

## تحلیل ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در محیط گرمایی

مر نضی نکویی\*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کهنوج، دانشگاه آزاد اسلامی، کهنوج، ایران، nekouei@iau.ac.ir

میثم محمدی

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران، meisam.mohammadi@vru.ac.ir

نرجس مطهری

استادیار، گروه ریاضی، واحد کهنوج، دانشگاه آزاد اسلامی، کهنوج، ایران، narges.motahari@yahoo.com

### چکیده

به دلیل گرمایش آیرودینامیکی، دمای پوسته‌ی هواپیما و موشک به مقدار قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد که باعث کاهش عملکرد پرواز در اثر ارتعاشات اجباری می‌شود. الیاف‌های حافظه‌دار به علت ویژگی‌های ترمومکانیکی از جمله تولید نیرو و بازیابی کرنش‌های بزرگ با اعمال گرما، می‌توانند جهت رفع این مشکل مورد استفاده قرار گیرند. در این پژوهش، پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار نایتینول بررسی شده است. تغییرات تنش بازیابی و مدول یانگ با دما در الیاف حافظه‌دار با استفاده از مدل برینسون محاسبه شده است. معادلات حرکت بر اساس نظریه کلاسیک پوسته با استفاده از روابط کرنش-جابجایی غیرخطی هندسی ون-کارمن با تقریب اول لاو به کمک اصل همپتون استخراج شده است. برای حل معادلات از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در جهت طول استفاده شده است. اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار تحت تاثیر تغییرات دما برای شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد، استفاده مناسب از الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش باعث افزایش فرکانس تشدید و کاهش دامنه ارتعاشات اجباری می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** ارتعاشات اجباری، پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی، الیاف‌های حافظه‌دار، مدل ساختاری برینسون، روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته، فرکانس تشدید.

### Forced vibration analysis of hybrid laminated composite cylindrical shells reinforced with shape memory alloy fibers in thermal environment

M. Nekouei

Department of Mechanical Engineering, Kahnooj Branch, Islamic Azad University, Kahnooj, Iran

M. Mohammadi

Department of Mechanical Engineering, Vali-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

N. Motahari

Department of Mathematics, Kahnooj Branch, Islamic Azad University, Kahnooj, Iran

### Abstract

Due to aerodynamic heating, temperature of aircrafts and rockets skin increases significantly, leading to reduced flight performance due to forced vibration. Shape Memory Alloys (SMAs) can be used to solve this problem due to their thermo-mechanical properties such as generating force and recovering large strains when exposed to heat. In this study, response of forced vibration in composite cylindrical shells reinforced with Nitinol SMA fibers is investigated. Variation in recovery stress and Young's modulus with temperature in SMA fibers is modeled using the Brinson's constitutive model. Equations of motion are derived based on the classical shell theory using the von Kármán nonlinear geometric strain-displacement relations with the Love's first approximation, applying Hamilton's principle. The governing equations are solved using the generalized differential quadrature method in the longitudinal direction. The effect of pre-strain and volume fraction of SMA fibers on the response of forced vibration in composite cylindrical shells reinforced with SMA fibers are investigated under varying temperatures and different boundary conditions. Numerical results indicate that appropriate use of pre-strained SMA fibers leads to an increase in the resonant frequency and a reduction in the amplitude of forced vibration.

**Keywords:** Forced vibration; Hybrid laminated composite cylindrical shells; Shape memory alloys; Brinson constitutive model; Generalized differential quadrature method; Resonant frequency.

برای الیاف‌های حافظه‌دار برای کاربردهای فنی، مهندسی و پزشکی [۳] رو به افزایش است. یکی از چالش‌های پیش روی مهندسين، تغییرات دمای پوسته وسایل پرنده سرعت بالا به دلیل گرمایش آیرودینامیکی می‌باشد که این پدیده باعث کاهش عملکرد پرواز در اثر کماتش یا ناپایداری دینامیکی می‌شود. بنابراین، کنترل و بهبود رفتار استاتیکی و دینامیکی از جمله کماتش و ارتعاشات اجباری در پوسته‌های کامپوزیتی در اثر افزایش دما بسیار حائز اهمیت است. الیاف‌های حافظه‌دار در حالت مهار شده قادر به تولید نیروی کششی بزرگی با افزایش دما هستند که آنها را گزینه مناسبی برای تقویت سازه‌های

### ۱- مقدمه

الیاف‌های حافظه‌دار<sup>۱</sup> یک گروه منحصر به فرد از مواد هوشمند<sup>۲</sup> هستند که ابتدا توسط اولاندر [۱] معرفی شدند. اهمیت آنها زمانی مشخص شد که بوهر [۲] اثر حافظه‌داری را در الیاف نیکل-تیتانیوم با نام تجاری نایتینول نشان داد. به دلیل رفتارهای شگفت‌انگیز، تقاضا

<sup>۱</sup> Shape Memory Alloys

<sup>۲</sup> Smart materials

کامپوزیتی ساخته است.

در دهه‌های گذشته مطالعات زیادی در زمینه مدل‌سازی ریاضی رفتار آلیاژهای حافظه‌دار انجام شده است. با توجه به پیچیدگی بسیار زیاد و پارامترهای سه بعدی، از این مدل‌ها به‌صورت گسترده در کاربردهای مهندسی استفاده نمی‌شود. بنابراین، عموماً مدل‌های یک بعدی در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای اولین بار تاناکا [۴] یک مدل یک بعدی برای نمایش تغییر حالت آلیاژهای حافظه‌دار مطرح نمود. در ادامه لیانگ [۵] با وارد کردن شرایط اولیه در این روابط و به‌کارگیری تابع کسینوسی به جای لگاریتمی توانست این روابط را تا حدودی اصلاح کند. در نهایت برینسون [۶] مدل لیانگ را بهبود بخشید. مدل برینسون تا به حال جزء مهم‌ترین مدل‌های معرفی شده، می‌باشد. آپس و چاپرا [۷] مدل‌های ساختاری تاناکا، لیانگ-روگرز، بوید-گوداس و برینسون را با نتایج آزمایشگاهی بر روی سیم از جنس آلیاژهای حافظه‌دار مقایسه کردند. نتایج آنها نشان داد، که مدل توسعه یافته توسط برینسون با نمودارهای تجربی تنش-کرنش در تمام دماها تطابق خوبی دارد.

مهندسی و طابلی [۸] تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی دارای هسته با ضریب پواسون منفی را ارائه دادند. لی و همکارانش [۹] تحلیل ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت تحت جابجایی محوری را ارائه دادند. دینگ و شی [۱۰] پاسخ غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با ورق‌های گرافن تحت ارتعاشات اجباری را مطالعه کردند. جی و همکارانش [۱۱] تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با سیم‌های استیل-نایتینول را مورد بررسی قرار دادند. گل زردیان و همکارانش [۱۲] ارتعاشات آزاد و خمش تیرهای کامپوزیت اپوکسی را با استفاده از سیم‌های حافظه‌دار کنترل کردند. پرهی و سینگ [۱۳] تحلیل ارتعاشات آزاد پانل پوسته کرووی و استوانه‌ای کم عمق چند لایه تقویت شده با الیاف آلیاژهای حافظه‌دار را ارائه دادند. اسدی و همکارانش [۱۴] کماتش گرمایی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چند لایه تقویت شده با الیاف آلیاژ حافظه‌دار را مورد بررسی قرار دادند. آنها به‌منظور تعیین خواص آلیاژ حافظه‌دار از مدل برینسون استفاده کردند. بیات و افتخاری [۱۵] دمای کماتش گرمایی و پس کماتش گرمایی تیر کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف آلیاژ حافظه‌دار را مورد مطالعه قرار دادند. آنها به‌منظور تعیین خواص آلیاژ حافظه‌دار از مدل برینسون استفاده کردند. کریمی اصل و همکارانش [۱۶] رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری غیر خطی پوسته‌های تقویت شده با الیاف آلیاژ حافظه‌دار در محیط مرطوب و گرما را مورد بررسی قرار دادند. امیری و همکارانش [۱۷] ارتعاشات پانل ساندویچی استوانه‌ای با هسته متخلخل و فوم و رویه تقویت شده با آلیاژهای حافظه‌دار را مورد مطالعه قرار دادند. آنها به‌منظور تعیین خواص آلیاژ حافظه‌دار از مدل برینسون استفاده کردند. نکویی و همکارانش [۱۸-۲۱] ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای و کماتش پوسته‌های استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف آلیاژ حافظه‌دار را بررسی کردند. آنها به‌منظور تعیین خواص آلیاژ حافظه‌دار از مدل برینسون استفاده کردند.

با توجه به مرور تحقیقات گذشته، تا کنون تحقیقی در زمینه تحلیل ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با الیاف

حافظه‌دار با در نظر گرفتن مدل دقیق تغییر خواص کامپوزیت و الیاف حافظه‌دار با دما انجام نشده است. بنابراین در این پژوهش اثر الیاف حافظه‌دار نایتینول در پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چند لایه بر پاسخ ارتعاشات اجباری بررسی شده است. خواص ترمومکانیکی الیاف حافظه‌دار نایتینول از جمله تغییرات تنش بازیابی و مدول یانگ با دما، به کمک مدل برینسون محاسبه شده است. همچنین، معادلات حرکت با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته و اصل همپلتون استخراج شده و به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل شده‌اند. در نهایت، اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار و شرایط مرزی بر پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار نایتینول تحت فشار و افزایش دما بررسی شده است.

## ۲- معادلات ساختاری الیاف حافظه‌دار

حافظه‌داری به مفهوم توانایی در به یاد آوردن شکل قبلی ماده پس از اعمال تغییر شکل اولیه، در طی یک چرخه گرمایی است. آلیاژهای حافظه‌دار، اغلب با تغییر شکل در دماهای نسبتاً پایین و سپس قرارگیری در دماهای بالا، به شکل اولیه باز می‌گردند. در آلیاژهای حافظه‌دار از لحاظ ساختار کریستالی، فاز دما بالا را آستنیت و فاز دما پایین را مارتنزیت می‌نامند. تنش در آلیاژهای حافظه‌دار تابعی از کرنش، کسر حجمی مارتنزیت و دما در نظر گرفته می‌شود. بنابراین لیانگ معادله ساختاری (۱) را برای آلیاژهای حافظه‌دار ارائه داد [۶].

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT = E(\xi)d\varepsilon + \Omega(\xi)d\xi + \Theta dT \quad (1)$$

که در آن  $\Theta$  ضریب ترموالاستیک و  $\Omega$  ضریب انتقال فاز و  $\xi$  کسر حجمی مارتنزیت (تابعی از تنش و دما) می‌باشند. برینسون، ضریب انتقال فاز را به‌صورت رابطه (۲) در نظر گرفت [۶].

$$\Omega(\xi) = -\varepsilon_L E(\xi) \quad (2)$$

که در آن  $\varepsilon_L$  حداکثر کرنش باقیمانده است. کسر حجمی مارتنزیت توسط برینسون به‌صورت رابطه (۳) تجزیه شده است.

$$\xi = \xi_S + \xi_T \quad (3)$$

که  $\xi_S$  و  $\xi_T$  به ترتیب کسر حجمی مارتنزیت ناشی از تنش و ناشی از دما می‌باشد. مدول یانگ در آلیاژهای حافظه‌دار به‌صورت تابعی از کسر حجمی مارتنزیت است که طبق طرح ویگت به‌صورت رابطه (۴) در نظر گرفته می‌شود [۲۲].

$$E(\xi) = E_A + \xi(E_M - E_A) \quad (4)$$

پارامترهای  $E_A$  و  $E_M$  مدول‌های یانگ آلیاژهای حافظه‌دار به‌ترتیب در فاز کاملاً آستنیت و مارتنزیت را نشان می‌دهند. در نهایت، معادله ساختاری آلیاژهای حافظه‌دار با انتگرال‌گیری از رابطه (۱) و در نظر گرفتن کسر حجمی مارتنزیت به‌صورت رابطه (۳) و شرایط اولیه، به‌صورت رابطه (۵) استخراج می‌شود [۶].

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi)\varepsilon - E(\xi_0)\varepsilon_0 + \Omega(\xi)\xi_S - \Omega(\xi_0)\xi_{S0} + \Theta(T - T_0) \quad (5)$$

زیرنویس "0" مقدار اولیه متغیر را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن شرایط اولیه بدون تنش ( $\sigma_0 = 0$ ) و کسر حجمی مارتنزیت ناشی از تنش  $\xi_{S0} = \varepsilon_0 / \varepsilon_L = 0$  به‌صورت رابطه (۶) ساده می‌شود.

$$\sigma = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_S) + \Theta(T - T_0) \quad (6)$$

مدل برینسون بر اساس نمودار فازی نشان داده شده در شکل ۱ ارائه شده است. در این نمودار  $M_F$  و  $M_S$  به ترتیب دمای شروع و پایان

جدول ۱- خواص آلیاژ حافظه‌دار نایتینول [۶]

مقدار	واحد	نماد	خواص
۶۷	GPa	$E_A$	مدول یانگ در ناحیه آستنیت
۲۶۳	GPa	$E_M$	مدول یانگ در ناحیه مارتنزیت
۰.۵۵	MPa/°C	$\Theta$	ضریب ترموالاستیک
۰.۰۶۷		$\epsilon_L$	بیشترین کرنش بازیابی
۹	°C	$M_f$	دمای نهایی تشکیل مارتنزیت
۱۸.۴	°C	$M_s$	دمای شروع تشکیل مارتنزیت
۳۴.۵	°C	$A_s$	دمای شروع تشکیل آستنیت
۴۹	°C	$A_f$	دمای نهایی تشکیل آستنیت
۸	MPa/°C	$C_M$	شیب ناحیه تغییر فاز مارتنزیت
۱۳.۸	MPa/°C	$C_A$	شیب ناحیه تغییر فاز آستنیت
$10.26 \times 10^{-6}$	1/°C	$\alpha_s$	ضریب انبساط گرمایی
۰.۳۳		$\nu_s$	نسبت پواسون
۶۴۵۰	Kg/m <sup>3</sup>	$\rho_s$	چگالی

به‌منظور تعیین تنش بازیابی نسبت به تغییر دما در پیش کرنش‌های مختلف، روابط (۷)، (۸) و (۹) به‌طور هم‌زمان باید حل شوند. نمودار تنش بازیابی آلیاژ حافظه‌دار نایتینول بر حسب دما در پیش کرنش‌های مختلف در شکل ۲ نشان داده شده است و با نتایج گزارش شده توسط اسدی و همکاران [۱۴] و روح و همکاران [۲۳] مقایسه شده است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

برای تقویت کامپوزیت، الیاف حافظه‌دار به‌صورت موازی با الیاف کامپوزیت در لایه‌های مشخص، در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، برای تعیین خواص مواد برای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار، از روش میکرو مکانیک چند سلولی چامیس [۲۴] استفاده می‌شود. بر اساس این روش، متغیرهای مهندسی موثر در هر لایه کامپوزیت هیبریدی با توجه به کسر حجمی الیاف حافظه‌دار نسبت به کامپوزیت ( $V_s$ ) به‌صورت رابطه (۸) محاسبه می‌شوند [۱۴].

$$E_{11} = E_s(\xi) V_s + E_{1c}(1 - V_s)$$

$$E_{22} = E_{2c} \left[ (1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2c}}{E_s(\xi)}\right)} \right]$$

$$G_{12} = G_{12c} \left[ (1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{G_{12c}}{G_s(\xi)}\right)} \right]$$

$$G_s(\xi) = \frac{E_s(\xi)}{2(1 + \nu_{12s})} \quad (8)$$

$$\nu_{12} = \nu_{12s} V_s + \nu_{12c}(1 - V_s)$$

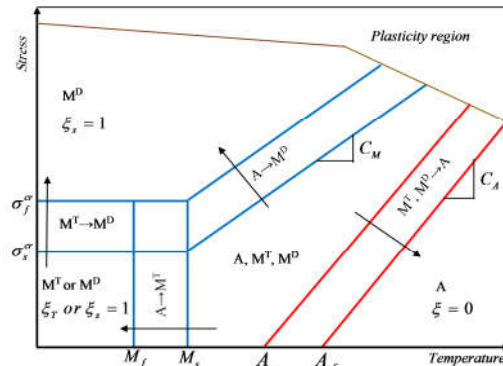
$$\alpha_1 = \frac{V_s \alpha_s E_s(\xi) + (1 - V_s) \alpha_{1c} E_{1c}}{E_{11}}$$

$$\alpha_2 = \frac{E_{2c}}{E_{22}} \left[ \alpha_{2c} (1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\alpha_{2c} \sqrt{V_s} - V_s (\alpha_{2c} - \alpha_s)}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2c}}{E_s(\xi)}\right)} \right]$$

$$\rho = \rho_s V_s + \rho_c (1 - V_s)$$

زیرنویس 'c' و 's' نشان دهنده ماتریس کامپوزیت (گرافیت/پوکسی) و الیاف حافظه‌دار است. همچنین، پارامترهای  $E$ ،  $G$ ،  $\alpha$  و  $\nu$  به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی، نسبت پواسون و ضریب انبساط گرمایی هستند.

تشکیل مارتنزیت و  $A_s$  و  $A_f$  دمای شروع و پایان تشکیل آستنیت می‌باشند. همچنین،  $\sigma_s^{cr}$  و  $\sigma_f^{cr}$  تنش شروع و پایان انتقال فاز مارتنزیت ناشی از دما به مارتنزیت ناشی از تنش و  $C_M$  و  $C_A$  به ترتیب شیب ناحیه تغییر فاز مارتنزیت و آستنیت می‌باشند.



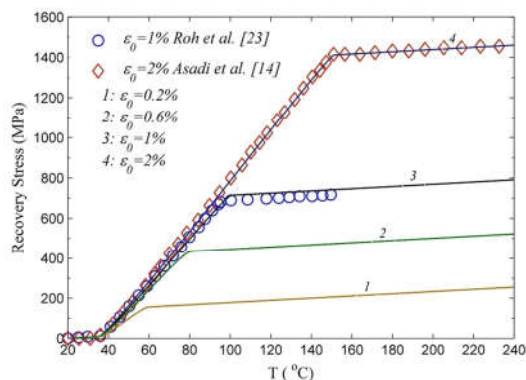
شکل ۱- نمودار فازی تنش-دما در آلیاژهای حافظه‌دار [۶]

با توجه به نمودار فازی، کسر حجمی مارتنزیت به‌صورت تابعی از تنش، دما و شرایط اولیه در حالت افزایش دما برای  $T > A_s$  و  $A_s < T < A_f$  به‌صورت رابطه (۹) بیان می‌شود [۶].

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{A_f - A_s} \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (9)$$

$$\xi_s = \xi_{s0} \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \xi_T = \xi_{T0} \frac{\xi}{\xi_0}$$

در این تحقیق، شرط اولیه کسر حجمی مارتنزیت ناشی از دما در آلیاژ حافظه‌دار، صفر ( $\xi_{T0} = 0$ ) و دمای مرجع، ۲۰ درجه سلسیوس در نظر گرفته می‌شود. خواص آلیاژ حافظه‌دار نایتینول در جدول ۱ ذکر شده است.



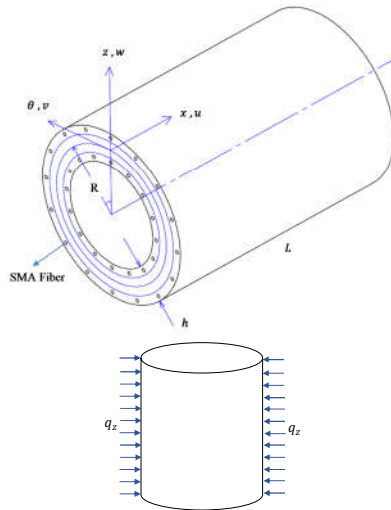
شکل ۲- نمودارهای تنش بازیابی الیاف حافظه‌دار بر حسب دما برای پیش کرنش‌های مختلف [۱۹]

### ۳- معادلات حرکت

مولفه‌های جابجایی بر اساس نظریه کلاسیک پوسته و تقریب اول لاو برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۹) در نظر گرفته می‌شود [۲۵].

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z \left( \frac{v_0}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

مشخصات هندسی و بار خارجی  $q_z$  در پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳- بار خارجی و هندسه پوسته استوانه‌ای کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار

مولفه‌های کرنش بر حسب مولفه‌های جابجایی سطح میانی بر اساس نظریه کلاسیک پوسته با تقریب اول لاو و در نظر گرفتن غیر خطی هندسی ون کارمن برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شوند [۲۶].

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,\theta} + \frac{w_0}{R} \\ u_{0,\theta} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{0,x}^2 \\ \frac{w_{0,\theta}^2}{R^2} \\ 2 \frac{w_{0,x} w_{0,\theta}}{R} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -w_{0,xx} \\ -\frac{w_{0,\theta\theta}}{R^2} + \frac{v_{0,\theta}}{R^2} \\ 2 \left( -\frac{w_{0,x\theta}}{R} + \frac{v_{0,x}}{R} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

به‌منظور اعمال اثر دما بر خواص کامپوزیت و الیاف حافظه‌دار و همچنین، نیروی بازایی تولید شده در الیاف حافظه‌دار، روابط ساختاری الاستیک برای لایه  $k$  ام پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در سیستم مختصات اصلی در حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود [۱۴].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{\theta\theta} \\ 2\alpha_{x\theta} \end{Bmatrix}_{(k)} + \sigma^r V_s \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \\ \sin^2 \beta \\ \sin \beta \cos \beta \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (11)$$

$\alpha$  ضریب انبساط گرمایی و  $\sigma^r$  تنش بازایی تولید شده از استحاله فازی معکوس از مارتنزیت به آستنیت در اثر تغییر دما در الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش محاسبه شده در رابطه (۶) است.  $\beta$  زاویه بین الیاف با محور  $x$  در هر لایه است.  $\bar{Q}_{ij}$  مولفه‌های ماتریس سفتی انتقال یافته می‌باشند که به صورت رابطه (۱۲) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} [\bar{Q}] &= [T]^T [Q] [T] \\ [T] &= \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -2 \sin \beta \cos \beta & 2 \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

مولفه‌های ماتریس سفتی  $[Q]$  به صورت رابطه (۱۳) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{E_{22}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (13)$$

بر اساس نظریه کلاسیک پوسته، منته‌های تنش برای پوسته نازک به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}, M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}) &= \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}, z\sigma_{xx}, z\sigma_{\theta\theta}, z\sigma_{x\theta}) dz \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۰) و (۱۱) در رابطه (۱۴)، منته‌های تنش

به صورت رابطه (۱۵) حاصل می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^r \\ M^r \end{Bmatrix} \quad (15)$$

پارامترهای  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب مولفه‌های ماتریس سفتی

کششی، کوپل کششی-خمشی و خمشی هستند، که به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (16)$$

همچنین، پارامترهای  $N^T$  و  $M^T$  منته‌های نیرو و گشتاور گرمایی هستند که به شکل رابطه (۱۷) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{\theta\theta} \\ A_{x\theta} \end{Bmatrix} (1, z) \Delta T dz \\ \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{\theta\theta} \\ A_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \\ 2 \sin \beta \cos \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \end{bmatrix} \\ &\times \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$\Delta T$  اختلاف دمای استوانه با دمای مرجع می‌باشد. همچنین،

در رابطه (۱۵) پارامترهای  $N^r$  و  $M^r$  منته‌های نیرو و گشتاور خمشی

ناشی از الیاف حافظه‌دار هستند که به صورت رابطه (۱۸) محاسبه می‌شوند [۱۴].

$$\begin{Bmatrix} N_x^r \\ N_\theta^r \\ N_{x\theta}^r \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x^r \\ M_\theta^r \\ M_{x\theta}^r \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \\ \sin^2 \beta \\ \sin \beta \cos \beta \end{Bmatrix} \sigma^r V_s \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} (1, z) dz \quad (18)$$

اصل همپلتون (حالت دینامیکی جابجایی‌های مجازی) برای

استخراج معادلات حرکت به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود [۲۷].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0, \quad (19)$$

$$\delta u_0 = \delta v_0 = \delta w_0 = 0 \text{ at } t = t_1, t_2,$$

انرژی کرنشی مجازی ( $\delta U$ ) برای پوسته استوانه‌ای نازک کم عمق

### ۵- خطی سازی معادلات حرکت

به منظور خطی سازی معادلات دینامیکی از معیار تعادل همسایگی<sup>۱</sup> در حالت پیش کمانش استفاده می‌شود [۲۹]. در حقیقت، تغییر شکل اولیه پوسته‌ها در زمان ناپایداری همراه با چرخش می‌باشد. در نظر گرفتن این چرخش‌ها باعث پیچیدگی قابل توجهی در حل معادلات می‌شود. خوشبختانه، اثر چرخش‌های پیش کمانش در نمونه‌های زیادی بسیار ناچیز می‌باشد [۲۹]. بنابراین، با نادیده گرفتن چرخش‌های پیش کمانش، معادلات حرکت پوسته‌های استوانه‌ای به صورت رابطه (۲۶) ساده می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \delta u_0: N_{xx,x}^1 + \frac{N_{x\theta,\theta}^1}{R} &= I_0 \ddot{u}_0^1 \\
 \delta v_0: N_{x\theta,x}^1 + \frac{N_{\theta\theta,\theta}^1}{R} + \frac{M_{x\theta,x}^1}{R} + \frac{M_{\theta\theta,\theta}^1}{R^2} &= I_0 \ddot{v}_0^1 \\
 \delta w_0: M_{xx,xx}^1 + \frac{2}{R} M_{x\theta,x\theta}^1 + \frac{M_{\theta\theta,\theta\theta}^1}{R^2} - \frac{N_{\theta\theta}^0}{R} + N_{xx}^0 W_{0,xx}^1 & \\
 &+ \frac{1}{R^2} N_{\theta\theta}^0 W_{0,\theta\theta}^1 + \frac{2}{R} N_{x\theta}^0 W_{0,x\theta}^1 & \\
 &+ q_z(x, \theta, t) = I_0 \ddot{w}_0^1 &
 \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری روابط کرنش-جابجایی (۱۰) در منته‌های تنش (۱۵) و جایگذاری معادله حاصل در رابطه (۲۶)، معادلات حرکت به صورت رابطه (۲۷) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} + L_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} I_0 \ddot{u}_0^1 \\ I_0 \ddot{v}_0^1 \\ I_0 \ddot{w}_0^1 \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_z \end{Bmatrix}, \\
 L_N &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx}^0 \frac{\partial}{\partial x} \right) &
 \end{aligned} \quad (27)$$

مولفه‌های  $(u^0, v^0, w^0)$  موقعیت تعادل و مولفه‌های  $(u^1, v^1, w^1)$  انحراف کوچک مولفه‌های جابجایی در حالت پیش کمانش هستند. عملگرهای دیفرانسیلی جزئی  $L_{ij}$  برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک با الیاف متقاطع در پیوست مرجع [۱۹] ذکر شده‌اند. شرایط مرزی تکیه گاه ساده (S) و گیردار (C) برای دو طرف پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۲۸) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 S: u_0^1 = v_0^1 = w_0^1 = M_{xx}^1 = 0 \\
 C: u_0^1 = v_0^1 = w_0^1 = w_{0,x}^1 = 0 &
 \end{aligned} \quad (28)$$

### ۶- روش حل معادلات حرکت

به منظور تحلیل ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار، فشار جانبی در راستای محور z به صورت رابطه (۴۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$q_z(x, \theta, t) = q_0(x) \cos(n\theta) \sin(\omega_F t) \quad (29)$$

در رابطه بالا،  $\omega_F$  فرکانس بار جانبی اعمال شده بر پوسته می‌باشد. مولفه‌های جابجایی پوسته استوانه‌ای در راستای طولی به صورت توابع مجهول و به منظور ارضاء شرایط متناوب در راستای محیطی به صورت توابع مثلثاتی به صورت رابطه (۴۱) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 u_0^1(x, \theta, t) &= U(x) \cos(n\theta) \sin(\omega_F t) \\
 v_0^1(x, \theta, t) &= V(x) \sin(n\theta) \sin(\omega_F t) \\
 w_0^1(x, \theta, t) &= W(x) \cos(n\theta) \sin(\omega_F t) &
 \end{aligned} \quad (30)$$

در رابطه (۴۱)، n عدد موج کامل در جهت محیطی است. با جایگذاری روابط جابجایی (۴۱) و رابطه (۴۰) در معادله (۲۷)، معادلات حرکت به صورت رابطه (۴۲) نوشته می‌شوند.

به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آید.

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \delta \epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}) R dz d\theta dx \quad (20)$$

انرژی پتانسیل مجازی ( $\delta V$ ) ایجاد شده توسط بارهای خارجی برای پوسته استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$\delta V = \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_z \delta w_0) R d\theta dx \quad (21)$$

انرژی جنبشی مجازی ( $\delta K$ ) برای پوسته استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود.

$$\delta K = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) R dz d\theta dx \quad (22)$$

با جایگذاری میدان جابجایی (۹) و رابطه کرنش-جابجایی (۱۰) در اصل همیلتون (۱۹) و استفاده از رابطه منته‌های تنش (۱۵)، معادلات حرکت به صورت رابطه (۲۳) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 \delta u_0: N_{xx,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} &= I_0 \ddot{u}_0 \\
 \delta v_0: N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta\theta,\theta}}{R} + \frac{M_{x\theta,x}}{R} + \frac{M_{\theta\theta,\theta}}{R^2} &= I_0 \ddot{v}_0 \\
 \delta w_0: M_{xx,xx} + \frac{2}{R} M_{x\theta,x\theta} + \frac{M_{\theta\theta,\theta\theta}}{R^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + N_{xx} W_{0,xx} & \\
 &+ \frac{1}{R^2} N_{\theta\theta} W_{0,\theta\theta} + \frac{2}{R} N_{x\theta} W_{0,x\theta} & \\
 &+ q_z(x, \theta, t) = I_0 \ddot{w}_0 &
 \end{aligned} \quad (23)$$

ممان اینرسی به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌شود.

$$I_0 = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz \quad (24)$$

### ۴- معادلات تعادل در حالت پیش کمانش

به طور کلی سه روش خمش غیرخطی، خمش خطی و غشایی خطی جهت تعیین بارهای پیش کمانش می‌تواند استفاده شود [۲۸]. به دلیل وجود تغییر شکل جانبی در حالت پیش کمانش، تحلیل رفتار تعادل پوسته با روش پیش کمانش غیرخطی است، که یک مسئله پیچیده است. با این حال، تحلیل رفتار پیش کمانش اغلب برای اهداف طراحی، به صورت خطی انجام می‌شود. در روش غشایی خطی ممان‌های خمشی و چرخش‌ها (غیرخطی هندسی ون-کارمن) از معادلات حذف می‌شود. برآش اثر چرخش پیش کمانش روی کاهش پایداری را آزمایش کرد و نتیجه گرفت که، برای پوسته استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت، زمانی که نسبت طول به شعاع بزرگتر از واحد باشد، نادیده گرفتن چرخش پیش کمانش خطای کمتر از ۵٪ دارد. همچنین، با افزایش نسبت  $L/R$ ، خطا به طور دائم کاهش می‌یابد [۲۹]. در این پژوهش، نیروهای پیش کمانش بر اساس روش غشایی خطی محاسبه می‌شوند. همچنین، افزایش دما به صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، منته‌های نیرو در حالت پیش کمانش به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود [۱۹].

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^0 &= \frac{A_{12}}{A_{22}} (N_{\theta\theta}^T - N_{\theta\theta}^r) - N_{xx}^T + N_{xx}^r \\
 N_{\theta\theta}^0 &= 0, \quad N_{x\theta}^0 = 0 &
 \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>1</sup> Adjacent equilibrium criterion

جدول ۲- فرکانس اصلی بی بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط

مرزی ساده - ساده

$\omega_c = R\omega\sqrt{\rho/E_{11}}, E_{11} = 20.02\text{Mpsi}, E_{22} = 1.3\text{Mpsi}$ $G_{12} = 1.03\text{Mpsi}, \nu_{12} = 0.3, h/R = 0.01$					
	L/R	آپاکوس [۳۱]	طالع زاده [۳۱]	قتو [۲۵]	پژوهش حاضر
[۰.۹۰]	۴	۰.۳۰۱۱	۰.۳۰۱۱	۰.۳۰۱۳	۰.۳۰۱۲
	۲	۰.۵۹۱۰	۰.۵۹۱۱	۰.۵۹۱۵	۰.۵۹۱۳
	۱	۰.۸۳۱	۰.۸۳۱	۰.۸۳۷	۰.۸۳۳
[۹.۰۰]	۴	۰.۳۱۴۵	۰.۳۱۴۵	۰.۳۱۴۷	۰.۳۱۴۶
	۲	۰.۶۱۲۱	۰.۶۱۲۱	۰.۶۱۲۵	۰.۶۱۲۴
	۱	۰.۱۱۱۴۶	۰.۱۱۱۵۲	۰.۱۱۱۶۰	۰.۱۱۱۵۷

در جدول ۳ اختلاف دمای بحرانی کماتش ( $\Delta T$ ) برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی هشت لایه متقارن متقاطع در شرایط مرزی ساده - ساده با نتایج گزارش شده توسط اسدی و همکارانش [۱۴] و شن [۳۲] مقایسه شده است. نتایج مرجع [۱۴] بر اساس نظریه دانل و نتایج مرجع [۳۲] بر اساس نظریه دانل با لحاظ عبارتهای غیرخطی هندسی ون-کارمن می‌باشد. نتیجه مقایسه نشان می‌دهد که، نتایج در این پژوهش به نتایج مرجع [۳۲] نزدیک‌تر است.

جدول ۳- اختلاف دمای بحرانی کماتش  $\Delta T$  (درجه سلسیوس) پوسته استوانه‌ای چند لایه در شرایط مرزی ساده - ساده

$[0,90]_{2S}, R/h = 200, n = 11, E_{11} = 150\text{ GPa}, E_{22} = 9\text{ GPa},$ $G_{12} = 7.1\text{ GPa}, \nu_{12} = 0.3, \alpha_{11} = 1.1 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C},$ $\alpha_{22} = 25.2 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$				
	$L^2/Rh$	اسدی و همکارانش [۱۴]	شن [۳۲]	پژوهش حاضر
۲۰۰		۴۱۷,۹۰۰	۴۲۳,۳۴۶۶	۴۲۹,۴۶۷۶
۵۰۰		۴۲۱,۲۳۹	۴۲۵,۸۴۳۷	۴۳۰,۵۰۲۶
۸۰۰		۴۱۸,۲۸۸	۴۲۴,۱۹۱۷	۴۲۷,۸۳۶۷

## ۲-۷- تفسیر و تحلیل نتایج

در این بخش، پوسته‌ی استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی نایتینول/گرافیت/اپوکسی با مشخصات هندسی نسبت شعاع به ضخامت  $500 (R/h)$ ، نسبت طول به شعاع  $1 (L/R)$  و ضخامت کل ۱ میلی‌متر با ضخامت مساوی در هر لایه در نظر گرفته شده است. مقدار فشار  $q_0(x)$  در جهت x ثابت و برابر ۱۰۰ پاسکال در نظر گرفته می‌شود. همچنین، خواص الیاف نایتینول و کامپوزیت گرافیت/اپوکسی به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۴ داده شده است.

$$\begin{aligned}
 S_{110}U + S_{112}U^{(2)} + S_{121}V^{(1)} + S_{131}W^{(1)} + S_{133}W^{(3)} \\
 = -I_0\omega_n^2 U \\
 S_{211}U^{(1)} + S_{220}V + S_{222}V^{(2)} + S_{230}W + S_{232}W^{(2)} \\
 = -I_0\omega_n^2 V \\
 S_{311}U^{(1)} + S_{313}U^{(3)} + S_{320}V + S_{322}V^{(2)} + S_{330}W \\
 + S_{332}W^{(2)} + S_{334}W^{(4)} + N_{xx}^0 W^{(2)} + q_0(x) \\
 = -I_0\omega_n^2 W
 \end{aligned} \quad (31)$$

علامت  $(^{(i)})$  مشتق مرتبه نام در راستای x را نشان می‌دهد.  $S_{ijk}$  در پیوست مرجع [۱۹] ذکر شده‌اند. شرایط مرزی (۲۸) با استفاده از روابط کرنش-جابجایی (۱۰)، منته‌های تنش (۱۵) و مولفه‌های جابجایی (۴۱) به صورت رابطه (۴۳) ساده می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 S: U = V = W = W^{(2)} = 0 \\
 C: U = V = W = W^{(1)} = 0
 \end{aligned} \quad (32)$$

پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار تحت فشار جانبی  $q_z$  با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته به منظور گسسته سازی معادلات حرکت در جهت طولی استوانه، محاسبه می‌شود. روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته توسط شاو [۳۰] ارائه شده است. بنابراین، با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، معادلات حرکت (۴۲) به صورت رابطه ماتریسی (۴۴) بیان می‌شوند.

$$[A_{DB}]\{X_B\} + [A_{DD}]\{X_D\} + I_0\omega_n^2\{X_D\} = -\{F\} \quad (33)$$

شرایط مرزی (۴۳) به صورت رابطه ماتریسی (۴۵) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 [A_{BB}]\{X_B\} + [A_{BD}]\{X_D\} = 0 \\
 \{X_D\}^T = \{U_2, U_3, \dots, U_{K-1}, V_2, V_3, \dots, V_{K-1}, W_3, W_4, \dots, W_{K-2}\} \\
 \{X_B\}^T = \{U_1, U_K, V_1, V_K, W_1, W_2, W_{K-1}, W_K\}
 \end{aligned} \quad (34)$$

با جایگذاری رابطه (۴۵) در رابطه (۴۴)، دستگاه معادلات خطی به شکل رابطه (۴۶) حاصل می‌شود.

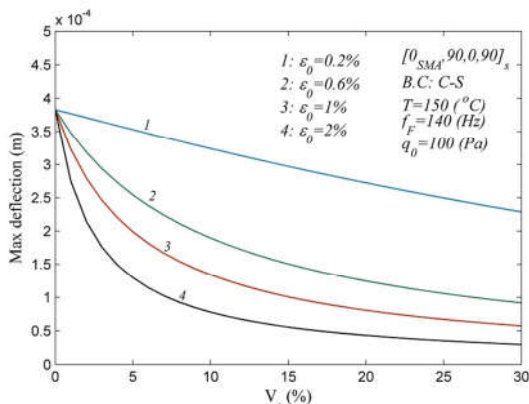
$$([A_{DD}] - [A_{DB}][A_{BB}]^{-1}[A_{BD}])\{X_D\} + I_0\omega_n^2\{X_D\} = -\{F\} \quad (35)$$

سرانجام، با حل دستگاه معادلات خطی (۴۶) مولفه‌های جابجایی  $\{X_D\}$  به دست می‌آیند. همچنین، مولفه‌های جابجایی  $\{X_B\}$  با جایگذاری  $\{X_D\}$  در معادله (۴۵) محاسبه می‌شوند. بنابراین، مولفه‌های جابجایی در هر گره تعیین می‌شوند.

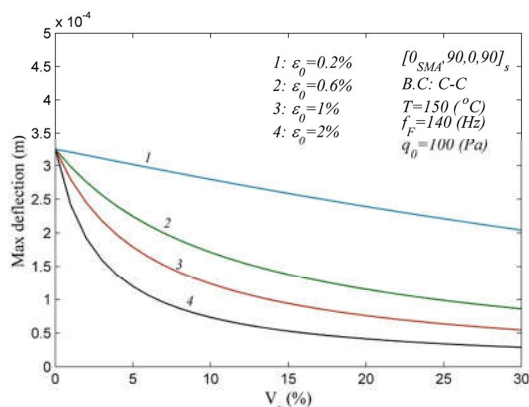
## ۷- نتایج

### ۱-۱- اعتبار سنجی

در این بخش به منظور اعتبار سنجی، فرکانس طبیعی اصلی و دمای بحرانی کماتش پوسته‌ی استوانه‌ای نازک چند لایه با نتایج ارائه شده در مراجع مقایسه شده است. در جدول ۲ فرکانس طبیعی اصلی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای دو لایه متقاطع در شرایط مرزی ساده - ساده با نتایج گزارش شده توسط قتو [۲۵] و طالع زاده [۳۱] مقایسه شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج در این تحقیق با نتایج گزارش شده وجود دارد. لازم به ذکر است، طالع زاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده و معادلات حرکت را با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل کرده است. همچنین طبق نتایج جدول مذکور حداکثر اختلاف کمتر از ۰/۱ درصد است که در پوسته نسبتاً ضخیم است، که به دلیل استفاده از نظریه کلاسیک پوسته در این پژوهش می‌باشد.



شکل ۵- اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده -گیردار



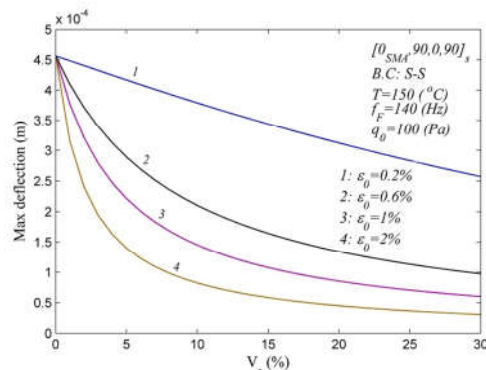
شکل ۶- اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی گیردار -گیردار

اثر کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در دمای ۸۰ درجه سلسیوس و شرایط مرزی ساده -ساده (S-S)، ساده -گیردار (S-C) و گیردار -گیردار (C-C) به ترتیب در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ بررسی شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که، تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت در دمای بالای شروع فاز آستنیت، باعث افزایش فرکانس تشدید می‌شود. همچنین، افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در دمای بالای شروع فاز آستنیت، فرکانس تشدید پوسته استوانه‌ای کامپوزیت را به مقدار بالاتری افزایش می‌دهد. به عبارت دیگر، الیاف حافظه‌دار در دمای بالای شروع فاز آستنیت، باعث افزایش فرکانس تشدید پوسته استوانه‌ای کامپوزیت می‌شوند. شایان ذکر است که، به محض رسیدن فرکانس تحریک پوسته به فرکانس طبیعی، ناپایداری دینامیکی (تشدید) اتفاق می‌افتد.

جدول ۴- خواص وابسته به دما کامپوزیت گرافیت/ اپوکسی [۱۴]

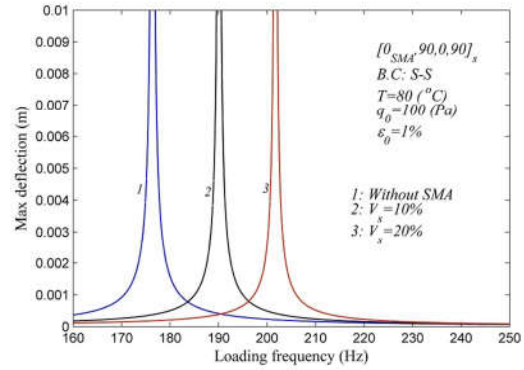
خواص	نماد	واحد	مقدار
مدول یانگ در جهت الیاف	$E_{1c}$	GPa	$155(1-3.52 \times 10^{-4} \Delta T)$
مدول یانگ عمود بر الیاف	$E_{2c}$	GPa	$8.28(1-4.27 \times 10^{-4} \Delta T)$
مدول برشی	$G_{12c}$	GPa	$4.55(1-6.06 \times 10^{-4} \Delta T)$
ضریب انبساط گرمایی در جهت الیاف	$\alpha_{1c}$	$1/^\circ C$	$-0.7 \times 10^{-6} (1-1.25 \times 10^{-2} \Delta T)$
ضریب انبساط گرمایی عمود بر الیاف	$\alpha_{2c}$	$1/^\circ C$	$3.01 \times 10^{-6} (1+0.41 \times 10^{-4} \Delta T)$
نسبت پواسون	$\nu_{12c}$		0.22
دمای محیط	$T_{ref}$	$^\circ C$	20
چگالی	$\rho_c$	$Kg/m^3$	1586

اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار روی بیشترین جابجایی شعاعی سطح میانی پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هشت لایه هیبریدی نایتینول/ گرافیت/ اپوکسی تحت بار دینامیکی شعاعی با دامنه ۱۰۰ پاسکال و فرکانس تحریک ۱۴۰ هرتز در دمای ۱۵۰ درجه سلسیوس و شرایط مرزی ساده -ساده (S-S)، ساده -گیردار (S-C) و گیردار -گیردار (C-C) به ترتیب در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده است. همان‌طور که مشهود است، افزایش پیش کرنش الیاف حافظه‌دار منجر به کاهش جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت می‌شود. دلیل این اتفاق، تولید نیروی بازایی کششی در طی استحاله فازی (بین دمای شروع و پایان آستنیت) با افزایش دما در الیاف حافظه‌دار بعد از دمای شروع آستنیت است. همچنین، با افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت جابجایی شعاعی کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه شیب نمودارها در ابتدا زیاد می‌باشد و بعد شیب کاهش می‌یابد می‌توان نتیجه گرفت که افزایش کسر حجمی تا ۱۰ درصد در الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش بیش از ۰/۶ درصد به شدت باعث کاهش جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت می‌شود. بنابراین، کسر حجمی ۱۰ درصد می‌تواند یک مقدار بهینه از لحاظ اقتصادی باشد.

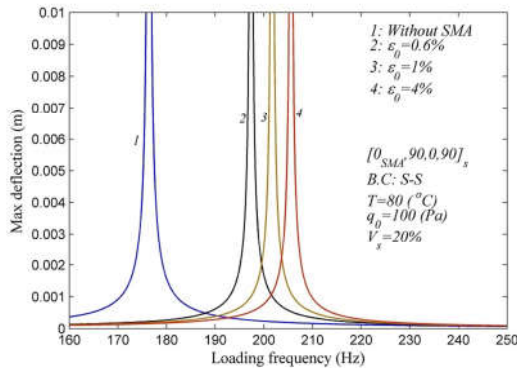


شکل ۴- اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده -ساده

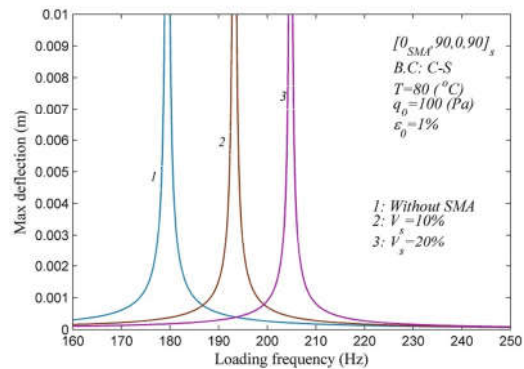
تشدید می‌شود. همچنین، افزایش پیش کرنش الیاف حافظه‌دار در دمای بالای شروع فاز آستنیت به دلیل تولید نیروی بازبایی بزرگتر، فرکانس تشدید پسته استوانه‌ای کامپوزیت را به مقدار بالاتری افزایش می‌دهد. پر واضح است که، به‌منظور بهبود پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار، افزایش پیش کرنش نسبت به افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار مقرون به‌صرفه‌تر می‌باشد.



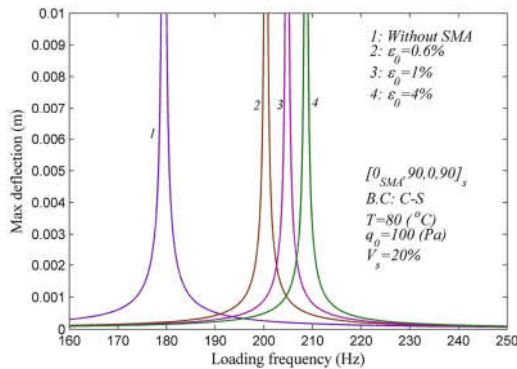
شکل ۷- اثر کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده- ساده



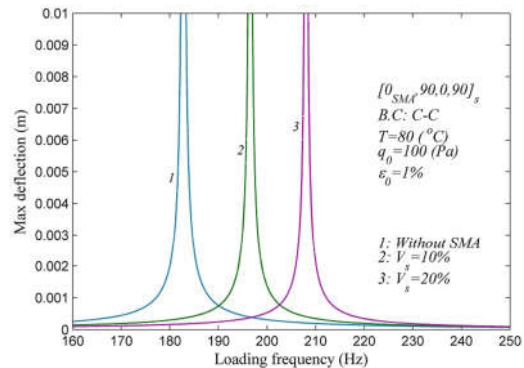
شکل ۱۰- اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده- ساده



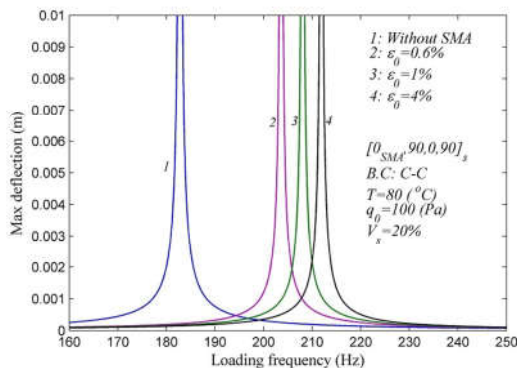
شکل ۸- اثر کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده- گیردار



شکل ۱۱- اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده- گیردار



شکل ۹- اثر کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی گیردار- گیردار



شکل ۱۲- اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی گیردار- گیردار

اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشات اجباری پسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در دمای ۸۰ درجه سلسیوس و شرایط مرزی ساده- ساده (S-S)، ساده- گیردار (S-C) و گیردار- گیردار (C-C) به ترتیب در شکل ۱۰، ۱۱ و ۱۲ ارائه شده است. با توجه به این نمودارها می‌توان نتیجه گرفت که، تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در پسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت در دمای بالای شروع فاز آستنیت، باعث افزایش فرکانس



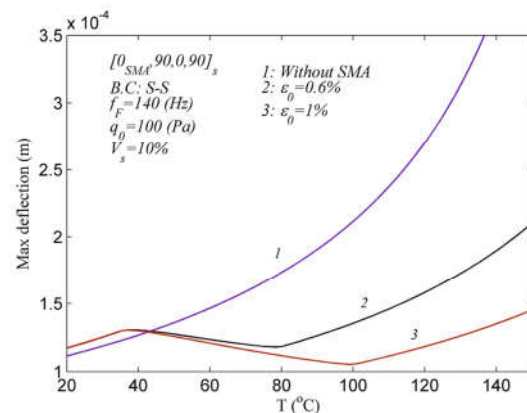
استوانه‌ای کامپوزیت دارند.

- تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در راستای طولی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در دمای بالای شروع آستنیت، باعث کاهش جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای می‌شود.
- افزایش پیش کرنش الیاف حافظه‌دار منجر به کاهش جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت می‌شود. دلیل این اتفاق، تولید نیروی بازجایی کششی در طی استحاله فازی (بین دمای شروع و پایان آستنیت) با افزایش دما در الیاف حافظه‌دار بعد از دمای شروع آستنیت است.
- افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در پوسته استوانه‌ای کامپوزیت جابجایی شعاعی را کاهش می‌دهد. همچنین، افزایش کسر حجمی تا ۱۰ درصد در الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش بیش از ۰/۶ درصد به شدت باعث کاهش جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت می‌شود. بنابراین، کسر حجمی ۱۰ درصد می‌تواند یک مقدار بهینه از لحاظ اقتصادی باشد.
- به‌طور کلی، با افزایش دما، تغییر شکل پوسته استوانه‌ای کامپوزیت افزایش پیدا می‌کند. اما، تعبیه مقدار کمی الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در راستای طولی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در دمای بالای شروع آستنیت، باعث کاهش قابل توجه تغییر شکل پوسته استوانه‌ای می‌شود.

## ۹- مراجع

- [1] Ölander A. An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloys. *Journal of the American Chemical Society*. 1932;54(10):3819-33.
- [2] Buehler WJ, Gilfrich J, Wiley R. Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition TiNi. *Journal of applied physics*. 1963;34(5):1475-7.
- [3] نعمت زاده ف، مستعان ح، سیدصالحی م. مطالعه عددی رفتار مکانیکی استنت های آلیاژهای حافظه دار نیکل تیتانیوم در شرایط بارگذاری شعاعی جهت کاربرد در عروق محیطی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۱، د. ۵۲، ش. ۲، ص ۲۳۳-۹.
- [4] Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior. *RES MECHANICA*. 1986;18(3):251-63.
- [5] Liang C, Rogers CA. One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1990;1(2):207-34.
- [6] Brinson LC. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Journal of intelligent material systems and structures*. 1993;4(2):229-42.
- [7] Epps JJ, Chopra I. Comparative evaluation of shape memory alloy constitutive models with test data. *Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Adaptive Structures Forum*; College Park, Maryland 1997. 251-63.
- [8] مهندسی ن، طالبی م. تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی دارای هسته با ضریب پواسون منفی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۲، د. ۵۳، ش. ۲، ص ۱۷۵-۸۳.
- [9] Li M, Li Y, Liu X, Dai F, Yu D. Forced vibration of an axially moving laminated composite cylindrical shallow shell. *Meccanica*. 2023;58(8):1581-98.

در شکل ۱۳ اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر تغییر شکل پوسته استوانه‌ای هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در شرایط مرزی ساده - ساده (S-S) تحت افزایش یکنواخت دما، نشان داده شده است. همان‌طور که مشهود است، با افزایش دما، تغییر شکل پوسته استوانه‌ای کامپوزیت افزایش پیدا می‌کند. اما، تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در راستای طولی به مقدار ۱۰ درصد نسبت حجمی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در دمای بالای شروع آستنیت، باعث کاهش قابل توجه تغییر شکل پوسته استوانه‌ای می‌شود. همچنین، افزایش پیش کرنش الیاف حافظه‌دار از ۰/۶ درصد به ۱ درصد منجر به کاهش تغییر شکل می‌شود. به‌طور کلی، دلیل این اتفاق، تولید نیروی بازجایی کششی در طی استحاله فازی (بین دمای شروع و پایان آستنیت) با افزایش دما در الیاف حافظه‌دار بعد از دمای شروع آستنیت است.



شکل ۱۳- اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی ساده - ساده

## ۸- نتیجه‌گیری

- در این پژوهش، تاثیر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار تحت بار دینامیکی در شرایط مرزی مختلف و افزایش دما مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور خواص مکانیکی وابسته به دما و شرایط اولیه در الیاف حافظه‌دار به کمک مدل برینسون به‌طور دقیق محاسبه شد. معادلات حرکت بر اساس نظریه کلاسیک پوسته نازک و اصل همپلتون استخراج شد و با استفاده از روش عددی مربعات تفاضلی تعمیم یافته و توابع مثلثاتی گسسته سازی شده‌اند. در نهایت با حل دستگاه معادلات خطی حاصل، مولفه‌های جابجایی پوسته به‌دست آمد. اعتبار سنجی روش با مقایسه فرکانس طبیعی و دمای بحرانی کماتش پوسته‌های استوانه‌ای نازک چند لایه با نتایج موجود در مراجع انجام شد که نتایج تطابق قابل قبولی با نتایج مشابه در مراجع داشت. در ادامه، نتایج مهم را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:
- تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در راستای طولی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت در دمای بالای شروع آستنیت، باعث افزایش فرکانس تشدید پوسته استوانه‌ای می‌شود.
  - افزایش مقدار پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار در دمای بالای شروع فاز آستنیت، اثر افزایشی بر فرکانس تشدید پوسته

- [28] Akbari M, Kiani Y, Eslami MR. Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports. *Acta Mechanica*. 2015;226(3):897-915.
- [29] Brush DO, Almroth BO. *Buckling of bars, plates, and shells*. New York: McGraw-Hill Inc; 1975.
- [30] Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*: Springer Science & Business Media; 2012.
- [31] Talezadehlari A. Free vibration analysis of perforated composite cylindrical shell and panel using multi-domain generalized differential quadrature (GDQ) method. *Composite Structures*. 2022;287:115337.
- [32] Shen HS. Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2007;14(6):439-52.
- [10] Ding H-X, She G-L. Nonlinear combined resonances of axially moving graphene platelets reinforced metal foams cylindrical shells under forced vibrations. *Nonlinear Dynamics*. 2024;112(1):419-41.
- [11] Xue J-R, Zhang Y-W, Niu M-Q, Chen L-Q. Vibration reduction in a composite laminated cylindrical shell via embedded NiTiNOL-steel wire ropes. *Nonlinear Dynamics*. 2023;111(8):7181-97.
- [12] Gol Zardian M, Moslemi N, Mozafari F, Gohari S, Yahya MY, Burvill C, et al. Flexural and free vibration control of smart epoxy composite beams using shape memory alloy wires actuator. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2020;31(13):1557-66.
- [13] Parhi A, Singh BN. Nonlinear free vibration analysis of shape memory alloy embedded laminated composite shell panel. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2017;24(9):713-24.
- [14] Asadi H, Kiani Y, Aghdam MM, Shakeri M. Enhanced thermal buckling of laminated composite cylindrical shells with shape memory alloy. *Journal of Composite Materials*. 2016;50(2):243-56.
- [15] Bayat Y, EkhteraeiToussi H. Exact solution of thermal buckling and post buckling of composite and SMA hybrid composite beam by layerwise theory. *Aerospace Science and Technology*. 2017;67:484-94.
- [16] Karimiasl M, Ebrahimi F, Mahesh V. Nonlinear free and forced vibration analysis of multiscale composite doubly curved shell embedded in shape-memory alloy fiber under hydrothermal environment. *Journal of Vibration and Control*. 2019;25(13):1945-57.
- [17] Amiri A, Mohammadimehr M, Rahaghi MI. Vibration analysis of a micro-cylindrical sandwich panel with reinforced shape-memory alloys face sheets and porous core. *The European Physical Journal Plus*. 2021;136(8):887.
- [18] Nekouei M, Raghebi M, Mohammadi M. Free vibration analysis of laminated composite conical shells reinforced with shape memory alloy fibers. *Acta Mechanica*. 2019;230(12):4235-55.
- [19] Nekouei M, Raghebi M, Mohammadi M. Free vibration analysis of hybrid laminated composite cylindrical shells reinforced with shape memory alloy fibers. *Journal of Vibration and Control*. 2020;26(7-8):610-26.
- [20] Nekouei M, Mohammadi M, Raghebi M, Motahari N. Stability analysis of hybrid laminated cylindrical shells reinforced with shape memory fibers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023;152:739-56.
- [۲۱] نکوئی م، محمدی م، راغبی م. تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در محیط گرمایی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۰، د. ۵۱، ش. ۴، ص ۵۱۷-۲۶.
- [22] Auricchio F, Sacco E. A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1997;32(6):1101-14.
- [23] Roh JH, Oh IK, Yang SM, Han JH, Lee I. Thermal post-buckling analysis of shape memory alloy hybrid composite shell panels. *Smart Materials and Structures*. 2004;13(6):1337-44.
- [24] Chamis CC. Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties. *NASA Technical Memorandum 83320: Reinforced Plastics Composites Institute Houston Texas*; 1983.
- [25] Qatu MS. *Vibration of laminated shells and plates*. Bloomfield, Michigan: Elsevier; 2004.
- [26] Lee H, Kwak MK. Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories. *Journal of Sound and Vibration*. 2015;353:344-77.
- [27] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. New York: CRC press; 2004.