

بررسی رفتار دینامیکی روتور استودولا- گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر

رضا فتحی

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، r_fathi@tabrizu.ac.ir

موسی رضائی*

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، m_rezaee@tabrizu.ac.ir

چکیده

استفاده از اتوبالانسرهای یکی از روش‌های پرکاربرد برای بالانس ماشین‌های دوار با نابالانسی متغیر می‌باشد. با توجه به مزیت این اتوبالانسرها و جهت افزایش کارایی آنها، محققان مدل جدید اتوبالانسر با نام اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر را ارائه داده‌اند. یکی از مزیت‌های اصلی این اتوبالانسر، کاهش دامنه ارتعاشی در ناحیه گذرا است. عملکرد این اتوبالانسر برای بالانس روتورهای صفحه‌ای جفکات بررسی شده است ولی کارایی آن برای روتورهای استودولا-گرین بررسی نشده است. با توجه به اینکه در عمل به دلایل مختلف نمی‌توان روتور را به صورت صفحه‌ای مدل نمود لذا در این مقاله با در نظر گرفتن مدل غیرصفحه‌ای روتور استودال-گرین، کارایی اتوبالانسر جدید در حضور اثر ژيروسکوپیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا معادلات غیرخطی روتور استودال-گرین مجهز به این اتوبالانسر استخراج و ناحیه بالانس پایدار سیستم تعیین می‌شود. سپس پاسخ ارتعاشی روتور استودال-گرین مجهز به اتوبالانسر جدید استخراج گردیده و با روتور استودال-گرین مجهز به اتوبالانسر نوع متداول مقایسه می‌گردد. نتایج حاکی از آن است که اتوبالانسر ساچمه-فنر-میله نه تنها قادر است روتور نابالانس در حضور اثر ژيروسکوپیک را بالانس نماید بلکه باعث کاهش ارتعاشات روتور در ناحیه گذرا می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: روتور استودال-گرین، اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر، ناحیه پایداری، پاسخ ارتعاشی، اثر ژيروسکوپیک، زوایای اوپلر.

Investigating the Dynamics of Stodola–Green Rotor Equipped with a Ball- Rod- Spring Autobalancer

R. Fathi
M. Rezaee

Department of Mechanical engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

One of the methods for balancing rotating machinery with variable imbalance is the implementing of autobalancers (ABs). According to the advantages of these ABs, the researchers have presented a new model of this AB named ball-rod-spring autobalancer, to increase their efficiency. One of the main advantages of this new AB compared to the traditional one is the reduction of the rotor vibration amplitude in the transient state. In previous studies, the performance of the Jeffcott planar rotor equipped with ball-rod-spring AB has been examined. In practice due to various reasons, for rotor with imbalance, the out of plane motions may occur. To this end, the aim of this paper is to analyze the capability of the ball-rod-spring AB in balancing of the nonplanar Stodola–Green rotors in presence of gyroscopic effect. First, the nonlinear equations of motion of the Stodola–Green rotor equipped with a new AB are extracted, and then the stable balance region of the system is extracted. Then, the vibration response of the Stodola–Green rotor with a ball-rod-spring AB is acquired and compared with the Stodola–Green rotor equipped with a traditional AB. The results show that ball-rod-spring AB is not only can balance the imbalanced rotor in the presence of the gyroscopic effect, but also reduces the rotor vibrations in the transient region.

Keywords: Stodola–Green rotor, Ball- rod- spring autobalancer, Stability region, Vibration response, Gyroscopic effect, Euler angles.

۱- مقدمه

مطالعات پایه‌ای در زمینه اتوبالانسر ساچمه‌ای دینامیکی به وسیله تیرل [۵] الکساندر [۶] انجام شده است. چانگ و جانگ [۷] به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری مدل روتور استودال-گرین مجهز به اتوبالانسر پرداختند. آنها با در نظر گرفتن یک شفت انعطاف پذیر که در انتهای آن روتور قرار دارد. با لحاظ کردن اثر ژيروسکوپیک معادلات حاکم بر حرکت سیستم را استخراج کردند و محدوده‌ی پایداری را بر حسب پارامترهای مختلف آن بررسی کردند. نتایج بررسی آنها نشان داد اتوبالانسر علاوه بر بالانس سیستم قادر است زوایای اوپلر ناشی از اثر ژيروسکوپیک را میرا کند. در سال ۲۰۰۹ احيایی و همکارش [۸] به بررسی تحلیلی و عددی یک محور انعطاف پذیر دوار دارای نابالانسی توزیع شده مجهز به چندین اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. نتایج نشان داد با انتخاب مناسب پارامترهای بالانسر می‌توان شفت را بالانس نمود. در سال ۲۰۱۵ سانق

یکی از عوامل مخرب در سیستم‌های دوار ارتعاشات مضر ناشی از نابالانسی است. عواملی مختلفی از جمله سایش روتور در اثر برخورد مواد ساینده، چسبیدن برخی مواد مانند گرد و غبار به روتور و غیره سبب ایجاد نابالانسی در سیستم می‌شود. بروز نابالانسی سبب بالا رفتن ارتعاشات ماشین شده و در نتیجه موجب کاهش عمر قطعات و خرابی المان‌های ماشین می‌گردد. بنابراین امروزه یکی از مسائل مهم مهندسی رفع نابالانسی سیستم‌های دوار است. در تجهیزاتی که نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر می‌کند مانند DV-D درایوها، CD ROM و ماشین‌های ابزار [۴-۱] برای بالانس سیستم از اتوبالانسرهای ساچمه‌ای استفاده می‌شود.

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۲۰۲۰/۰۷/۰۳

تاریخ پذیرش: ۲۰۲۰/۰۴/۱۱

و همکارانش [۹] تاثیر تحریک خارجی بر موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌های اتوبالانسر را مطالعه کردند. نتایج تجربی نشان داد اگر تحریک خارجی بعد از رسیدن ساچمه‌ها به موقعیت تعادل خود اعمال شود تاثیر بر موقعیت ساچمه‌ها نخواهد داشت. در سال ۲۰۱۶ هاید و پالاسیوس [۱۰] مدل کلی از اتوبالانسر متداول که در آن اصطکاک و برخورد بین ساچمه‌ها نیز در نظر گرفته شده است، ارائه دادند و با انجام تست‌های تجربی صحت مدل ارائه شده را بررسی نمودند. در سال ۲۰۱۸ یانگ [۱۱] به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای واقع بر پایه انعطاف‌پذیر که متصل به فنر و دمپر که تنها در راستای عمودی ارتعاش می‌کند، پرداخت. در سال ۲۰۲۰ ولدی و همکارانش [۱۲] با استفاده از روش کاهش موقت سرعت عملکرد اتوبالانسر را بهبود بخشیدند. در سال ۲۰۲۲ پاکولا [۱۳] به بررسی بالانس روتور خارج از مرکز با استفاده از چندین اتوبالانسر پرداخت. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که بهتر است دو عدد اتوبالانسر به صورت متقارن نسبت به روتور نصب گردد. در سال ۲۰۲۳ دی اسمیت و همکارش [۱۴] به بررسی کاهش ارتعاش ناشی از نابالانسی در روتورهای نامتقارن با استفاده از اتوبالانسر بهبود یافته پرداختند. در سال ۲۰۲۳ میرسایدو و همکارانش [۱۵] با در نظر گرفتن خطای زاویه‌ای اتوبالانسر، رفتار دینامیکی روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر را بررسی کردند.

در تحقیقات پیشین از مدل متداول اتوبالانسر استفاده شده است که در مدل متداول ساچمه‌ها داخل شیاری واقع شده و در صورت بروز نابالانسی در خلاف جهت نابالانسی حرکت کرده و با رسیدن به موقعیت مناسب باعث بالانس سیستم می‌شوند. در مدل متداول در ناحیه گذرا به دلیل همگرایی ساچمه‌ها به طرف نابالانسی، وجود اتوبالانسر سبب افزایش دامنه ارتعاشی روتور در این ناحیه می‌گردد. لذا با توجه به مزیت‌های اتوبالانسر ساچمه‌ای و برای افزایش کارایی آن رضایی و همکارش [۱۶] مدل جدیدی از این اتوبالانسر را ارائه دادند. در مدل جدید اتوبالانسر برخلاف نوع متداولش که ساچمه‌ها مقید به حرکت در داخل شیار هستند، در آن ساچمه‌ها به فنرهای شعاعی متصل شده‌اند و قادر به حرکت شعاعی می‌باشند. همچنین حرکت محیطی این ساچمه‌ها توسط فنرهای محیطی کنترل می‌شود. نتایج بررسی آن‌ها روی مدل صفحه‌ای روتور جفکات نشان داد که این تغییر در مکانیزم اتوبالانسر سبب ایجاد مزیت‌های جدیدی در این نوع اتوبالانسر‌ها می‌گردد که از جمله می‌توان به کاهش دامنه ارتعاشی سیستم در ناحیه گذرا اشاره نمود. با توجه به اینکه در مدل صفحه‌ای روتور اثر ژبروسکویی لحاظ نمی‌شود در حالی که در عمل و در بسیاری از کاربردهای سیستم‌های دوار اثر ژبروسکویی به دلایل مختلف پدید می‌آید بنابراین لازم است کارایی اتوبالانسر جدید در حضور اثر ژبروسکویی بررسی شود. لذا در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور مدل استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر جدید بررسی می‌گردد.

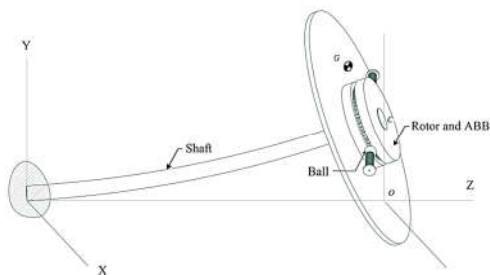
ابتدا معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت روتور مدل استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه-فنر-میله با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج می‌گردد. سپس با بررسی پایداری سیستم ناحیه بالانس پایدار استخراج می‌گردد. در نهایت پاسخ زمانی سیستم با استفاده از روش‌های عددی به دست آورده شده و با پاسخ ارتعاشی روتور مجهز به

اتوبالانسر متداول مقایسه می‌گردد.

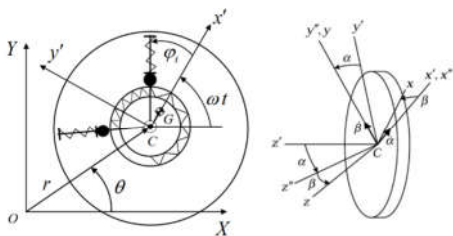
۲- استخراج معادلات حرکت روتور استودلا-گرین

مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر

در شکل ۱ طرحواره از یک روتور مدل استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر نشان داده شده است. برای به دست آوردن معادلات حرکت همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، سیستم مختصات XYZ به‌عنوان دستگاه مرجع اینرسی انتخاب شده است. مطابق شکل ۲ مرکز هندسی C توسط مختصات قطبی r و θ مشخص شده است. از دو پارامتر ε (CG) و ωt برای تعیین موقعیت مرکز جرم G نسبت به مرکز هندسی دیسک C ، استفاده شده است. موقعیت ساچمه‌ها نسبت به C نیز با دو پارامتر δ_i و φ_i ، $i=1,2,\dots,n$ مشخص شده‌اند که n تعداد ساچمه‌ها در داخل شیار می‌باشد. در مدل ارائه شده فرض می‌شود که روتور بصورت دیسک صلبی به جرم M روی محور انعطاف‌پذیر بدون جرمی قرار گرفته است. به منظور نشان دادن جهت دستگاه مختصات متحرک متصل به روتور، $x'y'z'$ می‌توان از زوایای اوپلر و رابطه بین دستگاه مختصات متحرک و دستگاه مختصات مرجع، XYZ ، استفاده کرد.



شکل ۱- روتور استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر



شکل ۲- طرحواره اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر و دستگاه مرجع

ابتدا دستگاه مختصات متحرک به اندازه زاویه ωt در جهت پادساعتگرد حول محور Z دوران کرده سپس به اندازه زاویه α در جهت پادساعتگرد حول محور x' دوران می‌کند و چرخش سوم به اندازه زاویه β در جهت پادساعتگرد حول محور y' انجام می‌پذیرد. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، چرخش‌های مذکور به ترتیب باعث تبدیل $x'y'z' \rightarrow XYZ$ ، $x''y''z'' \rightarrow x'y'z'$ و $x''y''z'' \rightarrow xyz$ می‌شوند. این تبدیل مختصات را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\vec{x}' = T_{\alpha} \vec{X}, \quad \vec{x}'' = T_{\beta} \vec{x}', \quad \vec{x} = T_{\omega t} \vec{x}'' \quad (1)$$

که در آن T_{α} ، T_{β} و $T_{\omega t}$ ماتریس‌های دوران می‌باشند. و عبارتند از:

$$D_Y \text{ نشان می‌دهیم [۷]:} \quad D_X = r \cos \theta, \quad D_Y = r \sin \theta \quad (۱۱)$$

زوایای دوران حول محورهای X و Y را با Φ_X و Φ_Y به صورت زیر بیان می‌کنیم [۷]:

$$\Phi_X = \alpha \cos \omega t - \beta \cos \alpha \sin \omega t \quad (۱۲)$$

$\Phi_Y = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \alpha \cos \omega t$
انرژی پتانسیل شفت ناشی از خمش در دو صفحه $Z-X$ و $Z-Y$ استخراج می‌شود. برای این کار ابتدا صفحه $Z-X$ در نظر گرفته می‌شود. در این صفحه معادله خیز شفت به صورت زیر بیان می‌شود [۷]:

$$\delta_X = AZ^3 + BZ^2 + CZ + D, \quad 0 < Z < L \quad (۱۳)$$

که A, B, C و D ضرایب ثابت معادله خیز می‌باشند. با قرار دادن شرایط مرزی ضرایب به دست آمده و معادله خیز به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta_X = \frac{3D_Y - L\Phi_Y}{L^2} Z^2 - \frac{2D_X - L\Phi_Y}{L^3} Z^3 \quad (۱۴)$$

همچنین با انجام کار مشابه در صفحه $Z-Y$ داریم:

$$\delta_Y = \frac{3D_X + L\Phi_Y}{L^2} Z^2 - \frac{2D_Y + L\Phi_X}{L^3} Z^3 \quad (۱۵)$$

در نهایت انرژی پتانسیل کل ناشی از خمش شفت و اتوبالانسر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 \delta_X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta_Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right] dZ + \frac{1}{2} k_r \sum_{i=1}^n (\delta_i - a)^2 + \frac{1}{2} k_p d^2 \left[\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{n} \right)^2 + \dots + \left(\varphi_n - \varphi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right] \quad (۱۶)$$

که در آن E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع شفت، k_r سفتی فنرهای شعاعی اتوبالانسر و k_p سفتی فنرهای محیطی اتوبالانسر می‌باشد. تابع اتلاف ریلی نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{1}{2} c_t (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} c_r (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} c_m \sum_{i=1}^n (\dot{\delta}_i^2 + \dot{\phi}_i^2) \quad (۱۷)$$

که c_t ضریب میرایی انتقالی، c_r ضریب میرایی دورانی و c_m ضریب میرایی ناشی از لزجت است. ثابت میرایی لزج برای همه ساچمه‌ها یکسان فرض می‌شود. پس از به دست آوردن انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و تابع اتلاف ریلی، معادلات غیرخطی حرکت برای روتور استودلا- گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از معادلات لاگرانژ (رابطه ۱۸) بدست می‌آیند.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad k=1,2,\dots,n \quad (۱۸)$$

با فرض کوچک بودن زوایای α و β داریم:

$$T_{\omega t} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

و بردارهای \vec{x} ، \vec{x}' ، \vec{x}'' و \vec{X} بر حسب مولفه‌هایشان به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\vec{X} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad \vec{x}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad (۳)$$

$$\vec{x}'' = x''\vec{i}'' + y''\vec{j}'' + z''\vec{k}''$$

$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
برای بیان انرژی جنبشی روتور به همراه اتوبالانسر، ابتدا بردار موقعیت مرکز جرم G را در دستگاه مختصات متحرک xyz با استفاده از ماتریسهای دوران T_α ، T_β ، T_ω بیان می‌کنیم:

$$\vec{r}_G = T_\beta T_\alpha T_\omega \vec{r}_{OC/XYZ} + \vec{r}_{CG} \quad (۴)$$

که در آن

$$\vec{r}_{OC/XYZ} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \quad (۵)$$

$$\vec{r}_{CG} = \varepsilon \vec{i} \quad (۶)$$

از طرفی بردار موقعیت ساچمه‌ها برابر است با:

$$\vec{r}_{B_i} = T_\beta T_\alpha T_\omega \vec{r}_{OC/XYZ} + \vec{r}_{CB_i} \quad (۷)$$

اگر بالانسر دارای n ساچمه باشد، رابطه انرژی جنبشی عبارتست از [۷]:

$$T = \frac{1}{2} \bar{\Omega}^T [J] \bar{\Omega} + \frac{1}{2} M \frac{d\vec{r}_G}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{r}_{B_i}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_{B_i}}{dt} \quad (۸)$$

که در آن M جرم دیسک، m جرم هریک از ساچمه‌ها، $[J]$ تانسور اینرسی و $\bar{\Omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای روتور می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} -\omega \cos \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta \\ \omega \sin \alpha + \dot{\beta} \\ \omega \cos \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

که در آن J_x نشان دهنده ممان اینرسی جرمی حول محورهای x و y و J_z ممان اینرسی جرمی حول محور z است. برای به دست آوردن انرژی پتانسیل سیستم با صرفنظر کردن از نیروی جاذبه و انحراف پیچشی و طولی شفت، انرژی پتانسیل ناشی از خمش شفت را محاسبه می‌کنیم [۷]. همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، شفت را به صورت تیر یکسر گیردار در نظر می‌گیریم که در $Z=0$ ثابت و در $Z=L$ آزاد است. خیز شفت در جهت X و Y در $Z=L$ ، را با D_X و

که در آن

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= \left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{2\pi}{n} \right) \\ f_i(\varphi) &= (2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}) \\ f_n(\varphi) &= \left(\varphi_n - \varphi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} i &= 2, 3, \dots, n-1 \\ q_i &= \delta_i \\ m(\delta_i^2 - 2\delta_i\omega\dot{\omega}t - \delta_i\dot{\varphi}_i^2 - 2\delta_i\dot{\varphi}_i\omega - \delta_i\dot{\omega}^2t^2 - 2\delta_i\dot{\varphi}_i\dot{\omega}t - \delta_i\omega^2) \\ &+ c_m\delta_i + m[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin(\varphi_i + \omega t - \theta) \\ &+ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos(\varphi_i + \omega t - \theta)] + k_s(\delta_i - a) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

لازم به توضیح است با در نظر گرفتن $\delta_i = R$ ، $\dot{\delta}_i = 0$ ، $k_r = 0$ و $k_p = 0$ و $\dot{\omega} = 0$ معادلات اخیر به معادلات مرجع [V] تبدیل می‌شود و با در نظر گرفتن $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ ، $\delta_i = R$ ، $\dot{\delta}_i = 0$ ، $k_r = 0$ ، $k_p = 0$ ، $\dot{\omega} = 0$ و $n = 0$ معادلات به معادلات حرکت روتور استودلا- گرین تبدیل می‌شود که هر کدام از حالات اخیر حاکی از صحت معادلات می‌باشد.

۳-۱-۷-۲- بی‌بعدسازی روابط حاکم بر حرکت سیستم

به منظور کسب نتایج عمومی‌تر، پارامترهای بی‌بعد سیستم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \frac{c_t}{4} \sqrt{\frac{L^3}{3MEI}}, \quad \zeta_r = \frac{c_r}{4} \sqrt{\frac{L}{JEI}}, \quad \bar{m} = \frac{m}{M} \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \eta = \frac{k_p d^2}{m_b r^2 \omega_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{12EI}{ML^3}} \\ \beta_r &= \frac{c_m}{2m\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \bar{r} = \frac{r}{\lambda}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\lambda} \\ \bar{R} &= \frac{R}{\lambda}, \quad \bar{L} = \frac{L}{\lambda}, \quad \omega_b = \sqrt{\frac{k_r}{m_b}}, \quad f = \frac{\omega_b}{\omega_n} \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن ζ_t و ζ_r به ترتیب میرایی بی‌بعد انتقالی و دورانی می‌باشد. β_r نشان دهنده نسبت میرایی بالانسر و ω_0 فرکانس مبنا می‌باشد. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده معادلات بی‌بعد سیستم به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \\ (\ddot{r} - \bar{r}\dot{\theta}^2) + 2\zeta_r \dot{r} + \bar{r} - 0.5\bar{L}(\alpha \sin(\bar{\omega}\tau - \theta) \\ &+ \beta \cos(\bar{\omega}\tau - \theta)) - \bar{m} \sum_{i=1}^n [(\delta_i \ddot{\varphi}_i + 2\bar{\delta}_i \ddot{\omega}\tau \\ &+ 2\bar{\delta}_i \bar{\omega} + 2\bar{\delta}_i \dot{\varphi}_i + 2\bar{\delta}_i \bar{\omega}) \sin(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) \\ &+ (2\bar{\delta}_i \dot{\varphi}_i \bar{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i \dot{\varphi}_i \bar{\omega} + \bar{\delta}_i \bar{\omega}^2 - \bar{\delta}_i \ddot{\omega} + \bar{\delta}_i \dot{\varphi}_i^2 \\ &+ 2\bar{\delta}_i \ddot{\omega}\tau + \bar{\delta}_i \bar{\omega}^2 \tau^2) \cos(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta)] \\ &- \bar{\varepsilon} [(\bar{\omega} + \bar{\omega}\tau)^2 \cos(\bar{\omega}\tau - \theta) + (2\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega}\tau - \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= r \\ (M + nm)(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + c_r \dot{r} + \frac{12EI}{L^3} r \\ &- \frac{6EI}{L^2} (\alpha \sin(\omega t - \theta) + \beta \cos(\omega t - \theta)) \\ &- m \sum_{i=1}^n [(\delta_i \ddot{\varphi}_i + 2\delta_i \dot{\omega}t + 2\delta_i \dot{\varphi}_i + 2\delta_i \dot{\omega}) \\ &\times \sin(\varphi_i + \omega t - \theta) + (2\delta_i \dot{\varphi}_i \dot{\omega}t + 2\delta_i \dot{\varphi}_i \omega + \delta_i \omega^2 \\ &- \delta_i \ddot{\omega} + \delta_i \dot{\varphi}_i^2 + 2\delta_i \dot{\omega}\omega t + \delta_i \dot{\omega}^2 t^2) \cos(\varphi_i + \omega t - \theta)] \\ &- M\varepsilon [(\omega + \dot{\omega}t)^2 \cos(\omega t - \theta) + (2\dot{\omega}) \sin(\omega t - \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \theta \\ (M + nm)(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + c_r r\dot{\theta} \\ &+ \frac{6EI}{L^2} (\alpha \cos(\omega t - \theta) - \beta \sin(\omega t - \theta)) \\ &+ m \sum_{i=1}^n [(2\delta_i \dot{\omega} + 2\delta_i \dot{\omega}t + 2\delta_i \dot{\varphi}_i + \delta_i \ddot{\varphi}_i + 2\delta_i \dot{\omega}) \\ &\times \cos(\varphi_i + \omega t - \theta) - (2\delta_i \dot{\varphi}_i \dot{\omega}t + \delta_i \dot{\varphi}_i^2 + 2\delta_i \dot{\varphi}_i \omega \\ &+ 24\delta_i \dot{\omega}\dot{\omega}t + \delta_i \omega^2 + \delta_i \dot{\omega}^2 t^2 - \delta_i \ddot{\omega}) \sin(\varphi_i + \omega t - \theta)] \\ &- M\varepsilon [(\omega + \dot{\omega}t)^2 \sin(\omega t - \theta) - (2\dot{\omega}) \cos(\omega t - \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= \alpha \\ \left(J_t + m \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \sin^2 \varphi_i \right) \ddot{\alpha} - m\beta \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ &+ \left(c_t + 2m \sum_{i=1}^n (\delta_i^2 \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i + \delta_i \dot{\delta}_i - \delta_i \dot{\delta}_i \cos^2 \varphi_i) \right) \dot{\alpha} \\ &+ \left[(J_z - 2J_t)\omega + 2m \sum_{i=1}^n (\delta_i^2 \dot{\varphi}_i \sin^2 \varphi_i - \delta_i \dot{\delta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i) \right] \dot{\beta} \\ &- \frac{6EI}{L^2} r \sin(\omega t - \theta) + \left[\frac{4EI}{L} + (J_z - J_t)\omega^2 \right. \\ &+ m \sum_{i=1}^n (\delta_i^2 \omega^2 + \delta_i^2 \dot{\omega}^2 t^2 + 2\delta_i^2 \omega \dot{\omega}t + 2\delta_i^2 \omega \dot{\omega}t + 2\delta_i^2 \dot{\omega} \dot{\omega}t) \sin^2 \varphi_i \\ &- 2m \sum_{i=1}^n (\delta_i^2 \dot{\omega} + \delta_i \dot{\delta}_i \omega + \delta_i \dot{\delta}_i \dot{\omega}t) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \left. \right] \alpha \\ &+ m \sum_{i=1}^n [\dot{\varphi}_i \delta_i^2 + 2\delta_i \dot{\delta}_i \dot{\varphi}_i - (2\delta_i^2 \dot{\omega} \dot{\varphi}_i t + \delta_i^2 \omega^2 + \delta_i^2 \dot{\omega}^2 t^2 \\ &+ 2\delta_i^2 \dot{\omega}\omega t + 2\delta_i^2 \omega \dot{\omega}t) \cos \varphi_i \sin \varphi_i + (2\delta_i \dot{\delta}_i \dot{\omega}t + 2\delta_i^2 \dot{\omega} \\ &+ 2\delta_i \dot{\delta}_i \omega) \cos^2 \varphi_i] \beta + \dot{\omega}(J_z - J_t)\beta = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} q_4 &= \beta \\ \left(J_t + m \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cos^2 \varphi_i \right) \ddot{\beta} - m\alpha \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ &+ \left(c_t - 2m \sum_{i=1}^n (\delta_i^2 \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i + \delta_i \dot{\delta}_i \cos^2 \varphi_i) \right) \dot{\beta} \\ &- \left[(J_z - 2J_t)\omega + 2m \sum_{i=1}^n (\delta_i^2 \dot{\varphi}_i \cos^2 \varphi_i + \delta_i \dot{\delta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i) \right] \dot{\alpha} \\ &- m\alpha \sum_{i=1}^n [(2\delta_i^2 \dot{\omega} \dot{\varphi}_i t + 2\delta_i^2 \dot{\omega}\omega t + 2\delta_i^2 \omega \dot{\omega}t + \delta_i^2 \omega^2 t^2 + \delta_i^2 \dot{\omega}^2 t^2) \\ &\times \cos \varphi_i \sin \varphi_i - (2\delta_i \dot{\delta}_i \omega + 2\delta_i^2 \dot{\omega} + 2\delta_i \dot{\delta}_i \dot{\omega}t) \cos^2 \varphi_i] \\ &+ \dot{\omega} J_t \alpha - \frac{6EI}{L^2} r \cos(\omega t - \theta) + \left[\frac{4EI}{L} + (J_z - J_t)\omega^2 + \right. \\ &+ m \sum_{i=1}^n (2\delta_i^2 \dot{\omega} \dot{\varphi}_i t + 2\delta_i^2 \dot{\omega}\omega t + 2\delta_i^2 \omega \dot{\omega}t + \delta_i^2 \omega^2 + \delta_i^2 \dot{\omega}^2 t^2) \cos^2 \varphi_i \\ &\left. + m \sum_{i=1}^n (2\delta_i \dot{\delta}_i \dot{\omega}t + 2\delta_i \dot{\delta}_i \omega + 2\delta_i^2 \dot{\omega}) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \right] \beta = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i \\ m\delta_i^2 (\ddot{\varphi}_i + 2\dot{\omega}) + 2m\delta_i (\delta_i \dot{\omega}t + \dot{\delta}_i \dot{\varphi}_i + \delta_i \dot{\omega}) \\ &- m\delta_i [(r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2) \sin(\varphi_i + \omega t - \theta) - (r\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ &\times \cos(\varphi_i + \omega t - \theta)] + c_m \delta_i^2 \dot{\varphi}_i + k_p d^2 f_i(\varphi_i) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

بالانس پایدار تعیین می‌شود.

۳-۱- تعیین موقعیت‌های تعادل و خطی‌سازی معادلات حاکم حول نقاط تعادل

برای تعیین موقعیت‌های تعادل معادلات حرکت در فضای حالت به صورت ماتریسی - برداری به شکل رابطه (۳۳) بیان می‌شوند:

$$A(x)\dot{\bar{x}} = \bar{X}(x) \quad (33)$$

که در آن \bar{x} و $\bar{X}(x)$ برابر است با:

$$\bar{x} = [r, \theta, \alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n, \ddot{\varphi}_1, \dots, \ddot{\varphi}_n]^T \quad (34)$$

$$\bar{X} = \{X_r, X_\theta, X_\alpha, X_\beta, X_{\varphi_1}, \dots, X_{\varphi_n}, X_{\dot{\varphi}_1}, \dots, X_{\dot{\varphi}_n}, X_{\ddot{\varphi}_1}, \dots, X_{\ddot{\varphi}_n}\}^T \quad (35)$$

و ماتریس A برابر خواهد بود با:

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (36)$$

ماتریس A بیانگر ضرایب مشتقات مرتبه دوم معادلات حرکت می‌باشد. در رابطه (۳۶)، I ماتریس مربعی واحد و M ماتریس مربعی است که به دلیل مفصل بودن از آوردن آن خودداری شده است. با بیان معادلات در فضای حالت، وضعیت‌های تعادل، با در نظر گرفتن $\dot{\bar{x}} = 0$ بدست می‌آید:

$$\bar{X}(x^*) = 0 \quad (37)$$

بر اساس معادلات بدست آمده از رابطه (۳۷)، وضعیت‌های تعادل سیستم در دو حالت $r^* = 0$ و $r^* \neq 0$ اتفاق می‌افتد که با توجه به اهمیت حالت بالانس، فقط وضعیت بالانس، $r^* = 0$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت بالانس سیستم، با قرار دادن $r^* = \alpha^* = \beta^* = 0$ در معادلات (۳۷) و (۳۸) حاصل می‌شود:

$$mR \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i^* + M\varepsilon = 0 \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin \varphi_i^* = 0 \quad (39)$$

معادلات (۳۸) و (۳۹) وضعیت قرارگیری گلوله‌ها بر حسب φ_i را نشان می‌دهند. تحت این شرایط گلوله‌ها سیستم را بالانس می‌کنند. برای بررسی ارتعاشات کوچک سیستم حول نقاط تعادل پایدار، از مختصه‌های اغتشاشی به صورت رابطه (۴۰) استفاده می‌شود:

$$x = x^* + \Delta x \quad (40)$$

که در آن x^* نقطه تعادل سیستم است و بردار Δx تغییرات بسیار کوچکی هستند که در مختصه‌های سیستم داده شده‌اند. پس با در نظر گرفتن روابط (۳۳) و (۴۰)، معادلات حرکت در فضای حالت به صورت رابطه (۴۱) بدست می‌آید:

$$A(x^* + \Delta x)\Delta\dot{x} = \bar{X}(x^* + \Delta x) - \bar{X}(x^*) \quad (41)$$

در ادامه با بسط رابطه (۴۱) و صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه دوم و بالاتر Δx ، معادلات خطی شده به صورت رابطه (۴۲) بدست می‌آید:

$$A(x^*)\Delta\dot{x} = B\Delta\ddot{x} \quad (42)$$

که در آن، B ماتریس مربعی می‌باشد که به دلیل مفصل بودن از آوردن آن خودداری شده است.

$$q_2 = \theta$$

$$\begin{aligned} & (\bar{r}\ddot{\theta} + 2\bar{r}\dot{\theta}) + 2\zeta_r\bar{r}\dot{\theta} + 0.5\bar{L}(\alpha \cos(\bar{\omega}\tau - \theta) \\ & - \beta \sin(\bar{\omega}\tau - \theta)) + \bar{m}\sum_{i=1}^n \left[(2\bar{\delta}_i\ddot{\omega} + 2\bar{\delta}_i\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i \right. \\ & \left. + \bar{\delta}_i\ddot{\varphi}_i + 2\bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i) \cos(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) - (2\bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i\dot{\omega}\tau + \right. \\ & \left. + \bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i^2 + 2\bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i\dot{\omega} + 2\bar{\delta}_i\dot{\omega}\dot{\omega}\tau + \bar{\delta}_i\dot{\omega}^2 + \bar{\delta}_i\dot{\omega}^2\tau^2 - \bar{\delta}_i\ddot{\omega}) \right. \\ & \left. \times \sin(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) \right] - \bar{\varepsilon} \left[(\bar{\omega} + \dot{\omega}\tau)^2 \sin(\bar{\omega}\tau - \theta) \right. \\ & \left. - (2\dot{\omega}) \cos(\bar{\omega}\tau - \theta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$q_3 = \alpha$$

$$\begin{aligned} & \left(0.25\bar{R}^2 + \bar{m}\sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i^2 \sin^2 \varphi_i \right) \ddot{\alpha} - \bar{m}\bar{\beta}\sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ & + \left(\bar{R}^2\zeta_r + 2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i^2 \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i + \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i - \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i \cos^2 \varphi_i) \right) \dot{\alpha} \\ & + \left[2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i^2 \dot{\varphi}_i \sin^2 \varphi_i - \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i) \right] \beta \\ & - 0.5\bar{L}\bar{r} \sin(\bar{\omega}\tau - \theta) + \left[\frac{\bar{L}^2}{3} + 0.25\bar{R}^2\bar{\omega}^2 \right. \\ & \left. + \bar{m}\sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2 + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2\tau^2 + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i\tau) \right. \\ & \left. \times \sin^2 \varphi_i - 2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega} + \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega} + \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega}\tau) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \right] \alpha \\ & + \bar{m}\sum_{i=1}^n \left[\dot{\varphi}_i\bar{\delta}_i^2 + 2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\varphi}_i - (2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i\tau + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2 + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2\tau^2 \right. \\ & \left. + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i) \cos \varphi_i \sin \varphi_i + (2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega} \right. \\ & \left. + 2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega}) \cos^2 \varphi_i \right] \beta + 0.25\bar{R}^2 \dot{\omega}\beta = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$q_4 = \beta$$

$$\begin{aligned} & \left(0.25\bar{R}^2 + \bar{m}\sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i^2 \cos^2 \varphi_i \right) \ddot{\beta} - \bar{m}\dot{\alpha}\sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ & + \left(\bar{R}^2\zeta_r - 2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i^2 \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i + \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i \cos^2 \varphi_i) \right) \dot{\beta} \\ & - \left[2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i^2 \dot{\varphi}_i \cos^2 \varphi_i + \bar{\delta}_i\dot{\delta}_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i) \right] \dot{\alpha} \\ & - \bar{m}\dot{\alpha}\sum_{i=1}^n \left[(2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i\tau + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2\tau^2 + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2) \right. \\ & \left. \times \cos \varphi_i \sin \varphi_i - (2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega} + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega} + 2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega}\tau) \cos^2 \varphi_i \right] \\ & + 0.25\bar{R}^2 \dot{\omega}\dot{\alpha} - 0.5\bar{L}\bar{r} \cos(\bar{\omega}\tau - \theta) + \left[\frac{\bar{L}^2}{3} + \bar{m}\sum_{i=1}^n (2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i\tau \right. \\ & \left. + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}\dot{\varphi}_i + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2 + \bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}^2\tau^2) \cos^2 \varphi_i + 0.25\bar{R}^2 \dot{\omega}^2 \right. \\ & \left. + \bar{m}\sum_{i=1}^n (2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega}\tau + 2\bar{\delta}_i\dot{\delta}_i\dot{\omega} + 2\bar{\delta}_i^2 \dot{\omega}) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \right] \beta = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$q_i = \varphi_i$$

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}_i^2 (\ddot{\varphi}_i + 2\dot{\omega}) + 2\bar{\delta}_i (\dot{\delta}_i\dot{\omega}\tau + \dot{\delta}_i\dot{\varphi}_i + \dot{\delta}_i\dot{\omega}) - \bar{\delta}_i \left[(\bar{r} - \bar{r}\dot{\theta}^2) \right. \\ & \left. \times \sin(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) - (\bar{r}\ddot{\theta} + 2\bar{r}\dot{\theta}) \cos(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) \right] \\ & + 2\beta_r \bar{\delta}_i^2 \dot{\varphi}_i + \eta f_i(\varphi_i) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$q_i = \delta_i$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{\delta}_i - 2\bar{\delta}_i\dot{\omega}\dot{\omega}\tau - \bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i^2 - 2\bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i\dot{\omega} - \bar{\delta}_i\dot{\omega}^2\tau^2 - 2\bar{\delta}_i\dot{\varphi}_i\dot{\omega}\tau \\ & - \bar{\delta}_i\dot{\omega}^2) + \left[(\bar{r}\ddot{\theta} + 2\bar{r}\dot{\theta}) \sin(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) + (\bar{r} - \bar{r}\dot{\theta}^2) \right. \\ & \left. \times \cos(\varphi_i + \bar{\omega}\tau - \theta) \right] + 2\beta_r \bar{\delta}_i + (\bar{\delta}_i - 1)(f^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

۳- استخراج ناحیه بالانس پایدار روتور استودالا-

گرین مجهز به اتوبالانس ساچمه-میله-فنر

برای تعیین ناحیه بالانس پایدار، ابتدا موقعیت‌های تعادل سیستم را استخراج و با استفاده از پارامترهای اغتشاشی، معادلات را حول نقاط تعادل خطی‌سازی کرده و در پایان با بررسی پایداری سیستم، ناحیه

۲-۳- بررسی پایداری سیستم و استخراج ناحیه بالانس پایدار

پایداری سیستم در همسایگی وضعیت تعادل به وسیله معادلات خطی سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی می شود. پایداری حول وضعیت تعادل را می توان به یک مسأله مقدار ویژه تبدیل کرد، پاسخ سیستم به صورت رابطه (۴۳) در نظر گرفته می شود:

$$\Delta x = \Delta X e^{\lambda t} \quad (43)$$

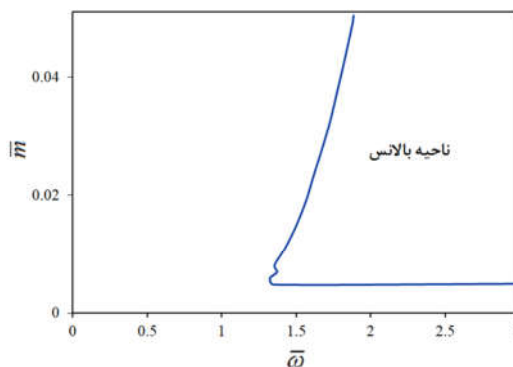
که در آن λ مقدار ویژه و ΔX بردار ویژه متناظر با مقدار آن می باشد. معادلات حاکم، به مسأله مقدار ویژه که با رابطه (۴۴) نشان داده شده تبدیل می شوند:

$$(B^* - \lambda A^*) \Delta X = 0 \quad (44)$$

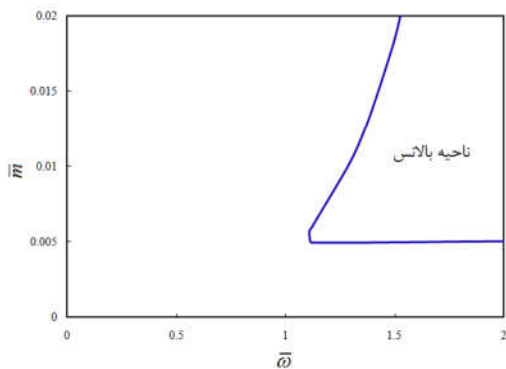
هنگامی که همه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند سیستم به صورت مجانبی پایدار است. ولی اگر یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است. با انجام تحلیل پایداری نواحیه بالانس پایدار برای سیستم مورد نظر استخراج می گردد.

قبل از رسم نواحی پایدار سیستم جدید به منظور صحت سنجی نتایج ابتدا با در نظر گرفتن $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ ، $\delta_i = R$ ، $\dot{\delta}_i = 0$ ، $k_p = 0$ ، $k_r = 0$ و $\dot{\omega} = 0$ و عدم انعطاف پذیری شفت ناحیه پایداری سیستم بر حسب تغییرات سرعت دورانی بی بعد نسبت به جرم بی بعد استخراج می شود. لازم به توضیح است در این حالت معادلات به معادلات روتور جفکات مجهز به اتوبالانس متداول تبدیل شده و انتظار می رود به نتایج یکسان با نتایج مرجع [۱۷] منجر شود. همانطور که از شکل ۳ مشاهده می شود ناحیه بالانس پایدار استخراجی با نتیجه ارائه شده در شکل ۶ مرجع مذکور یکسان می باشد که حاکی از صحت نتایج تحلیل پایداری است.

پس از اطمینان از صحت نتایج، در ادامه نواحیه پایدار برای سیستم جدید استخراج می گردد. در شکل ۴ نواحی پایدار بر حسب پارامترهای \bar{m} و $\bar{\omega}$ نشان داده شده است همانطور که از شکل مشاهده می شود به ازای محدوده ای از پارامترهای سیستم اتوبالانس قادر به بالانس روتور است.

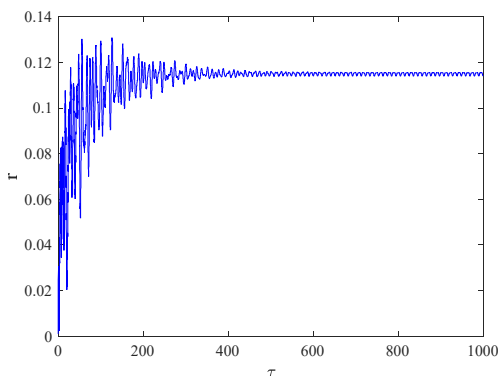


شکل ۳- پایداری بر اساس تغییرات سرعت دورانی بی بعد نسبت به جرم بی بعد

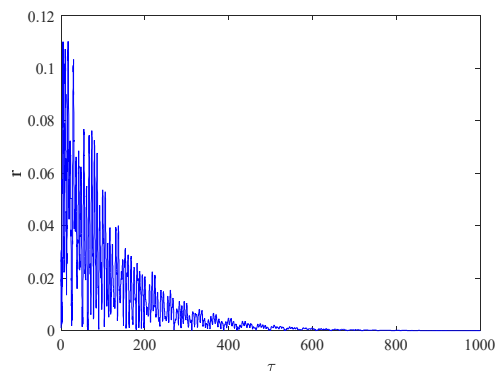


شکل ۴- پایداری بر اساس تغییرات سرعت دورانی بی بعد نسبت به جرم بی بعد به ازای $\beta_r = \zeta_i = \zeta_r = 0.01$ ، $\bar{L} = 8$ ، $\bar{R} = 0.8$ ، $\bar{m} = 0.01$ و $\bar{\omega} = 0.01$

برای اطمینان دوباره از نتایج پایداری پاسخ زمانی معادلات غیرخطی سیستم به ازای دو سرعت زاویه ای $\bar{\omega} = 1.1$ و $\bar{\omega} = 1.5$ در $\bar{m} = 0.01$ به ترتیب در شکل های ۴ و ۵ رسم شده است. طبق نمودار ۴ در $\bar{\omega} = 1.1$ باید اتوبالانس قادر به بالانس روتور نباشد ولی در $\bar{\omega} = 1.5$ اتوبالانس باید روتور را بالانس نماید که شکل های ۵ و ۶ موید این امر می باشند.

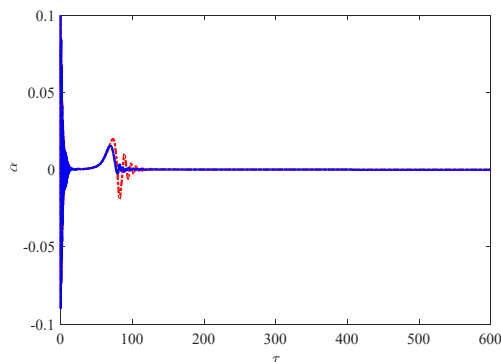


شکل ۵- پاسخ ارتعاشی روتور مجهز به اتوبالانس به ازای $\beta_r = \zeta_i = \zeta_r = 0.01$ ، $\bar{L} = 8$ ، $\bar{R} = 0.8$ ، $\bar{\omega} = 1.1$ ، $\bar{m} = 0.01$ و $\bar{\omega} = 0.01$

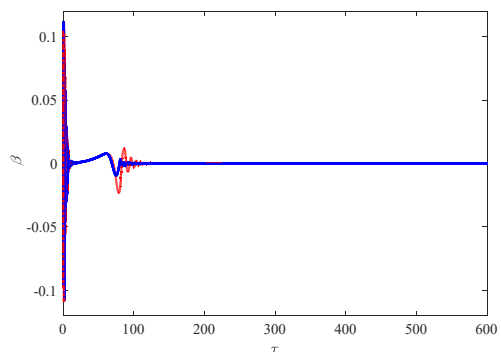


شکل ۶- پاسخ ارتعاشی روتور مجهز به اتوبالانس به ازای $\beta_r = \zeta_i = \zeta_r = 0.01$ ، $\bar{L} = 8$ ، $\bar{R} = 0.8$ ، $\bar{\omega} = 1.5$ ، $\bar{m} = 0.01$ و $\bar{\omega} = 0.01$

همانطور که از این شکل‌ها مشاهده می‌شود اتوبالانسر جدید نه تنها قادر به تصحیح زوایای اوپلر است بلکه دامنه زوایای اوپلر در روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به نوع متداول آن کمتر است.



شکل ۹- پاسخ زمانی زاویه اوپلر، α ، روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---) به ازای $\bar{\omega} = 0.016$ ، $\bar{\omega} = 2$ ، $\bar{R} = 0.8$ ، $\bar{L} = 8$ ، $\beta_r = \zeta_r = \zeta_i = 0.1$ ، $\bar{\varepsilon} = 0.01$ و $\bar{m} = 0.01$



شکل ۱۰- پاسخ زمانی زاویه اوپلر، β ، روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---) به ازای $\bar{\omega} = 0.016$ ، $\bar{\omega} = 2$ ، $\bar{R} = 0.8$ ، $\bar{L} = 8$ ، $\beta_r = \zeta_r = \zeta_i = 0.1$ ، $\bar{\varepsilon} = 0.01$ و $\bar{m} = 0.01$

۵- نتیجه‌گیری

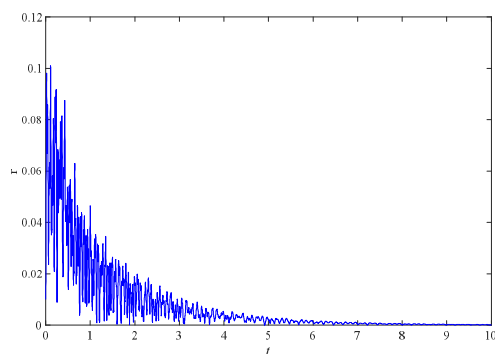
در این مقاله رفتار دینامیکی و پایداری روتور مدل استودلا- گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه- میله- فنر بررسی گردید. ابتدا انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و تابع اتلاف ریلی مجموعه استخراج شد و به کمک معادلات لاگرانژ، معادلات حاکم بر حرکت سیستم به دست آورده شد. پایداری سیستم حول نقاط تعادل بررسی و ناحیه بالانس پایدار سیستم استخراج گردید. در نهایت پاسخ زمانی معادلات به کمک روش عددی استخراج گردید. اهم نتایج به شرح زیر می‌باشد:

- تحلیل پایداری نشان داد که به ازای محدوده‌ی مشخصی از پارامترهای سیستم اتوبالانسر توانایی بالانس روتور را دارد.
- اتوبالانسر ساچمه- میله- فنر قادر به بالانس روتور در حضور اثر ژيروسکوپی می‌باشد.
- اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر باعث کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا می‌شود.

۴- استخراج پاسخ ارتعاشی روتور استودلا- گرین

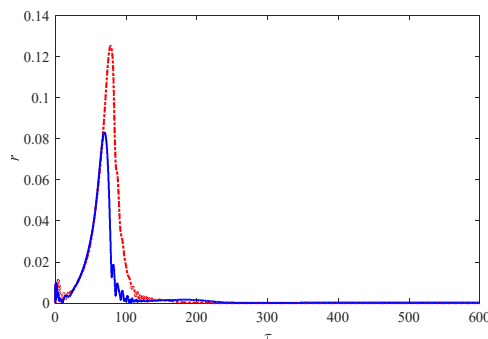
مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر

در این بخش پاسخ زمانی معادلات غیرخطی حرکت به وسیله روش عددی استخراج می‌شود. همچنین پاسخ زمانی به دست آمده با پاسخ زمانی روتور استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر متداول مقایسه می‌شود تا مزیت اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر در حضور اثر ژيروسکوپی نسبت به نوع متداول در شرایط یکسان نشان داده شود. ابتدا برای اطمینان از صحت نتایج پاسخ زمانی، پاسخ زمانی سیستم با در نظر گرفتن $\dot{\delta}_i = 0$ ، $\delta_i = R$ ، $\beta = 0$ ، $\alpha = 0$ ، $k_r = 0$ ، $\dot{\omega} = 0$ ، $k_p = 0$ و عدم انعطاف‌پذیری شفت استخراج می‌گردد. همانطور که قبلاً اشاره شد در این حالت انتظار می‌رود نتایج مشابه نتایج مرجع [۱۷] (شکل ۹) باشد که شکل زیر مؤید این امر است.



شکل ۷- پاسخ زمانی سیستم برای روتور مجهز به اتوبالانسر

بعد از اطمینان از صحت نتایج در شکل ۸ پاسخ زمانی روتور نابالانس در دو حالت: الف- روتور استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر و ب- روتور استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر نوع متداول رسم شده است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود دامنه ارتعاشی در روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر در ناحیه گذرا نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول کاهش یافته است.



شکل ۸- پاسخ ارتعاشی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه-میله- فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---) به ازای $\bar{\omega} = 0.016$ ، $\bar{\omega} = 2$ ، $\bar{R} = 0.8$ ، $\bar{L} = 8$ ، $\beta_r = \zeta_r = \zeta_i = 0.1$ ، $\bar{\varepsilon} = 0.01$ و $\bar{m} = 0.01$

در شکل‌های ۹ و ۱۰ پاسخ زمانی زوایای اوپلر آورده شده است.

- اتوبالانسر مذکور علاوه بر بالانس روتور توانایی میرا کردن زوایای اوپلر را نیز دارد.
 با توجه به نتایج بالا می‌توان نتیجه گرفت که مزیت اصلی اتوبالانسر ساچمه-میله-فنر این است که علاوه بر کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا که ناشی از وجود فنرهای محیطی است، سبب کاهش دامنه ارتعاشی ناشی از زوایا اوپلر می‌گردد.

۶- مراجع

- [1] Kim W and Chung J, Performance of automatic ball balancers on optical disc drives. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2002. 216(11): 1071-1080.
- [2] Chao P.C, Sung C.-K and Wang C.-C, Dynamic analysis of the optical disk drives equipped with an automatic ball balancer with consideration of torsional motions. Journal of applied mechanics, 2005. 72(6): 826-842.
- [3] Chao P.C.-P, Sung C.-K and Leu H.-C, Effects of rolling friction of the balancing balls on the automatic ball balancer for optical disk drives. Journal of Tribology. 2005. 127(4): 845-856.
- [4] Rajalingham C and Rakheja S, Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers. Journal of Sound and Vibration. 1998. 217(3): p. 453-466.
- [5] Thearle E, Automatic dynamic balancers (Part 2-Ring, pendulum, ball balancers). Mach. Des, 1950. 22(10): 103-106.
- [6] Alexander J. An automatic dynamic balancer. in Proceedings of 2nd Southeastern Conference. 1964.
- [7] Chung J and Jang I. Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor. Journal of Sound and Vibration, 2003. 259(1): 31-43.
- [8] Ehyaei J and Moghaddam M.M, Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with n automatic ball-balancers. Journal of Sound and Vibration, 2009. 321(3): 554-571.
- [9] Sung C, et al. Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer. Mechanism and Machine Theory, 2013. 69: 115-126.
- [10] Haidar A.M and Palacios J.L. A general model for passive balancing of supercritical shafts with experimental validation of friction and collision effects. Journal of Sound and Vibration. 2016. 384: 273-293.
- [11] Jung D, Supercritical Coexistence Behavior of Coupled Oscillating Planar Eccentric Rotor/Autobalancer System. Shock and Vibration. 2018. 2018.
- [12] Van De Velde, G., et al. Reducing the statistical scatter of automatic ball balancers using temporary speed reduction. Journal of Sound and Vibration. 2020: 115582.
- [13] Pakula S, Off-axis vibration-elimination system of eccentric rotors with use of multiple automatic ball balancers. Archive of Applied Mechanics, 2022. 92(11): p. 3215-3227.
- [14] Su X and DeSmidt H, Imbalance vibration suppression for asymmetric rotors via an enhanced automatic dynamic balancer. Journal of Sound and Vibration. 2023. 545: 117416.
- [15] Mirsaidov M, Sidikov M and Turajonov K. Rotor dynamics with account for the eccentricity and angular error of the ball self-balancing device. in AIP Conference Proceedings. 2023. AIP Publishing.
- [16] Rezaee M. and Fathi R, Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism. Journal of Sound and Vibration. 2015. 358: 375-391.
- [17] Chung J and Ro D, Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms. Journal of Sound and vibration. 1999. 228(5): 1035-1056.