نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۱۰، جلد ۵۵، شماره ۱، بهار ۱۴۰۴، صفحه ۷۱-۷۷ – پژوهشی کامل DOI: 10.22034/jmeut.2025.58524.3324

تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه‌های ساندویچی ساخته شده از مواد خواص گرادیانی تقویت شده با گرافن و هسته الکترورئولوژیکال

محمد کریم زاده بائی دانشجو کارشناسی ارشد، گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران، m.karimzadeh.b.1313@semnan.ac.ir

میثم شکوری دانشیار، گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران، shakouri@semnan.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد و ضریب میرایی صفحه‌های ساندویچی با رویه های ساخته شده از مواد خواص گرادیانی تقویت شده با گرافن و هسته الکترورئولوژیکال پرداخته شده است. جهت بررسی اثرات تقویت کننده، توزیع‌های گوناگون گرافن شامل FG-Λ، FG-X، FG-O و UD مورد بررسی قرار گرفته و تاثیرات حاصل از به کارگیری این توزیع‌ها درصفحه ساندویچی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حرکت با استفاده از معادلات همیلتون استخراج شده و فرض نظریه کلاسیک برای رویه و نظریه مرتبه اول برشی برای هسته الکترورئولوژیکال استخراج شده است. شرایط مرزی با تکیه گاه ساده برای همه لبه‌ها در نظر گرفته شده و از سری فوریه برای حل معادلات بهره گرفته شده است. نتایج به دست آمده با نتایج پژوهشهای پیشین مقایسه و اعتبارسنجی شده و سپس تاثیرات پارامترهایی همچون نسبت های مختلف ابعاد، ضخامت هسته الکترورئولوژیکال، نوع توزیع گرافن، کسر حجمی و میدان الکتریکی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده بیانگر این موضوع است که افزودن گرافن حتی به میزان بسیار کم باعث افزایش چشمگیر سختی سازه خواهد شد. همچنین با تغییر میدان الکتریکی می توان مقدار سختی و میرایی سازه را کنترل نمود.

واژه‌های کلیدی: مواد خواص‌گرادیانی، تقویت شده با گرافن، مایع الکتروئولوژیکی، صفحه ساندویچی ، ارتعاشات آزاد، ضریب اتلاف.

Analysis of free vibrations of sandwich plates made of materials with gradient properties reinforced with graphene and electrorheological core

M. Karimzade Bai Department of Aerospace, Semnan University, Semnan, Iran
M. Shakouri Aerospace Department, Semnan University, Semnan, Iran

Abstract

In this article, free vibration and damping of sandwich plates made of graphene reinforced functionally graded face sheets and electrorheological core have been investigated. In order to investigate the reinforcing effects, various distributions of graphene including FG-Λ, FG-X, FG-O and UD have been surveyed and the effects of employing different distributions in the sandwich plate have been studied. The equations of motion are derived using Hamilton's equations and the assumption of the classical theory for the graphene reinforced face sheets and the first-order shear theory for the electrorheological core are derived. The simply-supported boundary conditions are considered for all edges and Fourier series is used to solve the equations of motion. The obtained results were compared and validated with the results of previous researches, and then the effects of various parameters such as different aspect ratios, electrorheological core thickness, graphene distribution type, volume fraction and electric field were evaluated. The obtained results indicate that the addition of graphene, even in a very small amount, will significantly increase the stiffness of the structure. In addition, by changing the electric field, the stiffness and damping of the structure can be controlled.

Keywords: Functionally graded nanocomposite, Graphene reinforced, Electrorheological fluid, Sandwich plate, Free vibration, Loss factor.

۱-مقدمه

سیالات الکتروئولوژیکی Electrorheological Fluids (ER) موادی هستند که خواص رئولوژیکی آنها، مانند لزجت یا سختی، تحت تأثیر میدان الکتریکی تغییر می‌کنند. از سوی دیگر، به دلیل استحکام بالا و نیز وزن پایین، صفحات ساندویچی ساخته شده از صفحات گرافنی در دهه های اخیر کاربرد گسترده‌ای یافته اند. صفحات گرافن Graphene Platelets (GPLs) به‌عنوان تقویت‌کننده، به دلیل مدول یانگ بالا، رسانایی گرمایی بالا و استحکام شکست عالی، به یکی از بهترین مواد جهت افزایش استحکام سازه ای تبدیل شده‌اند. استنوی و همکاران [۱] کاربرد سیالات الکترورئولوژیکی در کنترل ارتعاش را مورد بررسی قرار داده‌اند. لیو و همکاران [۲] به بررسی حساسیت لمسی صفحه نمایش لمسی مبتنی بر مایه الکترورئولوژیک پرداخته‌اند. غلامزاده بابکی و شکوری [۳] ارتعاشات آزاد و اجباری یک صفحه ساندویچی با لایه‌های رویه با خواص گرادیانی و هسته مایع الکتروئولوژیکی را بررسی کرده‌اند. با فرض نظریه صفحات نازک کلاسیک برای لایه و نظریه برشی مرتبه اول برای لایه اصلی ، معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون بدست می‌آیند. شرایط مرزی با تکیه گاه ساده برای همه لبه‌ها در نظر گرفته شده و از سری فوریه کلی برای بازنشانی جابجایی صفحه ساندویچی استفاده شده است. رکن‌آبادی و همکاران [۴] تجزیه و تحلیل پایداری دینامیکی تیر با هسته الاستومر مغناطیسی که تحت یک نیرو قرار گرفته است را بررسی کرده‌اند. چوی و همکاران [۵] مقاله‌ای با عنوان ویژگی‌های ارتعاشی تیرهای ساندویچی با پوسته‌های فولادی و هسته های الاستومر مغناطیسی ارائه دادند. افشار موحد [۶] اتصالات مکانیکی صفحات و پوسته‌های کامپوزیت و مواد فلزی را بررسی نموده است.

* نویسندگان مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: shakouri@semnan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۲/۰۷/۳۰
تاریخ پذیرش: ۰۳/۰۷/۲۳

چوی و همکاران [۷] کنترل ارتعاش فعال سازه‌های کامپوزیتی هوشمند شامل سیال الکترورئولوژیکی را بررسی کرده‌اند. در مرحله اول، مدول برشی سیال الکترورئولوژیکی خود به عنوان تابعی از میدان‌های الکتریکی تحریک شده و سپس با ترکیب مدول اندازه‌گیری شده با نظریه تیر، خواص الاستودینامیکی سازه‌ها پیش بینی شده است. دنگ و گونگ [۸] تطبیق تنظیم ارتعاش جاذب بر اساس الاستومر مگنتورئولوژیکال را بررسی کرده‌اند. دوآودی و سرینیواس [۹] بی‌ثباتی دینامیکی تعبیه شده در تیر ساندویچی با هسته الاستومر مغناطیسی نازک و پوسته غیر رسانا را بررسی کرده‌اند. اسحقی و همکاران [۱۰] مقاله‌ای با عنوان ویژگی های دینامیکی و کنترل مگنتورئولوژیکال/الکترورئولوژیکال سازه‌های ساندویچی را بررسی کرده‌اند. در این مقاله یک بررسی جامع از مقالات گزارش شده در مورد کاربردهای مایعات مغناطیسی/الکتروئولوژیکی برای تحقق سرکوب ارتعاش فعال و نیمه فعال در ساختارهای ساندویچی پرداخته شده است. نتیجه گیری این مقاله عمدتاً مطالعات مربوط به خصوصیات قبل از عملکرد مایعات مغناطیسی/الکتروئولوژیکی می‌باشد. مین‌هان و همکاران [۱۱] مقاله‌ای با عنوان طراحی سازوکارهای حرکتی خواص گرادیانی با استفاده از دستگاه‌های مبتنی بر مایعات هوشمند را بررسی کرده‌اند. در این مقاله دو نوع مختلف القاح با توانایی ۴ درجه آزادی بازخورد نیرو با استفاده از مایعات مغناطیسی و مایعات الکتریکی ارائه شده است. هاشمی‌نژاد و آقایی[۱۲] کنترل ارتعاش شدید ازمحفظه سیلندر دایره‌ای متکی بر سیالات الکتریکی هوشمند را بررسی کرده‌اند. هاشمی‌نژاد و ملکی [۱۳] ارتعاش آزاد و پاسخ هارمونیک اجباری صفحه ساندویچی پر از مایع الکتروئولوژیکی را بررسی کرده‌اند. اصل همیلتون ، بر اساس نظریه صفحه نازک کیرشوف ، همراه با روش سری فوریه، برای مطالعه ویژگی‌های ارتعاش آزاد و اجباری و حالت پایدار یک صفحه ساندویچی مستطیلی مبتنی بر سیال الکتروئولوژیکی با تکیهگاه ساده می‌شود. کولکار و همکاران [۱۴] کنترل پذیری ارتعاشات سازه‌های ساندویچی با مواد هوشمند مایعات الکتروئولوژیکی و مواد مغناطیسی را بررسی کرده‌اند. . هدف این مقاله کنترل ارتعاش ساختارهای انعطاف پذیر را با استفاده از روش نیمه فعال مرتبط با مواد هوشمند مایعات الکتروئولوژیکی ، مایعات مغناطیسی و الاستومرهای مغناطیسی بررسی می‌کند. خصوصیات معیار تیر، پوسته و صفحه شامل هسته (یا لایه) مواد هوشمند عمیقا بررسی و از نظر قابلیت کنترل وابسته به میدان مورد بحث قرار گرفته است. کومار و همکاران [۱۵] تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مستطیل نازک با خواص گرادیانی با استفاده از روش سختی دینامیکی را بررسی کرده‌اند. لال و همکاران [۱۶] تجزیه و تحلیل ارتعاش و میرایی صفحه مستطیل تا حدی با لایه ویسکوالاستیک محدود شده است را بررسی کرده‌اند. سانگ و همکاران [۱۷] تجزیه و تحلیل ارتعاش و پایداری تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با کربن نانو لوله با ضخامت متغیر روی پایه الاستیک را بررسی کرده‌اند. در این مقاله ویژگی‌های ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیت پلیمری با خواص گرادیانی تقویت شده با نانوپلاکت های گرافن را بررسی نمودن و یک مطالعه پارامتریک با تمرکز ویژه بر روی اثرات توزیع GPL انجام شده است. بیشه و علی‌بیگلو [۱۸] رفتار ارتعاشی ورق‌های ساخته شده از مواد مرکب تقویت شده با گرافن در شرایط مرزی مختلف را با بهره‌گیری از نظریه سه بعدی الاستیسیته مورد بررسی قرار داده‌اند.

همچنین ندیریان و همکاران [۱۹] به مطالعه پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر مجهز به وصله‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک تحت بارِ گسترده سینوسی با استفاده از نظریه سه لایه تیر ساندویچی پرداخته‌اند که در آن برای رویه بالا و رویه پایین نظریه اویلر-برنولی و برای هسته نظریه مرتبه اول خطی بکار گرفته شده است. کروبی و ایرانی [۲۰] نیز ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ای ساندویچی از جنس مواد مدرج تابعی که توسط دو لایه پیزوالکتریک احاطه شده را با استفاده از یک روش تحلیلی بررسی کرده‌اند. در این مقاله لایه‌های پیزوالکتریک به صورت مدرج تابعی در نظر گرفته شده و برای مدل سازی سیستم از نظریه برشی مرتبه اول استفاده شده است .

با توجه به پژوهش های ارائه شده، مشخص می گردد که بررسی رفتار دینامیکی صفحات ساندویچی ساخته شده از هسته ER و رویه‌های مواد خواص گرادیانی تقویت شده با گرافن در هیچ یک از پژوهش‌های پیشین مورد بررسی قرار نگرفته و این موضوع به عنوان نوآوری اصلی، باعث نگارش این مقاله شده است. بنابراین، در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد صفحه‌های ساندویچی ساخته شده از مواد خواص گرادیانی تقویت شده با گرافن و هسته الکترورئولوژیکال پرداخته شده است. برای این منظور با بکارگیری نظریه صفحات نازک کلاسیک برای ورقهای رویه و نظریه برشی مرتبه اول برای هسته، معادلات حرکت با استفاده از معادلات همیلتون استخراج شده و از سری فوریه برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. پس از آن فرکانس طبیعی صفحه و ضریب اتلاف آن مورد بررسی قرار گرفته و تاثیرات پارامترهایی همچون نسبت های مختلف ابعاد، ضخامت هسته ER، توزیع های گوناگون گرافن در پوسته صفحه و دیگر پارامترهای موثر بر رفتار دینامیکی این صفحات مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم برای صفحات ساندویچ

در این مقاله یک صفحه ساندویچی سه لایه مستطیلی با هسته الکترورئولوژیک و ورق های تقویت شده با GPL همانطور که در شکل (۱) مشاهده می‌کنید در نظر گرفته شده است. طول و عرض صفحه به ترتیب b و a و ضخامت های آن به ترتیب h_1 ، h_2 وh_3 است. که نشان دهنده ضخامت های لایه های پایه ، هسته ER و رویه گرافنی می‌باشد هر یک از لایه های رویه از لایه های N_L با ضخامت یکسان (یعنی$\Delta h_i = \frac{h_i}{NL}$, $i = 1,3$) تشکیل شده است. از آنجا که مقاومت لایه ERمعمولاً بسیار کم است، برای این لایه فقط تنش برشی فرض می‌شود و شرایط لایه نازک برای ورقهای رویه در نظر گرفته شده است. در همین حال، فرض بر این است که هیچ لغزشی بین ورقهای رویه و لایه هسته وجود ندارد و بنابراین، جابجایی عرضی همه لایه ها یکسان است. با استفاده از مفروضات فوق، از ورق های رویه می‌توان هندسه و اجزای صفحه ساندویچ با هسته ER و رویه‌های GPL را بصورت شکل ۱ نمایش داد. برای مطالعه اثرات توزیع GPL، چهار توزیع مختلف گرافن در رویه ها در نظر گرفته شده است. در توزیع های FG-O (FG - X) , کسر وزنی GPL از حداکثر (حداقل) مقدار در سطح وسط به مقدار حداقل (حداکثر) در هر دو سطح بالا و پایین صفحه کاهش می‌یابد (افزایش می‌یابد) . توزیع های FG-O و FG-X هر دو توزیع متقارن GPL در صفحه ساندویچ هستند، در حالی که در FG- Λ، کسر

وزن GPL به صورت خطی از سطح بالا به سطح پایین کاهش می‌یابد. توزیع UD توزیع کاملا یکنواخت گرافن در تمامی رویه را نشان می‌دهد.

۲-۱- لایه های رویه تقویت شده توسط GPL

با فرض اینکه گرافن به عنوان تقویت کننده به طور یکنواخت در ماتریس پلیمری پراکنده شده باشد، مدول موثر یانگ لایه E_C^k، را می‌توان با تقریب مدل معروف وویگت-ریوس به شکل زیر مشخص نمود

$$E_C^k = \frac{3}{8}E_{\parallel}^k + \frac{5}{8}E_{\perp}^k \qquad (۱)$$

که در آن k تعداد زیر لایه های GPL است و $E_{\parallel}$ و $E_{\perp}$ به ترتیب نشان دهنده مدول طولی و عرضی هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند[۱۷].

$$E_{\parallel}^k = \frac{1+\xi_L\eta_L V_{GPL}^k}{1-\eta_L V_{GPL}^k}\times E_M \qquad (۲)$$

$$E_{\perp}^k = \frac{1+\xi_W\eta_W V_{GPL}^k}{1-\eta_W V_{GPL}^k}\times E_M \qquad (۳)$$

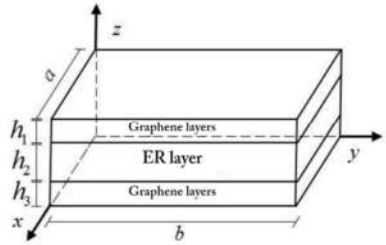
که در آن V_{GPL}^k کسر حجمی GPL در هر زیرلایه است و ξ_L و ξ_W پارامترهایی هستند که هم هندسه و هم اندازه تقویت کننده گرافن را مشخص می‌کنند. E_M مدول الاستیسیته مربوط به ماتریس بوده و نیز کسر حجمی GPL، V_{GPL}^k توسط فرمول زیر محاسبه می‌شود [۱۷]

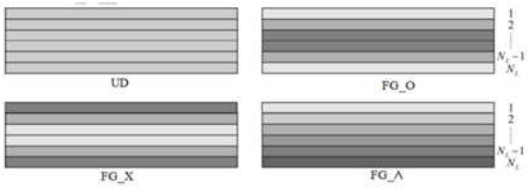
$$V_{GPL}^k = \frac{W_{GPL}^k}{W_{GPL}^k + (\rho_{GPL}/\rho_M)(1-W_{GPL}^k)} \qquad (۴)$$

که در آن W_{GPL}^k کسر وزنی گرافن در هر زیرلایه است. از آنجایی که استحکام لایه ER بسیار کم است، در لایه هسته فقط تنش برشی در نظر گرفته می‌شود و از نظریه برشی مرتبه اول برای در نظر گرفتن بهتر اثرات برشی در لایه هسته استفاده می‌شود. میدان جابجایی در یک نقطه مادی (x,y,z) در رویه های تقویت‌شده با GPL عبارتند از:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x,y,z) &= u_i(x,y) - z\frac{dw}{dx} \\ v^{(i)}(x,y,z) &= v_i(x,y) - z\frac{dw}{dy} \qquad i = 1,3 \\ w^{(i)}(x,y,z) &= w_i(x,y) \end{aligned} \qquad (۵)$$

یدان جابجایی در لایه ER به صورت زیر تعریف شده است.





شکل ۱- هندسه و اجزای صفحه ساندویچ با هسته ER و تصویر لایه صفحات و توزیع گرافن

که در آن u_i و v_i و w_i به ترتیب تغییر شکل های صفحه وسط در جهت x و y و z هستند

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x,y,z,t) &= u_2(x,y,t) + z\varphi_x^{(2)}(x,y,t) \\ v^{(2)}(x,y,z,t) &= v_2(x,y,t) + z\varphi_y^{(2)}(x,y,t) \\ \mathcal{W}^{(2)}(x,y,z,t) &= \mathcal{W}(x,y,t) \end{aligned} \qquad (۶)$$

که در آن $\varphi_x^{(2)}$ و $\varphi_y^{(2)}$ بیانگر چرخش لایه ER به ترتیب حول محور x و yهستند. با فرض روابط کرنش- جابجایی خطی، کرنش اجزای موجود در لایه های تقویت شده GPL را می‌توان به شکل زیربیان نمود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(i)} &= \frac{du_i}{dx} - z_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(i)} &= \frac{dv_i}{dy} - z_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad i = 1,3 \\ \gamma_{xy}^{(i)} &= \frac{du_i}{dy} + \frac{dv_i}{dx} - 2z_i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned} \qquad (۷)$$

کرنش های برشی لایه ER عبارتند از:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{(2)} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x^{(2)} = d\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(u_3-u_1)}{h_{ER}} \\ \gamma_{yz}^{(2)} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y^{(2)} = d\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{(v_3-v_1)}{h_{ER}} \end{aligned} \qquad (۸)$$

روابط تنش-کرنش برای هر لایه تقویت شده GPL را می‌توان از قانون هوک به دست آورد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \sigma_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{21}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^k \\ \varepsilon_y^k \\ \varepsilon_{xy}^k \end{Bmatrix} \qquad (۹)$$

۲-۲- معادلات حرکت

از معادلات همیلتون توسعه یافته برای استخراج معادلات حرکت استفاده شده است. برای اختصار فقط مراحل کلیدی و معادلات نهایی معرفی شده است. معادلات همیلتون توسعه یافته به صورت زیر بیان شده است.

$$\delta\int_{t1}^{t2}(T-U)dt \quad + \delta\int_{t1}^{t2} W_{NC}\, dt = 0 \qquad (۱۰)$$

که در آن δ نشان دهنده عملگر تغییرات است و t_1 و t_2 زمان هایی هستند که در آن فرض می‌شود پیکربندی سیستم مشخص است، W_{NC} کار نیروهای غیرپایستار و U و T به ترتیب انرژی جنبشی کل و انرژی کرنش صفحه ساندویچی هستند. با نادیده گرفتن اینرسی چرخشی لایه‌های GPL، تغییر انرژی جنبشی و انرژی کرنش صفحه ساندویچ را می‌توان استخراج نمود. منتجه های تنش و گشتاور در صفحه ساندویچی با رویه‌های تقویت شده با GPL و هسته ER به شکل زیر است [۳]

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}^i \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix}^i \quad \mathrm{i = b.c} \tag{۱۱}$$

که در آن Aij، Bij و Dij به ترتیب سفتی کششی، خمشی-کششی و خمشی هستند که برای هر لایه به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{bmatrix}^k = \int_{-h^k/2}^{h^k/2} Q_{ij}^k \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad i.j = 1,2,6;\ k = 1,2,3 \tag{۱۲}$$

با جایگذاری روابط بالا در معادلات همیلتون و ساده سازی ریاضی، معادلات حرکت صفحه ساندویچی با رویه تقویت شده با GPL و هسته ER به شکل صفحه بعد بدست می‌آید:

جدول ۱- نتایج یک صفحه ساندویچی با هسته ER و وجوه همسانگرد.

			E=0 KV/mm				E= 2 KV/mm			
			Ref [3]		Present		Ref [3]		Present	
Mode (m,n)	h_{ER}/h_c	b/a	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η
1,1	1	1	13.1925	0.0172	13.1926	0.01719	21.8035	0.01871	21.6068	0.01724
		2	32.9809	0.0069	32.9802	0.00687	43.7317	0.013936	43.6888	0.01376
		4	112.134	0.002	112.1333	0.00202	124.534	0.006401	124.529	0.00639
	4	1	10.0639	0.0269	10.0639	0.0268	20.2119	0.024896	20.1983	0.02479
		2	25.159	0.0107	25.1587	0.01074	37.6844	0.018805	37.6813	0.01879
		4	85.5314	0.0032	85.5311	0.003162	100.115	0.009272	100.114	0.00927

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی بدون بعد صفحات: اثر الگوهای توزیع GPL ($\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_M/E_M}$).

	Pure epoxy		UD (Pattern1)		FG-O (Pattern2)		FG-X (Pattern3)		FG-Λ (Pattern4)	
(m,n)	Song et al. [17]	Present	Song et al. [17]	Present	Song et al. [17]	Present	Song et al. [17]	Present	Song et al. [17]	Present
1,1	0.0584	0.0584	0.1216	0.1215	0.1020	0.1020	0.1378	0.1378	0.1118	0.1118
2,1	0.1391	0.1391	0.2895	0.2895	0.2456	0.2455	0.3249	0.3249	0.2673	0.2673
2,2	0.1321	0.2131	0.4436	0.4435	0.3796	0.3796	0.4939	0.4938	0.4110	0.4109

$$\begin{aligned}
\delta u_1&: \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial y} - \frac{Q_x^{(2)}}{h_2} = I_0^1 \ddot{u}_1 + \frac{I_2^{(2)}}{h_{(2)}^2}(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) + \frac{I_2^{(2)} d}{h_{(2)}^2}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\
\delta u_3&: \frac{\partial N_x^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial y} + \frac{Q_x^{(2)}}{h_2} = I_0^b \ddot{u}_3 - \frac{I_2^{(2)}}{h_{(2)}^2}(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) - \frac{I_2^{(2)} d}{h_2^2}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\
\delta v_1&: \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} - \frac{Q_y^{(2)}}{h_2} = I_0^c \ddot{v}_1 + \frac{I_2^{(2)}}{h_2^2}(\ddot{v}_1 - \ddot{v}_3) + \frac{I_2^{(2)} d}{h_2^2}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\
\delta v_3&: \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(3)}}{\partial y} + \frac{Q_y^{(2)}}{h_2} = I_0^b \ddot{v}_3 - \frac{I_2^{(2)}}{h_2^2}(\ddot{v}_1 - \ddot{v}_3) - \frac{I_2^{(2)} d}{h_2^2}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\
\delta w&: \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_x^{(3)} + N_x^{(1)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_{xy}^{(3)} + N_{xy}^{(1)}\right) \\
&\quad + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(M_{xy}^{(3)} + M_{xy}^{(1)}\right) \\
&\quad + \left(\frac{d}{h_2}\right)\left(\frac{\partial Q_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(2)}}{\partial y}\right) \\
&= \left(I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + I_0^{(3)}\right)\ddot{w} \\
&\quad - I_2^{(2)}\left(\frac{d}{h_2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{I_2^{(2)} c}{h_2^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) + \frac{\partial}{\partial x}(\ddot{v}_1 - \ddot{v}_3)\right]
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن I_0^c و I_0^b به ترتیب ممان اینرسی مربوط به لایه ER و لایه گرافنی هستند و $I_0{}^{(1)}$,$I_0{}^{(2)}$,$I_0{}^{(3)}$ ممان اینرسی برای هر لایه است.

۳- روش حل

برای حل معادلات از سری فوریه دوگانه استفاده شده است. شرایط مرزی ساده به شکل معادلات زیر در هر چهار لبه صفحه در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}
&u_1(x.0.t) = v_1(0.y.t) = u_1(x.b.t) = v_1(a.y.t) = 0 \\
&u_3(x.0.t) = v_3(0.y.t) = u_3(x.b.t) = v_3(a.y.t) = 0 \\
&w(x.0.t) = w(0.y.t) = w(x.b.t) = w(a.y.t) = 0
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

شرایط مرزی فوق با استفاده از فرم زیر از بسط های سری فوریه دوگانه برای جابجایی ها برآورده می‌شوند.

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}^{(1)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \\
u_3(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}^{(3)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \\
v_1(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}^{(1)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \\
v_3(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}^{(3)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \\
w(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن بردار جابجایی به شکل $\{\varphi\} = \{U_{mn}^{(1)}, U_{mn}^{(3)}, V_{mn}^{(1)}, V_{mn}^{(3)}, Wmn\}^T$ خواهد بود.

جدول ۳- تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف صفحه ساندویچی با توزیع های گرافن (Pure epoxy, UD) در رویه ها

			Pure epoxy				UD			
			E=0 KV/mm		E=2 KV/mm		E=0 KV/mm		E=2 KV/mm	
(m,n)	hER/hc	b/a	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	Η
1,1	1	1	3.5659	0.2607	11.0415	0.0086	7.3970	0.0606	17.3097	0.0176
		2	2.2358	0.4131	7.2545	0.0061	4.6242	0.0970	12.1017	0.0150
		4	1.9080	0.4832	6.2501	0.0053	3.9312	0.1141	10.6458	0.0140
	4	1	2.3769	0.4089	13.0792	0.0202	4.9364	0.0948	16.1561	0.0272
		2	1.4878	0.6521	9.2701	0.0165	3.0855	0.1516	12.1150	0.0260
		4	1.2660	0.7654	8.1803	0.0152	2.6229	0.1784	10.9416	0.0253
1,2	1	1	8.8934	0.1048	23.6649	0.0145	18.4902	0.0242	33.6255	0.0194
		2	3.5659	0.2607	11.0415	0.0086	7.3970	0.0606	17.3097	0.0176
		4	2.2385	0.4132	7.2545	0.0061	4.6242	0.0970	12.1017	0.0150
	4	1	5.9341	0.1639	23.9920	0.0257	12.3397	0.0379	28.1714	0.0263
		2	2.3763	0.4089	13.0792	0.0202	4.9360	0.0948	16.1561	0.0272
		4	1.4878	0.6520	9.2701	0.0165	3.0855	0.1516	12.1150	0.0260

جدول ۴- تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف صفحه ساندویچی با توزیع های گرافن(FG_O, FG_X) در رویه ها

			FG_O				FG_X			
			E=0 KV/mm		E=2 KV/mm		E=0 KV/mm		E=2 KV/mm	
(m,n)	hER/hc	b/a	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η
1,1	1	1	6.1255	0.0884	16.8196	0.0187	8.4783	0.0461	17.7842	0.0166
		2	3.8297	0.1414	11.8342	0.0158	5.2999	0.0738	12.3618	0.0143
		4	3.2560	0.1663	10.4282	0.0147	4.5054	0.0868	10.8576	0.0134
	4	1	4.0876	0.1382	15.9222	0.0280	5.6581	0.0721	16.3857	0.0264
		2	2.5551	0.2211	11.9965	0.0266	3.5366	0.1154	12.2316	0.0255
		4	2.1720	0.2601	10.8482	0.0258	3.0062	0.1358	11.0335	0.0249
1,2	1	1	15.3108	0.0354	31.9998	0.0215	21.1937	0.0184	35.1725	0.0177
		2	6.1255	0.0884	16.8196	0.0187	8.4783	0.0461	17.7842	0.0166
		4	3.8297	0.1414	11.8342	0.0158	5.2999	0.0738	12.3618	0.0143
	4	1	10.2178	0.0553	27.3120	0.02801	14.1440	0.0288	29.0036	0.0248
		2	4.0876	0.1382	15.9222	0.02806	5.6581	0.0721	16.3857	0.0264
		4	2.5551	0.2211	11.9965	0.02662	3.5366	0.1154	12.2316	0.0255

۴- نتایج و بحث عددی

۴-۱- اعتبار سنجی و همگرایی نتایج

یک صفحه ساندویچ مربع (a=b=0.5 m) با *GPL* تقویت شده لایه ها در پایین و بالا و یک لایه هسته *ER* در نظر گرفته شده است. ضخامت ورق های رویه h1=h3=0.762 mm است. خواص مکانیکی *GPL* و مواد تشکیل دهنده ماتریکس (اپوکسی) لایه‌های رویه عبارتند از [۳]:

$$E_M = 3.0\ GPa,\quad v_M = 0.34\ \ v_{GPL} = 0.186$$

$$\mathrm{l}_{GPL} = 2.5\mu m,\quad \mathrm{w}_{GPL} = 1.5\mu m,\quad \mathrm{h}_{GPL} = 1.5\mathrm{n}m$$

$$\rho_{GPL} = 1.06\ \frac{g}{cm^3},\quad E_{GPL} = 1.01\ TPa,\ \ \rho_M = 1.2\ \frac{g}{cm^3}$$

مقادیر زیر مطابق مرجع [3] اتخاذ می‌گردد:

$$G^{ER} = \mathrm{G}'(E) + \mathrm{i}\mathrm{G}''(E) \qquad \mathrm{G}'(E) = 50000E^2$$

$$\mathrm{G}''(E) = 2600E + 1700 \qquad \rho^{ER} = 1700\,kg/m^3$$

کسر وزنی *GPL* روی ۱ درصد تنظیم شده است.شرایط مرزی با تکیه گاه ساده برای همه لبه‌ها در نظر گرفته شده و از سری فوریه کلی برای بازنشانی جابجایی صفحه ساندویچی استفاده شده است. فرکانسهای طبیعی و عوامل تلفات با استفاده از با مرجع [۳] مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفته است.جدول ۱ مقایسه نتایج حاضر با نتایج مرجع [۳] را نشان می‌دهد. مطابقت خوب بین نتایج را می‌توان در حالت های مختلف مشاهده کرد. برای اطمینان از نتایج این مقاله، پاسخهای استخراج شده برای توزیعهای مختلف گرافن در ماتریس نیز مورد ارزیابی و اعتبارسنجی با مرجع [۱۷] قرار گرفته است. جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد صفحات را با توزیع های گوناگون گرافن در رویه ها و مقایسه آنها با نتایج مرجع [۱۷] را نشان می دهد. درصد حجمی گرافن، ۱ درصد در نظر گرفته شده است. تغییر اعداد موج در جهت x و y که به ترتیب با m و n مشخص می‌گردند همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ های بدست آمده با مرجع مورد بررسی از مطابقت بسیار بالای برخوردار است. علاوه بر آن، فرکانسهای طبیعی در توزیعهای مختلف گرافن افزایش بسیاز زیادی نسبت به حالت اپوکسی خالص که در آن از تقویت کننده گرافنی استفاده نشده است، پیدا کرده اند که این موضوع نشان دهنده اثر منحصر به فرد گرافن (حتی در مقادیر بسیار کم) بر سختی سازه دارد.

جدول ۵- تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف صفحه ساندویچی با توزیع گرافن (FG_Λ)

			FG_Λ			
			E=0 KV/mm		E=2 KV/mm	
(m,n)	hER/hc	b/a	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η
1,1	1	1	6.7680	0.0724	17.0497	0.0182
		2	4.2312	0.1158	11.9564	0.0154
		4	3.5972	0.1362	10.5264	0.0143
	4	1	4.2312	0.1132	16.0325	0.0276
		2	2.8232	0.1811	12.0506	0.0263
		4	2.3999	0.2131	10.8900	0.0256
1,2	1	1	16.9175	0.0289	32.7860	0.0204
		2	6.7680	0.0724	17.0497	0.0182
		4	4.2312	0.0115	11.9564	0.0154
	4	1	11.2901	0.0453	27.7275	0.0271
		2	4.5165	0.1132	16.0325	0.0276
		4	2.8232	0.1811	12.0506	0.0263

از مقایسه نتایج در جدول‌های ۱ و ۲ مشخص می شود که پاسخهای بدست آمده در مقاله حاضر از دقت و اعتبار مناسبی برخوردار است. در ادامه تاثیر پارامترهای مختلف را بر فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف صفحه ساندویچی ساخته شده از هسته ER و رویه های تقویت شده با گرافن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در جدول‌های ۳ تا ۵، تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف صفحه ساندویچی با توزیع های گرافن مختلف در رویه ها آورده شده است. همچنین تغییر ابعاد و ضخامت لایه ها نسبت به یکدیگر و تغییر در میدان الکتریکی نیز در این جداول مورد مطالعه قرار گرفته است. همانگونه که از این جداول مشخص است، افزایش فرکانس طبیعی در توزیع FG-X بیشترین و در توزیع FG-O کمترین میزان بوده است. این موضوع به دلیل افزایش مدول خمشی در توزیع FG-X نسبت به توزیع FG-O به دلیل دورتر بودن تقویت کننده های گرافن از تار خنثی اتفاق می افتد. علاوه بر آن، با افزایش نسبت طول به عرض در صفحه ساندویچی، میزان فرکانس طبیعی کاهش و مقدار ضریب اتلاف انرژی افزایش پیدا می‌کند. همین پدیده با افزایش نسبت ضخامت رویه ها به ضخامت هسته نیز مشاهده می شود. افزایش میدان الکتریکی اعمالی به هسته ER نیز سبب افزایش فرکانس طبیعی و کاهش ضریب اتلاف در صفحه ساندویچی می‌شود.

در جدول ۶ اثر کسر حجمی بر فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف صفحه ساندویچی آورده شده است. مقادیر کسر حجمی از ۱ تا ۱۶ درصد متغیر بوده و نتایج فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف در توزیعهای مختلف گرافن آورده شده است. همانطور که قابل مشاهده است افزایش کسر حجمی در صفحه ساندویچ در توزیع های گوناگون گرافن سبب افزایش فرکانس طبیعی شده است و در مقابل سبب کاهش ضریب اتلاف می‌شود.

۵- نتیجه گیری

ارتعاشات آزاد یک صفحه ساندویچی با رویه با خواص گرادیانی تقویت شده با GPL و هسته ER در این مقاله ارائه شده است. با فرض نظریه صفحات نازک کلاسیک برای ورقهای رویه و نظریه برشی مرتبه اول برای هسته ER، معادلات حرکت با استفاده از معادلات همیلتون بدست می‌آیند. شرایط مرزی با تکیه گاه ساده برای همه لبه‌ها در نظر گرفته شده و از سری فوریه برای حل معادلات استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده نشان دهنده اثر چشمگیر افزودن GPL بر افزایش فرکانس طبیعی (و در نتیجه سختی سازه) دارد. بیشترین میزان افزایش فرکانس طبیعی در توزیع FG-X اتفاق می افتد. همچنین با افزایش نسبت طول به عرض، شاهد کاهش فرکانس طبیعی و افزایش ضریب اتلاف بوده و افزایش میدان الکتریکی باعث سخت تر شدن سازه و کاهش ضریب اتلاف انرژی خواهد شد.

جدول ۶- تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف با توزیع گوناگون گرافن با کسر حجمی متفاوت

m	n	g^*_{GPL}	UD		FG_O		FG_X		FG_Λ	
			ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η	ω*(Hz)	η
1	1	0.01	7.3970	0.0606	6.1255	0.0884	8.4783	0.0461	6.7680	0.0724
		0.04	13.4402	0.0184	10.5851	0.0296	15.7733	0.0133	11.7297	0.0241
		0.07	17.5000	0.0108	13.6568	0.0178	20.6086	0.0078	15.1222	0.0145
		0.1	20.7744	0.0077	16.1531	0.0128	24.4895	0.0055	17.8751	0.0104
		0.16	26.1055	0.0049	20.2396	0.0081	30.7817	0.0035	22.3760	0.0067

۶- مراجع

[1] Stanway R, Sproston JL, El-Wahed AK. Applications of electro-rheological fluids in vibration control: A survey. Smart Materials and Structures. 1996;5(4):464-482.

[2] Liu Y, Davidson R, Taylor P. Investigation of the touch sensitivity of ER fluid based tactile display. Smart Structures and Integrated Systems. 2005;5764:92..

[3] Gholamzadeh Babaki MH, Shakouri M. Free and forced vibration of sandwich plates with electrorheological core and functionally graded face layers. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2021;49(5):689-706.

[4] Rokn-Abadi M, Yousefi M, Haddadpour H, Sadeghmanesh M. Dynamic stability analysis of a sandwich beam with magnetorheological elastomer core subjected to a follower force. Acta Mechanica. 2020;231(9):3715-3727.

[5] Choi WJ, Xiong YP, Shenoi RA. Vibration characteristics of sandwich beams with steel skins and magnetorheological elastomer cores. Advances in Structural Engineering. 2010;13(5):837-847.

[6] Afshar Movahed R. Investigation of mechanical connections in plates and shells made of composite and metal materials. MSc. Seminar, Semnan University, 1397.

[7] Choi SB, Park YK, Cheong CC. Active vibration control of intelligent composite laminate structures incorporating an electro-rheological fluid. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1996;7(4):411-419.

[8] Deng HX, Gong XL. Adaptive tuned vibration absorber based on magnetorheological elastomer. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2007;18(12):1205-1210.

[9] Dwivedy SK, Srinivas M. Dynamic instability of MRE embedded soft cored sandwich beam with non-conductive skins. Shock and Vibration. 2011;18(6):759-788.

[10] Eshaghi M, Sedaghati R, Rakheja S. Dynamic characteristics and control of magnetorheological/electrorheological sandwich structures: A state-of-the-art review. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2016;27(15):2003-2037.

[11] Han YM, Oh JS, Kim S, Choi SB. Design of multi-degree motion haptic mechanisms using smart fluid-based devices. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2017;45(1):135-144.

[12] Hasheminejad SM, Motaaleghi MA. Supersonic flutter control of an electrorheological fluid-based smart circular cylindrical shell. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2014;14(2):1-24.

[13] Hasheminejad SM, Maleki M. Free vibration and forced harmonic response of an electrorheological fluid-filled sandwich plate. Smart Materials and Structures. 2009;18(5):055011.

[14] Kolekar S, et al. Vibration controllability of sandwich structures with smart materials of electrorheological fluids and magnetorheological materials: a review. Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2019;1-19.

[15] Kumar S, Ranjan V, Jana P. Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. Composite Structures. 2018;197:39-53.

[16] Lall AK, Asnani NT, Nakra BC. Vibration and damping analysis of rectangular plate with partially covered constrained viscoelastic layer. Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME. 1987;109(3):241-247.

[17] Song M, Kitipornchai S, Yang J. Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets. Composite Structures. 2017;159:579-588.

[۱۸] بیشه ح، علی بیگلو ا. تحلیل ارتعاشات ازاد ورق کامپوزیتی حلقوی تقویت شده با گرافن با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۰، د. ۵۱، ش. ۱، ص ۵۹-۶۷.

[۱۹] ندیریان ن، بیگلری ح، حامد م. بررسی پاسخ دینامیکی حلقه باز و بسته تیر ساندویچی با هسته انعطاف پذیر مجهز به حسگر و عملگر پیزوالکتریک. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۳۹۷، د. ۴۸، ش. ۱، ص ۳۳۱-۳۳۹.

[۲۰] کروبی ر، ایرانی رهقی م. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته جدار نازک چند لایه با هسته مدرج تابعی و لایه های حسگر و عملگر پیزوالکتریک. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۳۹۷، د. ۴۸، ش. ۱، ص. ۳۰۷-۳۱۴.