

تعقیب مسیر بهینه توسط ربات متحرک صنعتی به روش مساله مقدار مرزی و کنترل غیرخطی

محمد منتشری

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران،
mohammad_montasheri@yahoo.com

پویا ملاحی کلاهی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه مالک اشتر، اصفهان، ایران،
pouya.mallahi@gmail.com

مجید بختیاری*

استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران،
bakhtiari_m@iust.ac.ir

کامران دانشجو

استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران،
kjoo@iust.ac.ir

چکیده

در این مطالعه، با بهره‌گیری از نظریه کنترل بهینه حلقه‌باز و کنترل‌کننده غیرخطی حلقه‌بسته، تعقیب مسیر بهینه توسط ربات متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا معادلات حرکت ربات تدوین و به عنوان قید در مسئله کنترل بهینه در نظر گرفته می‌شود. برای کاهش گشتاور مورد نیاز برای حرکت ربات، تابع هزینه‌ای توسعه داده شده و سپس برای حل مسئله کنترل بهینه، اصل کمینه‌ی پونتریگین مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش، با در نظر گرفتن مسئله یافتن مسیر بهینه به عنوان یک مسئله مقدار مرزی، حالت‌های بهینه در هر لحظه محاسبه و سرعت‌های خطی و زاویه‌ای حاصل به عنوان ورودی برای ربات متحرک در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به خطای حاصل در ردیابی مسیر بهینه توسط ربات، استفاده از نظریه کنترل غیرخطی برای کنترل سرعت‌های خطی و زاویه‌ای در هر لحظه از زمان براساس خطای بین موقعیت و جهت، و وضعیت بهینه آن، ضروری است، که با اعمال این کنترل‌کننده، سرعت‌های مذکور، کنترل شده و مسیریابی با خطای کمتر صورت می‌گیرد. نهایتاً مسیرهای بهینه‌ی پیموده‌شده توسط ربات برای دو حالت حلقه‌باز و حلقه‌بسته باهم مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: ربات متحرک صنعتی، کنترل بهینه، کنترل غیرخطی، مسیر بهینه، مساله مقدار مرزی، اصل کمینه‌ی پونتریگین.

Optimal Path Tracking by Industrial Mobile Robot using Boundary Value Problem and Nonlinear Control Method

M. Montasheri

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

P. Mallahi Kolahi

School of Mechanical Engineering, Malik Ashtar University, Isfahan, Iran

M. Bakhtiari

School of Advanced Technologies, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

K. Daneshjoo

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Abstract

In this study, the optimal path tracking of a mobile robot is accomplished using open-loop optimal control theory and closed-loop nonlinear control. Initially, the dynamic equations of robot are derived and utilized as constraints in the context of optimal control problems. To minimize the required torque for robot movement, cost functions are formulated, and the Pontryagin's minimum principle is employed to solve the optimal control problems. In this research, by considering the problem of finding the optimal path as a boundary value problem, optimal states are computed, and the resulting linear and angular velocities are taken as inputs for the mobile robot. Considering the errors encountered in the optimal path tracking by the robot, the utilization of nonlinear control theory for regulating the linear and angular velocities at each moment, based on the error between position and orientation, as well as their optimal states, becomes crucial. By applying this controller, the mentioned velocities are managed, resulting in improved navigation with reduced error. Ultimately, the optimal paths traversed by the robot are compared for both open-loop and closed-loop configurations.

Keywords: Industrial mobile robot, Optimal control, Non-linear control, Boundary value problem, Pontryagin's minimum principle.

کرده که نتیجه‌ی این انعطاف‌پذیری جدید در فرآیندهای تولید، محصولات نهایی مقرون‌به‌صرفه‌تر خواهد بود [۱،۲]. با این حال، در راستای استفاده از ورودی‌های محاسبه‌شده از روش‌های کنترل بهینه، مانند سرعت‌ها و گشتاورها، چالش‌هایی مانند عدم قطعیت‌ها، محدودیت‌ها و اغتشاشات ذاتی در طراحی و پیاده‌سازی سیستم کنترل، می‌توانند توانایی ربات‌ها را برای اجرای دقیق وظایف موردنظر کاهش دهد. بنابراین، لازم است از روش‌های کنترلی دقیق برای بهبود عملکرد آن‌ها و اطمینان از دقت بهتر در اجرای کار استفاده شود. با پرداختن به این چالش‌ها و استفاده از سازوکارهای کنترلی، صنایع

۱- مقدمه

ربات‌های صنعتی متحرک با ارائه توانایی‌های قابل برنامه‌ریزی که آنها را قادر می‌سازد تا وظایف مختلفی را انجام دهند، صنعت را متحول کرده‌اند. این ربات‌ها که به طور سنتی محدود به موقعیت‌های ثابت بوده‌اند، اکنون با توانایی حرکت در یک محیط، امکان انجام وظایف متعدد در مکان‌های مختلف را دارند. این تحرک، فرصت‌های جدیدی را برای استفاده در فرآیندهای تولید، باز می‌کند. پیشرفت در سیستم‌های کنترل و رباتیک و بهینه‌سازی فناوری کنونی، این ربات‌ها را قادر به انجام وظایف سیار با قابلیت صرفه‌جویی در زمان و هزینه

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: bakhtiari_m@iust.ac.ir

تاریخ دریافت: ۲۰۲۴/۰۵/۱۸

تاریخ پذیرش: ۲۰۲۴/۰۹/۱۳

مختلف امکان استفاده از تمام قابلیت‌های ربات‌های صنعتی متحرک، بهینه‌سازی کارایی آن‌ها و دقت بالاتر در کاربردهای عملی را پیدا می‌کنند.

در دهه‌های گذشته، مطالعات متعددی به بررسی کنترل ربات‌های متحرک پرداخته‌اند. کورایم و همکاران [۳] در تحقیق خود به موضوع مدل‌سازی دینامیک و طراحی مسیر بهینه برای ربات‌های متحرک غیرهولونومیک در محیط‌های پیچیده پرداختند. در ادامه، ناظمی زاده و همکاران [۴] استراتژی کنترل بهینه‌ای را مطرح کردند که در طراحی مسیر، از رویکرد راه‌حل غیرمستقیم استفاده می‌کند و از پارامتر زمان در مسئله بهینه‌سازی صرف نظر می‌شود. علاوه بر آن وو و همکاران [۵] اقدام به ارائه قانون کنترلی زمان محدود و استراتژی کنترل تطبیقی قوی برای ربات‌های متحرک غیرهولونومیک نمودند. از سوی دیگر، کوی و همکاران [۶] با پیشنهاد تکنیک‌های ردیابی تطبیقی و اجتناب از موانع، به بهبود عملکرد ربات‌ها پرداختند و از پارامترهای لغزشی ناشناخته استفاده کردند. داس سانتوس [۷] نیز از یک روش بهینه‌سازی مستقیم در طراحی مسیر در فضاهای کاری محدود استفاده کرد. در ادامه، راموس [۸] بهینه‌سازی زمان و انرژی را در یافتن مسیر بر اساس سینماتیک ربات‌های متحرک مورد بررسی قرار داد. از سوی دیگر، تونسر و ییلدیریم [۹] الگوریتم‌های ژنتیک را با ارائه اپراتور جهش جدید، در جهت‌یابی ربات‌های متحرک در محیط‌های پویا بهبود دادند. قابل توجه است، مطالعات بالا در درجه اول بر طراحی مسیر حرکت متمرکز شده و از بهینه‌سازی زمان سفر صرف نظر کرده‌اند. پریر و همکاران [۱۰] در تحقیق خود به طراحی مسیریها برای ربات‌های متحرک غیرهولونومیک پرداختند. آنها در روش ارائه شده خود، تنها از مدل‌سازی سینماتیک ربات استفاده کردند با این حال، در طراحی مسیر یک ربات متحرک، محدودیت‌های گشتاور محرک‌ها باید در نظر گرفته شود در غیر این صورت، خطاهای طراحی مسیر افزایش می‌یابد. از این رو، برای افزایش کارایی و اثربخشی ربات‌های متحرک، طراحی مسیرهای بهینه آن‌ها با در نظر گرفتن دینامیک مسئله بسیار مهم است. مقالات مختلف، طراحی مسیر بهینه را با استفاده از توابع هزینه‌های مختلف، مانند حداقل انرژی، بررسی کرده‌اند [۱۱]. کورایم و همکاران [۱۲] در پژوهش خود از یک روش برنامه‌ریزی خطی تکراری برای طراحی مسیر استفاده کردند. این رویکرد، با اینکه مزایایی داشت، دارای محدودیت‌هایی مانند مسائل خطی‌سازی معادلات و همگرایی بود. در ادامه، کورایم و ناظمی‌زاده [۱۳] در تحقیق خود به طراحی مسیر در محیط‌هایی با موانع، با بهره‌گیری از کارکردهای بالقوه جهت اجتناب از موانع، پرداختند. همچنین، در مطالعات متفاوتی، کورایم و همکاران [۱۴، ۱۵] از روش‌های کنترل بهینه در طراحی مسیر برای ربات‌های متحرک انعطاف‌پذیر بدون در نظر گرفتن محدودیت‌های غیرهولونومیکی استفاده کردند. علاوه بر این، ملاحی و مصیبی [۱] تئوری کنترل بهینه را با تمرکز بر یک مدل حلقه باز معرفی نمودند که به طور همزمان، زمان سفر و گشتاور چرخ، به حداقل رسانده می‌شود. همچنین این محققین نشان دادند که امکان پیاده‌سازی این روش به صورت برخط و لحظه‌ای و با دقت بالا وجود دارد. در ادامه، ملاحی و ناظمی‌زاده [۱۶] یک مدل ریاضی غیرخطی را برای ربات‌های متحرک چرخدار تراکتور-تریپلر (TTWR) ارائه کردند. آن‌ها

با استفاده از تئوری کنترل بهینه و اصل حداقلی پونتریگین به طراحی مسیر بهینه به صورت نقطه به نقطه پرداختند.

این تحقیقات پیشگام بر روی چالش‌های موجود در تعیین مسیر بهینه برای ربات‌های صنعتی متحرک تمرکز کرده بودند با این حال یکی از موانع مهم در این کار وجود عدم قطعیت‌ها، محدودیت‌ها و اغتشاشات ذاتی است که در طول طراحی و اجرای سیستم کنترل ایجاد می‌شود. این عوامل همان‌طور که گفته شد می‌توانند بر توانایی ربات برای اجرای دقیق وظایف محول شده تأثیر منفی بگذارند. عدم قطعیت‌ها می‌تواند از منابع مختلف، از جمله عوامل محیطی مانند لغزش ربات در اثر اعمال گشتاورهای بالا، تغییرات در دینامیک ربات، یا عدم دقت در اندازه‌گیری‌های مورد استفاده توسط سیستم کنترل ناشی شود. برای غلبه بر این چالش‌ها، مکانیسم‌های کنترل دقیقی باید اجرا شود. هدف این مکانیسم‌ها افزایش عملکرد ربات‌های صنعتی متحرک و اطمینان از دقت بهتر در اجرای کار است. بنابراین، بر اساس مطالب ذکر شده، ارائه‌ی پیشنهادی پژوهش از کنترل حرکت در رباتیک ضروری است.

سیستم ربات یک سیستم غیرخطی است. ارائه‌ی یک روش کنترلی پایدار برای این نوع از سیستم به دلیل تحلیل دشوار و پیچیدگی بالا، همواره یکی از چالش‌های اساسی علم کنترل بوده است. چالش دیگر در کنترل سیستم ربات چرخدار زمینی، در تعداد ورودی‌های کنترلی شامل سرعت خطی و زاویه‌ای (دو درجه آزادی) است در حالی که موقعیت ربات دارای سه درجه آزادی در محورهای افقی و عمودی و چرخش است [۱۷]. روش‌های بسیاری برای کنترل این نوع از ربات‌ها مطرح و پیاده‌سازی شده که یکی از آنها به دلیل عملکرد خوب در عین سادگی، سالها مورد استفاده قرار گرفته‌است. با استفاده از روش لیاپانوف برای طراحی کنترل‌کننده با ایجاد شرط پایداری می‌توان چالش‌های گفته‌شده را حل کرد. این روش برای اولین بار در پژوهش کانایاما و همکاران [۱۸] معرفی و از خطی‌سازی سیستم برای تعیین پارامترهای کنترلی مختلف مثل درصد فراجش و زمان نشست استفاده شد. به دلیل دقت بالای این روش در انجام عملیات کنترل، نیاز به اندازه‌گیری‌های دقیق موقعیت و سرعت ربات و اطلاعات کامل مسیر وجود دارد. لازم به ذکر است که این روش قابلیت پیاده‌سازی به روی تمامی ربات‌های غیرهولونومیکی را دارد [۱۹، ۲۰]. در ادامه داس و کار [۲۱] در راستای تطبیقی کردن روش گفته شده، از یک سیستم فازی استفاده می‌کند. در این روش ورودی کنترلی شامل تخمینی از دینامیک سیستم است که توسط یک سیستم فازی محاسبه می‌شود. در این روش تنظیم پارامترها به صورت خودکار انجام می‌شود اما همزمان بار محاسباتی بالایی به سیستم تحمیل خواهد شد. به همین دلیل در مواردی که دینامیک ربات تغییرات زیاد و ناگهانی ندارد استفاده از این روش مناسب نیست. در پژوهش انجام‌شده از معادلات ساختاری ربات برای محاسبه سیگنال کنترلی استفاده شده است. این روش مهمترین بخش کنترل مدنظر یعنی پایداری را به خوبی تامین کرده و در جهت رفع و دفع خطا و اغتشاش به خوبی عمل می‌کند

با توجه به پیشینه‌ی تحقیقات ارائه شده، هرچند در زمینه‌ی کنترل ربات‌های متحرک، تئوری‌های کنترل بهینه و کنترل غیرخطی زیادی پیشنهاد شده، اما تاکنون استفاده از کنترل‌کننده هیبریدی در

ضرایب ورودی و τ بردار گشتاور، A^T بردار ضرایب لاگرانژ می‌باشد به طوری که داریم:

$$M = \begin{bmatrix} m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \cos\varphi \\ \sin\varphi & \sin\varphi \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A = [-\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad 0] \quad (8)$$

علاوه بر دینامیک مسئله لازم است تا سینماتیک مسئله نیز با سه رابطه‌ی زیر تعیین گردد:

$$\dot{x} = v \cos\varphi \quad (9)$$

$$\dot{y} = v \sin\varphi \quad (10)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (11)$$

حال با در نظر گرفتن دینامیک و سینماتیک مسئله، معادلات غیرخطی حرکت ربات به فرم آفاین^۱ $\ddot{q} = f(q) + g \times u$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

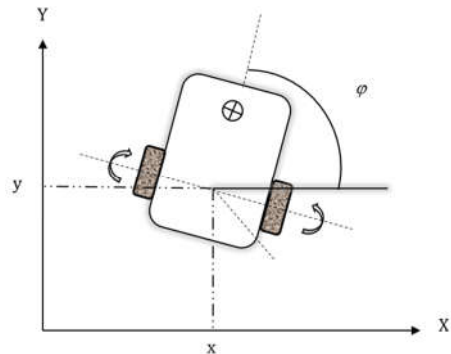
$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\varphi \\ v \sin\varphi \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_c r} & \frac{1}{m_c r} \\ \frac{L}{2Ir} & -\frac{L}{2Ir} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در رابطه‌ی بالا سه سطر اول از سینماتیک مسئله (روابط ۹-۱۱)، سطر چهارم از دو رابطه‌ی (۱ و ۲) و نهایتاً سطر پنجم از رابطه‌ی (۳) به دست آمده است.

مطالعات مرتبط با ربات‌های متحرک صورت نگرفته‌است. نتایج عددی مطالعات مربوط به یافتن مسیر بهینه، وقتی بر روی ربات واقعی اعمال می‌شود، به دلیل وجود خطا، مسیر دلخواه با خطای قابل توجهی طی می‌شود که در صنعت به هیچ عنوان قابل قبول نیست. از این رو در این مطالعه برای اولین بار با به کارگیری نظریه کنترل بهینه جهت طراحی مسیر بهینه (با در نظر گرفتن حداقل گشتاور چرخ) و نیز کنترل کننده‌ی غیرخطی برای کاهش خطاهای پیموده شده در یک ربات واقعی، سعی شده تا یک راه‌حل عملی برای استفاده از ربات‌های متحرک صنعتی ارائه شود. لازم به ذکر است که در این مقاله، روش‌های کنترل بهینه و کنترل خطا به ترتیب بر اساس رویکردهای کنترل حلقه باز و حلقه بسته مورد استفاده قرار می‌گیرند و علاوه بر این، معادله‌ی دینامیکی عمدتاً نقش قیود را در مسئله کنترل بهینه ایفا می‌کند.

۲- معادلات دینامیک غیرخطی ربات متحرک

در این بخش به استخراج معادلات دینامیکی ربات متحرک با در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک پرداخته می‌شود. در شکل ۱ طرحواره‌ای از ربات مورد بررسی با دو محرک مجزا در چرخ‌ها نشان داده شده است.



شکل ۱- طرحواره ربات متحرک مورد بررسی

با استفاده از اصل نیوتن-اولر به استخراج معادلات دینامیک پرداخته می‌شود که برابر است با [۲۲]:

$$m_c \ddot{x} - (\tau_r + \tau_l) \cos\varphi - \lambda \sin\varphi = 0 \quad (1)$$

$$m_c \ddot{y} - (\tau_r + \tau_l) \sin\varphi + \lambda \cos\varphi = 0 \quad (2)$$

$$I \ddot{\varphi} - (\tau_r + \tau_l) \frac{L}{2} = 0 \quad (3)$$

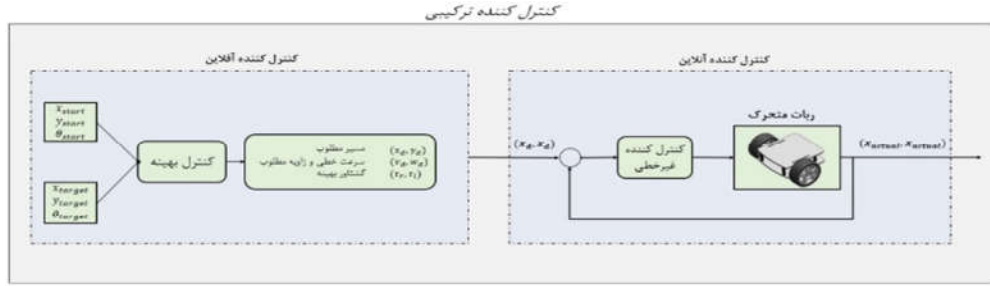
که در آن m_c و I به ترتیب جرم و ممان اینرسی ربات را نشان می‌دهند. λ ، φ و مختصات تعمیم یافته ربات هستند. L و r به ترتیب فاصله بین چرخ‌ها و شعاع هر چرخ را نشان می‌دهد. گشتاور چرخ‌های چپ و راست با τ_l و τ_r مشخص شده‌اند. در نهایت، ضریب لاگرانژ سیستم مقید با λ نشان داده شده است.

فرم کلی معادلات دینامیکی سیستم به فرم نهایی زیر بیان می‌گردد:

$$M(\ddot{q})\ddot{q} + \bar{G}(\ddot{q}, \dot{q}) = B\bar{\tau} + A^T\bar{\lambda} \quad (4)$$

که در آن M ماتریس جرم، q بردار مختصات تعمیم یافته $\bar{q} = [x \ y \ \varphi]^T$ اثر نیروهای غیرخطی و گرانش، B ماتریس

¹ Affine



شکل ۲- بلوک دیاگرام کنترل کننده ترکیبی پیشنهادی

۳- نظریه کنترل کننده ترکیبی برای ربات متحرک چرخدار

در بخش اول، کنترل بهینه به صورت آفلاین به طراحی مسیر بهینه با در نظر گرفتن دینامیک مسئله به عنوان قید می‌پردازد. پس از محاسبه مسیر بهینه، با استفاده از یک کنترل کننده غیرخطی به ردهایی مسیر بهینه پرداخته می‌شود.

۳-۱- نظریه کنترل بهینه به منظور طراحی مسیر بهینه

در این بخش به تشکیل مسئله کنترل بهینه غیرخطی به منظور طراحی مسیر نقطه به نقطه ربات متحرک پرداخته می‌شود. چنانچه معادلات دینامیک (۱۲) به شکل کلی زیر در نظر گرفته شود:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SX_2 \\ N(X_1, X_2) + Z(X_1) U \end{bmatrix} \quad (12)$$

که $X = [X_1 \ X_2]^T$ بردار حالت سیستم و U کنترل ورودی آن است. در این صورت این معادلات به عنوان قیود مسئله کنترل بهینه در نظر گرفته شده و هدف تعیین مقادیر ورودی بهینه مجاز $U^*(t) \in \Omega$ است به طوری که تابع هدف زیر را کمینه کند:

$$J_0(X, U) = \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t, disturbance) dt \quad (13)$$

که t_0 و t_f زمان شروع و پایان حرکت ربات متحرک در حرکت از نقطه‌ی مبدا به نقطه‌ی مقصد است. از طرفی به منظور حرکت نقطه به نقطه ربات متحرک، تابع هزینه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_0(X, U) = \int_{t_0}^{t_f} (\|X\|_W^2 + \|U\|_R^2) dt \quad (14)$$

در رابطه (۱۵) جمله $\|X\|_W^2$ نرم مربعی تعمیم یافته بردار فضای حالت و همچنین جمله $\|U\|_R^2$ نرم مربعی تعمیم یافته بردار گشتاور ورودی می‌باشد. بدین منظور ابتدا تابع همیلتونی به شکل زیر تشکیل می‌شود:

$$H(X(t), U(t), P(t), t) = L(X(t), U(t), t) + P^T(t) G(X(t), U(t), t) \quad (15)$$

که $P(t)$ بردار شبه حالت است. با استفاده از تابع همیلتونی و محاسبات ریاضی شرایط بهینه‌ی سیستم برابر است با:

$$\dot{X}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial P} = \begin{bmatrix} v^* \cos \varphi^* \\ v^* \sin \varphi^* \\ \omega^* \\ \frac{1}{m_c r} (\tau_r^* + \tau_l^*) \\ \frac{L}{2lr} (\tau_r^* - \tau_l^*) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$P^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1^* v^* \sin \varphi^* - p_2^* v^* \cos \varphi^* \\ -p_1^* v^* \cos \varphi^* - p_2^* v^* \sin \varphi^* \\ -p_3^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \begin{bmatrix} 2\tau_r^* + \frac{p_4^*}{m_c r} + \frac{p_5^* L}{2lr} \\ 2\tau_l^* + \frac{p_4^*}{m_c r} - \frac{p_5^* L}{2lr} \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

حال با در نظر گرفتن معادلات (۱۷) و (۱۸) و نیز فرض:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}) \quad (20)$$

نهایتاً معادله‌ی سیستم به فرم زیر حاصل خواهد شد:

$$\dot{m}^* = \begin{bmatrix} m_4^* \cos(m_3^*) \\ m_4^* \sin(m_3^*) \\ m_5^* \\ \frac{1}{m_c r} (\tau_r^* + \tau_l^*) \\ \frac{L}{2lr} (\tau_r^* - \tau_l^*) \\ 0 \\ 0 \\ -m_6^* m_4^* \cos(m_3^*) + m_7^* m_4^* \cos(m_3^*) \\ m_6^* \cos(m_3^*) + m_7^* \cos(m_3^*) \\ m_8^* \end{bmatrix} \quad (21)$$

با توجه به معادلات دینامیک سیستم مورد بررسی و روش کنترلی ارائه شده، مجموعه معادلات نهایی در رابطه‌ی (۲۱) به صورت یک مسئله مقدار مرزی قرار گرفته و می‌تواند با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و تابع bvp4c حل شود. شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای این دسته از معادلات شامل موقعیت و جهت‌گیری ربات و همچنین بردار های شبه حالت است. از این رو با در نظر گرفتن موقعیت مطلوب می‌توان به طراحی مسیر بهینه پرداخت.

۳-۲- تئوری کنترل کننده غیرخطی

با تعریف بردار موقعیت ربات به صورت $\bar{q} = [x_e \ y_e \ \varphi_e]^T$ و بردار موقعیت مرجع به صورت $\bar{q}_r = [x_r \ y_r \ \varphi_r]^T$ ، در هر لحظه، خطای ردهایی مسیر را می‌توان به شکل زیر نوشت [۱۸]:

$$q_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x_c \\ y_r - y_c \\ [\varphi_r - \varphi_c] \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\dot{V} = \left[-(\omega_r + v_r(K_y y_e + K_\phi \sin \phi_e)) y_e - K_x x_e \right] x_e + \dots$$

$$\left[-(\omega_r + v_r(K_y y_e + K_\phi \sin \phi_e)) x_e + v_r \sin \phi_e \right] y_e + \dots$$

$$\left[-v_r(K_y y_e + K_\phi \sin \phi_e) \right] \sin \phi_e / K_y \quad (28)$$

شرایط لازم برای پایداری و بدست آوردن قانون کنترلی این است که مشتق کاندید لیاپانوف بدست آمده در (۲۸) منفی نیمه معین $\dot{V} \leq 0$ باشد که نهایتاً قانون کنترلی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۸]:

$$v_d = v_r \cos \phi_e + K_x x_e \quad (29)$$

$$\omega_d = \omega_r + v_r(K_y y_e + K_\phi \sin \phi_e) \quad (30)$$

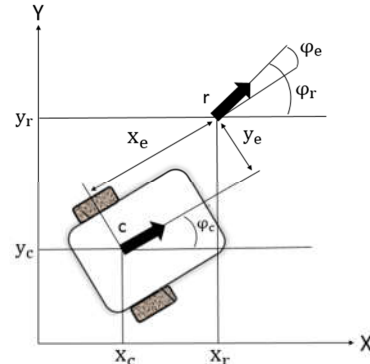
که در رابطه بالا K_x ، K_y و K_ϕ ثابت‌های مثبت می‌باشد.

۴- ربات لاک پشتی ۳

قبل از ارائه نتایج، لازم است ابتدا توضیحاتی در مورد مؤلفه‌ها و قابلیت‌های ضروری ربات لاک پشتی ۳ داده شود. ربات لاک پشتی ۳ یک پلتفرم رباتیک چند منظوره است که به خاطر طیف گسترده ای از وظایفی که میتواند انجام دهد برای اهداف مختلف تحقیق و توسعه، پلتفرم بسیار مناسبی شناخته می‌شود. این ربات شامل اجزای سخت افزاری مختلفی است که امکان تحرک و عملکرد آن را فراهم می‌کند. عناصر اصلی آن شامل یک سیستم محرک دیفرانسیل است که از دو چرخ برای ارائه پیشرانده و مانور یکپارچه استفاده می‌کند. این طراحی، حرکت پیوسته و قابلیت چرخش سریع را تسهیل می‌کند. علاوه بر این، برد آی ام یو در این پلتفرم با ارائه داده‌های ارزشمند در مورد جهت‌گیری، موقعیت و سرعت‌های زاویه‌ای و خطی ربات، نقش مهمی را در این پلتفرم ایفا می‌کند. این اطلاعات برای تخمین دقیق وضعیت ربات در حین کار بسیار مهم است. از نظر نرم افزاری، ربات لاک پشتی ۳ از یک چارچوب جامع استفاده می‌کند که فرآیندهای توسعه و کنترل را بسیار ساده‌تر می‌کند. سیستم عامل ربات به عنوان ساختار اساسی معماری نرم افزار عمل می‌کند و یک سیستم توزیع شده برای مدیریت عملکردهای ربات ارائه می‌دهد. علاوه بر این، ربات لاک پشتی ۳ مجموعه‌ای مناسب از پکیج‌های ROS را ارائه می‌دهد که به طور خاص برای استفاده از سخت‌افزار و قابلیت‌های آن طراحی شده‌اند. این بسته‌ها شامل اجزای ضروری، مانند محرک‌های یکپارچه‌سازی حسگر، الگوریتم‌های ناوبری و مازول‌های عملیات از راه دور هستند.

ربات لاک پشتی ۳ استفاده شده در این مطالعه از نوع وِیل می‌باشد که تصاویر آن از چهار نمای مختلف در شکل ۴ آورده شده است.

باتوجه به هندسه‌ی شکل (۳)، مشتق هر یک از پارامترهای رابطه‌ی (۲۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:



شکل ۳- مختصات نقاط مرجع (r) و فعلی ربات (c)

$$\dot{x}_e = (\dot{x}_r - \dot{x}_c) \cos \phi_c + (\dot{y}_r - \dot{y}_c) \sin \phi_c$$

$$- (\dot{x}_r - \dot{x}_c) \phi_e \overset{\text{yields}}{\sin \phi_c} + (\dot{y}_r - \dot{y}_c) \phi_e \overset{\text{yields}}{\cos \phi_c}$$

$$\dot{x}_e = y_e \dot{\phi}_c - v_c + \dot{x}_r \cos \phi_c + \dot{y}_r \sin \phi_c$$

$$\dot{x}_e = y_e \dot{\phi}_c - v_c + \dot{x}_r \cos(\phi_r - \phi_e) + \dot{y}_r \sin(\phi_r - \phi_e)$$

$$\dot{x}_e = y_e \dot{\phi}_c - v_c + \dot{x}_r (\cos \phi_r \cos \phi_e + \sin \phi_r \sin \phi_e)$$

$$+ \dot{y}_r (\sin \phi_r \cos \phi_e + \cos \phi_r \sin \phi_e) \overset{\text{yields}}{\cos \phi_e}$$

$$\dot{x}_e = y_e \dot{\phi}_c - v_c + (\dot{x}_r \cos \phi_r + \dot{y}_r \sin \phi_r) \cos \phi_e$$

$$+ (\dot{x}_r \sin \phi_r + \dot{y}_r \cos \phi_r) \sin \phi_e \overset{\text{yields}}{\cos \phi_e}$$

$$\dot{x}_e = y_e \dot{\phi}_c - v_c + v_r \cos \phi_e \quad (23)$$

$$\dot{y}_e = -(\dot{x}_r - \dot{x}_c) \sin \phi_c + (\dot{y}_r - \dot{y}_c) \cos \phi_c$$

$$- (\dot{x}_r - \dot{x}_c) \phi_e \overset{\text{yields}}{\cos \phi_c} - (\dot{y}_r - \dot{y}_c) \phi_e \overset{\text{yields}}{\sin \phi_c}$$

$$\dot{y}_e = -x_e \dot{\phi}_c + \dot{x}_c \sin \phi_c - \dot{y}_c \cos \phi_c + \dot{x}_r \sin \phi_c$$

$$+ \dot{y}_r \cos \phi_c \overset{\text{yields}}{\sin \phi_c}$$

$$\dot{y}_e = -x_e \dot{\phi}_c - \dot{x}_r \cos(\phi_r - \phi_e) + \dot{y}_r \sin(\phi_r - \phi_e)$$

$$- (\dot{x}_r \sin \phi_r + \dot{y}_r \cos \phi_r) \sin \phi_e \overset{\text{yields}}{\sin \phi_e}$$

$$\dot{y}_e = -x_e \dot{\phi}_c - \dot{x}_r (\sin \phi_r \cos \phi_e - \cos \phi_r \sin \phi_e)$$

$$+ \dot{y}_r (\cos \phi_r \cos \phi_e + \sin \phi_r \sin \phi_e) \overset{\text{yields}}{\sin \phi_e}$$

$$\dot{y}_e = -x_e \dot{\phi}_c + (\dot{x}_r \cos \phi_r + \dot{y}_r \sin \phi_r) \sin \phi_e$$

$$+ (-\dot{x}_r \sin \phi_r + \dot{y}_r \cos \phi_r) \cos \phi_e \overset{\text{yields}}{\sin \phi_e}$$

$$\dot{y}_e = -x_e \dot{\phi}_c + v_r \sin \phi_e \quad (24)$$

$$\dot{\phi}_e = \dot{\phi}_r - \dot{\phi}_c \quad (25)$$

باتوجه به روابط (۲۳--۲۵) مشتق معادله‌ی (۲۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

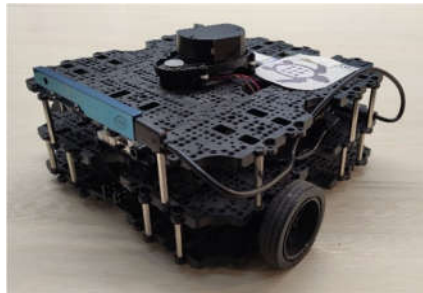
$$\dot{q}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_c + \omega_c y_e + v_r \cos \phi_e \\ -\omega_c x_e + v_r \sin \phi_e \\ -\omega_c + \omega_r \end{bmatrix} \quad (26)$$

برای بدست آوردن قانون کنترلی مورد نیاز برای ردیابی مسیر مرجع به روش کنترلی غیرخطی، کاندید لیاپانوف مثبت معین ($V > 0$) به صورت زیر بیان می‌شود:

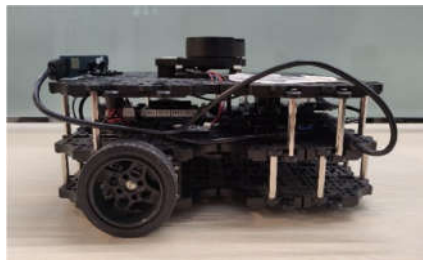
$$V = \frac{1}{2} (x_e^2 + y_e^2) + (1 - \cos \phi_e) / K_y \quad (27)$$

مشتق کاندید لیاپانوف ارائه شده، با جاگذاری رابطه (۲۶) و ساده سازی برابر خواهد بود با [۱۸]:

(الف)



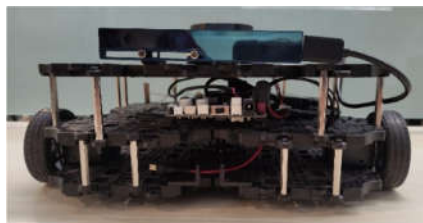
(ب)



(پ)



(ت)



شکل ۴- ربات ترنل بات ۳ از نوع وُفل (الف) نمای ایزومتریک (ب) دید از چپ (پ) دید از بالا (ت) دید از روبه‌رو

۵- نتایج عددی

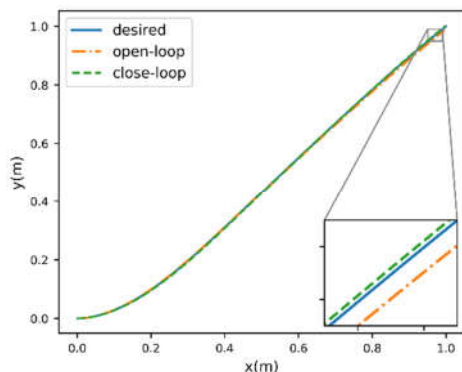
در این مطالعه ابتدا با حل معادله ی (۲۱) به عنوان مسئله‌ی مقدار مرزی، حالت‌های بهینه‌ی دینامیک مورد نظر در هر لحظه محاسبه شده و سرعت‌های خطی و زاویه‌ای به دست آمده به عنوان ورودی به ربات لاک‌پشتی ۳ داده می‌شود. حالت‌های ربات در بُرد IMU در هر لحظه قابل اندازه‌گیری است. به دلیل خطا در پیمایش مسیر دلخواه، با اندازه‌گیری خطای موقعیت و جهت ربات از حالت بهینه‌ی آن،

سرعت‌های خطی و زاویه‌ای کنترل شده مطابق رابطه‌های (۲۹ و ۳۰) به عنوان ورودی و با فرکانس ۳۰ هرتز به ربات داده می‌شود. مشخصات دینامیکی ربات استفاده‌شده در این مطالعه در جدول ۱ آورده شده و نیز شرایط شبیه سازی مطابق جدول ۲ برای دو مسیر مختلف (از نقطه A به B و از نقطه C به D) برای نشان دادن اثربخشی و قابلیت روش پیشنهادی انتخاب شده است.

(الف)

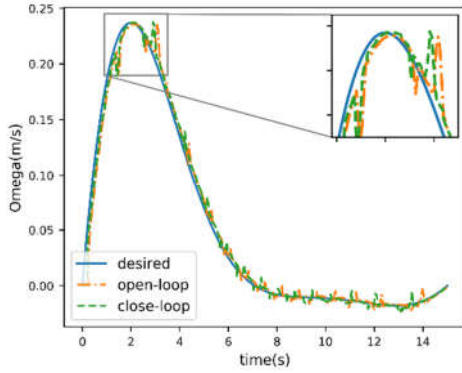


(ب)

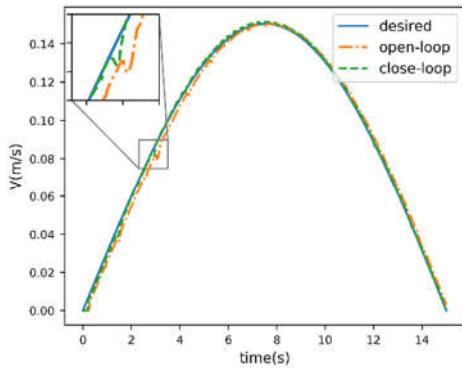


شکل ۵- مسیر حرکت ربات از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B (الف) حرکت کنترل شده‌ی ربات در محیط آزمایشگاه (ب) مسیر حرکت کنترل شده و کنترل نشده‌ی ربات و مسیر دلخواه محاسبه‌شده از معادله‌ی (۲۱).

شکل ۵-الف مربوط به پیمایش مسیر از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B می‌باشد که تصاویر در لحظات مختلف در طول مسیر ثبت شده و همه در یک تصویر ارائه شده‌اند. همان‌طور که از شکل (۵-ب) مشخص است، مسیر طی شده‌ی ربات چه در حالت کنترل شده و چه در حالت کنترل نشده بسیار نزدیک به مسیر دلخواه است اما خطای پیمایش به مرور و با گذر هر چه بیشتر زمان افزایش یافته و نهایتاً ربات متحرک دقیقاً به نقطه‌ی دلخواه نمی‌رسد. با این حال این خطای پیمایش برای وضعیتی که سرعت‌های خطی و زاویه‌ای ربات طبق قانون کنترلی مربوط به معادلات (۲۹ و ۳۰) کنترل می‌شود، به مراتب کمتر شده و مقصد نهایی ربات به مقصد دلخواه بسیار نزدیک‌تر می‌شود. به طور مشابه در نمودارهای مربوط به شکل ۶-الف، ۶-ب، ۶-پ و ۶-ت که حالت‌های ربات را از لحظه‌ی شروع حرکت تا پایان آن نشان می‌دهند،



(ت)



شکل ۶- تغییر حالت‌های ربات در زمان طی شده بین دو نقطه‌ی A و B برای سه وضعیت: حالت‌های به دست آمده از حل معادله‌ی (۲۱)، حالت‌های ثبت شده توسط ربات بدون کنترل‌کننده و حالت‌های ثبت شده توسط ربات با کنترل‌کننده‌ی غیرخطی. (الف) زاویه‌ی ربات، (ب) موقعیت ربات، (پ) سرعت زاویه‌ای ربات و (ت) سرعت خطی ربات در هر لحظه از مسیر حرکت.

شکل ۷- الف مربوط به پیمایش مسیر از نقطه‌ی C تا نقطه‌ی D می‌باشد که مسیری پیچیده‌تر از مسیر A تا B است. مطابق شکل در این مسیر خطای پیمایش در حالتی که از کنترل‌کننده استفاده نشود به هیچ عنوان قابل صرف نظر کردن نمی‌باشد. این در حالی است که خطای پیمایش با کنترل‌کننده بسیار کم بوده و مسیر قابل قبولی توسط ربات طی می‌شود. شکل (۸) نیز نمودار مربوط به حالت‌های ربات است در بازه‌ی زمانی طی شده که عملکرد بهتر ربات در وضعیت کنترل‌شده در مقایسه با وضعیت کنترل‌نشده، مخصوصاً در شکل‌های ۸-الف و ۸-ب مشخص است.

حداکثر خطای پارامترهای اندازه‌گیری شده در پیمایش مسیر از نقطه A به B و نیز از نقطه‌ی C به D به ترتیب در جداول ۳ و ۴ مشخص شده‌اند که طبق این جداول درصد خطای همه‌ی پارامترهای اندازه‌گیری شده برای سیستم حلقه‌بسته کمتر از سیستم حلقه‌باز است که همان هدفی است که از پیاده‌سازی کنترل غیرخطی انتظار می‌رفت.

واضح است که حالت‌های ربات در وضعیت کنترل‌شده به حالت‌های دلخواه نزدیک‌تر می‌باشند.

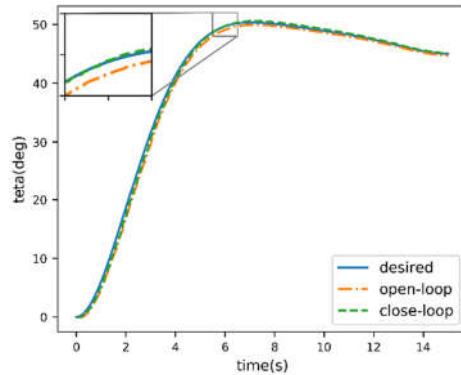
جدول ۱- مشخصات دینامیکی ربات

مشخصات	نماد	مقدار
جرم ربات	m_c	۱/۸ (کیلوگرم)
ممان اینرسی ربات حول مرکز جرم	J	۰/۰۲۳ (کیلوگرم مترمربع)
شعاع چرخ ربات	r	۳/۲۵ (سانتی متر)
فاصله ی بین چرخ‌ها	L	۲۸۷ (میلیمتر)

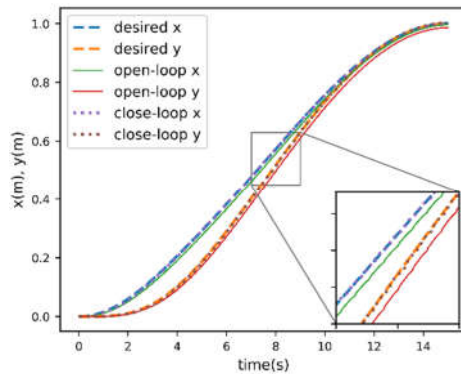
جدول ۲- مقادیر مربوط به حالت‌های ربات در چهار نقطه‌ی A, B, C و D

حالت‌ها	X (متر)	Y (متر)	φ (درجه)	بر (متر بر ثانیه)	رادیان ω (بر ثانیه)
نقطه‌ی A	۰	۰	۰	۰	۰
نقطه‌ی B	۱	۱	۴۵	۰	۰
نقطه‌ی C	۰	۰	۹۰	۰	۰
نقطه‌ی D	۱	۱	۹۰	۰	۰

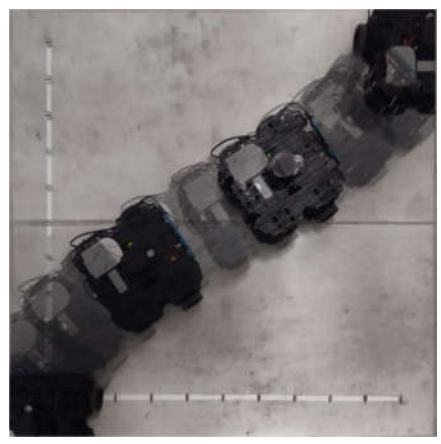
(الف)



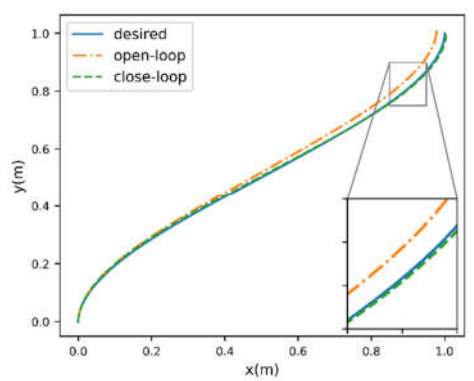
(ب)



(پ)

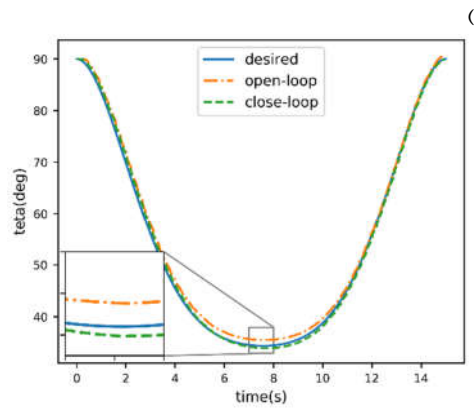


(الف)

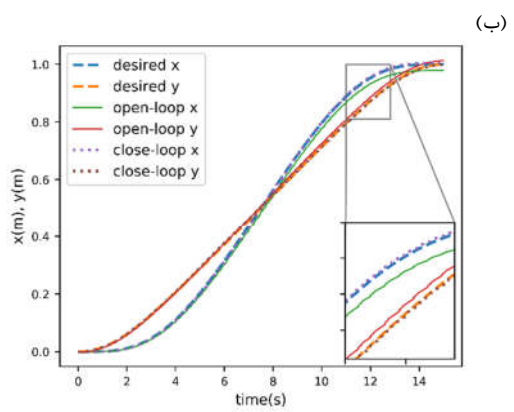


(ب)

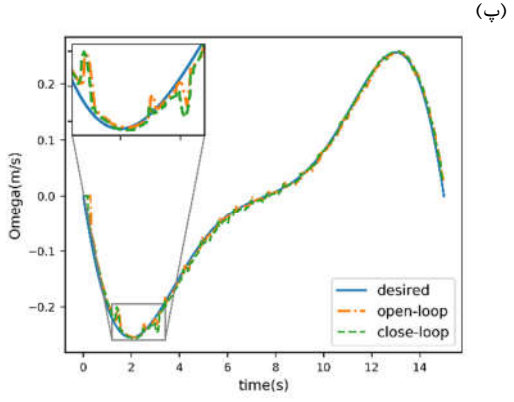
شکل ۷- مسیر حرکت ربات از نقطه‌ی C به نقطه‌ی D (الف) حرکت کنترل شده‌ی ربات در محیط آزمایشگاه (ب) مسیر حرکت کنترل شده و کنترل نشده‌ی ربات و مسیر دلخواه محاسبه شده از معادله‌ی (۲۱).



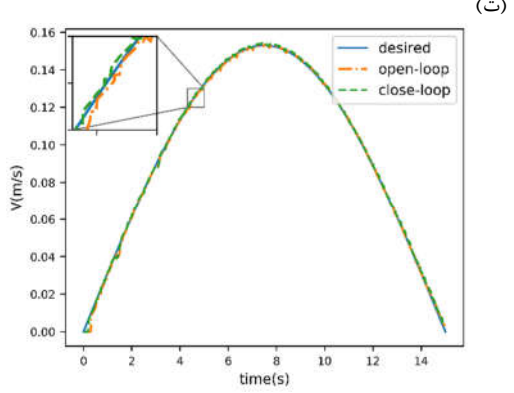
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۸- تغییر حالت‌های ربات در زمان طی شده بین دو نقطه‌ی C و D برای سه وضعیت: حالت‌های به دست آمده از حل معادله‌ی (۲۱)، حالت‌های ثبت شده توسط ربات بدون کنترل کننده و حالت‌های ثبت شده توسط ربات با کنترل کننده‌ی غیرخطی. (الف) زاویه‌ی ربات، (ب) موقعیت ربات، (پ) سرعت زاویه‌ای ربات و (ت) سرعت خطی ربات در هر لحظه از مسیر حرکت.

- [5] Wu Y, Wang B, Zong GD. Finite-Time Tracking Controller Design for Nonholonomic Systems with Extended Chained Form. *IEEE Trans Circuits Syst II Express Briefs*. 2005;52(11):798-802.
- [6] Cui M, Sun D, Liu W, Zhao M, Liao X. Adaptive tracking and obstacle avoidance control for mobile robots with unknown sliding. *Int J Adv Robot Syst*. 2012;9:1-14.
- [7] Dos Santos RR, Steffen V, Saramago SDFP. Robot path planning in a constrained workspace by using optimal control techniques. *Multibody Syst Dyn*. 2008;19(1-2):159-77.
- [8] Ramos OE. Optimal control for time and energy minimization in the trajectory generation of a mobile robot. *Proc 2019 IEEE 26th Int Conf Electron Electr Eng Comput INTERCON 2019*. 2019;1-4.
- [9] Tuncer A, Yildirim M. Dynamic path planning of mobile robots with improved genetic algorithm. *Comput Electr Eng* [Internet]. 2012;38(6):1564-72. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compeleceng.2012.06.016>
- [10] Perrier C, Dauchez P, Pierrot F. A global approach for motion generation of non-holonomic mobile manipulators. *Proc - IEEE Int Conf Robot Autom*. 1998;4(May):2971-6.
- [11] Chettibi T, Lehtihet HE, Haddad M, Hanchi S. Minimum cost trajectory planning for industrial robots. *Eur J Mech A/Solids*. 2004;23(4):703-15.
- [12] Korayem MH, Ghariblu H, Basu A. Dynamic load-carrying capacity of mobile-base flexible joint manipulators. *Int J Adv Manuf Technol*. 2005;25(1-2):62-70.
- [13] Korayem MH, Nazemizadeh M, Azimirad V. Optimal trajectory planning of wheeled mobile manipulators in cluttered environments using potential functions. *Sci Iran* [Internet]. 2011;18(5):1138-47. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.scient.2011.08.026>
- [14] Korayem MH, Rahimi HN, Nikoobin A. Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joints. *Appl Math Model* [Internet]. 2012;36(7):3229-44. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.10.002>
- [15] Korayem MH, Nohooji HR, Nikoobin A. Path planning of mobile elastic robotic arms by indirect approach of optimal control. *Int J Adv Robot Syst*. 2011;8(1):10-20.
- [16] Kolahi PM, Nazemizadeh M. Nonlinear dynamic modeling of tractor-trailer mobile robots with consideration of wheels inertia and their optimal point-to-point path planning. *Meccanica* [Internet]. 2023;58(1):245-53. Available from: <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01578-6>
- [17] Amer NH, Zamzuri H, Hudha K, Kadir ZA. Modelling and Control Strategies in Path Tracking Control for Autonomous Ground Vehicles: A Review of State of the Art and Challenges. *J Intell Robot Syst Theory Appl*. 2017;86(2):225-54.
- [18] Kanayama Y, Kimura Y, Miyazaki F, Noguchi T. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. 1990;384-9.
- [19] Ishikawa T, Hamamoto K, Kogiso K. Trajectory tracking switching control system for autonomous crawler dump under varying ground condition. *Autom Constr*. 2023;148(January):104740.
- [20] Li G, Li Z, Su CY, Xu T. Active Human-Following Control of an Exoskeleton Robot With Body Weight Support. *IEEE Trans Cybern*. 2023;
- [21] Das T, Kar IN. Design and Implementation of an Adaptive Fuzzy Logic-Based Controller for Wheeled Mobile Robots. 2006;14(3):501-10.
- [22] Klancar G, Zdesar A, Blazic S, Skrjanc I. Wheeled mobile robotics: from fundamentals towards autonomous systems. *Butterworth-Heinemann*; 2017.

جدول ۳- حداکثر خطای پارامترهای مربوط به جابه‌جایی، زاویه،

سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای نسبت به حالت دلخواه (مسیر A تا B)

	خطای سیستم حلقه‌بسته	خطای سیستم حلقه‌باز
جابه‌جایی در راستای x	٪ ۰/۱۳	٪ ۱/۰۸
جابه‌جایی در راستای y	٪ ۰/۱۸	٪ ۱/۳۱
زاویه	٪ ۰/۱۲	٪ ۰/۹۴
سرعت خطی	٪ ۳/۵۶	٪ ۴/۱۴
سرعت زاویه‌ای	٪ ۹/۳۳	٪ ۱۰/۲۴

جدول ۴- حداکثر خطای پارامترهای مربوط به جابه‌جایی، زاویه،

سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای نسبت به حالت دلخواه (مسیر C تا D)

	خطای سیستم حلقه‌بسته	خطای سیستم حلقه‌باز
جابه‌جایی در راستای x	٪ ۰/۳	٪ ۲/۵۳
جابه‌جایی در راستای y	٪ ۰/۱۲	٪ ۰/۹۵
زاویه	٪ ۰/۵۲	٪ ۱/۸۳
سرعت خطی	٪ ۱/۹۴	٪ ۲/۰۳
سرعت زاویه‌ای	٪ ۵/۳۶	٪ ۵/۴۹

۶- نتیجه‌گیری

هدف از این مطالعه، کنترل خطای ردیابی مسیر بهینه‌ی ربات متحرک صنعتی با استفاده از کنترل کننده‌ی غیرخطی بود که بدین منظور ابتدا معادلات دینامیک ربات استخراج شد و سپس با در نظر گرفتن تابع هزینه‌ای که گشتاورهای موتور ربات را کمینه می‌کند، کنترل بهینه‌ی مناسب طراحی شد. پس از آن با اعمال ورودی‌های محاسبه شده از کنترل بهینه به ربات متحرک، نتایج سیستم حلقه باز با استفاده از برد آ‌ی‌ام یو در ربات اندازه‌گیری شد. به دلیل خطا در ردیابی مسیر، ورودی‌های ربات با استفاده از قانون کنترلی غیرخطی، کنترل شد. مطابق نتایج به دست آمده، خطای موقعیت و جهت ربات در حالتی که به صورت حلقه بسته و آنلاین کنترل می‌شود، خیلی کمتر از حالتی است که صرفاً از داده‌های به دست آمده از مسئله‌ی مقدار مرزی (سیستم حلقه باز) به عنوان ورودی ربات استفاده شده باشد.

۷- مراجع

- [1] Kolahi PM, Mosayebi M. Optimal Trajectory Planning for an Industrial Mobile Robot using Optimal Control Theory. 2021;10(3):25-34.
- [2] رشیدی ع، کریمی ب، خداپرست ا. طراحی کنترلگر زیربهینه‌ی توزیع شده برای آرایش‌بندی گروه ربات متحرک غیرهولونومیک در حضور موانع محیطی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۲۰۲۰؛ ۵۰(۳):۷۷-۸۶.
- [3] Korayem MH, Nazemizadeh M, Nohooji HR. Optimal point-to-point motion planning of non-holonomic mobile robots in the presence of multiple obstacles. *J Brazilian Soc Mech Sci Eng*. 2014;36(1):221-32.
- [4] Nazemizadeh M, Rahimi HN, Amini Khoiy K. Trajectory planning of mobile robots using indirect solution of optimal control method in generalized point-to-point task. *Front Mech Eng*. 2012;7(1):23-8.