نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۶، جلد ۵۴، شماره ۱، بهار ۱۴۰۳، صفحه ۸۱-۹۰ – پژوهشی کامل - DOI: 10.22034/jmeut.2024.59697.3380

حلّ کامل غیرخطی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی

پریسا نصرالهی دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، parisa.nasrolahi7670@gmail.com

مهدی قنّاد* دانشیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، mghannadk@shahroodut.ac.ir

بهمن مدیری دانشجوی دکتری، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، b.m281168@yahoo.com

نوید بهادرانی دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد ، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، nvdbhd1@gmail.com

چکیده

در این مقاله، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت فشار، ساخته‌شده از مواد ایزوتروپ با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET) استخراج شده است. به‌دلیل وجود تغییرشکل‌های بزرگ در جهت شعاعی و درنتیجه معادلات سینماتیک با جملات غیرخطی، معادله دیفرانسیل حاکم از نوع مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیّر است که به کمک تکنیک اغتشاشات حل شده است. با توجه به معادلات تعادل، شرایط بارگذاری کره، تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است. با توجه به نتایج حاصل از حل تحلیلی، تأثیر ضخامت، جنس و بارگذاری بر مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی در پوسته‌ی کروی، بررسی شده است. به‌منظور راستی‌آزمایی نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی اجزای محدود کره‌ی مذکور به کمک نرم‌افزار ANSYS انجام و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این پژوهش نشان می‌دهد که روند حل تحلیلی ارائه شده برای پوسته‌های کروی تحت بارگذاری فشاری از دقّت خوبی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: کره‌ی جدار ضخیم، تحلیل غیرخطی، رفتار الاستیک، تغییرشکل بزرگ، تحلیل تنش، تکنیک اغتشاشات.

Nonlinear Complete Solution of Pressurized Thick Spheres with Large Deformation Using Nonlinear Plane Elasticity Theory

P. Nasrollahi Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

M. Ghannad Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

B. Modiri Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

N. Bahadorani Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

In this paper, governing nonlinear equation of pressurized axisymmetric spheres made of isotropic materials with large deformations is derived using the Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET). Because of large deformations along the radial direction and hence existence of nonlinear terms in kinematic equations, the governing equation is a nonlinear second-order equation with variable coefficients, which is solved using perturbation technique. According to the equilibrium equation, loading conditions of the sphere; radial and circumferential normal stresses and radial displacement in spherical shells are calculated analytically. The effect of thickness, material and loading on stresses and displacement in spherical shell is studied by the results obtained from analytical solution. For investigating the accuracy of the results obtained from the analytical solution, the numerical finite element modeling of mentioned sphere is done with ANSYS software and the results of the two methods are compared. This research reveals that the obtained results by the mentioned analytical solution procedure have good accuracy for spherical shells under pressure loading.

Keywords: Thick-walled sphere, Nonlinear analysis, Elastic behavior, Large deformation, Stress analysis, Perturbation technique.

۱- مقدّمه

پوسته‌ها، سازه‌های خمیده هستند که بُعد ضخامت آن‌ها نسبت به دو بعد دیگر به میزان قابل توجهی کوچک‌تر است. پوسته‌ها از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای واردشده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمّیت ویژه‌ای برخوردارند. پوسته‌ها بر اساس ضخامت‌شان در دو گروه طبقه‌بندی می‌شوند؛ پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم. اگر نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی پوسته (h/R) کوچک‌تر از ۱/۲۰ باشد، پوسته را جدار نازک و در غیر این‌صورت، جدار ضخیم می‌نامند [۱].

نخستین بار، لامه[1] در سال ۱۸۵۲، تحلیل الاستیک خطی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با ضخامت ثابت و ساخته‌شده

[1] Lamé

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mghannadk@shahroodut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۲/۱۱/۱۷

تاریخ پذیرش: ۰۳/۰۲/۱۷

از مواد همگن و همسانگرد را تحت فشار یکنواخت داخلی با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک الاستیسیته یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (PET)[1] ارائه کرد [۲]. نقدی در سال ۱۹۵۶ نظریه‌ی تغییرشکل برشی (SDT)[2] را با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، برای پوسته‌ها معرفی کرد [۳]. میرسکی و هرمان در سال ۱۹۵۸ تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT)[3]، ارائه کردند [۴]. گرینس‌پُن در سال ۱۹۶۰ مقایسه‌ای بین نتایج نظریه‌های گوناگون پوسته‌های نازک و ضخیم جهت تحلیل خطی پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری را انجام داده است [۵].

مواد مدرج تابعی (FGM)[4] توسّط نینو و همکاران در سال ۱۹۸۴ معرّفی شد [۶]. قنّاد و زمانی‌نژاد در سال ۲۰۱۲ حل عمومی کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM را بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای ارائه کردند و پاسخ‌ها را به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط معادله‌ی مشخصه به‌دست آوردند [۷]. ایشان در همان سال، حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM را بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای برای شرایط مرزی تنش صفحه‌ای[5] و کرنش صفحه‌ای[6] ارائه نمودند [۸]. ایشان در سال ۲۰۱۲ بر مبنای نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT)، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG را در حالت کلّی استخراج و سپس برای استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای) به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند و با نتایج حل نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای مقایسه کردند [۹]. بیات و قنّاد در سال ۲۰۱۲ حل ترموالاستیک کره‌های ناهمگن FGM را تحت بارگذاری ترکیبی فشاری و دمایی ارائه و با حل عددی ABAQUS مقایسه کردند [۱۰].

قنّاد و قارونی در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های متقارن محوری تحت فشار FGM را برای شرایط مرزی دو سر گیردار به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا (HSDT)[7] ارائه نمودند [۱۱]. قنّاد و همکاران در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و تکنیک اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۱۲]؛ سپس ایشان در سال ۲۰۱۳ معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار متغیّر ساخته شده از مواد ناهمگن FG را استخراج و آن‌ها را به کمک روش مجانب‌های انطباق‌یافته (MAM)[8] برگرفته از تکنیک اغتشاشات، حل ریاضی نمودند [۱۳].

سندرز در سال ۱۹۶۳ با ارائه نظریه‌ی‌های غیرخطی برای پوسته‌های جدار نازک، نظریه‌ای دقیق برای تغییرشکل‌های بزرگ پوسته‌های جدار نازک ارائه کرد [۱۴]. برای نخستین بار، دورلی و چن در سال ۱۹۷۳ جابه‌جایی‌ها و کرنش‌های محدود را برای یک کره‌ی توپر با تغییرشکل‌های بزرگ، به‌صورت آزمایشگاهی و تحلیلی به‌دست آوردند [۱۵و۱۶]. ایشان تحقیقات خود را برای یک کره‌ی توخالی گسترش دادند [۱۷]. لیم و همکاران در سال ۲۰۰۲ رفتار پلاستیک یک کره‌ی توخالی ساخته‌شده از فوم فلزی را با روش اجزای محدود بررسی کردند [۱۸]. تانگ و بیچ در سال ۲۰۱۱ با ارائه‌ی حل تحلیلی، رفتار غیرخطی پوسته‌های کروی متقارن محوری کم‌عمق تحت بارگذاری فشار خارجی یکنواخت و تحت تأثیر دما را بررسی کردند [۱۹]. کیانی و اسلامی رفتار غیرخطی حرارتی یک کره‌ی توخالی را با استفاده از نظریه‌ی ترموالاستیسیته‌ی تعمیم‌یافته و روش عددی مربّعات تفاضلی مورد بحث و بررسی قرار دادند [۲۰]. ورسینو و بروک پاسخ دینامیکی پوسته‌های کروی را بر اساس نظریه‌ی کرنش‌های محدود و روش رانگ-کوتای ضمنی مرتبه‌ی بالا مطالعه کردند [۲۱]. لوین و همکاران پاسخ دقیق مسئله‌ی لامه را برای کره‌ی توخالی ساخته‌شده از مواد الاستیک غیرخطی جدید با تغییرشکل‌های بزرگ ارائه کردند؛ نمونه‌ی مطالعه‌شده‌ی ایشان، فشار اوّلیه‌ی زیادی را تحمّل می‌کرد، لذا اثر غیرخطی را لحاظ نمودند [۲۲].

تحلیل الاستیک مواد فراکشسان نیز از موضوعات قابل توجه پژوهشگران می‌باشد تا بتوانند درک صحیحی از رفتار آن‌ها بیابند و گام مؤثری در طرّاحی و ساخت سازه‌ها بردارند. قارونی و قنّاد در سال ۲۰۱۹ حل غیرخطی استوانه‌های جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد فراکشسان (هایپرالاستیک)[9] برمبنای مدل نئوهوکی[10] را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و تکنیک اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۲۳]؛ سپس ایشان حل غیرخطی استوانه‌های جدار متغیّر تحت فشار نایکنواخت، ساخته‌شده از مواد فراکشسان (هایپرالاستیک) برمبنای مدل مونی-ریولین[11] را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم و روش مجانب‌های انطباق‌یافته (MAM) ارائه کردند [۲۴]. بهادرانی و قنّاد در جدیدترین پژوهش، تحلیل غیرخطی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک را به کمک تئوری کلاسیک و تکنیک اغتشاشات انجام دادند [۲۵].

در مقاله‌ی حاضر با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET)[12] و تکنیک اغتشاشات، حل عمومی کره‌های متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی با تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک ارائه و درنهایت مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی انجام می‌شود.

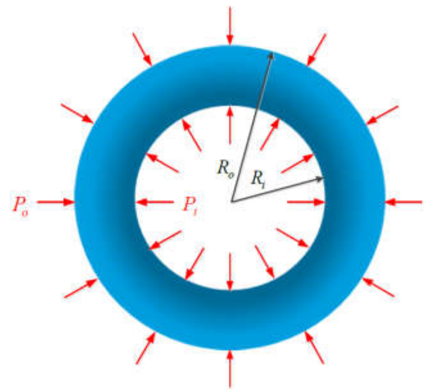
۲- فرمول‌بندی مسأله

در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی، مشابه با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای خطی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر لایه‌ی میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییرشکل، هم‌چنان مستوی و عمود بر آن باقی می‌مانند. درنتیجه کرنش‌ها و تنش‌های برشی صفر هستند؛ معنای آن نادیده گرفتن اثر برش و درنتیجه قطری

[1] Plane Elasticity Theory (PET)
[2] Shear Deformation Theory (SDT)
[3] First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
[4] Functionally Graded Materials (FGMs)
[5] Plane stress
[6] Plane strain
[7] Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT)
[8] Matched Asymptotic Method (MAM)
[9] Hyperelastic
[10] Neo-Hookean
[11] Mooney-Rivlin
[12] Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET)

نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۶، جلد ۵۴، شماره ۱، بهار ۱۴۰۳، صفحه ۸۱-۹۰ – پژوهشی کامل – پریسا نصرالهی و همکاران

شدن تانسورهای تنش و کرنش می‌باشد. به بیانی دیگر، جابه‌جایی شعاعی به‌صورت $u_R(R)$ است.



شکل ۱- مقطع کره‌ی جدار ضخیم تحت فشار

در غیاب نیروها و لنگرهای حجمی، معادلات تعادل[1] تنش عبارتند از:

$$\mathrm{div}\bar{\sigma}=\bar{0}\quad \left\{\sigma_{R,R}+\frac{2}{R}\left(\sigma_R-\sigma_\varphi\right)=0\right. \tag{۱}$$

که σ_R و σ_φ به‌ترتیب تنش‌های شعاعی و محیطی هستند.

جنس استوانه از مواد تراکم‌ناپذیر با تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک می‌باشد. در این پژوهش از مدل غیرخطی سن‌ونان-کیرشهف[2] (کرنش‌های پیکربندی مرجع) با جابه‌جایی‌های بزرگ استفاده شده است. معادلات سینماتیک[3] غیرخطی به‌صورت زیر هستند.

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left[\left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)+\left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)^T+\left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)^T\left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)\right] \tag{۲}$$

با توجه به تقارن دومحوری کره (هندسه، جنس و بارگذاری) و جابه‌جایی‌های بزرگ در راستای شعاعی، گرادیان جابه‌جایی و معادلات سینماتیک (روابط کرنش–جابه‌جایی) ناشی از آن عبارتند از:

$$\left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)=\begin{bmatrix} u_{R,R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R}u_R & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R}u_R \end{bmatrix} \tag{۳}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R=u_{R,R}+\frac{1}{2}\left(u_{R,R}\right)^2 \\ \varepsilon_\varphi=\frac{1}{R}u_R+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}u_R\right)^2 \end{cases} \tag{۴}$$

که ε_R و ε_φ به‌ترتیب کرنش‌های شعاعی و محیطی هستند. با توجه به شرایط هندسی، مادّی و مرزی خاص پوسته، تغییرشکل زاویه‌ای (کرنش برشی) و تغییرمکان زاویه‌ای (چرخش صلب) وجود ندارد و لذا از معادلات ساختاری[4] خطی هوکی و تنش کوشی استفاده شده است.

معادلات ساختاری (روابط تنش-کرنش) را می‌توان برای مواد هوکی همگن و همسانگرد به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد [۷].

$$\begin{Bmatrix}\sigma_R \\ \sigma_\varphi\end{Bmatrix}=E\begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_R \\ \varepsilon_\varphi\end{Bmatrix} \tag{۵}$$

E مدول یانگ و ν نسبت پواسون، خواص مکانیکی ثابت مادّه‌ی کره هستند. A و B با توجه به کره‌ی کاملاً بسته، تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} A=\dfrac{1-\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\quad , \quad B=\dfrac{\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \\ \upsilon^*=\dfrac{B}{A}=\dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} \end{cases} \tag{۶}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۴) در معادله‌ی (۱):

$$\left[E\left(A\varepsilon_R+2B\varepsilon_\varphi\right)\right]_{,R}+\frac{2}{R}\left[E(A-B)\left(\varepsilon_R-\varepsilon_\varphi\right)\right]=0 \tag{۱}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۴) در معادله‌ی (۷) و با توجه به ثابت بودن E:

$$\left[A\left[u_{R,R}+\frac{1}{2}\left(u_{R,R}\right)^2\right]+2B\left[\frac{1}{R}u_R+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}u_R\right)^2\right]\right]_{,R}+\frac{2(A-B)}{R}\left[\left[u_{R,R}+\frac{1}{2}\left(u_{R,R}\right)^2\right]-\left[\frac{1}{R}u_R+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}u_R\right)^2\right]\right]=0 \tag{۲}$$

پس از مشتق‌گیری و ساده کردن، نتیجه می‌شود.

$$\left(1+u_{R,R}\right)u_{R,RR}+\left(1+\frac{\upsilon^*}{R}u_R+\frac{1-\upsilon^*}{2}u_{R,R}\right)\frac{2}{R}u_{R,R}-\left(1+\frac{1+\upsilon^*}{2R}u_R\right)\frac{2}{R^2}u_R=0 \tag{۳}$$

معادله‌ی (۹)، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیّر می‌باشد که برای حل آن از روش بسط اغتشاشی مستقیم[5] استفاده می‌شود. ابتدا باید معادله دیفرانسیل را به کمک پارامترهای معرفی شده در پیوست، بی‌بعد کرد.

$$\left(1+\frac{h}{\bar{R}}u^*_{R,R^*}\right)\frac{h}{\bar{R}^2}u^*_{R,R^*R^*}+\left[1+\frac{\upsilon^* h}{\bar{R}R^*}u^*_R+\left(\frac{1-\upsilon^*}{2}\right)\frac{h}{\bar{R}}u^*_{R,R^*}\right]\frac{2h}{\bar{R}^2R^*}u^*_{R,R^*}-\left[1+\left(\frac{1+\upsilon^*}{2}\right)\frac{h}{\bar{R}R^*}u^*_R\right]\frac{2h}{\bar{R}^2R^{*2}}u^*_R=0 \tag{۴}$$

با جای‌گذاری پارامتر اغتشاشی $\frac{h}{\bar{R}}=\epsilon$ (نسبت ضخامت به شعاع لایه‌ی میانی) در معادله‌ی (۱۰)، معادله‌ی اغتشاشی زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(1+\epsilon u^*_{R,R^*}\right)\frac{\epsilon}{\bar{R}}u^*_{R,R^*R^*}+\left[1+\frac{\upsilon^*}{R^*}\epsilon u^*_R+\left(\frac{1-\upsilon^*}{2}\right)\epsilon u^*_{R,R^*}\right]\frac{2\epsilon}{\bar{R}R^*}u^*_{R,R^*}-\left[1+\left(\frac{1+\upsilon^*}{2}\right)\frac{\epsilon}{R^*}u^*_R\right]\frac{2\epsilon}{\bar{R}R^{*2}}u^*_R=0 \tag{۱۱}$$

با توجه به این‌که مشتقات مراتب بالاتر نسبت به مشتقات مراتب پایین‌تر، غالب نیستند؛ بنابراین معادله‌ی (۱۱) معرّف یک مسأله‌ی

---

1 Equilibrium equations
2 Saint Venant-Kirchhoff
3 Kinematic equations
4 Constitutive equations

5 Straightforward perturbed expansion method

اغتشاشی غیرتکین (منظّم)[1] است. جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به‌شکل بسط اغتشاشی زیر قابل بازنویسی است.

$$u_R^*=u_0+\epsilon u_1+\ldots \tag{۱۲}$$

با جای‌گذاری بسط اغتشاشی (۱۲) در معادله‌ی (۱۱) و سپس مرتب کردن معادله‌ی حاصل بر اساس توان‌های مختلف پارامتر اغتشاشی، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\left(u_{0,R^*R^*}+\frac{2}{R^*}u_{0,R^*}-\frac{2}{R^{*2}}u_0\right)+\\&\epsilon\left[\left(u_{1,R^*R^*}+\frac{2}{R^*}u_{1,R^*}-\frac{2}{R^{*2}}u_1\right)+\left(u_{0,R^*}\right)u_{0,R^*R^*}+\right.\\&\left.\left(\frac{\upsilon^*}{R^*}u_0+\frac{1-\upsilon^*}{2}u_{0,R^*}\right)\frac{2}{R^*}u_{0,R^*}-\left(\frac{1+\upsilon^*}{2R^*}u_0\right)\frac{2}{R^{*2}}u_0\right]+0\left(\epsilon^2\right)=0\end{aligned} \tag{۱۳}$$

از آن‌جا که ϵ عدد بسیار کوچکی است، معادله‌ی (۱۳) زمانی برقرار است که ضرایب توان‌های مختلف ϵ، برابر صفر باشند. بنابراین می‌توان یک معادله‌ی پیچیده‌ی غیرخطی را تبدیل به چندین معادله‌ی خطی ساده‌تر نمود که از نظر مرتبه‌ی بزرگی با یکدیگر متفاوت هستند.

معادله با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی بزرگی (ضریب ϵ^0) عبارت است از:

$$u_{0,R^*R^*}+\frac{2}{R^*}u_{0,R^*}-\frac{2}{R^{*2}}u_0=0\rightarrow\left(\frac{1}{R^{*2}}\left(R^{*2}u_0\right)_{,R^*}\right)_{,R^*}=0 \tag{۱۴}$$

که یک معادله‌ی دیفرانسیل اویلر-کوشی است و جواب آن عبارت است از:

$$u_0(R^*)=R^{*m}\ \Rightarrow\ u_0=C_1R^*+\frac{C_2}{R^{*2}} \tag{۱۵}$$

که $u_R^*=u_0$ جواب خطی (PET) مسأله می‌باشد. معادله‌ی بعدی ضریب ϵ^1 است.

$$\begin{aligned}&\left(u_{1,R^*R^*}+\frac{2}{R^*}u_{1,R^*}-\frac{2}{R^{*2}}u_1\right)+\left[\left(u_{0,R^*}\right)u_{0,R^*R^*}+\right.\\&\left.\left(\frac{\upsilon^*}{R^*}u_0+\frac{1-\upsilon^*}{2}u_{0,R^*}\right)\frac{2}{R^*}u_{0,R^*}-\left(\frac{1+\upsilon^*}{2R^*}u_0\right)\frac{2}{R^{*2}}u_0\right]=0\end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned}&u_{1,R^*R^*}+\frac{2}{R^*}u_{1,R^*}-\frac{2}{R^{*2}}u_1=-\left[\left(u_{0,R^*}\right)u_{0,R^*R^*}+\right.\\&\left.\frac{1-\upsilon^*}{R^*}\left(u_{0,R^*}\right)^2+\frac{2\upsilon^*}{R^{*2}}u_0\cdot u_{0,R^*}-\frac{1+\upsilon^*}{R^{*3}}\left(u_0\right)^2\right]\end{aligned} \tag{۱۷}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۱۵) در معادله‌ی (۱۷) و پس از مشتق‌گیری و ساده‌سازی نتیجه می‌شود.

$$\left(\frac{1}{R^{*2}}\left(R^{*2}u_1\right)_{,R^*}\right)_{,R^*}=\frac{9\left(1+\upsilon^*\right)C_2^2}{R^{*7}} \tag{۱۸}$$

با حل معادله‌ی (۱۸) مقدار u_1 به‌دست می‌آید.

$$u_1=C_3R^*+\frac{C_4}{R^{*2}}+\left(\frac{1+\upsilon^*}{2}\right)\frac{C_2^2}{R^{*5}} \tag{۱۹}$$

از آن‌جا که بارگذاری به‌صورت فشار داخلی و فشار خارجی است، بنابراین شرایط مرزی به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases}\sigma_R\big|_{R=R_i}=-P_i\\ \sigma_R\big|_{R=R_o}=-P_o\end{cases} \tag{۲۰}$$

برای اعمال شرایط مرزی ابتدا باید آنها را با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در پیوست، بی‌بعد کرد.

$$\begin{cases}\sigma_R^*\big|_{R^*=R_i^*}=-P_i^*\\ \sigma_R^*\big|_{R^*=R_o^*}=-P_o^*\end{cases} \tag{۲۱}$$

با جای‌گذاری روابط تنش در شرایط مرزی (۲۱)، دو رابطه با توان‌های مختلفی از ϵ به‌دست می‌آید که اگر توان‌های مختلف ϵ در دو طرف تساوی با هم برابر قرار داده شوند، شرایط مرزی مربوط به هر معادله به‌دست می‌آید. بنابراین برای به‌دست آوردن ثابت‌های معادلات (۱۵ و ۱۹) از شرایط مرزی زیر استفاده می‌شود.

الف) شرایط مرزی بی‌بعدشده‌ی برای معادله‌ی (۱۴):

$$\begin{aligned}&a)\quad (A+2B)C_1-2(A-B)\frac{C_2}{R_i^{*3}}=-P_i^*\\&b)\quad (A+2B)C_1-2(A-B)\frac{C_2}{R_o^{*3}}=-P_o^*\end{aligned} \tag{۲۲}$$

ب) شرایط مرزی بی‌بعدشده‌ی برای معادله‌ی (۱۸):

$$\begin{aligned}&c)\quad (A+2B)C_3-2(A-B)\frac{C_4}{R_i^{*3}}=-(A+2B)\frac{C_1^2}{2}\\&\qquad+2(A-B)\frac{C_1C_2}{R_i^{*3}}+\left((A-4B)+(5A-2B)\upsilon^*\right)\frac{C_2^2}{2R_i^{*6}}\\&d)\quad (A+2B)C_3-2(A-B)\frac{C_4}{R_o^{*3}}=-(A+2B)\frac{C_1^2}{2}\\&\qquad+2(A-B)\frac{C_1C_2}{R_o^{*3}}+\left((A-4B)+(5A-2B)\upsilon^*\right)\frac{C_2^2}{2R_o^{*6}}\end{aligned} \tag{۲۳}$$

با حل دستگاه معادلات (۲۲)، ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{P_i^*-k^3P_o^*}{(A+2B)\left(k^3-1\right)}\\[2ex] C_2=\dfrac{\left(P_i^*-P_o^*\right)R_o^{*3}}{2(A-B)\left(k^3-1\right)}\end{cases} \tag{۲۴}$$

که $k=R_o/R_i$ است. هم‌چنین با حل دستگاه معادلات (۲۳)، ثابت‌های C_3 و C_4 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}C_3=-\dfrac{C_1^2}{2}-\dfrac{\left(1-\upsilon^*\right)C_2^2}{2R_i^{*3}R_o^{*3}}\\[2ex] C_4=-C_1C_2-\dfrac{\left(1+2\upsilon^*\right)\left(k^3+1\right)C_2^2}{4R_o^{*3}}\end{cases} \tag{۲۵}$$

بنابراین جابه‌جایی شعاعی به‌صورت زیر قابل بازنویسی است.

$$u_r^*=C_1R^*+\frac{C_2}{R^{*2}}+\epsilon\left(C_3R^*+\frac{C_4}{R^{*2}}+\left(\frac{1+\upsilon^*}{2}\right)\frac{C_2^2}{R^{*5}}\right) \tag{۲۶}$$

اکنون برای به‌دست آوردن تنش‌های شعاعی و محیطی بی‌بعد، دو حالت درنظر گرفته می‌شود.

الف) اگر $u_R^*=u_0$ (حلّ خطی):

[1] Nonsingular (regular) perturbed problem

$$\sigma_R^* = (A+2B)C_1 - 2(A-B)\frac{C_2}{R^{*3}}$$
$$\sigma_\varphi^* = (A+2B)C_1 + 2(A-B)\frac{C_2}{R^{*3}} \tag{۲۷}$$

ب) اگر $u_R^* = u_0 + \epsilon u_1$ باشد (حلّ غیرخطی):

$$\sigma_R^* = (A+2B)C_1 - 2(A-B)\frac{C_2}{R^{*3}} + \epsilon\Bigg[(A+2B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2}\right) + (2A+B)\frac{C_2^2}{R^{*6}} - 2(A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{R^{*3}}\right) - (5A-2B)\left(1+\upsilon^*\right)\frac{C_2^2}{2R^{*6}}\Bigg] \tag{۲۸}$$

$$\sigma_\varphi^* = (A+2B)C_1 + (A-B)\frac{C_2}{R^{*3}} + \epsilon\Bigg[(A+2B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2}\right) + (A+5B)\frac{C_2^2}{2R^{*6}} + (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{R^{*3}}\right) + (A-4B)\left(1+\upsilon^*\right)\frac{C_2^2}{2R^{*6}}\Bigg] \tag{۲۹}$$

تنش مؤثر با توجه به رابطه‌ی فُن میزس محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{eff}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left(\sigma_R^* - \sigma_\varphi^*\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left|\sigma_R^* - \sigma_\varphi^*\right| \tag{۳۰}$$

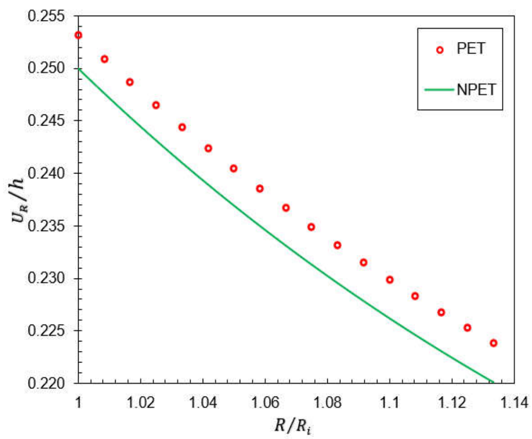
۳- اعتبارسنجی نتایج

به منظور بررسی نتایج به‌دست آمده، مقایسه‌هایی انجام شده است.

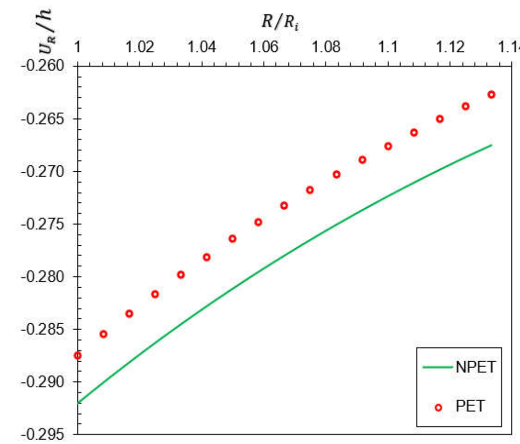
۳-۱- مقایسه حلّ خطی با حلّ غیرخطی کره

ابتدا توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی در کره‌ی جدار ضخیم با حلّ حاصل از مراجع [۲و۷] مقایسه شده است. کره‌ی جدار ضخیم به شعاع داخلی $R_i = 30\,mm$، شعاع خارجی $R_o = 34\,mm$، تحت فشار داخلی $P_i = 8\,MPa$ یا تحت فشار خارجی $P_o = 8\,MPa$، مدول یانگ $E = 0.7\,GPa$ و نسبت پواسون $\upsilon = 0.3$ درنظر گرفته شده است.

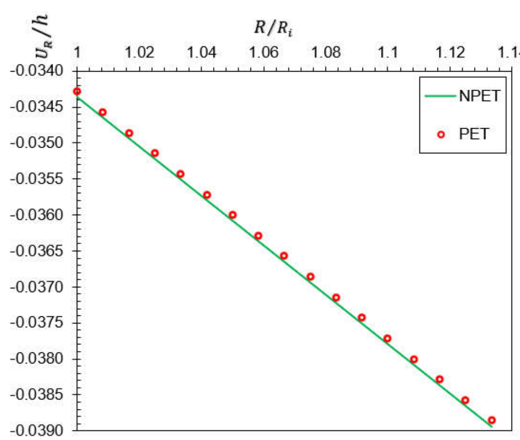
شکل‌های ۲، ۳ و ۴ مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی را تحت سه حالت بارگذاری فشاری در راستای ضخامت نشان می‌دهد.



شکل ۲- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد تحت فشار داخلی

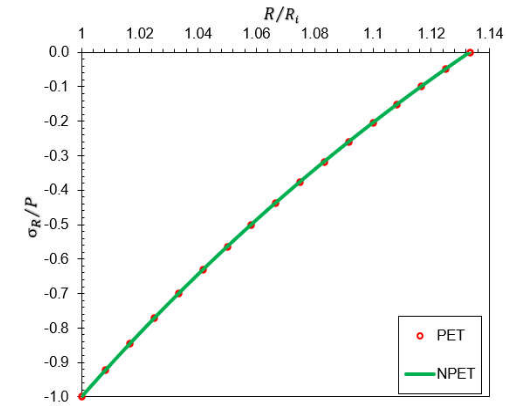


شکل ۳- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد تحت فشار خارجی

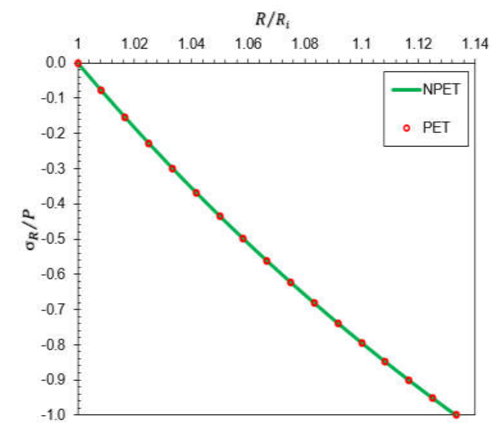


شکل ۴- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد تحت فشار داخلی و خارجی یکسان

شکل‌های ۵ و ۶ مقادیر بی‌بعد تنش شعاعی را تحت بارگذاری‌های فشار داخلی و خارجی در راستای ضخامت نشان می‌دهد.

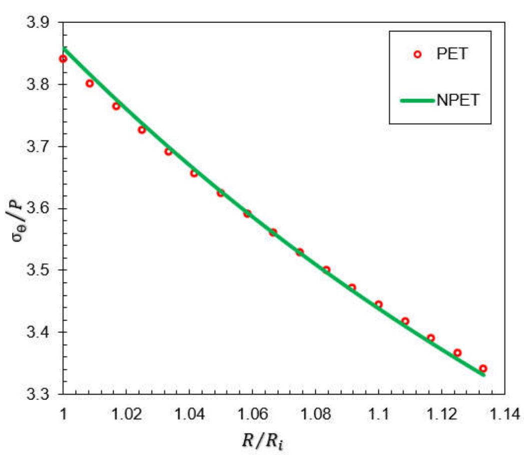


شکل ۵- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد تحت فشار داخلی

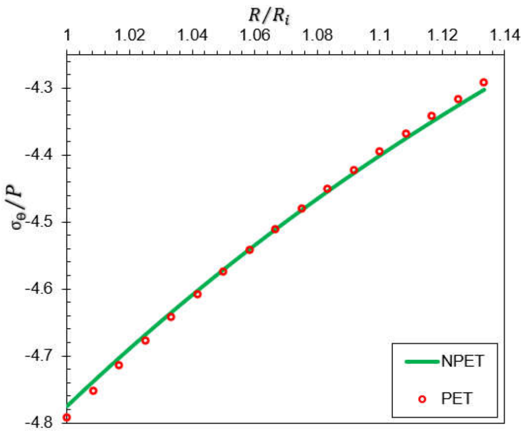


شکل ۶- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد تحت فشار خارجی

شکل‌های ۷ و ۸ مقادیر بی‌بعد تنش محیطی را تحت بارگذاری فشار داخلی و فشار خارجی در راستای ضخامت نشان می‌دهد.

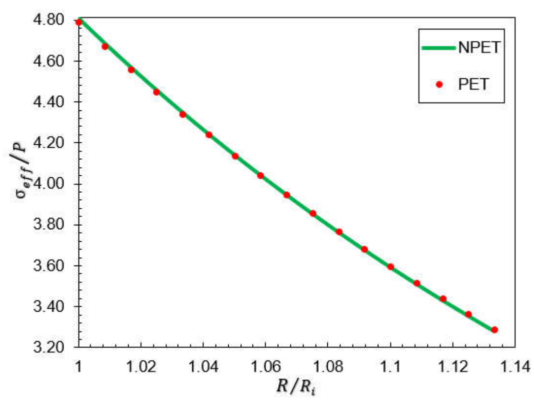


شکل ۷- توزیع تنش محیطی بی‌بعد تحت فشار داخلی



شکل ۸- توزیع تنش محیطی بی‌بعد تحت فشار خارجی

همان‌گونه که در نمودارها مشخص است، حلّ غیرخطی بر روی جابه‌جایی شعاعی اثر می‌گذارد، ولیکن بر روی تنش شعاعی و تنش محیطی اثر چندانی ندارد. در شکل ۹ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد خطی و غیرخطی فن‌ میزس آورده شده است.

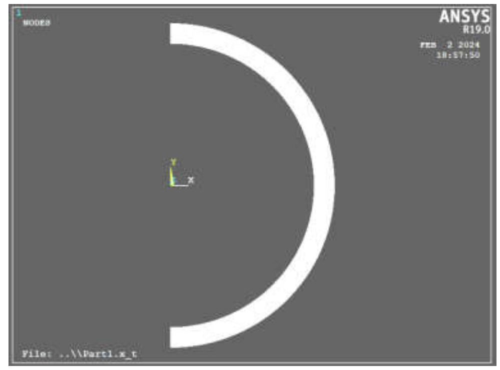


شکل ۹- توزیع تنش مؤثر بی‌بعد

۳-۲- مقایسه با نتایج حلّ عددی

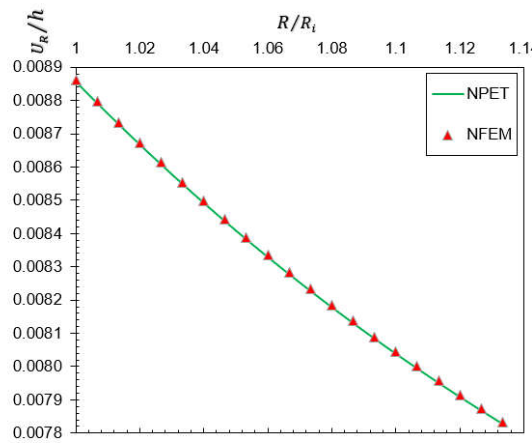
به منظور ارائه‌ی حلّ اجزای محدود، کره‌ی جدار ضخیم مذکور تحت فشار داخلی یا خارجی $80\,\mathrm{MPa}$ با مدول یانگ $E = 200\,\mathrm{GPa}$ و نسبت پواسون $\upsilon = 0.3$ به کمک نرم‌افزار ANSYS تحلیل شد.

مدل‌سازی کره در محیط APDL از نرم‌افزار ANSYS انجام شده است. این محیط نسبت به محیط Workbench نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد و مش‌بندی در آن بیشتر تحت کنترل کاربر می‌باشد. با توجه به تقارن دومحوری کره، برای مدل‌سازی در شرایط Axisymmetric، یک نیم‌دایره رسم و خصوصیات مادّی کره وارد گردید. مش‌بندی نیم‌دایره با المان 8 node 183 از المان‌های زیرمجموعه‌ی Solid انجام گرفت. المان مذکور، یک المان مربّعی با ۴ گره در رأس‌ها و ۴ گره در وسط اضلاع آن می‌باشد. وجود ۴ گره در وسط هر ضلع، امکان استفاده از تابع شکل غیرخطی (درجه‌ی دو) با توانایی حل مسائل غیرخطی را ایجاد می‌کند. ماتریس سفتی این المان ۱۶*۱۶ می‌باشد.

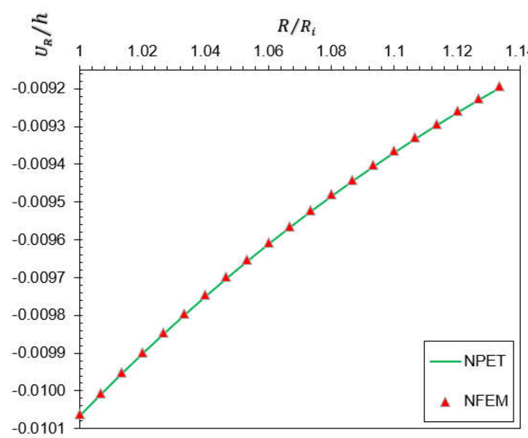


شکل ۱۰- مقطع مدل‌سازی شده در محیط ANSYS APDL

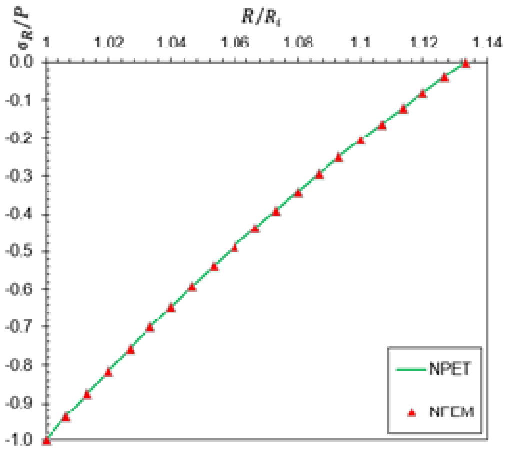
شکل‌های ۱۱ و ۱۲ مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، شکل‌های ۱۳ و ۱۴ مقادیر بی‌بعد تنش شعاعی و شکل‌های ۱۵ و ۱۶ مقادیر بی‌بعد تنش محیطی را در بارگذاری‌های فشار داخلی و خارجی نشان می‌دهند. در شکل‌های ۱۱ تا ۱۶ حلّ تحلیلی با حلّ عددی مقایسه شده؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های شعاعی و محیطی به‌دست آمده از هر دو روش برهم منطبق هستند.



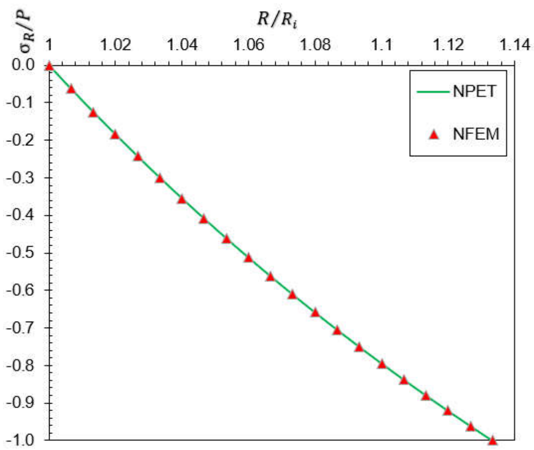
شکل ۱۱- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد تحت فشار داخلی



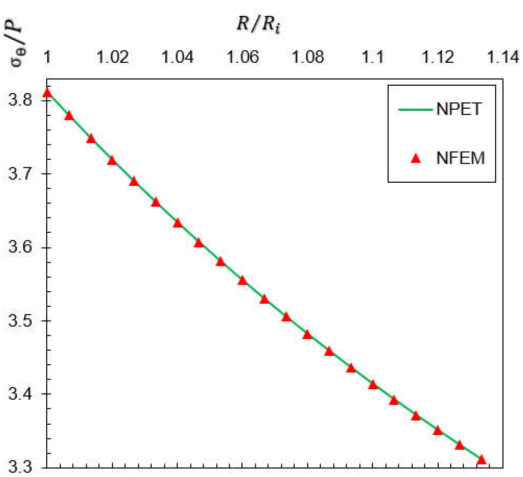
شکل ۱۲- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد تحت فشار خارجی



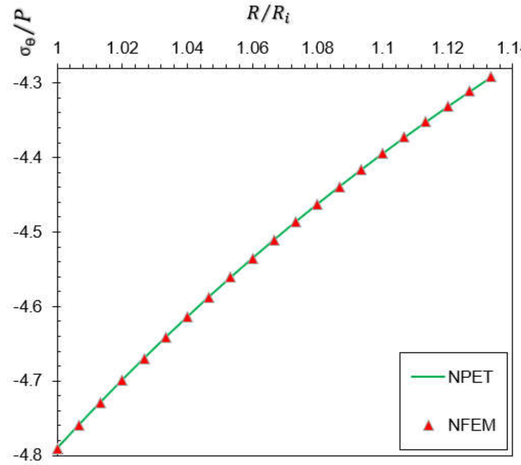
شکل ۱۳- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد تحت فشار داخلی



شکل ۱۴- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد تحت فشار خارجی



شکل ۱۵- توزیع تنش محیطی بی‌بعد تحت فشار داخلی



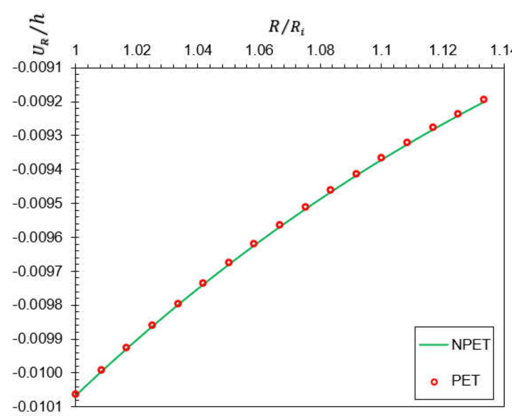
شکل ۱۶- توزیع تنش محیطی بی‌بعد تحت فشار خارجی

۴- پارامترهای مؤثر بر پاسخ غیرخطی

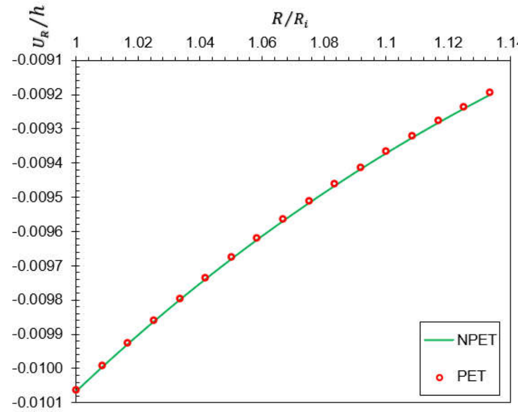
در ادامه، تأثیر دو پارامتر، نرمی و ضخامت بر پاسخ غیرخطی بررسی و مقایسه‌های دیگری بین دو جواب خطی و غیرخطی انجام شده است.

۴-۱- اثر نرمی بر پاسخ غیرخطی

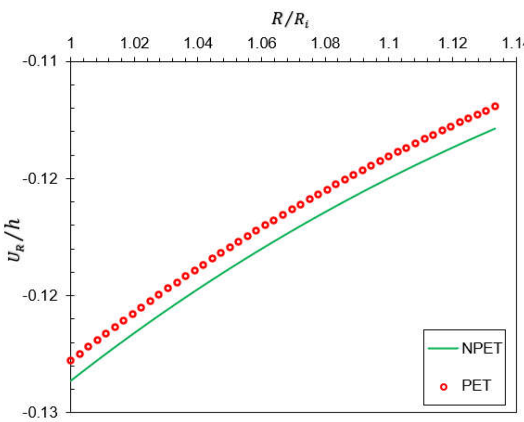
به‌منظور بررسی اثر پارامتر نرمی بر پاسخ غیرخطی مسأله، جابه‌جایی پوسته‌ی کروی جدار ضخیم در شکل‌های ۱۷ تا ۲۰ برای چهار مقدار $P_o^* = 0.0032,\ 0.00914,\ 0.04,\ 0.0914$ رسم شده است، که $P_o^* = \frac{P_o}{\epsilon E}$ است. برای تمام نمودارهای این بخش $R_i = 30\,\text{mm}$، $R_o = 34\,\text{mm}$ و نسبت پواسون $\upsilon = 0.3$ درنظر گرفته شده است.



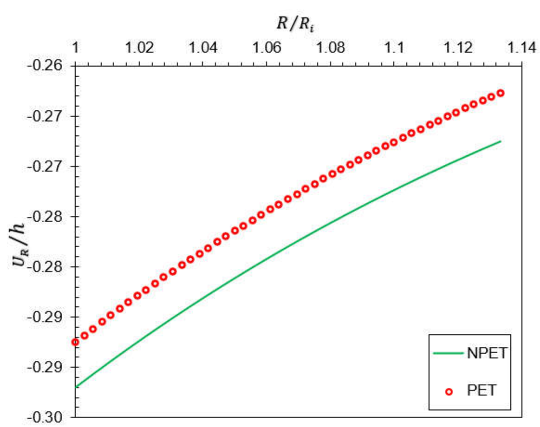
شکل ۱۷- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.0032$



شکل ۱۸- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.00914$



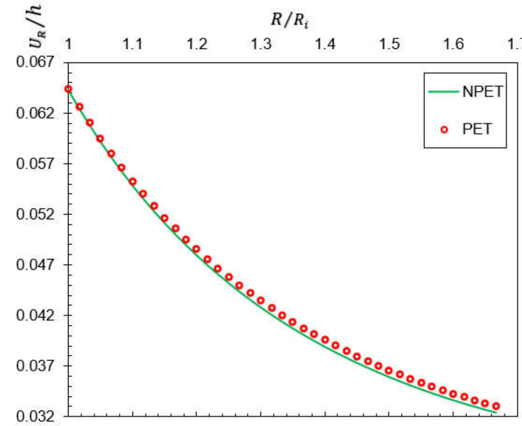
شکل ۱۹- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.04$



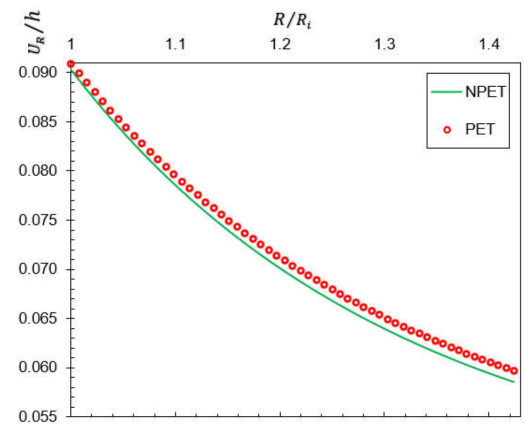
شکل ۲۰- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.0914$

۴-۲- اثر ضخامت بر پاسخ غیرخطی

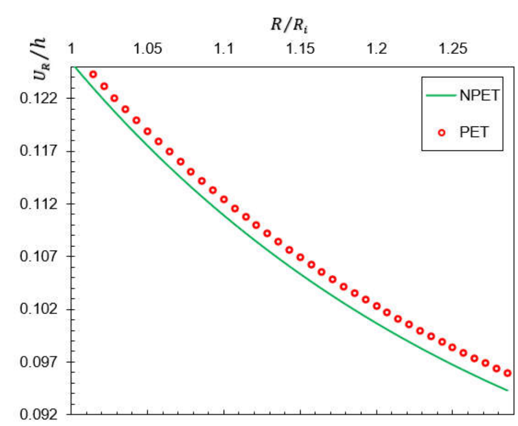
تغییرات ضخامت کره، پارامتر دیگری است که بر پاسخ غیرخطی اثر می‌گذارد. بدین منظور جابه‌جایی پوسته‌ی کروی تحت فشار داخلی ثابت و یکنواخت $P_i^* = 0.0914$ همراه با ضخامت‌های مختلف بررسی شد که نتایج آن در شکل‌های ۲۱ تا ۲۴ آورده شده است. برای تمامی نمودارها، شعاع لایه‌ی میانی $R = 40\,\text{mm}$ درنظر گرفته شده است.



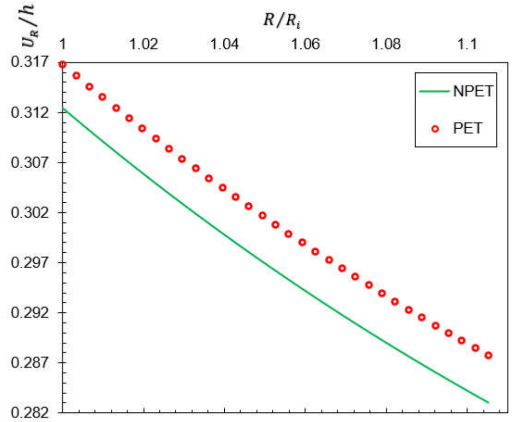
شکل ۲۱- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای h = 20 mm



شکل ۲۲- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای h = 14 mm



شکل ۲۳- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای h = 10 mm



شکل ۲۴- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای h = 4 mm

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به نتایج ارائه شده، ملاحظه می‌شود که توزیع تنش‌ها در کره‌ی تحت فشار، فقط تابع خواص مکانیکی مخزن می‌باشد. امّا توزیع جابه‌جایی علاوه بر خواص مکانیکی، تابع شرایط هندسی کره نیز می‌باشد. هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر تنش شعاعی در راستای ضخامت کره‌ی تحت فشار خارجی، کاهش را نشان می‌دهند، در حالی‌که جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در راستای ضخامت افزایش می‌یابند. با توجه به تغییر در جنس و ضخامت کره، ملاحظه شد که تأثیر دو پاسخ خطی و غیرخطی در جابه‌جایی به دلیل بزرگ بودن جابه‌جایی‌ها، مشهود است ولیکن در تنش‌ها به دلیل کرنش‌های کوچک ناچیز می‌باشد. رفتار پوسته‌های کروی بسیار سفت و ضخیم (مانند پوسته‌های فولادی)، کاملاً خطی است. بنابراین در کاربردهای صنعتی و در فشارهای کاری متعارف، چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی سازه، به شرط آن‌که پوسته نازک نباشد، خطای بسیار کمی را ایجاد می‌کند.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

E	مدول کشسانی، N/m^2
h	ضخامت، m
P	فشار، N/m^2
P^*	فشار بی‌بعد
$\bar{R}$	شعاع لایه‌ی میانی، m
R^*	مختصه‌ی شعاعی بی‌بعد
u	جابه‌جایی، m
u^*	جابه‌جایی بی‌بعد

علائم یونانی

σ	تنش، N/m^2
σ^*	تنش بی‌بعد
ε	کرنش، m/m
υ	نسبت پواسون
ϵ	پارامتر اغتشاشی

۷- پیوست

معرفی مشتق‌گیری‌ها و پارامترهای بی‌بعدی که در معادله‌های (۸) تا (۳۰) از آن‌ها استفاده شده است.

$$u_R^* = \frac{u_R}{h} \tag{۵}$$

$$R^* = \frac{R}{\bar{R}} \tag{۶}$$

$$\epsilon = \frac{h}{\bar{R}} \ll 1 \tag{۷}$$

$$P^* = \frac{P}{\epsilon E} \tag{۸}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\epsilon E} \tag{۹}$$

$$\frac{d}{dR} = \frac{1}{\bar{R}} \frac{d}{dR^*} \tag{۱۰}$$

$$\frac{d^2}{dR^2} = \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{d^2}{dR^{*2}} \tag{۱۱}$$

۸- مراجع

[1] Ventsel E, Krauthammer T. Thin plates and shells: Theory, analysis and applications. Marcel Deker. New York; 2001.

[2] Boresi AP, Chong KP, Lee JD. Elasticity in engineering mechanics, 3rd Ed. John Wiley. New Jersey; 2011.

[3] Naghdi PM, Cooper RM. Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia. Journal of the Acoustical Society of America. 1956; 28: 56-63.

[4] Mirsky I, Hermann G. Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells. Journal of the Applied Mechanics. 1958; 25: 97-102.

[5] Greenspon JE. Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell, Comparison of the Exact Theory with Approximate Theories. Journal of the Acoustical Society of America. 1960; 32: 571-578.

[6] Koizumi M. FGM Activities in Japan. Composites Part B: Engineering. 1997; 28: 1-4.

[7] Ghannad M, Zamani-Nejad M. Complete Closed-Form Solution for Pressurized Heterogeneous Thick Spherical Shells. Mechanika. 2012; 18: 508-516.

[8] Ghannad M, Zamani-Nejad M. Complete Elastic Solution of Pressurized Thick Cylindrical Shells Made of Heterogeneous Functionally Graded Materials. Mechanika. 2012; 18: 640-649.

[9] Ghannad M, Zamani-Nejad M. Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure Using Shear Deformation Theory. Acta Polytechnica Hungarica. 2012; 9: 117-136.

[10] Bayat Y, Ghannad M, Torabi H. Analytical and Numerical Analysis for the FGM Thick Sphere under Combined Pressure and temperature loading. Archive of Applied Mechanics. 2012; 82: 229- 242.

[11] Ghannad M, Gharooni H. Displacements and Stresses in Pressurized Thick FGM Cylinders with Varying Properties of Power Function Based on HSDT. Journal of Solid Mechanics. 2012; 4: 237-251.

[12] Ghannad M, Rahimi GH, Zamani-Nejad M. Determination of Displacements and Stresses in Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Using Perturbation Technique. Mechanika. 2012; 18: 14-21.

[13] Ghannad M, Rahimi GH, Zamani-Nejad M. Elastic Analysis of Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Made of Functionally Graded Materials. Composites Part B: Engineering. 2013; 45: 338-396.

[14] Sanders JL. Nonlinear Theories for Thin Shells. Journal of Quarterly of Applied Mathematics. 1963; 21: 21-36.

[15] Durelli AJ, Chen TL. Displacement and Finite-Strain Fields in a Sphere Subjected to Large Deformations. International Journal of Non-linear Mechanics. 1973; 8: 17-18.

[16] Chen TL, Durelli AJ. Stress Field in a Sphere Subjected to Large Deformations. International Journal of Non-linear Mechanics. 1973; 9: 1035-1052.

[17] Chen TL, Durelli AJ. Displacements and Finite-Strain Fields in a Hollow Sphere Subjected to Large Elastic Deformations. International Journal of Mechanical Sciences. 1974; 16: 777-787.

[18] Lim TJ, Smith B, McDowell DL. Behavior of a Random Hollow Sphere Metal Foam. Acta Materialia. 2002; 50: 2867-2879.

[19] Tung HV, Bich DH. Non-Linear Axisymmetric Response of Functionally Graded Shallow Spherical Shells under Uniform External Pressure Including Temperature Effects. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2011; 46: 1195-1204.

[20] Kiani Y, Eslami MR. The GDQ Approach to Thermally Nonlinear Generalized Thermoelasticity of a Hollow Sphere. International Journal of Mechanical Sciences. 2016; 118: 195-204.

[21] Versino D, Brock JS. Benchmark Solution of the Dynamic Response of a Spherical Shell at Finite Strain. European Journal of Mechanics-A/Solids. 2016; 61: 186-197.

[22] Levin VA, Podladchikov YY, Zingerman KM. An Exact Solution to the Lame Problem for a Hollow Sphere for New Types of Nonlinear Elastic Materials in the Case of Large Deformations. European Journal of Mechanics-A/Solids. 2021; 90: 104345.

[23] Gharooni H, Ghannad M. Nonlinear Analysis of Radially Functionally Graded Hyperelastic Cylindrical Shells with Axially-Varying Thickness and Non-Uniform Pressure Loads Based on Perturbation Theory. Journal of Computational Applied Mechanics. 2019; 50: 324-340.

[24] Gharooni H, Ghannad M. Nonlinear Analytical Solution of Nearly Incompressible Hyperelastic Cylinder with Variable Thickness under Non-Uniform Pressure by Perturbation Technique. Journal of Computational Applied Mechanics. 2019; 50: 395-412.

[۲۵] بهادرانی ن، قنّاد م، سوهانی مح. حلّ کامل غیرخطی استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۲، ج. ۵۳، ش. ۳، ص ۱۶۳-۱۷۱.