نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۶، جلد ۵۴، شماره ۱، بهار ۱۴۰۳، صفحه ۴۱-۵۰ - پژوهشی کامل - DOI: 10.22034/jmeut.2024.53327.3165

طراحی کنترل‌کننده مرتبه کسری تطبیقی برای یک پرنده چهار موتوره

احسان لقمان دانشجو، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران، eh.loghman@aut.ac.ir

محسن ایرانی رهقی[*] دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران، irani@kashanu.ac.ir

عباس لقمان استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران، aloghman@kashanu.ac.ir

چکیده

در این تحقیق، با استفاده از ریاضیات مرتبه کسری یک کنترل‌کننده برای کنترل مسیر حرکت یک کوادروتور طراحی می‌گردد. با توجه به اینکه یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در کوادروتورها تغییر جرم آن‌ها برای حمل و جابجایی بارهای مختلف است، در این پژوهش کنترل‌کننده طراحی شده برای جرم به صورت تطبیقی طراحی می‌گردد تا در مقابل اثرات تغییر جرم رفتار مناسبی را ارائه دهد. برای طراحی کنترل‌کننده در این پژوهش از روش مودلغزشی استفاده می‌شود و سطح لغزش مورد نظر به صورت یک مدل مرتبه کسری در نظر گرفته می‌شود. نتایج این تحقیق به خوبی کارایی کنترل‌کننده مرتبه کسری را برای کنترل مسیر کوادروتور و مقاومت در مقابل تغییرات جرمی را نشان می‌دهد. به علاوه، شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که با استفاده از تغییرات مرتبه مشتق کسری می‌توان کنترل‌کننده‌ای طراحی کرد که با تلاش کنترلی کمتری یک ماموریت را انجام دهد، بنابراین، با طراحی یک کنترل‌کننده مرتبه کسری می‌توان ظرفیت حمل بار را در یک کوادروتور افزایش داد. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که ظرفیت حمل بار با در نظر گرفتن مقدار ۰/۲۷۵ برای مرتبه مشتق بالاترین مقدار خود را دارد. نوآوری این کار بررسی اثرات کنترل‌کننده مرتبه کسری در تعیین ظرفیت حمل بار است به طوری که نشان داده می‌شود با تعیین مقداری مشخص می‌توان ظرفیت حمل بار را تا حدود دو برابر نسبت به کنترل‌کننده‌ی معمولی افزایش داد.

واژه‌های کلیدی: کوادروتور، کنترل‌گر، کنترل مرتبه کسری، کنترل تطبیقی، ظرفیت حمل بار، تعقیب مسیر.

Design of an Adaptive Fractional-order Controller for a quadrotor

E. Loghman Department of Mechanical Engineering, Kashan University, Kashan, Iran
M. Irani Rahaghi Department of Mechanical Engineering, Kashan University, Kashan, Iran
A. Loghman Department of Mechanical Engineering, Kashan University, Kashan, Iran

Abstract

In this investigation, using the fractional calculus, a controller for trajectory control of a quadrotor is designed. As a matter of fact, one of the most important challenges in quadrotors is changing the mass of the quadrotor for carrying loads. In this paper, the controller is designed adaptive to show appropriate response in the presence of changing mass. For designing this controller, the sliding mode controller is utilized, which the sliding surfaces are considered as a fractional model. The results of this study demonstrate the effectiveness of the fractional-order controller for trajectory control of a quadrotor with changing the mass parameter. Moreover, simulations illustrate that by changing the fractional-order a new controller can be designed which can do the same mission with less control effort. Therefore, utilizing the fractional controller, the Dynamic Load Carrying Capacity (DLCC) of a quadrotor can be increased. The results show that by considering fractional-order $\beta = 0.275$, the DLCC is maximized. The innovation of this work is the investigation of fractional order controllers in determining the DLCC, which shows that by setting a certain value, the DLCC can be increased by about two times compared to the classical sliding mode control.

Keywords: quadrotor; controller, fractional-order control; Adaptive control; Dynamic Load Carrying Capacity, Path tracking.

۱- مقدمه

امروزه با گسترش علم ریاضی، مدل‌سازی دقیق‌تر پدیده‌های فیزیکی امکان‌پذیر شده است. ریاضیات کسری یکی از موضوعاتی است که با گسترش روز افزون آن مورد توجه بسیاری از محققان در زمینه‌های مهندسی، فیزیک، مهندسی پزشکی، کنترل و ... قرار گرفته است. حسابان کسری با فراهم آوردن بستر وسیع‌تری برای مدل‌های دینامیکی به مدل‌سازی دقیق‌تر فرآیندها کمک شایانی کرده است. حسابان کسری را می‌توان برای مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک، میرایی سیستم‌ها، مواد بیوزیستی، بیماری‌ها، سیالات، انتقال گرما و ... به کار برد. .

از کاربردهای مهم دیگر حسابان کسری طراحی کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری است. با استفاده از ریاضیات کسری می‌توان کنترل‌کننده هایی طراحی نمود که در مقابل اغتشاش و عدم قطعیت عملکرد مناسبتری نسبت به کنترل‌کننده های معمولی ارائه دهند. به عنوان مثال یک کنترل‌کننده تناسبی- انتگرالی- مشتقی (pid) مرتبه کسری دو پارامتر تنظیم بیشتر (مرتبه مشتق و مرتبه انتگرال) نسبت به کنترل‌کننده معمولی دارد، این موضوع سبب می‌شود که راحت تر بتوان کنترل‌کننده‌ی طراحی نمود که در شرایط اغتشاش و ... عملکرد مناسبی ارائه دهد. سیستم‌های مرتبه کسری با عنوان سیستم‌های حافظه دار شناخته می‌شوند زیرا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در یک زمان مشخص نیاز به تمام اطلاعات قبل از این لحظه نیز هست

با گسترش ریاضیات کسری کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری نیز گسترش فراوانی داشته‌اند. محققان زیادی از کنترل‌کننده‌های غیرخطی کسری [۱-۴] استفاده نموده‌اند. تحلیل پایداری سیستم‌های

---

[*] نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: irani@kashanu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۱/۰۷/۰۴
تاریخ پذیرش: ۰۲/۰۹/۰۶

کنترل غیرخطی مرتبه کسری در [۱] انجام شده است. کنترل غیرخطی مود لغزشی و مرتبه کسری یک توربین باد در [۲] ارائه شده است. کنترل PID[۱] مرتبه کسری برای کنترل‌کننده سیستم‌های غیرخطی در [۵] ارائه شده است.

کنترل‌کننده‌های تطبیقی مرتبه کسری نیز مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۶-۹] ، با مطالعه مرجع [۶] می‌توان اطلاعات زیادی از کنترل‌کننده‌های تطبیقی مرتبه کسری بدست آورد. جزئیات روش تطبیقی مدل مرجع برای کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری در [۷] ارائه شده است. روش تطبیقی مدل مرجع غیر مستقیم برای سیستم-های مرتبه کسری موضوع مرجع [۸] می‌باشد.

کنترل‌کننده‌های مقاوم مرتبه کسری [۱۰, ۱۱] از روش‌های مهمی است که می‌توان برای مقابله با اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها به کار برد. مرجع [۱۰] اطلاعات کلی در مورد کنترل مقاوم سیستم‌ها را در بر می‌گیرد. روش LMI[۲] که یک روش مقاوم برای مقابله با دفع اغتشاشات است، این روش در مرجع [۱۱] بر روی سیستم‌های کسری به کار رفته است.

کنترل‌کننده‌ها مرتبه کسری کاربردهای فراوانی در سیستم‌های واقعی مانند کوادروتور [۱۲, ۱۳]، زیردریایی [۱۴, ۱۵]، انواع ربات‌ها [۱۶, ۱۷]، سیستم تعلیق خودرو [۱۸] و ... داشته‌اند. در مرجع [۱۳] از یک کنترل‌کننده مود لغزشی غیرخطی و مرتبه کسری برای کنترل یک کوادروتور استفاده شده است. در مرجع [۱۴] کنترل عمق یک زیردریایی با استفاده از یک کنترل‌کننده PID مرتبه کسری ارائه شده است. در [۱۵] از یک کنترل‌کننده مرتبه کسری بهینه شده با الگوریتم ژنتیک برای کنترل یک زیردریایی استفاده شده است.

کنترل سازه‌های پیوسته نیز مورد توجه برخی از محققان بوده است. کنترل یک تیر با استفاده از پیزوالکتریک در [۱۹] ارائه شده است. کنترل یک ورق با استفاده از پیزوالکتریک موضوع مرجع [۲۰] است. با این وجود همان طور که گفته شد کنترل این سازه‌ها با توجه به پیچیدگی‌های آن کمتر انجام شده است. کنترل سازه‌های پیوسته نیز با استفاده از کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری انجام شده اند. به عنوان مثال کنترل ارتعاشات یک تیر کامپوزیت با استفاده از کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری در [۲۱] ارائه شده است. در این پژوهش کنترل تطبیقی مرتبه کسری یک کوادروتور مورد نظر است که کوادروتور بتواند با اغتشاشات و نامیزانی‌ها مقابله کند. مقابله با نامعینی‌ها همواره یکی از مسائل مطرح در کوادروتور بوده است [۲۲].

در این پژوهش ابتدا مدل ریاضی، سپس طراحی کنترل‌گر و در نهایت نتایج ارائه می گردند.

۲- مدل‌سازی مسئله

۲-۱- فرضیات مدل‌سازی

برای مدل‌سازی مسئله‌ی کوادروتور فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شوند:

۱- کوادراتور به صورت یک جسم صلب در نظر گرفته می‌شود.

از آنجا که مدل‌سازی کوادراتور به صورت غیرصلب کار بسیار مشکلی است و خطاهای زیادی نیز به همراه دارد فریم کوادراتور به صورت جسم صلب در نظر گرفته می‌شود.

۲- دوران ملخ‌ها جز درجات آزادی در نظر گرفته نمی‌شوند.

از آنجا که هر ملخ که روی موتورها نصب شده است می‌تواند آزادانه بچرخد هر ملخ یک درجه آزادی به سیستم اضافه می‌کند. برای ساده‌سازی مدل، اثرات نیروهای مربوط به این ملخ‌ها فقط با در نظر گرفتن سرعت دوران وارد مدل‌سازی می‌شوند. این اثرات به صورت نیروی خارجی که به فریم وارد می‌شوند فرض می‌شوند.

۳- ربات دو محور تقارن دارد و ممان اینرسی به صورت قطری در نظر گرفته می‌شود.

۴- اثرات آیرودینامیکی زیر در نظر گرفته می‌شوند:

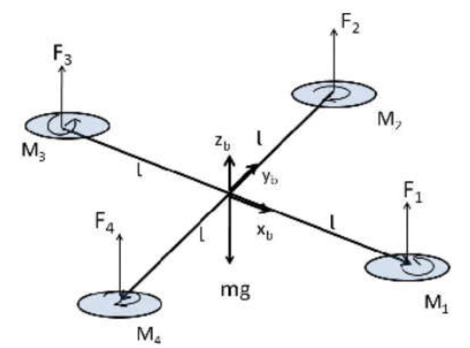
الف) نیروی برآ (Lift) ناشی از دوران ملخ‌ها

ب) نیروی پسا روی ملخ و به تبع آن گشتاور عکس العملی ملخ‌ها از بقیه‌ی اثرات آیرودینامیکی صرف‌نظر می‌شود.

۲-۲- معادلات

مسئله‌ی کوادراتور علاوه بر حرکت انتقالی حرکت دورانی نیز دارد و این حرکت از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مسئله برای مدل-سازی دوران کوادراتور از زوایای اویلر استفاده می‌شود.

شکل ۱ دستگاه نصب شده بر روی کوادراتور را نشان می‌دهد:



شکل ۱- کوادراتور به همراه محورها و چرخش‌ها

با در نظر گرفتن درجات آزادی $[x, y, z, \varphi, \theta, \psi]$ معادلات حرکت به شکل روابط (۱) بدست می‌آید [۸]:

$$\ddot{x} = \frac{u_1}{m}[cos\psi\ sin\theta\ cos\varphi + sin\psi\ sin\varphi]$$
$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m}[sin\psi\ sin\theta\ cos\varphi - cos\psi\ sin\varphi]$$
$$\ddot{z} = -g + \frac{u_1}{m}[cos\theta\ cos\varphi]$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{I_y - I_z}{I_x}\dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega_r + \frac{L}{I_x}u_2 \quad (۱)$$
$$\ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y}\dot{\varphi}\dot{\psi} - \frac{J_r}{I_y}\dot{\varphi}\Omega_r + \frac{L}{I_y}u_3$$
$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{d}{I_z}u_4$$

[1] Proportional Integral Derivative
[2] Linear Matric Inequality

که در آن g شتاب جاذبه، I_z, I_y, I_x مقادیر ممان اینرسی، L طول کوادروتور، m جرم کوادروتور و d ضریب نیروی پیشران[1] هستند. به علاوه، برای ساده‌تر نوشتن معادلات تعاریف (۲) در نظر گرفته شده‌اند [۸]:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\
u_2 &= F_4 - F_2 \\
u_3 &= F_3 - F_1 \\
u_4 &= \frac{-T_1 + T_2 - T_3 + T_4}{d}
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

$$\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$$

که در آن F_i ها مقادیر نیروی ایجاد شده توسط هر موتور، T_i گشتاور ایجاد شده توسط هر موتور و Ω_i سرعت دورانی هر موتور را نشان می‌دهند. رابطه‌ی بین نیروی موتورها و ورودی‌های کنترلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -L & 0 & L & 0 \\ 0 & L & 0 & -L \\ \frac{d}{b} & -\frac{d}{b} & \frac{d}{b} & -\frac{d}{b} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}
\qquad (۳)
$$

که در آن b ضریب پسا[2] است. معادلات حرکت کوادروتور را می‌توان به صورت (۴) نیز نمایش داد:

$$
\begin{aligned}
&\frac{m}{cos\theta cos\varphi}[\ddot{z} + g] = u_1 \\
&\frac{I_x}{L}\ddot{\varphi}_d - \frac{I_y - I_z}{L}\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{L}\dot{\theta}\Omega_r = u_2 \\
&\frac{I_y}{L}\ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{L}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{L}\dot{\varphi}\Omega_r = u_3 \\
&\frac{I_z}{L}\ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{L}\dot{\theta}\dot{\varphi} = u_4
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

در این مقاله، مقادیر عددی کوادروتور به شکل (۵) انتخاب شده است:

$$
\begin{aligned}
&m = 1.77\ (\mathrm{kg}) \qquad I_x = 0.00216\ (\mathrm{N}.s^2/\mathrm{rad}) \\
&I_y = 0.00216\ (\mathrm{N}.s^2/\mathrm{rad}) \\
&I_z = 0.00033\ (\mathrm{N}.s^2/\mathrm{rad}) \\
&J_r = 0.00003357\ (\mathrm{N}.s^2/\mathrm{rad}) \qquad L = 0.42\ (\mathrm{m}) \\
&b = 2.98 \times 10^{-6} (\mathrm{N}.s^2) \qquad d = 0.225\ (\mathrm{N.m}.s^2) \\
&g = 9.81\ (m/s^2)
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

۳- طراحی کنترل‌کننده تطبیقی مرتبه کسری

در این بخش یک کنترل‌کننده تطبیقی کسری به روش مود لغزشی طراحی می‌شود.

۳-۱- کنترل‌کننده ارتفاع و زوایا

معادلات حاکم بر یک کوادروتور به صورت (۱) و (۴) نوشته شدند و در آن متغیرهای جرم و مشخصات هندسی به صورت (۵) تعریف شدند. برای حل مسئله متغیرهای برای خطا به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$
\begin{aligned}
e_z &= z_d - z \\
e_\varphi &= \varphi_d - \varphi \\
e_\theta &= \theta_d - \theta \\
e_\psi &= \psi_d + \psi
\end{aligned}
\qquad (۶)
$$

با توجه به اینکه کنترل‌کننده مدنظر در این پژوهش یک کنترل‌کننده مرتبه کسری است برای طراحی کنترل‌کننده سطوح لغزش با استفاده از مشتقات مرتبه کسری به شکل زیر تعریف می‌گردند [۸]:

$$
\begin{aligned}
s_z &= D^{1+\beta_z} e_z + \lambda_z e_z \\
s_\varphi &= D^{1+\beta_\varphi} e_\varphi + \lambda_\varphi e_\varphi \\
s_\theta &= D^{1+\beta_\theta} e_\theta + \lambda_\theta e_\theta \\
s_\psi &= D^{1+\beta_\psi} e_\psi + \lambda_\psi e_\psi
\end{aligned}
\qquad (۷)
$$

که در آن $\beta_z, \beta_\varphi, \beta_\theta, \beta_\psi$ مرتبه‌های مشتق کسری هستند. با مشتق‌گیری از سطوح لغزش مرتبه کسری خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\dot{s}_z &= D^{2+\beta_z} e_z + \lambda_z \dot{e}_z = D^{\beta_z}[\ddot{z}_d - \ddot{z}] \\
&= D^{\beta_z}\left[\ddot{z}_d + g - \frac{u_1}{m} cos\theta cos\varphi\right] \\
&\quad + \lambda_z \dot{e}_z \\
\dot{s}_\varphi &= D^{2+\beta_\varphi} e_\varphi + \lambda_\varphi \dot{e}_\varphi = D^{\beta_\varphi}[\ddot{\varphi}_d - \ddot{\varphi}] \\
&= D^{\beta_\varphi}\left[\ddot{\varphi}_d - \frac{I_x - I_z}{I_x}\dot{\theta}\dot{\psi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\Omega_r - \frac{L}{I_x}u_2\right] + \lambda_z \dot{e}_z \\
\dot{s}_\theta &= D^{2+\beta_\theta} e_\theta + \lambda_\theta \dot{e}_\theta = D^{\beta_\theta}[\ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}] \\
&= D^{\beta_\theta}\left[\ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{I_y}\dot{\varphi}\dot{\psi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{J_r}{I_y}\dot{\varphi}\Omega_r - \frac{L}{I_y}u_3\right] + \lambda_\theta \dot{e}_\theta \\
\dot{s}_\psi &= D^{2+\beta_\psi} e_\psi + \lambda_\psi \dot{e}_\psi = D^{\beta_\psi}[\ddot{\psi}_d - \ddot{\psi}] \\
&= D^{\beta_\psi}\left[\ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{I_z}\dot{\theta}\dot{\varphi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{d}{I_z}u_4\right] + \lambda_\psi \dot{e}_\psi
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

برای صفر شدن مشتقات سطوح لغزش مقادیر ورودی به صورت زیر می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\widehat{m}}{cos\theta cos\varphi}\left[\ddot{z}_d + g + \lambda_z D^{1-\beta_z} e_z\right] \\
u_2 &= \frac{I_x}{L}\ddot{\varphi}_d - \frac{I_y - I_z}{L}\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{L}\dot{\theta}\Omega_r + \lambda_\varphi D^{1-\beta_\varphi} e_\varphi \\
u_3 &= \frac{I_y}{L}\ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{L}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{L}\dot{\varphi}\Omega_r + \lambda_\theta D^{1-\beta_\theta} e_\theta \\
u_4 &= \frac{I_z}{L}\ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{L}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \lambda_\psi D^{1-\beta_\psi} e_\psi
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

که در آن نماد ($\widehat{m}$) نشان دهنده‌ی آن است که مقدار جرم کوادروتور مورد نظر به طور دقیق مشخص نیست.

در نهایت برای کنترل مود لغزشی ورودی‌های کنترلی به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\widehat{m}}{cos\theta cos\varphi}\left[\ddot{z}_d + g + \lambda_z D^{1-\beta_z} e_z + \eta_z s_z \right. \\
&\quad \left. + k_z sgn(s_z)\right] \\
u_2 &= \frac{I_x}{L}\ddot{\varphi}_d - \frac{I_y - I_z}{L}\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{L}\dot{\theta}\Omega_r \\
&\quad + \frac{I_x}{L}\left[\lambda_\varphi D^{1-\beta_\varphi} e_\varphi + \eta_\varphi s_\varphi \right. \\
&\quad \left. + k_\varphi sgn(s_\varphi)\right] \\
u_3 &= \frac{I_y}{L}\ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{L}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{L}\dot{\varphi}\Omega_r \\
&\quad + \frac{I_y}{L}\left[\lambda_\theta D^{1-\beta_\theta} e_\theta \eta_\theta s_\theta \right. \\
&\quad \left. + k_\theta sgn(s_\theta)\right]
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

[1] Thrust Coefficient
[2] Drag Coefficient

$$u_4 = \frac{I_z}{L}\ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{L}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{I_z}{L}\left[\eta_\psi s_\psi + k_\psi sgn(s_\psi) + \lambda_\psi D^{1-\beta_\psi} e_\psi\right]$$

حال ورودی‌های بدست آمده داخل معادلات سیستم (۴) جایگذاری می‌گردند:

$$m\frac{\ddot{z}+g}{cos\theta cos\varphi} = \frac{\widehat{m}}{cos\theta cos\varphi}\left[\ddot{z}_d + g + \lambda_z D^{1-\beta_z} e_z + \eta_z s_z + k_z sgn(s_z)\right]$$

$$\begin{aligned}
&\frac{I_x}{L}\ddot{\varphi}_d - \frac{I_y - I_z}{L}\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{L}\dot{\theta}\Omega_r + \frac{I_x}{L}\left[\lambda_\varphi D^{1-\beta_\varphi} e_\varphi + \eta_\varphi s_\varphi + k_\varphi sgn(s_\varphi)\right] = \frac{I_x}{L}\ddot{\varphi}_d - \frac{I_x - I_z}{L}\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{L}\dot{\theta}\Omega_r \\
&\frac{I_y}{L}\ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{L}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{L}\dot{\varphi}\Omega_r + \frac{I_y}{L}\left[\lambda_\theta D^{1-\beta_\theta} e_\theta \eta_\theta s_\theta + k_\theta sgn(s_\theta)\right] = \frac{I_y}{L}\ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{L}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{L}\dot{\varphi}\Omega_r \\
&\frac{I_z}{d}\ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{d}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{I_z}{d}\left[\eta_\psi s_\psi + k_\psi sgn(s_\psi) + \lambda_\psi D^{1-\beta_\psi} e_\psi\right] = \frac{I_z}{d}\ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{d}\dot{\theta}\dot{\varphi}
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

در ادامه روی پایداری معادلات (۱۱) بحث می‌گردد.

با تعریف $\widetilde{m} = \widehat{m} - m$ روابط زیر بدست می‌آیند:

$$m\left[-D^{1-\beta_z}s_z - \eta_z s_z - k_z sgn(s_z)\right] = \widetilde{m}\left[\ddot{z}_d + g + \lambda_z D^{1-\beta_z} e_z + \eta_z s_z + k_z sgn(s_z)\right]$$

$$\begin{aligned}
&\frac{I_x}{L}\left[-D^{1-\beta_\varphi}s_\varphi - \eta_\varphi s_\varphi - k_\varphi sgn(s_\varphi)\right] = 0 \\
&\frac{I_y}{L}\left[-D^{1-\beta_\theta}s_\theta - \eta_\theta s_\theta - k_\theta sgn(s_\theta)\right] = 0 \\
&\frac{I_z}{d}\left[-D^{1-\beta_\psi}s_\psi - \eta_\psi s_\psi - k_\psi sgn(s_\psi)\right] = 0
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

در این تحقیق به منظور بررسی پایداری و برای اینکه مسئله ساده‌تر گردد فرض می‌گردد تمام مقادیر مرتبه مشتق کسری با یکدیگر برابر هستند. معادلات (۱۲) را می‌توان با فرض $\beta_z = \beta_\varphi = \beta_\theta = \beta_\psi = \beta$ به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$PD^{1-\beta}(S) + P\eta S + PKsgn(S) = -W\widetilde{m} \qquad (۱۳)$$

که در آن:

$$P = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_z}{d} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_z \\ s_\varphi \\ s_\theta \\ s_\psi \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_\psi \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\psi \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \ddot{z}_d + g + \lambda_z D^{1-\beta_z} e_z + \eta_z s_z + k_z sgn(s_z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال نیاز است که پایداری بررسی شود و یک کنترل‌کننده تطبیقی برای تغییرات جرم طراحی گردد. به منظور تحلیل پایداری قضیه‌ی زیر استفاده می‌گردد[۲۳] :

قضیه: فرض کنید $x^* = 0$ نقطه تعادل سیستم زیر باشد:

$$D_t^\beta x(t) = f(t, x(t)) \qquad \beta \in (0,1) \qquad (۱۵)$$

اگر تابع لیاپانوف $V(t,x)$ و توابع کلاس k $\gamma_3(.), \gamma_2(.), \gamma_1(.)$ یافت شوند به گونه‌ای که دو نامساوی

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \gamma_2(\|x\|) \\ &D_t^\beta V(t,x) = -\gamma_3(\|x\|) \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن $\beta \in (0,1)$ همزمان برقرار باشند آنگاه نقطه تعادل $x^* = 0$ برای سیستم یک نقطه تعادل پایدار مجانبی خواهد بود.

لم: اگر بردار $x(t)$ برداری از توابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه برای تمام مقادیر $t > t_0$ رابطه‌ی زیر برقرار است[۲۳] :

$$\frac{1}{2}D_t^\beta(x(t)^T P\, x(t)) \le x(t)^T P\, D_t^\beta(x(t)) \qquad (۱۷)$$

که در آن P یک ماتریس مربعی، متقارن و مثبت معین است.

اگر در یک سیستم مرتبه کسری تابع لیاپانوفی انتخاب شود که شرایط (۱۶) را برقرار کند آنگاه می‌توان آن نقطه را یک نقطه پایدار مجانبی در نظر گرفت. بنابراین، برای به دست آوردن قانون تطبیق از تابع لیاپانوف زیر استفاده می‌شود:

$$V = S^T PS + \frac{1}{2}\widetilde{m}^2 \Gamma \qquad (۱۸)$$

برای تحلیل پایداری از قضیه (۱۶) و لم (۱۷) استفاده می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&V = S^T PS + \frac{1}{2}\widetilde{m}^2 \Gamma \\
&\to\ D^{1-\beta}(V) < S^T PD^{1-\beta}(S) + \widetilde{m}\Gamma D^{1-\beta}(\widetilde{m}) \\
&= S^T[-P\eta S - PKsgn(S) - W\widetilde{m}] + \widetilde{m}\Gamma D^{1-\beta}(\widetilde{m}) \\
&= \underbrace{-S^T P\eta S - S^T Ksgn(S)}_{<0} - S^T W\widetilde{m} + \widetilde{m}\Gamma D^{1-\beta}(\widetilde{m})
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

برای اینکه سیستم مورد نظر پایدار شود قانون تطبیق به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&S^T W\widetilde{m} = \widetilde{m}\Gamma D^{1-\beta}(\widetilde{m}) \to \widetilde{m}W^T S \\
&= \widetilde{m}\Gamma D^{1-\beta}(\widetilde{m}) \to D^{1-\beta}(\widetilde{m}) \\
&= \Gamma^{-1}W^T S
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$$\to \widehat{m} = \Gamma^{-1}D^{\beta-1}(W^T S)$$

به این ترتیب یک کنترل‌کننده کسری با استفاده از مود لغزشی طراحی گردید که دینامیک تطبیق آن نیز به صورت کسری بدست آمد.

۳-۲- کنترل مسیر کوادروتور

با کنترل داشتن روی ارتفاع و زوایا که در بخش قبل انجام شد می‌توان مسیر حرکت را نیز کنترل نمود. برای این کار سطوح لغزش کسری به صورت زیر تعریف می‌گردند [۸]:

$$\begin{aligned} s_x &= D^{1+\beta_x}e_x + \lambda_x e_x \\ s_y &= D^{1+\beta_y}e_y + \lambda_y e_y \end{aligned} \tag{۲۱}$$

برای بدست آوردن مقدار مناسب کنترلی باید مشتق سطوح لغزش را برابر صفر قرار داد:

$$\begin{aligned} \dot{s}_x = D^{2+\beta_x}e_x + \lambda_x \dot{e}_x &= D^{\beta_x}[\ddot{x}_d - \ddot{x}] + \lambda_x \dot{e}_x \\ &= D^{\beta_x}\Big[\ddot{x}_d \\ &\quad - \frac{u_1}{m}[\cos\psi \sin\theta \cos\varphi \\ &\quad + \sin\psi \sin\varphi]\Big] + \lambda_x \dot{e}_x \end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_y = D^{2+\beta_y}e_y + \lambda_y \dot{e}_y &= D^{\beta_y}[\ddot{y}_d - \ddot{y}] + \lambda_y \dot{e}_y \\ &= D^{\beta_y}\Big[\ddot{y}_d \\ &\quad - \frac{u_1}{m}[\sin\psi \sin\theta \cos\varphi \\ &\quad - \cos\psi \sin\varphi]\Big] + \lambda_y \dot{e}_y \end{aligned}$$

با صفر قرار دادن رابطه‌ی (۲۲) مقادیر ورودی کنترلی به صورت (۲۳) انتخاب می‌گردند:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{m}{\cos\psi \sin\theta \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi}\big[\ddot{x}_d \\ &\quad + \lambda_x D^{1-\beta_x}e_x\big] \\ u_1 &= \frac{m}{\sin\psi \sin\theta \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi}\big[\ddot{y}_d \\ &\quad + \lambda_y D^{1-\beta_y}e_y\big] \end{aligned} \tag{۲۳}$$

برای کنترل مناسب مسیر xy به روش مود لغزشی نیاز است که ورودی‌های کنترلی در (۲۳) اصلاح شده و به شکل (۲۴) انتخاب شوند:

$$\begin{aligned} u_{1x}^* &= \frac{m}{\cos\psi \sin\theta \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi}\big[\ddot{x}_d \\ &\quad + \lambda_x D^{1-\beta_x}e_x + \eta_x s \\ &\quad + k_x sgn(s)\big] \\ u_{1y}^* &= \frac{m}{\sin\psi \sin\theta \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi}\big[\ddot{y}_d \\ &\quad + \lambda_y D^{1-\beta_y}e_y + \eta_y s \\ &\quad + k_y sgn(s_y)\big] \end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن u_{1x}^* و u_{1y}^* مقادیر اصلاح شده رابطه (۲۳) هستند. اما این نکته واضح است که با تنها یک ورودی کنترلی نمی‌توان روی سه متغیر وابسته به مسیر کنترل داشت. بنابراین با استفاده از کنترل روی زوایا سعی میشود که این هدف حاصل شود. در نتیجه، با استفاده از کنترل روی دو زاویه‌ی φ و Θ مسیر کنترل می‌شود. از رابطه‌ی (۲۴) می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$\begin{aligned} &\cos\psi \sin\theta \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \\ &\quad = \frac{m}{u_{1x}^*}\big[\ddot{x}_d + \lambda_x D^{1-\beta_x}e_x + \eta_x s_x \\ &\quad + k_x sgn(s_x)\big] \\ &\sin\psi \sin\theta \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi \\ &\quad = \frac{m}{u_{1y}^*}\big[\ddot{y}_d + \lambda_y D^{1-\beta_y}e_y + \eta_y s_y \\ &\quad + k_y sgn(s_y)\big] \end{aligned} \tag{۲۵}$$

با استفاده از تعاریف زیر:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{m}{u_{1x}^*}\big[\ddot{x}_d + \lambda_x D^{1-\beta_x}e_x + \eta_x s_x + k_x sgn(s_x)\big] \\ u_y &= \frac{m}{u_{1y}^*}\big[\ddot{y}_d + \lambda_y D^{1-\beta_y}e_y + \eta_y s_y + k_y sgn(s_y)\big] \end{aligned} \tag{۲۶}$$

و استفاده از رابطه‌ی (۲۴)، زوایای مناسب برای دنبال کردن مسیر به شکل زیر طراحی می‌گردند:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sin^{-1}\big[u_x \sin\psi_d - u_y \cos\psi_d\big] \\ \theta &= \sin^{-1}\left[\frac{u_x \cos\psi_d + u_y \sin\psi_d}{\cos\psi_d}\right] \end{aligned} \tag{۲۷}$$

بنابراین، با استفاده از این دو زاویه می‌توان مسیر را نیز کنترل نمود. با توجه به رابطه‌ی (۱)، برای کنترل مسیر، چهار متغیر تحت کنترل x,y,z و زاویه‌ی ψ انتخاب شدند.

۴- شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده برای کنترل مسیر

۴-۱- شبیه‌سازی ریاضیات کسری

به منظور شبیه‌سازی کوادروتور نیاز است معادلات دیفرانسیل کسری حل گردند. در این تحقیق مشتق کسری مورد استفاده قرار گرفته از نوع کپوتو[1] است. مشتق کسری مرتبه α تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۴]:

$$D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau \tag{۲۸}$$

که در آن m کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از α است.

در این تحقیق به منظور حل معادلات دیفرانسیل کسری از روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. با توجه به [۲۴] مشتق کپوتو یک تابع را برای $0 < \alpha < 1$ می‌توان به صورت (۲۹) گسسته‌سازی نمود:

$$\begin{aligned} &for\ \ 0<\alpha<1 \\ &D^{\alpha}u^n = \frac{1}{\Delta t^{\alpha}}\left[b_0 u^n - \sum_{m=0}^{n-1}(b_{n-m-1} - b_{n-m})u^m \right. \\ &\qquad \left. - b_n u^0\right] \\ &b_m^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\big[(m+1)^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}\big] \end{aligned} \tag{۲۹}$$

۴-۲- بررسی عملکرد کنترل‌کننده

با استفاده از (۲۹) معادلات دیفرانسیل کسری ارائه شده در این پژوهش گسسته‌سازی شده و حل می‌شوند.

به منظور بررسی عملکرد کنترل‌گر، فرض می‌کنیم کوادروتور ابتدا در کمتر از ۱۰ ثانیه به اندازه‌ی ۸۰ سانتی‌متر ارتفاع را بالا می‌رود و سپس در راستای طولی و عرضی مسیری دایروی را طی می‌کند:

$$\begin{aligned} x &= 0.75\cos(o.1\pi t) \\ y &= 0.75\sin(o.1\pi t) \end{aligned} \tag{۳۰}$$

برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده مقادیر زیر در نظر گرفته می‌شوند:

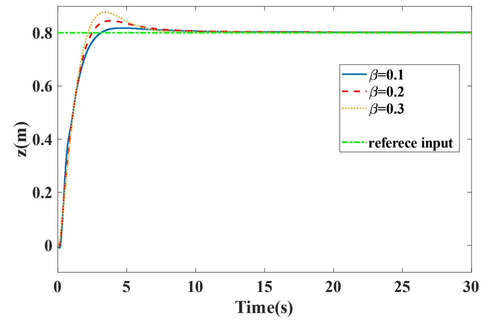
$$\begin{aligned} &k_z = k_\varphi = k_\theta = k_\psi = 0.2, \\ &\eta_x = 1,\quad \eta_y = 1,\quad \eta_z = 1,\quad \eta_\varphi = 20,\quad \eta_\theta \\ &\qquad = 10,\quad \eta_\psi = 1, \\ &\lambda_x = 1,\quad \lambda_y = 1,\quad \lambda_z = 1,\quad \lambda_\varphi = 5,\quad \lambda_\theta = 5, \\ &\quad \lambda_\psi = 6, \\ &\Gamma = 0.5 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

و فرض می‌شود که یک جرم دو کیلوگرمی را نیز از همان ابتدا حمل می‌کند.

---

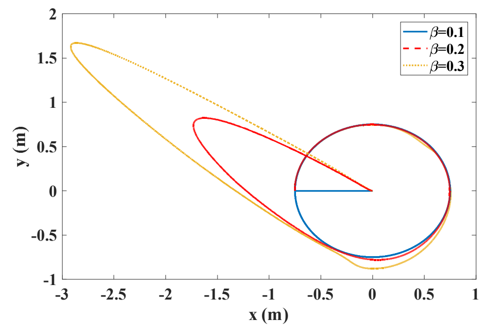
[1] Caputo

شکل ۲ عملکرد کنترل‌کننده مرتبه کسری را به ازای مقادیر متفاوت مرتبه مشتق برای ارتفاع نشان می‌دهد:



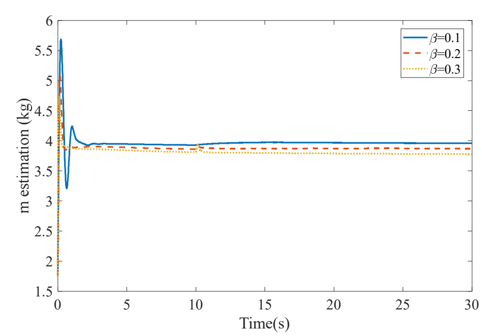
شکل ۲- عملکرد کنترل‌کننده برای متغیر ارتفاع

شکل ۳ نحوه‌ی حرکت کوادروتور را در صفحه‌ی xy به ازای مقادیر مختلف مرتبه‌ی مشتق نشان می‌دهد. با افزایش مرتبه‌ی مشتق خطای دنبال کردن مسیر افزایش یافته است:



شکل ۳- عملکرد کنترل‌کننده برای کنترل مسیر

شکل ۴ نحوه‌ی تطبیق متغیر جرم را به ازای تغییر مرتبه مشتق نشان می‌دهد.



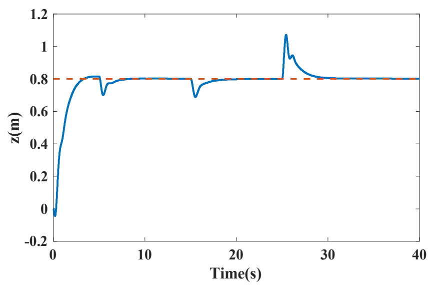
شکل ۴- عملکرد کنترل‌کننده برای تطبیق جرم

۴-۳-مقاومت کنترل‌کننده در مقابل تغییرات جرم

برای این قسمت فرض می‌شود کوادروتور یک جسم یک کیلوگرمی را در ثانیه پنجم برمی‌دارد و پس از افزایش ارتفاع در زمان ۱۵ ثانیه یک جسم یک کیلوگرمی را به آن اضافه می‌کند. در نهایت در زمان ۲۵ ثانیه تمام بار را خالی می‌کند. مقادیر زیر برای کنترل‌کننده انتخاب شده‌اند:

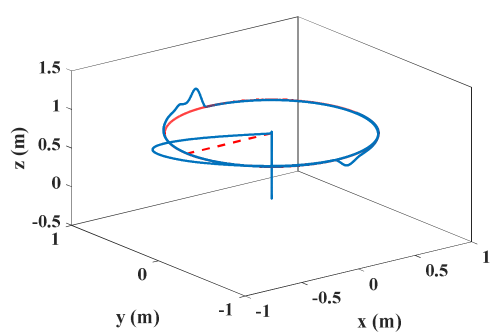
$$\begin{aligned}
&k_z = k_\varphi = k_\theta = k_\psi = 0.02,\\
&\eta_x = 1,\quad \eta_y = 1,\quad \eta_z = 1,\quad \eta_\varphi = 20,\\
&\eta_\theta = 10,\quad \eta_\psi = 1,\\
&\lambda_x = 1,\quad \lambda_y = 1,\quad \lambda_z = 1,\quad \lambda_\varphi = 5,\\
&\lambda_\theta = 5,\quad \lambda_\psi = 6,\\
&\beta_x = \beta_y = \beta_z = \beta_\varphi = \beta_\theta = \beta_\psi = 0.1,\\
&\Gamma = 1
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

شکل ۵ اثرات تغییر جرم را روی کنترل ارتفاع نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشخص است که کنترل‌کننده در مقابل تغییرات جرم مقاومت نشان می‌دهد.



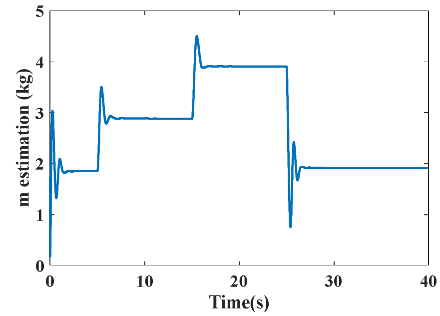
شکل ۵- عملکرد کنترل‌کننده برای متغیر ارتفاع

شکل ۶ کنترل مسیر در صفحه‌ی سه بعدی توسط کنترل‌کننده مرتبه کسری نشان داده شده است در موقعیت‌هایی که پاسخ از مقدار هدف فاصله گرفته و نوسان داشته است نواحی تغییر جرم است.



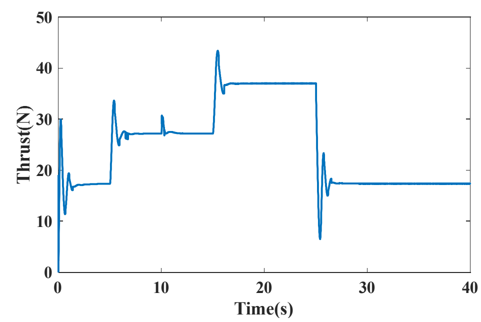
شکل ۶- عملکرد کنترل‌کننده برای کنترل مسیر

شکل ۷ نحوه‌ی تطبیق جرم را توسط کنترل‌کننده طراحی شده نشان می‌دهد. مشخص است که تغییرات جرم در زمان‌های ۵، ۱۵ و ۲۵ ثانیه به خوبی توسط کنترل‌کننده تطبیق یافته است.



شکل ۷- عملکرد کنترل‌کننده برای تطبیق جرم

شکل ۸ تغییرات نیروی بالابرنده در کوادروتور را با تغییر جرم نشان می‌دهد. تغییراتی که در زمان‌های ۵، ۱۵ و ۲۵ ثانیه دیده می‌شود ناشی از تغییرات جرم است.



شکل ۸- تلاش کنترلی

با تغییر ضریب تطبیق (Γ) می‌توان سرعت تطبیق را در شکل‌های ۷ و ۸ تغییر داد.

۵- بررسی محدودیت‌ها و ظرفیت حمل بار

در این بخش محدودیت‌های کنترل‌کننده طراحی شده بررسی می‌شوند. دو نوع محدودیت برای کنترل‌کننده فرض می‌شود. اولین محدودیت روی نیروی بالابر است که فرض می‌شود موتورها ظرفیت حداکثر ایجاد ۱۰۰ نیوتون نیروی بالابر را داشته باشند. همچنین شاخصی که برای اندازه‌گیری خطا معرفی می‌شود به صورت زیر است:

$$error = \int e^2\,dt = \int \left(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2\right)dt \qquad (۳۳)$$

فرض می‌شود خطای تعریف شده در (۳۳) حتما باید کمتر از ۰/۱ باشد.

مقادیر کنترلی مورد استفاده در این بخش به صورت زیر هستند:

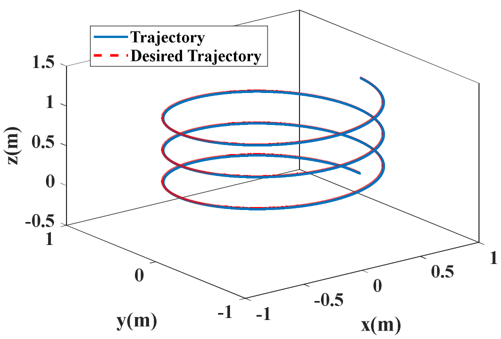
$$\begin{gathered} k_z = k_\varphi = k_\theta = k_\psi = 0.005, \\ \eta_x = 3,\quad \eta_y = 3,\quad \eta_z = 5,\quad \eta_\varphi = 20,\quad \eta_\theta = 10,\quad \eta_\psi = 1, \\ \lambda_x = 15,\quad \lambda_y = 15,\quad \lambda_z = 3,\quad \lambda_\varphi = 5,\quad \lambda_\theta = 5,\quad \lambda_\psi = 6, \\ \Gamma = 1.75 \end{gathered} \qquad (۳۴)$$

برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده یک جرم با مقادیر مختلف روی آن قرار داده می‌شود و از کوادروتور خواسته می‌شود مسیر (۳۵) را طی کند:

$$\begin{gathered} x = 0.75\cos(o.1\pi t) \\ y = 0.75\sin(o.1\pi t) \\ z = 0.02\,t \end{gathered} \qquad (۳۵)$$

در ادامه این محدودیت‌ها با استفاده از نمودارها و جداولی ارائه می‌گردند.

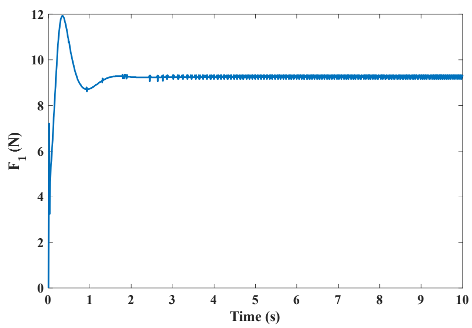
شکل ۹ یک نمونه از مسیر طی شده (۳۵) به ازای $\beta = 0.1$ و بار ۲ کیلوگرم را نشان می‌دهد:



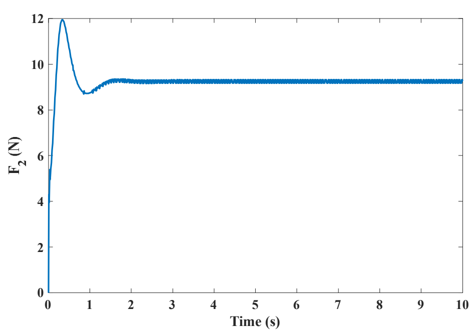
شکل ۹- مسیر طی شده (۳۵) به ازای $\beta = 0.1$

این شکل نشان می‌دهد که سیستم کنترلی به خوبی کار می‌کند.

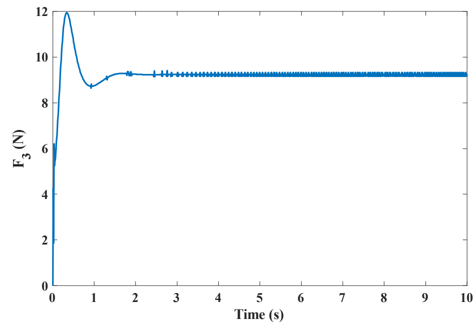
شکل ۱۰ مقادیر نیروهای F_1 تا F_4 که نیروی کنترلی ایجاد شده توسط موتورها برای طی کردن مسیر شکل ۹ هستند را نشان می‌دهد:



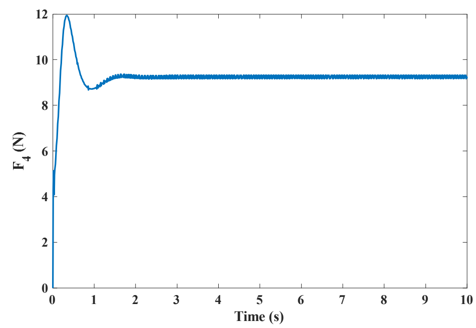
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۱۰- نیروهای ایجاد شده توسط موتورها در مسیر طی شده (۳۴) به ازای $\beta = 0.1$ (الف) نیروی F_1 (ب)) نیروی F_2 (ج) نیروی F_3 (د) نیروی F_4

با توجه به شکل ۱۰ ، پس از زمان حدود ۵ ثانیه، مقادیر نیروهای ایجاد شده توسط موتورها به مقدار ثابتی می‌رسند.

جدول ۱ نتایج خطا و حداکثر تلاش کنترلی برای کنترل‌کننده معمولی ($\beta = 0$) را نشان می‌دهد. برای بررسی عملکرد بهتر سیستم تطبیق جرم، در ادامه فرض شده است مقدار اولیه جرم را نمی‌دانیم و تخمین اولیه جرم مقداری بسیار کوچک و نزدیک صفر در نظر گرفته شده است. با توجه به این جدول اگر کنترل‌کننده معمولی مورد استفاده قرار گیرد کوادروتور حدودا ۲/۸ کیلوگرم ظرفیت حمل بار دارد چون با افزایش این مقدار بار تلاش کنترلی بیش از ۱۰۰ نیوتون شده است. ضمنا خطای ایجاد شده برای این مقدار بار ۰/۰۵۹۲ می‌باشد. از نظر خطا نیز چون این مقدار کمتر از ۰/۱ است قابل قبول می‌باشد.

جدول ۱ مشخصات محدودیت‌های کنترلی برای کنترل‌کننده مرتبه کسری با مرتبه $\beta = 0$

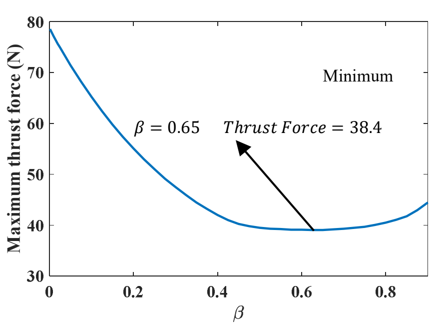
جرم	حداکثر نیروی بالابر	خطا
0	35.7333	0.0207
1	56.9364	0.0329
2	78.5572	0.0458
2.6	91.7285	0.0538
2.8	96.1723	0.0565
3	100.5516	0.0592
3.2	105.0323	0.0619
4	122.9075	0.0729

جدول ۲ نتایج خطا و حداکثر تلاش کنترلی برای کنترل‌کننده کسری ($\beta = 0.1$) را نشان می‌دهد. چنان که این جدول نشان می‌دهد با افزایش جرمی که کوادروتور حمل می‌کند مقدار تلاش کنترلی مورد نیاز افزایش یافته است و خطا نیز افزایش یافته است. با توجه به این جدول کنترل‌کننده مرتبه کسری با مرتبه‌ی مشتق ($\beta = 0.1$) ظرفیت حمل بار ۳/۸ کیلوگرم را دارد که از کنترل‌کننده معمولی یک کیلوگرم بیشتر است. بیشینه خطای ایجاد شده در حالت بار ۳/۸ کیلوگرم برابر ۰/۰۴۷۶ می‌باشد. این مقدار کمتر از بیشینه خطای ایجاد شده در کنترل‌کننده معمولی است با اینکه جرم حمل شده بیشتر است،

جدول ۲ مشخصات محدودیت‌های کنترلی برای کنترل‌کننده مرتبه کسری با مرتبه $\beta = 0.1$

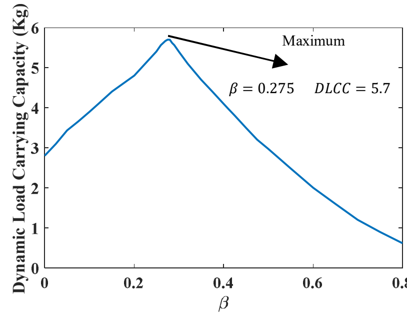
جرم	حداکثر نیروی بالابر	خطا
0	29.8674	0.0112
1	47.3554	0.0190
2	65.2237	0.0283
3	83.3390	0.0387
3.8	98.0115	0.0476
4	101.6593	0.0499
4.2	105.3847	0.0522
5	120.2578	0.0619

به منظور بررسی اثر مرتبه مشتق روی بیشینه نیروی بالابر نمودار ۱۱ رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که چگونه تغییرات مرتبه مشتق روی بیشینه نیروی بالابر تاثیر گذاشته است. این شکل مشخص می‌کند که با افزایش مرتبه مشتق می‌توان تلاش کنترلی را کاهش داد. با توجه به این شکل با افزایش مرتبه‌ی مشتق تا ۰/۴ ماکزیمم نیروی بالابر شدیدا کاهش می‌یابد، پس از آن در بین ۰/۴ تا ۰/۶ به کمترین مقدار خود می‌رسد و تلاش کنترلی تا حدود ۰/۸ تغییر خاصی ندارد ولی پس از آن دوباره شروع به افزایش می‌کند.



شکل ۱۱- حداکثر نیروی بالابر به ازای تغییر مرتبه مشتق بار ۲ کیلوگرم

موضوع دیگری که مطرح است تاثیر مرتبه مشتق روی خطا می‌باشد. برای بررسی این موضوع شکل ۱۲ رسم شده است:



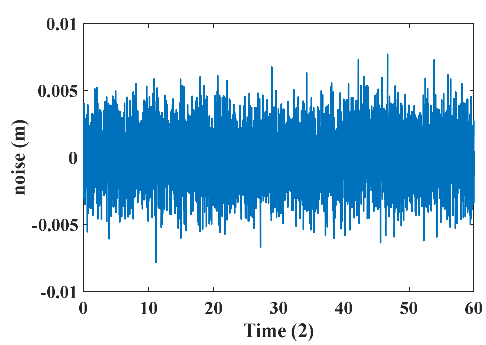
شکل ۱۲- ظرفیت حمل بار به ازای مقادیر مختلف مرتبه مشتق

شکل ۱۲ نشان می‌دهد که انتخاب مناسب مرتبه مشتق کسری تاثیر بسیار مهمی در ظرفیت حمل بار دارد. برای مرتبه مشتق کمتر از ۰/۲۷۵ ظرفیت حمل بار توسط میزان تلاش کنترلی مشخص می‌شود و خطا تعیین کننده‌ی ظرفیت حمل بار نیست. به طوری که بیشترین ظرفیت حمل بار در مرتبه مشتق ۰/۲۷۵ دیده می‌شود. پس از این مقدار ۰/۲۷۵ خطای پاسخ از مقدار ۰/۱ بیشتر شده و خطای پاسخ تعیین کننده‌ی ظرفیت حمل بار می‌باشد. بنابراین، نیاز است که یک تعامل بین خطا و تلاش کنترلی ایجاد شود.

طبق تحلیل پایداری که در بخش سوم مقاله انجام شد پایداری وابسته به تغییرات جرم نیست و نمی‌توان حداکثری برای مرز پایداری تعیین نمود. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع شبیه‌سازی‌هایی با مقدار بهینه‌ی $\beta = 0.275$ و مقادیر جرم‌های مختلف انجام شد و برای مسیر شکل ۹ رسم گردید. مشاهده شد که برای مقادیر مختلف جرم نیز سیستم ناپایدار نگردید.

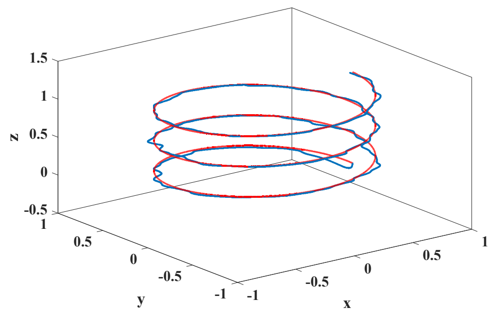
۶- بررسی اثر نویز روی حسگرها

در این بخش اثرات نویز روی حسگرها بررسی می‌شوند. برای این بررسی مقادیر (۳۴) برای کنترل کننده در نظر گرفته می‌شوند و ورودی (۳۵) نیز به سیستم داده می‌شود. برای مرتبه مشتق کسری نیز $\beta=0.275$ که مقدار بهینه در بخش قبل بود انتخاب می‌گردد و فرض می‌شود کوادروتور یک جسم ۲ کیلوگرمی را حمل می‌کند. برای بررسی اثرات نویز، روی تمام حسگرها یک نویز سفید به صورت یکسان اعمال می‌شود. به عنوان مثال، نویز روی حسگر اندازه‌گیری ارتفاع به صورت شکل ۱۳ انتخاب شده است:



شکل ۱۳- نویز روی حسگر اندازه‌گیری ارتفاع

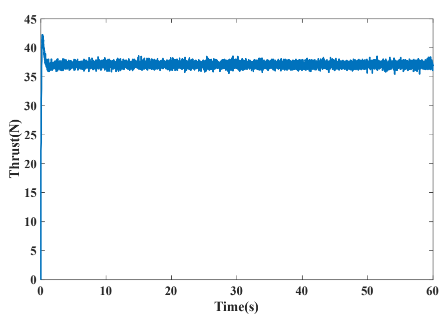
شکل ۱۴ مسیر طی شده کوادروتور در حالت وجود نویز را نشان می‌دهد:



شکل ۱۴- مسیر طی شده کوادروتور در حالت وجود نویز

با توجه به شکل ۱۴، سیستم با وجود نویز توانسته است مسیر مورد نظر را دنبال کند هر چند خطا در بعضی نقاط افزایش داشته است که به دلیل تاثیر نویز در حسگرها است.

شکل ۱۵ نیروی بالابر در حالت وجود نویز را نشان می‌دهد:



شکل ۱۵- نیروی بالابر در حالت وجود نویز

شکل ۱۵ به خوبی اثرات نویز در نیروی بالابر را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهای این بخش مشخص است که نویز در پاسخ سیستم تاثیرگذار بوده است. به علاوه، با توجه به نتایج ارائه شده معلوم می‌شود که کنترل‌کننده در مقابل اثرات نویز نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد.

۷- بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش کنترل مسیر و زوایا در یک کوادروتور با در نظر گرفتن تغییرات جرم در حین انجام ماموریت انجام شده است. برای طراحی کنترل‌کننده روش مرسوم کنترل مود لغزشی با استفاده از ریاضیات مرتبه کسری بهبود داده شده و برای کنترل کوادروتور به کار رفته است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد:

مرتبه مشتق می‌تواند تاثیر زیادی در عملکرد کنترل‌کننده ایفا کند.

کنترل‌کننده تطبیقی مرتبه کسری طراحی شده عملکرد مناسبی را در ماموریت‌های مختلف و تغییرات ناگهانی جرم و ... نشان می‌دهد.

با استفاده از طراحی کنترل‌کننده مرتبه کسری می‌توان انعطاف‌پذیری بیشتری در طراحی کنترل‌کننده ایجاد نمود.

با تغییر مرتبه مشتق کسری در کنترل‌کننده می‌توان تلاش

کنترلی لازم برای انجام یک ماموریت در کوادروتور را کاهش داد که این کار می‌تواند افزایش ظرفیت عملکرد کوادروتور بیانجامد. هر چند که خطای پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

با افزایش مرتبه‌ی مشتق تا ۰/۴ بیشینه نیروی بالابر شدیدا کاهش می‌یابد، پس از آن در بین ۰/۴ تا ۰/۶ به کمترین مقدار خود می‌رسد و تلاش کنترلی تا حدود ۰/۸ تغییر خاصی ندارد ولی پس از آن دوباره شروع به افزایش می‌کند.

با طراحی کنترل‌کننده مرتبه کسری می‌توان ظرفیت حمل بار در کوادروتور را نسبت به کنترل‌کننده معمولی افزایش داد.

بیشترین ظرفیت حمل بار در مرتبه مشتق ۰/۲۷۵ دیده می‌شود. پس از این مقدار ۰/۲۷۵ خطای پاسخ تعیین کننده‌ی ظرفیت حمل بار می‌باشد. بنابراین، نیاز است که یک تعامل بین خطا و تلاش کنترلی ایجاد شود. با توجه به شکل ۱۲ بهترین مقدار مرتبه کسری ۰/۲۷۵ می‌باشد.

۸- مراجع

[1] Alaviyan Shahri ES, Alfi A, Tenreiro Machado J. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems under control input saturation. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2018;28:2887-905.

[2] Ardjal A, Mansouri R, Bettayeb M. Fractional sliding mode control of wind turbine for maximum power point tracking. Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2019;41:447-57.

[3] Aghababa MP. No-chatter variable structure control for fractional nonlinear complex systems. Nonlinear Dynamics. 2013;73:2329-42.

[۴] حمزه نژاد ف، فیاضی ع، قیومی زاده ح، فاتحی مرج ح، حسین نیا ح، کنترل موقعیت دقیق نوکِ ربات تک رابط انعطاف پذیر با استفاده از کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۰، ج. ۵۱، ش. ۲، ص. ۵۱-۵۹.

[5] Barbosa RS, Tenreiro Machado J, Galhano AM. Performance of fractional PID algorithms controlling nonlinear systems with saturation and backlash phenomena. Journal of Vibration and Control. 2007;13:1407-18.

[6] Ladaci S, Charef A. On fractional adaptive control. Nonlinear Dynamics. 2006;43:365-78.

[7] Shi B, Yuan J, Dong C. On fractional model reference adaptive control. The Scientific World Journal. 2014;2014.

[8] Chen Y, Wei Y, Liang S, Wang Y. Indirect model reference adaptive control for a class of fractional order systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016;39:458-71.

19] Li C, Su K, Wu L. Adaptive sliding mode control for synchronization of a fractional-order chaotic system. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2013;8.

[10] de Oliveira Valério DPM .Fractional robust system control. Universidade Técnica de Lisboa. 2005.

[11] Lan Y-H, Zhou Y. LMI-based robust control of fractional-order uncertain linear systems. Computers & Mathematics with Applications. 2011;62:1460-71.

[12] Vahdanipour M, Khodabandeh M. Adaptive fractional order sliding mode control for a quadrotor with a varying load. Aerospace Science and Technology. 2019;86:737-47.

[13] Efe MÖ. Integral sliding mode control of a quadrotor with fractional order reaching dynamics. Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2011;33:985-1003.

[14] Ajmal M, Labeeb M, Dev DV. Fractional order PID controller for depth control of autonomous underwater vehicle using frequency response shaping approach. 2014 Annual International Conference on Emerging Research Areas: Magnetics, Machines and Drives (AICERA/iCMMD): IEEE; 2014. p. 1-6.

[15] Radmehr N, Kharrati H, Bayati N. Optimized design of fractional-order PID controllers for autonomous underwater vehicle using genetic algorithm. 2015 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO): IEEE; 2015. p. 729-33.

[16] Silva MF, Machado JT, Lopes A. Fractional order control of a hexapod robot. Nonlinear Dynamics. 2004;38:417-33.

[17] Efe MÖ. Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics). 2008;38:1561-70.

[۱۸] بلوچیان س، داودی مقدم س، طراحی کنترل‌کننده بهینه فعال با سطح لغزشی انتگرال مرتبه کسری برای سیستم تعلیق خودرو. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۳۹۹، د. ۵۰، ش. ۹۰، ص. ۴۷-۵۴.

[19] Kerboua M, Megnounif A, Benguediab M, Benrahou K, Kaoulala F. Vibration control beam using piezoelectric-based smart materials. Composite Structures. 2015;123:430-42.

[20] Qiu Z-c, Zhang X-m, Wu H-x, Zhang H-h. Optimal placement and active vibration control for piezoelectric smart flexible cantilever plate. Journal of Sound and Vibration. 2007;301:521-43.

[21] Xie C, Wu Y, Liu Z. Modeling and active vibration control of lattice grid beam with piezoelectric fiber composite using fractional order PDμ algorithm. Composite Structures. 2018;198:126-34.

[۲۲] جدید میلانی پ، حامد م، بررسی عملکرد کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه اول و دوم در کنترل مسیر کوادروتور همراه با عدم قطعیت. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۰، د. ۵۱، ش. ۹۶، ص. ۲۵-۳۴.

[23] Duarte-Mermoud MA, Aguila-Camacho N, Gallegos JA, Castro-Linares R. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015;22:650-9.

[24] Li C, Chen A. Numerical methods for fractional partial differential equations. International Journal of Computer Mathematics. 2018;95:1048-99.