

بررسی تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر مشخصات اختلاطی یک میدان جریان مغشوش همسانگرد دوبعدی

مهزاد چیت‌ساز

صابر خوئی

محمد امین هوشیاری

مانی فتحعلی*

دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران،
mchitsaz@mail.kntu.ac.ir

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران،
skhoei@email.kntu.ac.ir

دانشجوی کارشناسی، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران،
mohammadaminhoshyari@email.kntu.ac.ir

دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران،
mfathali@kntu.ac.ir

چکیده

در این پژوهش، تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر مشخصات اختلاطی یک میدان جریان مغشوش همسانگرد دوبعدی با اتلاف آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای حل معادلات جریان هیدرومغناطیسی تراکم‌ناپذیر، از شبیه‌سازی عددی مستقیم با رویکرد شبه‌طیفی استفاده شده است. به‌منظور بررسی نحوه اثرگذاری میدان مغناطیسی بر مشخصات اختلاطی جریان، تغییرات بودجه انرژی و مشخصات ساختاری میدان جریان، تحت تأثیر شدت‌های متفاوتی از میدان مغناطیسی تصادفی اولیه مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی، آهنگ افت انرژی جنبشی افزایش و آهنگ استهلاک انرژی ناشی از اثرات لزجت کم می‌شود. با افزایش شدت میدان مغناطیسی، آهنگ رشد طول مشخصه انتگرالی جریان و میکرو-مقیاس تیلور کاهش می‌یابد. همچنین بررسی شار انرژی میدان جریان نشان می‌دهد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی، انتقال انرژی از گردابه‌های کوچک به بزرگ کاهش می‌یابد. حضور میدان مغناطیسی، توانایی اختلاط میدان جریان را نیز کاهش می‌دهد. برای بررسی کمی این موضوع، تغییرات ضخامت لایه اختلاطی تحت تأثیر میدان مغناطیسی با شدت‌های مختلف، مورد تحلیل قرار گرفت و نشان داده شد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی، آهنگ رشد این کمیت کاهش می‌یابد. **واژه‌های کلیدی:** جریان هیدرومغناطیسی، جریان هیدرودینامیکی، میدان جریان همسانگرد، آهنگ استهلاک انرژی، اسکالر غیرفعال، ضخامت لایه اختلاطی.

Impact of an initial random magnetic field on the mixing characteristics of a two-dimensional turbulent isotropic flow field

M. Chitsaz

S. Khoei

M. A. Hoshyari

M. Fathali

Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

The effect of an initial random magnetic field on mixing characteristics of free-decaying two-dimensional incompressible isotropic turbulence is investigated using direct numerical simulation. To explore the impact of magnetic field on mixing characteristics of turbulent flow, different intensities of the initial magnetic field are imposed on an identical flow field, and its effect on energy budget and structural characteristics of the flow field are examined. The results indicate that the rate of kinetic energy loss increases, while the viscous energy dissipation rate decreases with increasing the initial magnetic field intensity. Furthermore, increasing the magnetic field intensity leads to a decrease in the rate of changes in integral length-scale and Taylor micro-scale of the flow field. Moreover, the analysis of the energy flux of flow field reveals that the energy transfer from small eddies to large eddies is hampered as the intensity of the magnetic field increases. This results in a reduction in mixing ability of the flow field. The evolution of the mixing-layer thickness indicates that the growth rate of this quantity decreases with an increase in magnetic field intensity.

Keywords: Magnetohydrodynamic flow, Hydrodynamic flow, Isotropic flow field, Energy dissipation rate, Passive scalars, Mixing-layer thickness.

۱- مقدمه

بسیاری از کاربردهای صنعتی از جمله پمپ‌ها، بهینه‌سازی اختلاط و کنترل حرکت فلزات مذاب قابل مشاهده هستند. از آنجا که حضور میدان مغناطیسی در یک میدان جریان مغشوش باعث تغییر مشخصات آشفتگی و افزایش پیچیدگی دینامیک جریان می‌شود، بررسی اندرکنش این دو میدان تحت تأثیر شرایط اولیه و مرزی مختلف، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱].

اولین تحقیق بر روی دینامیک سیالات هیدرومغناطیسی در اوایل قرن بیستم میلادی توسط هانس آلفون انجام شد که به نوعی پایه‌گذار مگنتوهیدرومغناطیسم به‌شمار می‌آید [۲]. همچنین، بچلر در سال

دینامیک سیالات هیدرومغناطیسی یا مگنتوهیدرومغناطیسم^۱ (MHD) یکی از شاخه‌های فیزیک است که به مطالعه اندرکنش سیال هادی و میدان مغناطیسی می‌پردازد. چنین میدان‌هایی در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از جمله میدان مغناطیسی زمین، بادهای خورشیدی، سیستم‌های حاکم بر دینامیک ستاره‌ها و همچنین در

^۱ Magnetohydrodynamics

۱۹۵۰ برای اولین بار به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصات اغتشاشی سیال هادی پرداخت [۳]. مطالعاتی که توسط پوکوت در سال ۱۹۷۸ و ارسزاگ و تانگ در سال ۱۹۷۹ بر روی رفتار جریان مغشوش هیدرومغناطیسی همسانگرد دوبعدی انجام شد، نشان داد که آشفته‌گی جریان هیدرومغناطیسی دوبعدی از نظر دینامیکی بسیار شبیه به آشفته‌گی جریان هیدرومغناطیسی سه‌بعدی است. [۴، ۵]. در سال ۱۹۸۳، شبالین و همکارانش، ناهمسانگردی در میدان جریان هیدرومغناطیسی همسانگرد دوبعدی در حضور میدان مغناطیسی خارجی را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که این ناهمسانگردی به دلیل تأثیر میدان مغناطیسی خارجی و همچنین استهلاک لزج و مغناطیسی در اعداد موج بالا ایجاد می‌شود [۶]. در سال ۲۰۰۷ الکساکیس و همکارانش آبشار انرژی و همچنین تابع انتقال انرژی میان پوسته‌های مختلف میدان جریان و میدان مغناطیسی در فضای طیفی را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج این پژوهش نشان داد که به‌واسطه همبستگی میان میدان سرعت و میدان مغناطیسی، انرژی میان پوسته‌ها در میدان جریان به‌صورت غیرمحملی انتقال می‌یابد [۸].

زیکانو و تس در سال ۲۰۰۴ به بررسی تأثیر کمیت اندرکنش^۱ (N) بر سه نوع میدان جریان هیدرومغناطیسی سه‌بعدی شامل اجباری، اتلاف آزاد و همراه با همرفت گرمایی پرداختند. در این پژوهش نشان داده شد که در مقادیر کوچک N ، میدان جریان، حالت سه‌بعدی خود را حفظ می‌کند؛ درحالی‌که در کمیت‌های اندرکنش بزرگ، میدان جریان به میدان دوبعدی لایه‌ای تبدیل می‌گردد [۱۱]. در سال ۲۰۱۹ بانرجیت و پاندیت دو میدان جریان هیدرومغناطیسی همسانگرد اجباری را مورد مقایسه قرار دادند که در یکی از آنها نیروی خارجی بر مقیاس‌های بزرگ و در دیگری نیروی خارجی بر مقیاس‌های کوچک میدان جریان اعمال شده است. نتایج نشان داد که اگر نیرو بر مقیاس‌های بزرگ جریان وارد شود، انرژی به‌صورت مساوی بین میدان جریان و میدان مغناطیسی تقسیم خواهد شد. این در حالی است که در میدانی که نیرو بر مقیاس‌های کوچک وارد شده است، این تساوی برقرار نمی‌باشد [۱۲].

در سال ۲۰۲۰ فردریچ به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی خارجی متوسط بر آشفته‌گی یک میدان هیدرومغناطیسی همگن و همسانگرد پرداخت. همچنین با استفاده از توابع چگالی احتمال چند نقطه‌ای، روند توسعه میدان جریان مورد بررسی قرار گرفت [۱۳]. در سال ۲۰۲۲ سان و همکارانش تأثیر میزان رسانایی الکتریکی سیال هیدرومغناطیسی یک میدان دوبعدی را بر اتصال مجدد مغناطیسی^۲ مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که افزایش میزان آشفته‌گی جریان که توسط یک منبع خارجی ایجاد می‌شود، سبب افزایش سرعت اتصال مجدد می‌شود [۱۴].

یکی دیگر از پدیده‌های مهم جریان‌های آشفته در سیالات هیدرومغناطیسی که در صنعت متالورژی و بهبود عملکرد پمپ‌های الکترومغناطیس و همزن‌های فلزات مایع کاربرد فراوانی دارد، اختلاط جریان در اثر نیروی مغناطیسی است [۱۵]. در بسیاری از مطالعات انجام شده در این زمینه، به صورت تجربی یا به روش شبیه‌سازی

عددی، تأثیر میدان مغناطیسی بر اختلاط جریان در خصوص یک کاربرد صنعتی مشخص، مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۶-۱۸]. این در حالی است که اثر میدان مغناطیسی بر میزان اختلاط میدان جریان با استفاده از شبیه‌سازی عددی و تحلیل ساختار جریان، در سال‌های اخیر با بررسی پراکندگی اسکالرها غیرفعال مورد توجه قرار گرفته است. در سال ۲۰۲۱ لموین، شتاب ذرات را در یک میدان جریان هیدرومغناطیسی تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی قوی مورد مطالعه قرار داد. در این پژوهش نشان داده شد که انرژی گردابه‌های پر انرژی با گرادیان سرعت جریان و خطوط میدان مغناطیسی در ارتباط است [۱۹]. در سال ۲۰۲۲ پرات و همکارانش تأثیر عدد رینولدز بر نحوه حرکت و پراکندگی ذرات در یک میدان جریان هیدرومغناطیسی همگن و تراکم‌ناپذیر به همراه میدان مغناطیسی خارجی با شدت متوسط را مورد مطالعه قرار دادند. بررسی پراکندگی جفت ذرات، تحت تأثیر فرایندهای هم‌ترازی میدان مغناطیسی نشان داد که با افزایش عدد رینولدز، ناهمسانی^۳ افزایش می‌یابد [۲۰]. در سال ۲۰۲۳ آلبرتی و کاربون تأثیر میدان مغناطیسی بر توانایی اختلاط یک میدان همسانگرد هیدرومغناطیسی با نیروی خارجی را با استفاده از تحلیل پراکندگی یک جفت ذره مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که در جریان‌های مغشوش، میدان مغناطیسی سبب پراکندگی بیشتر جفت ذره می‌شود؛ در حالی‌که در جریان‌های لایه‌ای تفاوت قابل توجهی میان پراکندگی ذرات جریان هیدرومغناطیسی و هیدرومغناطیسی دیده نمی‌شود [۲۱].

در سال ۲۰۱۹ چیتساز و فتحعلی تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر توسعه یک میدان جریان اختلاطی بدون برش دوبعدی با رینولدز مغناطیسی متوسط را مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش نشان داده شد که افزایش شدت میدان مغناطیسی اولیه سبب کاهش آهنگ رشد لایه اختلاط و راندمان اختلاط میدان جریان می‌شود [۲۲]. در سال ۲۰۲۳ پورانصاری با استفاده از اسکالرهایی غیرفعال و همچنین بررسی کمیت‌های آماری مرتبه بالای نوسانات، تأثیر شدت میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت را بر مشخصات اختلاطی یک جریان هیدرومغناطیسی درون یک کانال مورد بررسی قرار داد. نتایج نشان داد که افزایش میدان مغناطیسی سبب افزایش ناهمسانگردی میدان حتی در طول مشخصه‌های کوچک می‌شود [۲۳]. همانطور که مشاهده می‌شود، در اکثر مطالعات انجام شده بر روی میدان هیدرومغناطیسی، رینولدز مغناطیسی در محدوده بسیار بزرگ یا بسیار کوچک در نظر گرفته شده است و در مورد ساختارهای موجود در میدان‌های هیدرومغناطیسی در رینولدز مغناطیسی متوسط پژوهش‌های زیادی انجام نشده است [۲۴]. در صورتی که در میدان‌های جریان هیدرومغناطیسی با رینولدز مغناطیسی متوسط، عوامل مؤثر بر میدان جریان نظیر اندرکنش دو طرفه میدان جریان و میدان مغناطیسی، سبب ایجاد پدیده‌ها و ساختارهای بسیار پیچیده‌ای می‌شود. همچنین حل عددی و تحلیل تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصات اختلاطی میدان جریان مغشوش از طریق بررسی تغییرات مشخصات دینامیکی و ساختاری در کنار تحلیل توسعه میدان اسکالرهایی غیرفعال، می‌تواند در پیش‌بینی و تحلیل دقیق‌تر رفتار

¹ Interaction parameter

² Reconnection

³ intermittency

واحد آلفون^۱، $\mathbf{J}$ چگالی جریان، η انتشار مغناطیسی و ν لزجت سینماتیکی سیال است. همچنین معادله (۴) طبیعت سلنوتیدی میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد [۲۴]. همانطور که در معادله (۲) ملاحظه می‌شود، اولین عبارت طرف راست، عامل ایجاد نیروی الکترومغناطیسی القا می‌کند که به دلیل جابه‌جایی نسبی سیال هادی و میدان مغناطیسی به وجود می‌آید و با تغییر دادن راستای میدان مغناطیسی در جهت حرکت سیال، چگالی جریان ایجاد می‌کند. چگالی جریان تولید شده، سبب ایجاد نیروی لورنتز در خلاف جهت جابه‌جایی نسبی جریان و میدان مغناطیسی می‌شود که در معادله مومنوم (معادله (۱)) به صورت عبارت $\nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{J})$ ظاهر شده است. در نتیجه، اندرکنش بین میدان مغناطیسی و میدان جریان هیدرومغناطیسی، بر روند توسعه جریان و در نتیجه مشخصه‌های اختلاطی سیال تأثیرگذار خواهد بود [۲۴].

در این پژوهش برای تعیین برخی از مشخصه‌های اختلاطی، از حل یک میدان اسکالر غیرفعال در میدان جریان بهره گرفته شده است. اسکالر غیرفعال، هیچ اثری بر روی دینامیک جریان ندارد و خودش از میدان جریان، به صورت یک‌طرفه اثر می‌پذیرد. معادله حاکم بر یک اسکالر غیرفعال به صورت ذیل می‌باشد [۲۵]:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)z = D_z \nabla^2 z \quad (6)$$

که z اسکالر غیرفعال و D_z ضریب نفوذ مولکولی آن است. نسبت ضریب نفوذ مولکولی مومنوم به ضریب نفوذ مولکولی اسکالر غیرفعال با عدد اشویت (Sc) و به صورت رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$Sc = \frac{\nu}{D_z} \quad (7)$$

در این پژوهش، عدد اشویت برابر با ۱ در نظر گرفته شده است که به معنی برابری آهنگ نفوذ اسکالر غیرفعال و آهنگ نفوذ مومنوم جریان است [۲۶].

۳- توصیف مسئله

۳-۱- توصیف شرط اولیه

در این پژوهش، تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر مشخصات اختلاطی جریان مغشوش هیدرومغناطیسی همسانگرد دوبعدی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر چند میدان جریان همسانگرد، یک جریان ایده‌آل است و در طبیعت وجود خارجی ندارد ولی در بسیاری از مطالعات پدیده‌شناسی، به منظور جلوگیری از تأثیرگذاری ناخواسته مرزها و سایر نیروهای خارجی، از چنین میدان‌های جریانی بهره گرفته می‌شود. همچنین تقارن‌های موجود در میدان‌های جریان همسانگرد، امکان استفاده از تئوری‌های آماری جهت مطالعات بنیادی و تحلیل مقیاس‌های مختلف میدان‌های اغتشاشی را میسر می‌سازد. پیش از ارائه روند ایجاد شرط اولیه میدان جریان و مغناطیسی، برخی از کمیت‌هایی که در توصیف این میدان‌ها و شرط اولیه حائز اهمیت هستند در معادلات (۸) تا (۱۲) معرفی می‌گردند [۲۴، ۲۷].

$$\ell = \sqrt{\frac{E_k}{W}} \quad (8)$$

اختلاطی در مقیاس‌های کوچک و بزرگ میدان جریان مؤثر باشد. از طرفی با وجود اینکه جریان‌های آشفته، سه‌بعدی هستند اما مطالعه جریان‌های آشفته دوبعدی هیدرومغناطیسی در بسیاری از موضوعات کاربردی و پدیده‌شناسی دارای اهمیت می‌باشد. برای مثال برای مطالعه دینامیک مقیاس‌های بزرگ اتمسفر و همچنین برخی از ویژگی‌های دینامیک مقیاس بزرگ خورشیدی، به دلیل قابل صرف نظر بودن ارتفاع در مقایسه با دو بعد دیگر، میدان جریان را می‌توان به صورت دوبعدی در نظر گرفت [۱۴]. همینطور در برخی از صنایع و شرایط آزمایشگاهی که در آن میدان مغناطیسی قوی خارجی وجود دارد، می‌توان خصوصیات دینامیکی و ساختاری جریان را به صورت دوبعدی و عمود بر خطوط میدان مغناطیسی خارجی مورد بررسی قرار داد.

از این رو، در پژوهش حاضر، تأثیر شدت میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر مشخصات اختلاطی یک میدان جریان هیدرومغناطیسی مغشوش و همسانگرد دوبعدی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. از آنجا که تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصات اختلاطی میدان جریان به واسطه تأثیر بر بودجه انرژی و ساختار میدان جریان ایجاد می‌شود، ابتدا تأثیر شدت میدان مغناطیسی بر بودجه انرژی و طول‌های مشخصه میدان جریان بررسی می‌گردد؛ سپس با توجه به نتایج حاصل و با استفاده از شبیه‌سازی یک میدان اسکالر غیرفعال، تأثیر شدت میدان مغناطیسی بر مشخصات اختلاطی میدان جریان مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

با توجه به مطالب ذکر شده، معادلات حاکم بر سیال هیدرومغناطیسی دو بعدی در بخش دوم این مقاله ارائه می‌شود. در بخش سوم به منظور توصیف مسئله، شرایط اولیه و نحوه ایجاد آن بیان می‌گردد. همچنین، روش شبیه‌سازی عددی میدان جریان، میدان مغناطیسی و میدان اسکالر غیرفعال، در بخش چهارم شرح داده خواهد شد. در بخش پنجم، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) میدان جریان هیدرومغناطیسی و اثر شدت میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر کمیت‌های تأثیرگذار بر مشخصات اختلاطی میدان جریان مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت. در نهایت در بخش ششم نتیجه‌گیری به صورت خلاصه ارائه خواهد شد.

۲- معادلات دینامیکی

برای بررسی و شبیه‌سازی دینامیک حاکم بر جریان مغشوش دوبعدی سیال هیدرومغناطیسی از ترکیب معادلات ناویر-استوکس در قالب معادلات میدان چرخش و معادلات ماکسول بهره گرفته شده است. این روابط در معادلات (۱) تا (۵) ارائه شده‌اند [۲۴].

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{b} \times \mathbf{J}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{b} \quad (5)$$

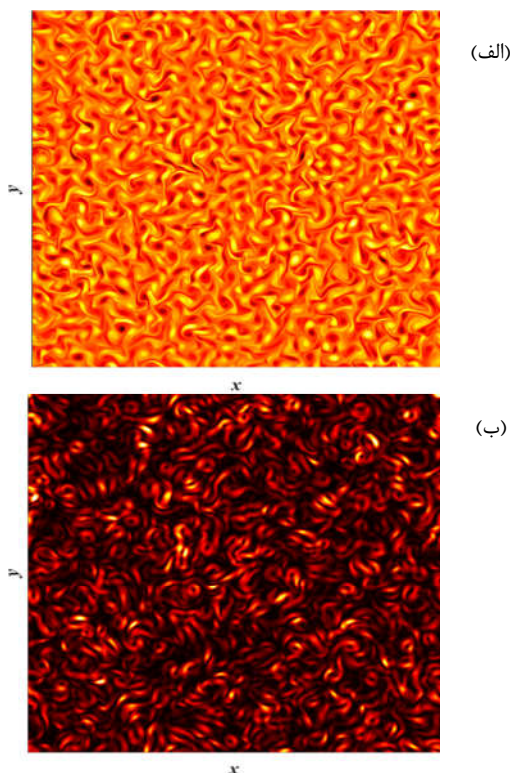
که $\boldsymbol{\omega}$ بردار چرخش، $\mathbf{u}$ بردار سرعت، $\mathbf{b}$ میدان مغناطیسی در

¹ Alfvén

توسط رابطه (۱۷) به‌دست می‌آید.

$$\bar{\omega}(k, 0) = \left[\frac{k^2 E(k, 0)}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi\theta} \quad (17)$$

که θ عددی تصادفی بین صفر و یک می‌باشد. برای مطابقت توزیع طیف انرژی اولیه با میدان واقعی نیاز است میدان حاصل از شرط اولیه به‌صورت اتلاف آزاد توسط معادله ناویر-استوکس توسعه یابد. پس از ایجاد میدان جریان اولیه، میدان مغناطیسی اولیه نیز به صورت یک میدان تصادفی با توزیع احتمال یکنواخت بر کل میدان جریان اعمال می‌شود. تصویر میدان چرخش همسانگرد و میدان مغناطیسی تصادفی در زمان $t=0$ در شکل ۱ نشان داده شده است [۲۸].



شکل ۱- تصویر شرط اولیه همسانگرد
(الف) میدان چرخش (ب) میدان مغناطیسی

۴- روش حل عددی و اعتبارسنجی

۴-۱- روش حل عددی

از آنجا که در این پژوهش میدان جریان به‌صورت دوبعدی همسانگرد می‌باشد، دامنه میدان به‌صورت مربعی با طول $L=2\pi$ در نظر گرفته شده است که شرط مرزی متناوب روی مرزهای آن اعمال می‌شود. یکی از روش‌های متداول شبیه‌سازی مستقیم عددی این نوع از میدان‌ها، رویکرد شبه‌طیفی است که به دلیل دقت بالا نسبت به سایر روش‌های عددی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش با استفاده از تبدیل فوری، معادلات (۱) تا (۴) به معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۸) تا (۲۱) تبدیل می‌شوند.

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = i\mathbf{k} \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\omega} - \bar{\mathbf{b}} \times \mathbf{J}) - \nu \mathbf{k}^2 \bar{\omega} \quad (18)$$

$$\tau = \frac{\ell}{\sqrt{2E_k}} \quad (9)$$

$$\text{Re} = \frac{u\ell}{\nu} \quad (10)$$

$$\text{Rm} = \frac{u\ell}{\eta} \quad (11)$$

$$\text{N} = \frac{b^2\ell}{\eta u} \quad (12)$$

که ℓ و τ به ترتیب طول مشخصه انتگرالی و زمان مشخصه چرخش گردابه‌ای می‌باشد و u و b به ترتیب جذر میانگین مربعات میدان سرعت و میدان مغناطیسی است. اعداد بی‌بعد Re ، Rm و N نیز به ترتیب عدد رینولدز، عدد رینولدز مغناطیسی، و کمیت اندرکنش می‌باشند. همچنین E_k و W نیز به ترتیب انرژی جنبشی جریان مغشوش و انستروپی هستند، که از روابط زیر به‌دست می‌آیند [۲۷].

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\langle u_x^2 \rangle + \langle u_y^2 \rangle \right) \quad (13)$$

$$W = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle \quad (14)$$

که u_x و u_y به ترتیب، مؤلفه‌های سرعت در راستاهای x و y هستند.

رینولدز مغناطیسی Rm ، بیانگر بزرگی نیروی مغناطیسی القایی نسبت به میرایی میدان مغناطیسی است. در رینولدز مغناطیسی بزرگ (سیال با هدایت‌پذیری بالا) میان میدان‌های سرعت و میدان مغناطیسی اندرکنش وجود خواهد داشت. در حالی که اگر Rm کوچک باشد، می‌توان از نیروی مغناطیسی القایی صرف‌نظر نمود. با این حال میدان مغناطیسی همچنان از طریق نیروی حجمی لورنتز، بر میدان سرعت اثر می‌گذارد و سبب کاهش جابه‌جایی نسبی سیال هیدرومغناطیسی و میدان مغناطیسی می‌گردد. در این پژوهش، رینولدز مغناطیسی در محدوده متوسط در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، هر دو کمیت میدان مغناطیسی القایی و استهلاک مغناطیسی باعث تغییر در دینامیک جریان می‌گردند. یکی دیگر از کمیت‌های مهم در تعیین مشخصات سیال، کمیت اندرکنش است که بیانگر نسبت نیروی لورنتز به نیروی اینرسی می‌باشد و در رابطه (۱۲) نشان داده شده است. از آنجا که در این پژوهش، شرط اولیه جریان و همچنین انتشار مغناطیسی در همه موارد یکسان است، کمیت اندرکنش، بیانگر شدت میدان مغناطیسی اولیه وارد بر میدان جریان خواهد بود.

۳-۲- ایجاد شرط اولیه

برای تولید شرط اولیه میدان جریان، طیف انرژی جنبشی اغتشاشی میدان سرعت از رابطه (۱۵) محاسبه می‌گردد [۲۸].

$$E(k, 0) = \frac{1}{k_p} \left(\frac{k}{k_p} \right)^7 \exp \left[-3.5 \left(\frac{k}{k_p} \right)^2 \right] \quad (15)$$

$$\ell = \sqrt{\frac{7}{8}} k_p^{-1} \quad (16)$$

که $E(k, 0)$ طیف انرژی جنبشی میدان سرعت در زمان $t=0$ و k_p عدد موج مربوط به بیشینه طیف انرژی جنبشی است. کمیت k_p تعیین‌کننده طول انتگرالی اولیه میدان جریان است، به‌طوری‌که هر چه k_p بزرگ‌تر باشد، طول مشخصه انتگرالی اولیه کوچک‌تر خواهد بود. پس از محاسبه طیف انرژی جنبشی، میدان چرخش در فضای فوریه

۵- نتایج

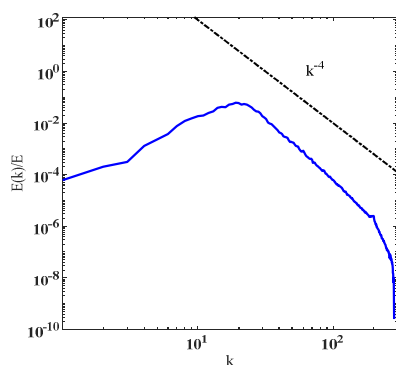
در این پژوهش میدان محاسباتی با استفاده از تعداد 600×600 نقطه، به صورت باسازمان گسسته‌سازی شده است. میدان هیدرومغناطیسی، برای شرط اولیه جریان همسانگرد یکسان و شدت‌های متفاوت میدان مغناطیسی تصادفی اولیه حل شده است. شرایط نمونه‌های مورد بررسی، در جدول ۱ نشان داده شده است.

همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، مقدار رینولدز مغناطیسی اولیه برابر با ۲۰ در نظر گرفته شده است که در محدوده متوسط قرار می‌گیرد. همچنین برای تعیین شدت میدان مغناطیسی، b از کمیت اندرکنش، N ، استفاده شده است. در هر یک از موارد مورد بررسی، مسئله تا ۳۰ برابر زمان مشخصه چرخش گردابه‌ای حل شده است.

همچنین به منظور اطمینان از برآورده شدن شرط استقلال از شبکه، طیف انرژی بی‌بعد شده میدان جریان توسعه یافته با مقدار شیب طیف انرژی حاصل از نظریه بچلر برای میدان‌های دوبعدی، در شکل ۳ مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، شیب انرژی در ناحیه اینرسی تطابق مناسبی با شیب میدان توسعه یافته فیزیکی (خط نقطه) دارد.

جدول ۱- شرایط میدان جریان و میدان مغناطیسی تصادفی اولیه

عنوان	مقدار
تعداد شبکه	600^2
ابعاد شبکه	$2\pi \times 2\pi$
ضریب لزجت (ν)	۰/۰۰۵
نوع میدان جریان	همسانگرد
عدد رینولدز (Re) اولیه	۹۰
طول انتگرالی اولیه	۰/۰۴۲
عدد رینولدز مغناطیسی (R_m) اولیه	۲۰
پارامتر اندرکنش (N) اولیه	۱۰، ۱، ۰، ۵



شکل ۳- طیف انرژی بی‌بعد شده میدان جریان

۵-۱- بررسی کیفی تغییرات ساختاری میدان جریان

به‌منظور بررسی کیفی نحوه تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر توسعه ساختارهای میدان جریان، کانتور میدان چرخش توسعه‌یافته برای شدت‌های متفاوت میدان مغناطیسی، در شکل ۴ نشان داده شده

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial t} = i\mathbf{k} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{b}) - \eta k^2 \hat{\mathbf{b}} \quad (19)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (20)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \quad (21)$$

که در آن $\mathbf{k}$ بردار موج می‌باشد.

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) \quad (22)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (23)$$

برای محاسبه بخش‌های غیرخطی معادلات (۱۸) و (۱۹)، نیاز است از کانولوشن^۱ استفاده شود که این کار، هزینه زمانی و محاسباتی زیادی دارد. از این رو در روش شبه‌طیفی، بخش‌های غیرخطی در فضای فیزیکی محاسبه و سپس با استفاده از تبدیل فوری، مجدداً به فضای فوری منتقل می‌شوند. این روش، سبب به‌وجود آمدن پدیده نامطلوب هم‌اتر سازی می‌شود. در این پژوهش برای حذف خطای هم‌اتر سازی عبارات غیرخطی، از روشی موسوم به «۲/۳» بهره گرفته شده است. پس از محاسبات معادلات (۱۸) و (۱۹) در فضای فوری، انتگرال‌گیری زمانی با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ انجام می‌شود [۲۹، ۳۰].

۴-۲- اعتبار سنجی

در این پژوهش، جهت شبیه‌سازی جریان هیدرومغناطیسی، کدنویسی عددی معادلات ارائه شده در بخش‌های ۲ تا ۴-۱، در محیط برنامه‌نویسی MATLAB انجام شد. همچنین برای اطمینان از درستی نتایج کد هیدرومغناطیس ایجاد شده، نمودار آهنگ استهلاك انرژی با شرایط اولیه زیر مورد بررسی قرار گرفت [۵].

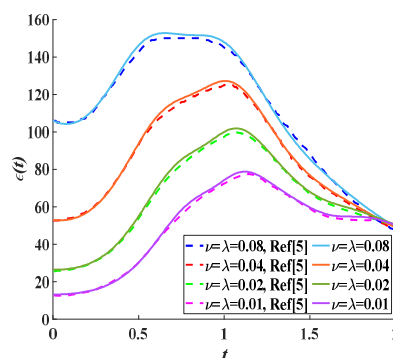
$$\mathbf{u}(x, y, 0) = (-2\sin(y), 2\sin(x)) \quad (24)$$

$$\mathbf{b}(x, y, 0) = (-2\sin(y), 2\sin(2x)) \quad (25)$$

آهنگ استهلاك انرژی کل از رابطه (۲۶) به‌دست می‌آید [۵].

$$\varepsilon = \nu \langle \omega^2 \rangle + \eta \langle J^2 \rangle \quad (26)$$

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود نتایج حاصل از کد با نتایج مرجع [۵] تطابق مناسبی دارد.



شکل ۲- آهنگ استهلاك انرژی حاصل از حل عددی با نتایج

مرجع [۵]

^۱ Convolution

است. همانطور که مشاهده می‌شود، در میدان جریان هیدرودینامیکی دوبعدی به واسطه اثرات لزجت و انتقال انرژی از گردابه‌های کوچک به بزرگ، گردابه‌های کوچک در طول زمان مستهلک و اندازه ساختارها نیز نسبت به شرایط اولیه (شکل ۱-الف) بزرگتر شده است. از طرف دیگر در شکل (۴-ب) تا (۴-د) مشاهده می‌گردد که در جریان‌های هیدرومغناطیسی، میدان مغناطیسی سبب ایجاد ساختارهای رشته‌ای در میدان جریان می‌گردد.

۵-۲- بودجه انرژی میدان جریان و میدان مغناطیسی

در میدان هیدرومغناطیسی با رینولدز مغناطیسی متوسط، به واسطه انتقال دوطرفه انرژی بین میدان جریان و میدان مغناطیسی، خصوصیات میدان جریان از جمله بودجه انرژی دچار تغییر می‌شود. از آنجا که تغییرات بودجه انرژی بر سایر مشخصات جریان نیز تأثیرگذار است، پیش از بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصات اختلاطی میدان جریان، تغییرات کمیت‌های مرتبط با بودجه انرژی در این دو میدان مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

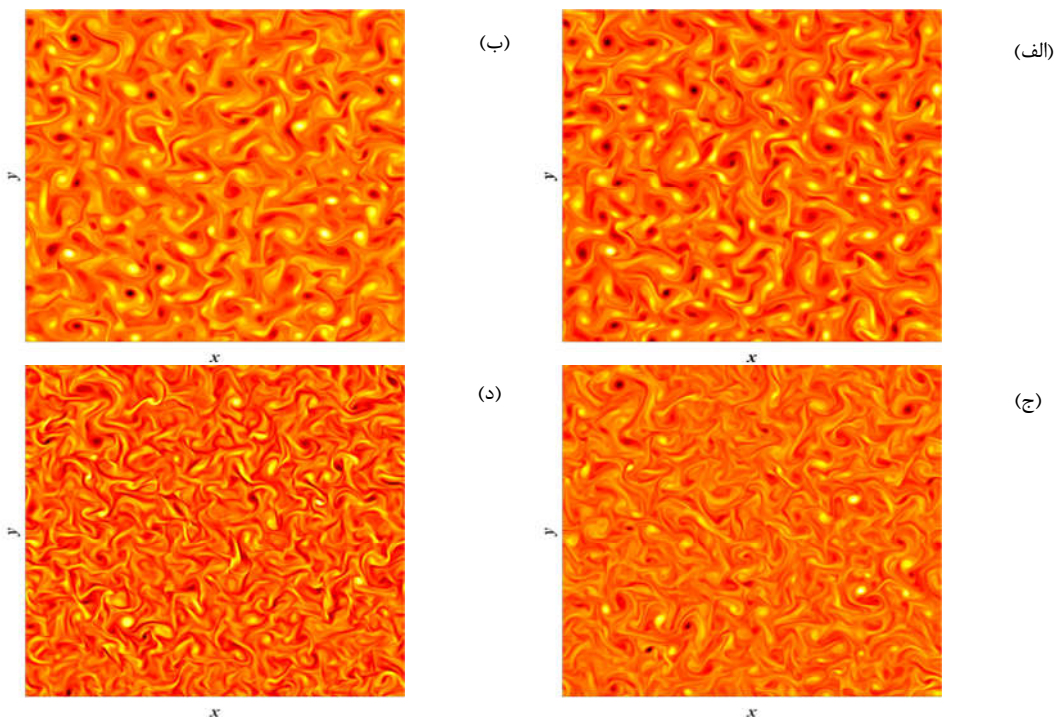
تغییرات انرژی جنبشی و انرژی مغناطیسی دو عامل مؤثر در شدت

آشفته‌گی و در نتیجه میزان اختلاط میدان جریان می‌باشد که به ترتیب توسط رابطه‌های (۱۳) و (۲۷) محاسبه می‌شوند.

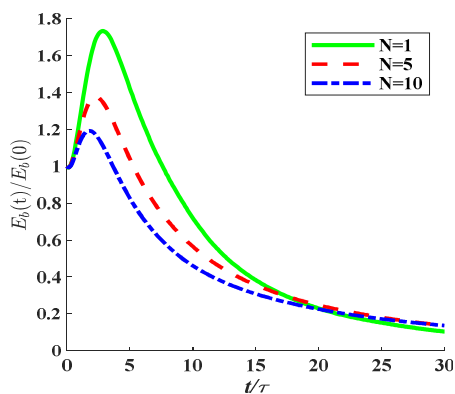
$$E_b = \frac{1}{2} \left(\langle b_x^2 \rangle + \langle b_y^2 \rangle \right) \quad (27)$$

که E_b انرژی مغناطیسی القایی است و b_x و b_y به ترتیب میدان مغناطیسی در راستای x و y می‌باشند. در شکل ۵ تغییرات انرژی جنبشی بی‌بعد شده با انرژی جنبشی اولیه، بر حسب زمان و برای شدت‌های متفاوتی از میدان مغناطیسی نشان داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، انرژی جنبشی در تمام حالت‌ها به دلیل اثرات لزجت (و یا استهلاک مغناطیسی) و همچنین شرط اتلاف آزاد میدان جریان، در طول توسعه میدان جریان کاهش پیدا می‌کند. از طرف دیگر، آهنگ افت انرژی جنبشی جریان با افزایش شدت میدان مغناطیسی، بیشتر می‌شود؛ چرا که در N های بالاتر، نیروی لورنتز بزرگتری ایجاد می‌شود که در نهایت موجب کاهش بیشتر انرژی جنبشی میدان جریان می‌گردد.



شکل ۴- تصویر میدان چرخش در $t = 30\tau$
(الف) $N=0$ (ب) $N=1$ (ج) $N=5$ (د) $N=10$

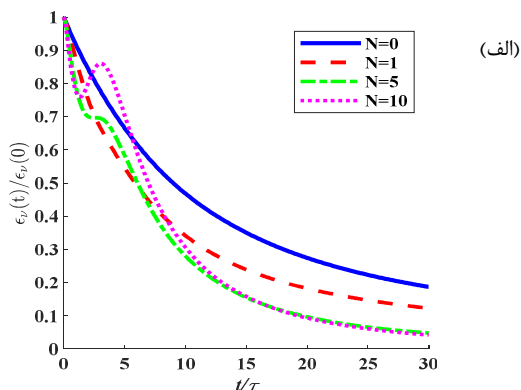


شکل ۶- تغییرات انرژی میدان مغناطیسی القایی بر حسب زمان و برای Nهای متفاوت

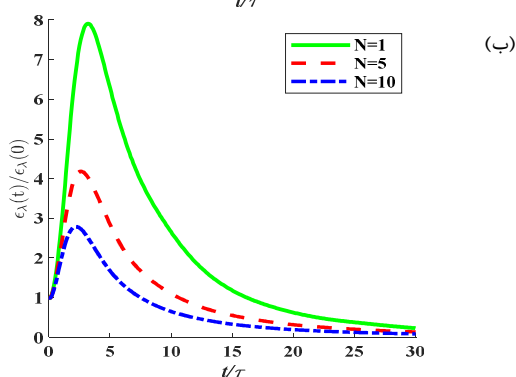
$$\Pi_u(k_0) = - \sum_{|k| \leq k_0} T_u(k) \quad (30)$$

$$T_u(k) = \sum_p \Im \left[\{k \cdot u(k-p)\} \{u(p) \cdot u^*(k)\} \right] \quad (31)$$

که $\Im[\cdot]$ بخش موهومی عبارت می‌باشد. همچنین $T_u(k)$ بیانگر میزان انتقال انرژی بین مقیاس‌های مختلف میدان جریان است.



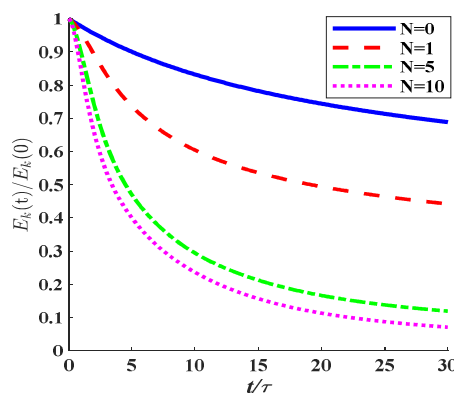
(الف)



(ب)

شکل ۷- تغییرات آهنگ استهلاک بر حسب زمان و برای Nهای متفاوت
(الف) آهنگ استهلاک لزج (ب) آهنگ استهلاک مغناطیسی

در شکل ۸ شار انرژی بین مقیاس‌های مختلف میدان جریان در زمان $t=10\tau$ و برای Nهای متفاوت نشان داده شده است. همانطور که



شکل ۵- تغییرات انرژی جنبشی میدان جریان بر حسب زمان و برای Nهای متفاوت

در شکل ۶ تغییرات انرژی مغناطیسی القایی بی‌بعد شده با انرژی مغناطیسی اولیه در طول زمان و برای Nهای متفاوت ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش مقدار N سبب بیشتر شدن میزان انرژی مغناطیسی القایی می‌شود که به دلیل افزایش انتقال انرژی از میدان جریان به میدان مغناطیسی می‌باشد. با توسعه میدان مغناطیسی، انرژی مغناطیسی القایی در اثر استهلاک مغناطیسی به انرژی حرارتی تبدیل می‌شود و در طول زمان کاهش خواهد یافت.

یکی دیگر از کمیت‌های مورد توجه در تحلیل بودجه انرژی میدان MHD، تغییرات آهنگ استهلاک انرژی جنبشی میدان جریان است که مقیاسی برای اتلاف انرژی توسط گردابه‌های کوچک به واسطه اثرات لزجت می‌باشد. این کمیت با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_v = \nu \langle \omega^2 \rangle \quad (28)$$

به‌طور مشابه، آهنگ استهلاک انرژی مغناطیسی با استفاده از معادله (۲۹) به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_\eta = \eta \langle J^2 \rangle \quad (29)$$

شکل (۷- الف) و شکل (۷- ب) به‌ترتیب تغییرات آهنگ استهلاک انرژی جنبشی و آهنگ استهلاک مغناطیسی برای Nهای متفاوت را بر حسب زمان نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار N از آهنگ استهلاک لزج کاسته و به آهنگ استهلاک مغناطیسی افزوده می‌شود که این تغییرات ناشی از انتقال کلی انرژی از میدان جریان به میدان مغناطیسی است. با توجه به شرط اتلاف آزاد برای میدان جریان و در نتیجه کاهش انرژی جنبشی در طول زمان، آهنگ انتقال انرژی به میدان مغناطیسی نیز کاهش می‌یابد و باعث می‌شود که آهنگ استهلاک انرژی مغناطیسی در طول زمان دارای یک روند نزولی باشد.

کاهش آهنگ استهلاک انرژی در جریان هیدرومغناطیسی نسبت به جریان هیدرودینامیکی به معنی کاهش سطح انرژی گردابه‌های کوچک است که با توجه به آبشار انرژی معکوس در میدان‌های دو بعدی، می‌تواند انرژی گردابه‌های بزرگ را نیز تغییر دهد. برای بررسی بیشتر این موضوع، شار انرژی میان مقیاس‌های مختلف میدان جریان بر اساس رابطه ذیل محاسبه می‌شود [۳۱]:

مشاهده می‌شود با افزایش مقدار N ، اندازه شار انرژی جریان در تمام مقیاس‌ها کاهش یافته است. این روند بیانگر آن است که اندرکنش میان میدان مغناطیسی و میدان جریان به گونه‌ای است که حضور میدان مغناطیسی مانع از انتقال انرژی از گردابه‌های کوچک به گردابه‌های بزرگ جریان می‌شود و در نتیجه با افزایش شدت میدان مغناطیسی، انرژی گردابه‌های بزرگ کم می‌شود. این روند بر مشخصات ساختاری میدان جریان از جمله طول‌های مشخصه نیز تأثیرگذار است که در بخش ۶-۳ به آن پرداخته خواهد شد.

۵-۳- تغییرات طول مشخصه انتگرالی و تیلور

یکی از عوامل مؤثر بر میزان آشفتگی و اختلاط جریان، تغییرات طول مشخصه انتگرالی و تیلور در میدان جریان بر حسب زمان است. طول مشخصه انتگرالی در راستاهای مختلف با استفاده از معادله (۳۲) محاسبه می‌شود [۱۲].

$$\ell_i = \frac{\pi}{2E_i} E_i(0), \quad i=1,2 \quad (32)$$

$$E_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty u_i^2(k) dk, \quad i=1,2 \quad (33)$$

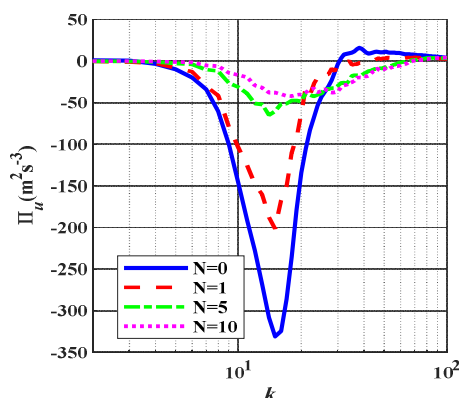
که E_i بیانگر انرژی جنبشی در راستای i است.

همچنین برای محاسبه طول مشخصه تیلور در یک راستای مشخص از معادله ذیل استفاده می‌شود [۳۲].

$$\lambda_i^2 = \frac{\langle u_i^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle}, \quad i=1,2 \quad (34)$$

طول‌های مشخصه انتگرالی و تیلور بی‌بعد شده با مقادیر متناظر در زمان $t=0$ به ترتیب در شکل‌های (۹-الف) و (۹-ب) ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با توسعه میدان جریان، هر دو طول مشخصه افزایش می‌یابند که این روند به دلیل انتقال انرژی از مقیاس‌های کوچک به بزرگ و میرایی گردابه‌های کوچک در اثر استهلاک لزج اتفاق می‌افتد. با این حال در هر دو شکل مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار N ، آهنگ رشد طول‌های مشخصه کاهش می‌یابد؛ چرا که مطابق نتایج بخش ۶-۲، با افزایش مقدار N انتقال انرژی از مقیاس‌های کوچک به مقیاس‌های بزرگ کاهش می‌یابد و

سطح انرژی در مقیاس‌های بزرگ افت می‌کند که این موضوع سبب رشد کمتر طول مشخصه گردابه‌ها نسبت به جریان هیدرودینامیکی خواهد شد.

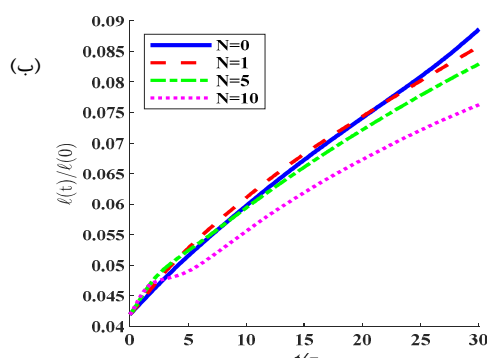
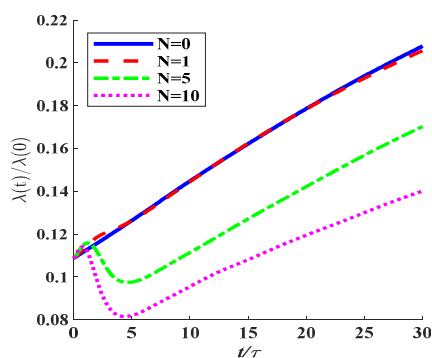


شکل ۸- شار انرژی مقیاس‌های مختلف میدان جریان در زمان $t=10\tau$ و برای N های متفاوت

۵-۴- بررسی مشخصات اختلاطی جریان با استفاده از

اسکالرهای غیرفعال

یکی از روش‌های بررسی توانایی اختلاط یک میدان جریان مغشوش، مطالعه رفتار اسکالرهای غیرفعال در آن می‌باشد. از آنجا که اسکالرهای غیرفعال از میدان جریان اثر می‌پذیرند و بر روی دینامیک جریان تأثیری ندارند، ابزار مناسبی برای سنجش میزان و چگونگی اختلاط در یک میدان جریان مشخص به شمار می‌آیند. در این بخش به منظور بررسی تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر مشخصات اختلاطی جریان، ابتدا توزیع اسکالرهای غیرفعال در میدان جریان با شدت‌های متفاوت میدان مغناطیسی به صورت کیفی بررسی می‌شود و پس از آن کمیت ضخامت لایه اختلاطی جریان مورد مطالعه قرار می‌گیرد.



شکل ۹- تغییرات طول مشخصه بر حسب زمان و برای N های متفاوت

(الف) طول مشخصه انتگرالی (ب) طول مشخصه تیلور

همچنین مشاهده می‌شود که روند تغییرات $\delta(t)$ با روند کیفی پراکندگی اسکالر (شکل ۱۰) همخوانی دارد.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر مشخصات اختلاطی یک میدان مغشوش همسانگرد دوبعدی با شرط اتلاف آزاد مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده از حل عددی مستقیم معادلات مومنوم جریان تراکم‌ناپذیر و معادله مغناطیسی القایی و همچنین شبیه‌سازی عددی اسکالره‌ای غیرفعال نشان داد که انتقال انرژی از میدان جریان به میدان مغناطیسی به‌گونه‌ای است که انرژی جنبشی و آهنگ استهلاک انرژی جریان کاهش می‌یابد. همچنین بررسی شار انرژی بین مقیاس‌های مختلف میدان جریان نشان داد که افزایش شدت میدان مغناطیسی سبب کاهش اندازه شار انرژی می‌شود. بنابراین با توجه به آشکار معکوس انرژی در جریان دوبعدی، انرژی گردابه‌های بزرگ و در نتیجه طول مشخصه انتگرالی و تیلور که هر دو از کمیت‌های مؤثر بر اختلاط میدان جریان هستند نیز کاهش می‌یابند.

تغییرات بودجه انرژی و مشخصات ساختاری میدان نشان می‌دهند که با افزایش شدت میدان مغناطیسی، آشفتگی جریان و توانایی اختلاط آن کمتر می‌شود. این موضوع با شبیه‌سازی عددی میدان اسکالر غیرفعال، به صورت کیفی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین با محاسبه ضخامت لایه اختلاطی، کاهش اختلاط میدان جریان در اثر افزایش شدت میدان مغناطیسی به‌صورت کمی نیز تأیید شد.

جهت بررسی کیفی تأثیر میدان مغناطیسی تصادفی اولیه بر توسعه یک اسکالر غیرفعال، توزیع میدان اسکالر در زمان $t=30\tau$ و برای مقادیر مختلف N ، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در زمان $t=0$ ، میدان اسکالر غیرفعال به‌صورت نواری به ضخامت π در راستای محور y متمرکز شده است. همچنین مقادیر هم‌سطح میدان اسکالر پس از توسعه میدان جریان (در زمان $t=30\tau$) برای شدت میدان مغناطیسی $N=0,1,5,10$ در شکل (۱۰-الف) تا (۱۰-د) ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار N ، به دلیل کاهش انرژی جنبشی و آشفتگی میدان جریان، اسکالر غیرفعال، کمتر در میدان منتشر شده است. همچنین با توجه به اعمال میدان مغناطیسی تصادفی بر میدان جریان، میدان اسکالر در همه موارد به‌صورت همسانگرد توسعه یافته است.

کمیت دیگری که برای سنجش میزان اختلاط میدان جریان مغشوش مورد بررسی قرار می‌گیرد، ضخامت لایه اختلاطی است. به منظور بررسی ضخامت لایه اختلاطی در میدان‌های اسکالر، فاصله میان دو مقدار 0.75 و 0.25 میانگین اسکالر در راستای y محاسبه می‌شود. ضخامت لایه اختلاطی بی‌بعد شده با ضخامت لایه اختلاطی در زمان $t=0$ ، توسط معادله (۳۵) محاسبه می‌گردد [۳۳].

$$\delta(t) = \frac{\Delta(t)}{\Delta(t=0)} \quad (35)$$

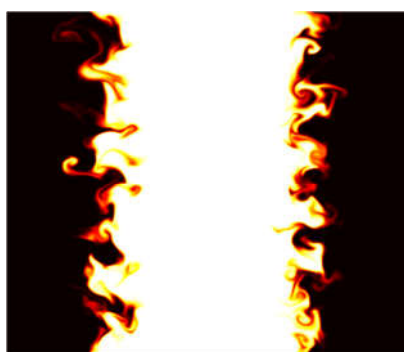
که $\Delta(t)$ ضخامت لایه اختلاطی میدان اسکالر در زمان t است. شکل ۱۱ روند تغییرات $\delta(t)$ بر حسب زمان برای N های متفاوت نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار N ، آهنگ رشد ضخامت لایه اختلاطی کاهش پیدا می‌کند؛ چرا که با افزایش N ، انرژی جنبشی و آهنگ رشد طول‌های مشخصه کمتر می‌شود که این موضوع سبب کاهش میزان آشفتگی جریان می‌گردد.



(ب)



(الف)



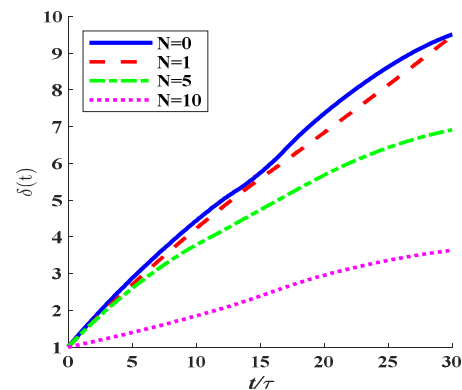
(د)



(ج)

شکل ۱۰- تصویر توزیع اسکالره‌ای غیر فعال در $t=30\tau$ در (الف) $N=0$ (ب) $N=1$ (ج) $N=5$ (د) $N=10$

- [17] Schuster E, Luo L, Krstić M. MHD channel flow control in 2D: Mixing enhancement by boundary feedback. *Automatica*. 2008;44(10):2498-507.
- [18] Yuan F, Isaac KM. A study of MHD-based chaotic advection to enhance mixing in microfluidics using transient three dimensional CFD simulations. *Sensors and actuators B: Chemical*. 2017;238:226-38.
- [19] Lemoine M. Particle acceleration in strong MHD turbulence. *Physical Review D*. 2021;104(6):063020.
- [20] Pratt J, Busse A, Müller W-C. Reynolds number dependence of Lagrangian dispersion in direct numerical simulations of anisotropic magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 2022;944:A36.
- [21] Alberti T, Carbone V. Lagrangian Particle Dispersion in a Poor Man's Magnetohydrodynamic Turbulence Model. *Fractal and Fractional*. 2023;7(9):662.
- [22] Chitsaz M, Fathali M. Impact of an initial random magnetic field on the evolution of two-dimensional shearless mixing layers. *Physical Review E*. 2019;100(4):043106.
- [23] Pouransari Z. Passive scalar small-scale anisotropy and mixing characteristics in magnetohydrodynamic turbulent channel flow. *Physics of Fluids*. 2023;35(10).
- [24] Davidson PA. *Turbulence in rotating, stratified and electrically conducting fluids*: Cambridge University Press; 2013.
- [25] Lesieur M, Herring J. Diffusion of a passive scalar in two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 1985;161:77-95.
- [26] Beta C, Schneider K, Farge M, Bockhorn H. Numerical study of mixing of passive and reactive scalars in two-dimensional turbulent flows using orthogonal wavelet filtering. *Chemical engineering science*. 2003;58(8):1463-77.
- [27] Davidson PA. *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*: Oxford university press; 2015.
- [28] Fathali M. Numerical study of the impact of the initial turbulent integral length scale on the dynamics of a two dimensional shear-free turbulent mixing layer. *Modares Mechanical Engineering*. 2014;14(6):113-23.
- [29] Orszag SA, Patterson Jr G. Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Physical review letters*. 1972;28(2):76.
- [30] Fox DG, Orszag SA. Pseudospectral approximation to two-dimensional turbulence. *Journal of Computational Physics*. 1973;11(4):612-9.
- [31] Verma MK. *Energy transfers in fluid flows: multiscale and spectral perspectives*: Cambridge University Press; 2019.
- [32] Tennekes H, Lumley JL. *A first course in turbulence*: MIT press; 1972.
- [33] Fathali M, Deshiri MK. Sensitivity of the two-dimensional shearless mixing layer to the initial turbulent kinetic energy and integral length scale. *Physical Review E*. 2016;93(4):043122.



شکل ۱۱- تغییرات ضخامت لایه اختلاطی بر حسب زمان و برای Nهای متفاوت

۷- مراجع

- [1] Molokov S, Moreau R, Moffatt K, Moffatt K. The Birth and Adolescence of MHD Turbulence. *Magnetohydrodynamics: Historical Evolution and Trends*. 2007;213-22.
- [2] Alfvén H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*. 1942;150(3805):405-6.
- [3] Batchelor GK. On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion. *Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences*. 1950;201(1066):405-16.
- [4] Pouquet A. On two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 1978;88(1):1-16.
- [5] Orszag SA, Tang C-M. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 1979;90(1):129-43.
- [6] Shebalin JV, Matthaeus WH, Montgomery D. Anisotropy in MHD turbulence due to a mean magnetic field. *Journal of plasma physics*. 1983;29(3):525-47.
- [7] Ishizawa A, Hattori Y. Large coherent structure formation by magnetic stretching term in two-dimensional mhd turbulence. *arXiv preprint chao-dyn/9810036*. 1998.
- [8] Alexakis A, Mininni PD, Pouquet A. Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics. *New Journal of Physics*. 2007;9(8):298.
- [9] Carati D, Debligny O, Knaepen B, Teaca B, Verma M. Energy transfers in forced MHD turbulence. *Journal of Turbulence*. 2006(7):N51.
- [10] Sundar S, Verma MK, Alexakis A, Chatterjee AG. Dynamic anisotropy in MHD turbulence induced by mean magnetic field. *Physics of Plasmas*. 2017;24(2).
- [11] Zikanov O, Thess A. Direct numerical simulation as a tool for understanding MHD liquid metal turbulence. *Applied Mathematical Modelling*. 2004;28(1):1-13.
- [12] Banerjee D, Pandit R. Two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence with large and small energy-injection length scales. *Physics of Fluids*. 2019;31(6).
- [13] Friedrich J. Probability density functions in homogeneous and isotropic magneto-hydrodynamic turbulence. *Atmosphere*. 2020;11(4):382.
- [14] Sun H, Yang Y, Lu Q, Lu S, Wan M, Wang R. Physical regimes of two-dimensional MHD turbulent reconnection in different Lundquist numbers. *The Astrophysical Journal*. 2022;926(1):97.
- [15] Greif C, Li D, Schötzau D, Wei X. A mixed finite element method with exactly divergence-free velocities for incompressible magnetohydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010;199(45-48):2840-55.
- [16] Kang H-J, Choi B. Development of the MHD micropump with mixing function. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2011;165(2):439-45.