل‌های ۶ تا ۱۰ توزیع مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش محوری و تنش فن میزس را در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل‌های ۶ تا ۱۰ مشاهده می‌شود، حل غیرخطی بر روی جابه‌جایی اثر می‌گذارد، ولیکن بر روی تنش‌ها تأثیر چندانی ندارد. یعنی جابه‌جایی ناشی از حل غیرخطی به‌صورت آشکار متفاوت از حل خطی است و لذا در انبساط^۱ شعاعی استوانه اهمیت پیدا می‌کند. ولیکن تنش ناشی از حل غیرخطی با خطی تفاوت آشکاری ندارد که در تسلیم ماده‌ی استوانه اهمیت دارد.

۳-۲- مقایسه با نتایج حل عددی

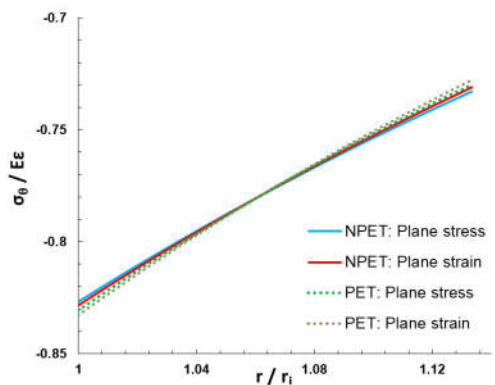
به منظور ارائه‌ی حل اجزای محدود، استوانه‌ی جدار ضخیم مذکور تحت فشار خارجی $P_0 = 80 \text{ MPa}$ ، دمای داخلی $T_i = 125^\circ \text{C}$ ، دمای خارجی $T_o = 25^\circ \text{C}$ و مدول کشسانی $E = 200 \text{ GPa}$ با استفاده از نرم‌افزار ANSYS تحلیل شد.

برای مدل‌سازی جداره‌ی استوانه با توجه به تقارن محوری، از المان Solid 183 نوع Plane استفاده شده است که دارای ۸ گره به‌صورت چهارضلعی می‌باشد. در این المان علاوه بر گره‌های گوشه، گره‌ی دیگری در وسط اضلاع وجود دارد که امکان استفاده از تابع شکل غیرخطی (درجه‌ی دو) را برای درون‌یابی میسر می‌کند. ماتریس سختی این المان 16×16 می‌باشد. با مدل‌سازی مقطع طولی پوسته و اعمال بارگذاری فشاری و گرمایی می‌توان رفتار غیرخطی استوانه را بررسی کرد.

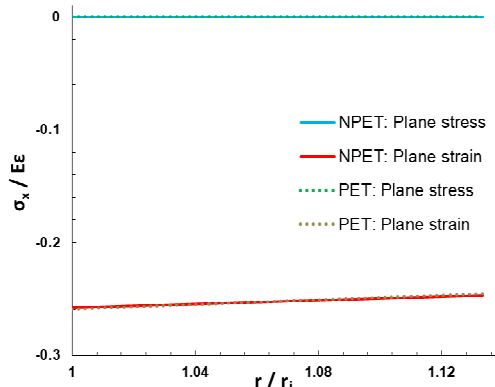
شکل ۱۱ مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، شکل ۱۲ مقادیر بی‌بعد تنش شعاعی و شکل ۱۳ مقادیر بی‌بعد تنش محیطی را در حالت کرنش صفحه‌ای نشان می‌دهند. در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ حل تحلیلی غیرخطی با حل عددی اجزای محدود غیرخطی مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی و محیطی به‌دست آمده از هر دو روش حل برهم منطبق هستند.



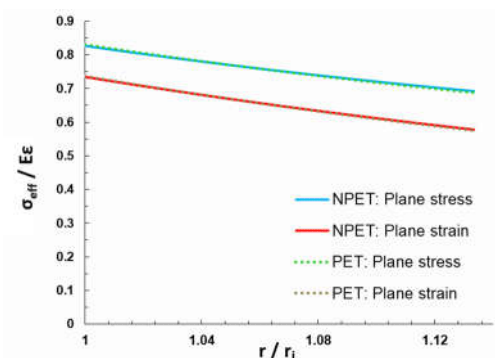
شکل ۷- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد (بارگذاری فشاری و گرمایی)



شکل ۸- توزیع تنش محیطی بی‌بعد (بارگذاری فشاری و گرمایی)

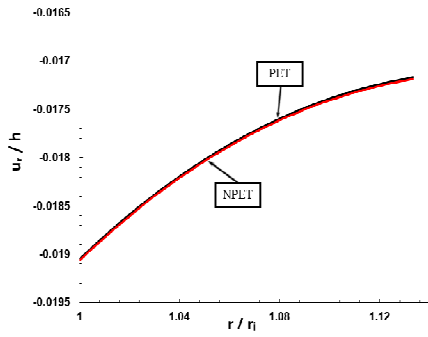


شکل ۹- توزیع تنش محوری بی‌بعد (بارگذاری فشاری و گرمایی)

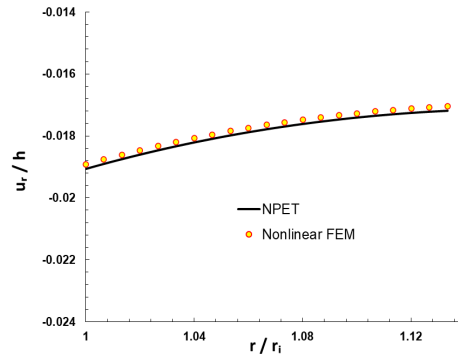


شکل ۱۰- توزیع تنش مؤثر بی‌بعد (بارگذاری فشاری و گرمایی)

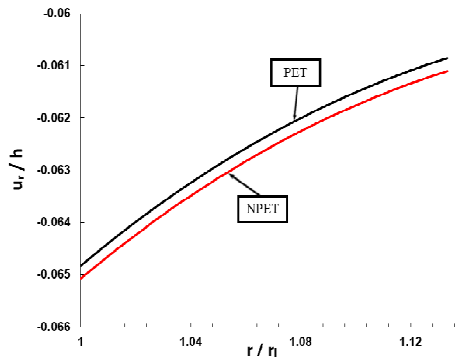
¹ Expansion



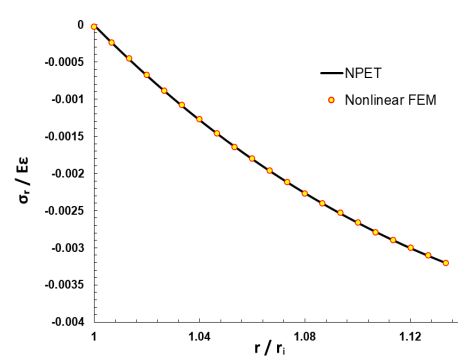
شکل ۱۴- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_0^* = 0.0032$



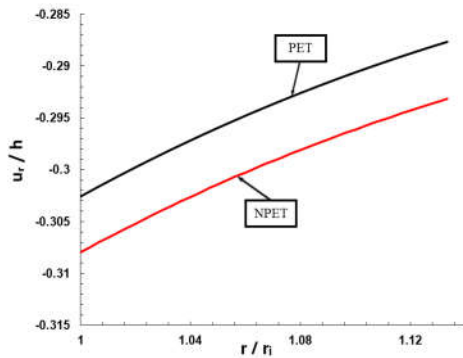
شکل ۱۱- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد (بارگذاری ترکیبی)



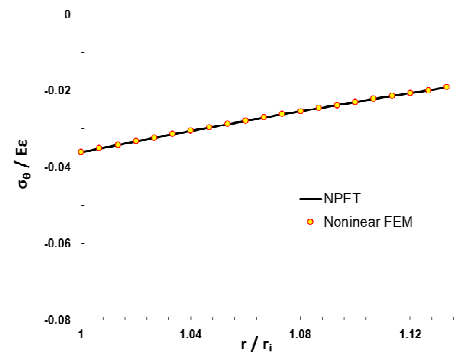
شکل ۱۵- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_0^* = 0.00914$



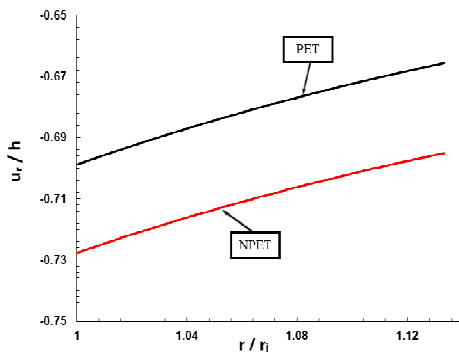
شکل ۱۲- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد (بارگذاری ترکیبی)



شکل ۱۶- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_0^* = 0.04$



شکل ۱۳- توزیع تنش محیطی بی‌بعد (بارگذاری ترکیبی)



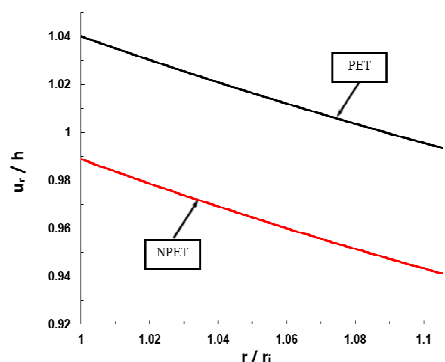
شکل ۱۷- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_0^* = 0.0914$

۳-۳- پارامترهای مؤثر بر پاسخ غیرخطی

در ادامه، مقایسه‌های دیگری بین دو حل خطی و غیرخطی انجام می‌شود که در آن اثر دو پارامتر، نرمی و ضخامت بر پاسخ غیرخطی بررسی شده است.

۳-۳-۱- اثر نرمی بر پاسخ غیرخطی

به‌منظور ارائه‌ی اثر پارامتر نرمی بر پاسخ غیرخطی مسأله، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی همگن جدار ضخیم در شکل‌های ۱۴ تا ۱۷ برای چهار مقدار $P_0^* = 0.00914, 0.0032, 0.0914, 0.04$ رسم شده است، که $P_0^* = \frac{P_0}{\epsilon E}$ است. برای تمام نمودارها $r_i = 30 \text{ mm}$ ، $r_o = 34 \text{ mm}$ ، $T_0 = 25^\circ\text{C}$ و $T_1 = 125^\circ\text{C}$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۲۱- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 4 \text{ mm}$

۴- نتیجه‌گیری

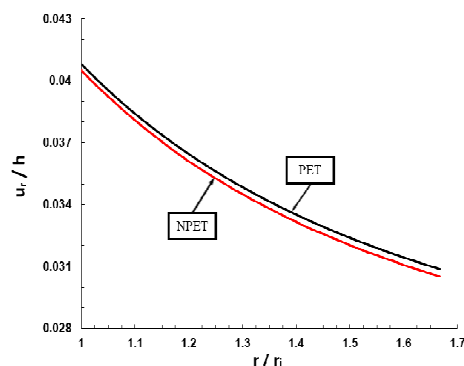
در این مقاله، استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاری ترمومکانیکی با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های بزرگ در راستای شعاعی بررسی شد. با توجه به نتایج حاصل از تحلیل، مشاهده شد که تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه‌های جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار و دمای پایا، به خواص مکانیکی ماده و شرایط انتهایی استوانه وابسته هستند. بررسی توزیع تنش‌ها نشان داد که تنش شعاعی در راستای ضخامت کاهش می‌یابد، در حالی که جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی از سطح داخلی به سطح خارجی روند افزایشی دارند. مقایسه مدل غیرخطی (NPET) با مدل خطی (PET) در شرایط بارگذاری مکانیکی-گرمايي نشان داد که بارگذاری موجب افزایش جابه‌جایی شعاعی در استوانه شده و الگوی توزیع تنش‌ها را نیز تحت تأثیر کمی قرار داده است. با توجه به تغییر در جنس و ضخامت استوانه، ملاحظه شد که تأثیر دو پاسخ خطی و غیرخطی در جابه‌جایی به دلیل جابه‌جایی‌های بزرگ مشهود است و در تنش‌ها به دلیل کرنش‌های کوچک ناچیز می‌باشد. یعنی جابه‌جایی ناشی از حل غیرخطی به صورت آشکار متفاوت از حل خطی است و لذا در انبساط شعاعی استوانه اهمیت پیدا می‌کند. ولیکن تنش ناشی از حل غیرخطی با خطی تفاوت آشکاری ندارد که در تسلیم ماده‌ی استوانه اهمیت دارد. رفتار پوسته‌های استوانه‌ای بسیار سفت و ضخیم (مانند پوسته‌های فولادی)، کاملاً خطی است. بنابراین در کاربردهای صنعتی و در فشارهای کاری متعارف، چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی سازه، به شرط آن‌که پوسته نازک و نرم نباشد، خطای بسیار کمی ایجاد می‌کند.

۵- فهرست علائم

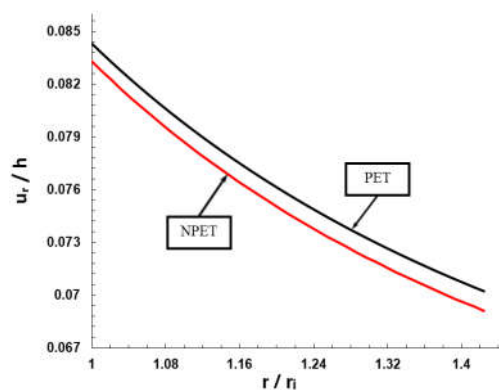
علائم یونانی:	علائم لاتین:
σ تنش، N/m^2	r مختصه‌ی شعاعی، m
σ^* تنش بی‌بعد	h ضخامت، m
ε کرنش، m/m	R شعاع لایه‌ی میانی، m
ν نسبت پواسون	P فشار، N/m^2
ϵ پارامتر اغتشاشی	P^* فشار بی‌بعد
α ضریب انبساط گرمایی، $1/^\circ\text{C}$	T دما، $^\circ\text{C}$
Θ اختلاف دما، $^\circ\text{C}$	E مدول کشسانی، N/m^2
	u جابه‌جایی، m

۳-۲- اثر ضخامت بر پاسخ غیرخطی

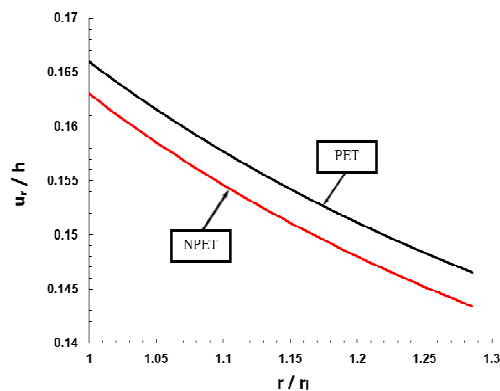
تغییرات ضخامت استوانه، دومین پارامتری است که اثر آن بر پاسخ غیرخطی بررسی شده است. بدین منظور جابه‌جایی شعاعی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت فشار داخلی یکنواخت $P_i = 8 \text{ MPa}$ ، دمای داخلی $T_i = 125^\circ\text{C}$ ، دمای خارجی $T_o = 25^\circ\text{C}$ و مدول الاستیسیته $E = 0.7 \text{ GPa}$ همراه با ضخامت‌های مختلف بررسی شد که نتایج آن در شکل‌های ۱۸ تا ۲۱ آورده شده‌اند. برای تمامی نمودارها، شعاع لایه‌ی میانی $R = 40 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۸- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 20 \text{ mm}$



شکل ۱۹- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 14 \text{ mm}$



شکل ۲۰- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 10 \text{ mm}$

۶- پیوست‌ها

پیوست الف: بی‌بعدسازی

معرفی مشتق‌گیری‌ها و پارامترهای بی‌بعدی که در معادله‌های (۱۴) تا (۲۹) از آن‌ها استفاده شده است.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{h}{R} \square 1 & (34) & \quad u_r^* = \frac{u_r}{h} & (30) \\ p^* &= \frac{p}{\epsilon E} & (35) & \quad r^* = \frac{r}{R} & (31) \\ \sigma^* &= \frac{\sigma}{\epsilon E} & (36) & \quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{R} \frac{d}{dr^*} & (32) \\ & & & \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2}{dr^{*2}} & (33) \end{aligned}$$

۷- مراجع

- [1] Lamé G. *Lessons on the Mathematical Theory of Elasticity of Solid Bodies*. Mallet-Bachelier. Paris; 1852.
- [2] Naghdi PM, Cooper RM. Propagation of elastic waves in cylindrical shells. including the effects of transverse shear and rotatory inertia. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956;28(1):56-63.
- [3] Mirsky I, Hermann G. Axially symmetric motions of thick cylindrical shells. *Journal of the Applied Mechanics*. 1958;25(1):97-102.
- [4] Greenspon JE. Vibrations of a thick-walled cylindrical shell-comparison of the exact theory with approximate theories. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1960;32(5): 571-578.
- [5] Sanders JL. Nonlinear theories for thin shells. *Journal of Quarterly of Applied Mathematics*. 1963;21(1): 21-36.
- [6] Hughes TJR, Liu WK. Nonlinear finite element analysis of shells, Part I: Three-dimensional shells. *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1981;26(3): 331-362.
- [7] Fukui Y, Yamanaka N. Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure. *JSM International Journal, Ser. I, Solid Mechanics*. 1992;35(4):379-385.
- [8] Obata Y, Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a sphere of a functionally gradient material. *Thermal Stresses*. 1994;17(3):471-487.
- [9] Ruhi M, Angoshtari A, Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials. *Thermal Stresses*. 2005;28(4):391-408.
- [10] Zhifei S, Taotao Z, Hongjun X. Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders. *Journal of the Composite Structures*. 2007;79:140-147.
- [11] Bich DH, Van Tung H. Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects. *Non-Linear Mechanics*. 2011;46(9):1195-1204.
- [12] Ghannad M, Nejad MZ. Complete elastic solution of pressurized thick cylindrical shells made of heterogeneous functionally graded materials. *Mechanika*. 2012;18(6):640-649.
- [13] Ghannad M, Nejad MZ. Elastic analysis of heterogeneous thick cylinders subjected to internal or external pressure using shear deformation theory. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2012;9(6):117-136.
- [14] Ghannad M, Gharooni H. Displacements and stresses in pressurized thick FGM cylinders with varying properties of power function based on HSDT. *Journal of Solid Mechanics*. 2012;4(3):237-251.
- [15] Ghannad M, Rahimi GH, Nejad MZ. Determination of displacements and stresses in pressurized thick cylindrical shells with variable thickness using perturbation technique. *Mechanika*. 2012;18(1):14-21.
- [16] Arefi M. Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder. *Acta Mechanica*. 2013;224:2771-2783.
- [17] Arefi M. Nonlinear thermal analysis of a hollow functionally graded cylinder with temperature-variable material properties. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015;56(2):267-273.
- [18] Moosaie A. A nonlinear analysis of thermal stresses in an incompressible functionally graded hollow cylinder with temperature-dependent material properties. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2016;55(2):212-220.
- [19] Kar VR, panda SK. Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2016;29(1):173-183.
- [20] Arefi M, Zenkour AM. Nonlinear and linear thermo-elastic analyses of a functionally graded spherical shell using the Lagrange strain tensor. *Smart Structures and Systems*. 2017;19(1):33-38.
- [21] Gharooni H, Ghannad M. Nonlinear analysis of radially functionally graded hyperelastic cylindrical shells with axially-varying thickness and non-uniform pressure loads based on perturbation theory. *Journal of Computational Applied Mechanics*. 2019;50(2):324-340.
- [22] Gharooni H, Ghannad M. Nonlinear analytical solution of nearly incompressible hyperelastic cylinder with variable thickness under non-uniform pressure by perturbation technique. *Journal of Computational Applied Mechanics*. 2019;50(2):395-412.
- [23] Hashemi S, Jafari AA. Nonlinear free and forced vibrations of in-plane bi-directional functionally graded rectangular plate with temperature-dependent properties. *Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2020;20(8):97-129.
- [24] Saeedi S, Kholdi M, Loghman A, Ashrafi H, Arefi M. Thermo-elasto-plastic analysis of thick-walled cylinder made of functionally graded materials using successive approximation method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2021;194:104481.
- [25] Hamdy MY, Ibrahim AA. Nonlinear generalized thermoelasticity: Theory and application. *Journal of Umm Al-Qura University for Engineering and Architecture*. 2022;13(1-2):27-36.
- [۲۶] بهادرانی ن، فتاد م، سبحانی م.ج. حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۲، د. ۵۳، ش. ۳، ص. ۱۶۳-۱۷۱.
- [۲۷] دهقان م، شهریار ب، موسائی ا. تحلیل ترموالاستیک غیرخطی استوانه‌ی FG با خواص تابع دما برپایه‌ی تئوری اغتشاش و روش مربعات ديفرانسیلی. *مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*. ۱۴۰۲، د. ۱۳، ش. ۴، ص. ۱-۱۴.
- [۲۸] نصرالهی پ، فتاد م، مدبری ب. حل کامل غیرخطی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۳، د. ۵۴، ش. ۱، ص. ۸۱-۹۰.
- [29] Ramezani F, Nejad MZ, Ghannad M. Bi-directional thermoelastic analysis of pressurized thick cylindrical shell with nonlinear variable thickness. *Computational Applied Mechanics*. 2024;55(1):125-143.
- [30] Jani SMH, Kiani Y. Nonlinear generalized piezothermoelasticity of spherical vessels made of functionally graded piezoelectric materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024;169:106010.
- [31] Bahadorani N, Ghannad M, Sohani MH, Modiri B. Large deformation elastic analysis of pressurized FGM thick cylindrical shells with nonlinear plane elasticity theory (NPET). *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2025;12(1):129-140.
- [32] Hetnarski RB, Eslami MR. *Thermal Stresses; Advanced Theory and Applications*. Springer; 2009.