

## آنالیز انتشار موج تنش ناشی از ضربه طولی در میله‌های کامپوزیت با استفاده از روش المان موج

محسن میرزاجانی\*

استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران،  
m.mirzajani@tabrizu.ac.ir

محمد حسین طباطبائوکیلی

دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی سازه، پردیس بین‌المللی ارس، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران،  
s\_mh\_tatababaii\_vakili@yahoo.com

### چکیده

در بسیاری از رویدادهای ضربه - تماس مسئله انتشار موج در یک میله کامپوزیت مطرح است. در این مسایل، امکان ایجاد شکاف و برخورد دوباره جسم و میله وجود دارد، که نیاز است شرط مرزی تعریف گردد که قادر به مدلسازی این فرآیند پیچیده باشد. همچنین، روش عددی که بتواند مدلسازی دقیقی از فرآیند انتشار موج تنش را ارائه دهد بسیار مهم است. با استفاده از روش المان موج و معرفی شرط مرزی مربوط به مسایل ضربه - تماس، می‌توان انتشار موج تنش در میله‌های کامپوزیت را مدلسازی کرد. این شرط مرزی شامل تماس‌های مکرر و بازگشت‌های کوتاه مدت است که در نقاط مختلف یک جسم و در لحظات زمانی متفاوت می‌تواند ایجاد شود. در پژوهش حاضر، از روش المان موج و شرط مرزی ضربه-تماس معرفی شده برای مدلسازی انتشار موج در میله‌های چندلایه استفاده شده است. نتایج بدست آمده از این روش با حل تحلیلی ارائه شده برای مسایل ساده‌تر مقایسه شده و سپس مسایل با ماهیت انتشار موج پیچیده تنش مدلسازی شده است. نشان داده شده که این روش قابلیت تحلیل مسایل با دقت خوبی را دارا است.

**واژه‌های کلیدی:** ضربه طولی، روش المان موج، میله کامپوزیت چند لایه، ضربه‌های متوالی، شرایط مرزی ضربه - تماس.

### Analysis of stress wave propagation induced by longitudinal impact in composite rods using wave element method

M. Mirzajani  
M. H. Tabatabavakili

Department of Civil Engineering, Marand Technical Faculty, University of Tabriz, Tabriz, Iran  
Aras International Campus, University of Tabriz, Tabriz, Iran

### Abstract

In many impact-contact events we face the problem of wave propagation on a composite rod. In this type of problem, there is a possibility of developing a gap and re-collision between the object and the rod, which requires defining a boundary condition capable of modeling this complex process. Also, a numerical method that can provide accurate modeling of the stress wave propagation process is very critical. Using the wave element method with boundary conditions related to impact-contact problems, we have been able to model stress waves propagating in multi-layer rods. It includes repeated contact and short-term rebound at different points on the body and at various time instants. In the present research, the wave element method and the impact-contact boundary condition have been used to model wave propagation in multi-layer rods. The results obtained from this method are compared with the analytical solution presented for simpler problems, and then problems with the nature of complex stress wave propagation are modeled. It has been shown that the introduced method has the ability to analyze problems with good accuracy.

**Keywords:** Longitudinal impact, Wave Element Method, multi-layered composite rod, Successive impacts, impact-contact boundary conditions.

### ۱- مقدمه

دستگاه‌های حفاری مورد استفاده در معدن یا در صنایع هوافضا می‌شود [۱۰]. مدل ریاضی این مثال‌ها را می‌توان به صورت میله‌ای در نظر گرفت که یک انتهای آن به صورت گیردار و انتهای دیگر آن تحت اثر ضربه یک جرم قرار گرفته است. همچنین این نوع از دستگاه‌ها که تحت اثر بار ضربه قرار می‌گیرند، به صورت میله‌ای خواهند بود که از مصالح مختلف و/یا سطح مقطع مختلف تشکیل شده‌اند [۱۱-۱۳]. در این مقاله سعی شده است تا با استفاده از روش المان موج، توصیف دقیقی از نحوه انتشار موج ضربه در میله‌های کامپوزیت ارائه گردد که در برگزیده مثال‌های اشاره شده در بالا باشد.

تاکنون روش‌های مختلفی برای حل معادلات موج یک بعدی مورد استفاده قرار گرفته است. روش پارامتر اولیه، جهت توسعه یک روش حل برای محاسبه تغییرشکل دینامیکی در میله‌های با سطح مقطع پلکانی تحت اثر ضربه طولی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۴]. روش جداسازی متغیرها برای آنالیز رفتار گذرای تیر یک سرگیردار مورد استفاده قرار گرفته است که در آن ضربه‌های متوالی انتهای تیر به یک

از مسایل مهمی که در حوزه انتشار امواج مورد توجه بسیاری از محققان است، مدلسازی دقیق انتشار موج تنش در سازه‌های پیچیده مهندسی است که ناشی از ضربه یک جسم به جسم دیگر باشد [۱-۳]. در این نوع از مسایل در محل ضربه تغییرشکل‌های بزرگی ایجاد می‌شود [۴] و امواج تنش در محل تماس دو جسم ایجاد شده و از آن محل به سمت سایر نقاط سیستم انتشار پیدا می‌کنند. در این حالت، امواج گذرای ایجاد شده توسط ضربه-تماس می‌تواند باعث کاهش دقت در زمان بهره‌برداری از سیستم‌های مکانیکی و یا حتی باعث ایجاد تخریب در آنها شود [۵-۶]. از این رو، قطعات مکانیکی که ساختار میله‌ای داشته و از مصالح مختلفی مانند فلزات، مواد پیزوالکتریک، آلیاژهای حافظه‌دار و مواد گرادیان ترکیبی ساخته شده باشند، مورد توجه محققین قرار گرفته است [۷-۹]. بسیاری از این قطعات که تحت اثر بار ضربه قرار می‌گیرند را می‌توان مشابه با یک میله در نظر گرفت. مثال‌های مختلفی از آنها شامل پانچ، چکش هیدرولیکی، شمع کوبی،

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m.mirzajani@tabrizu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۸۰/۱۱/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۰۳

مانع میله‌ای در نظر گرفته شده است [۱۵]. از ترکیب حل دالامیر معادله موج با روش تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن شرط مرزی ضربه، جواب صریح سرعت و تنش برای مسایل ضربه یک بعدی پیشنهاد شده است [۱۶]. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل موج برای تعیین سرعت بحرانی که باعث کماتش میله تحت اثر ضربه می‌شود با استفاده از روش دالامیر و در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه مناسب توسعه داده شده است [۱۷]. مسایل میله نیمه‌بینهایت ریلی-لاو که تحت اثر ضربه یک میله با طول محدود یا یک جسم صلب قرار گرفته‌اند، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل شده است [۱۸]. روش برهم‌نهی مودها برای تعیین نیروی تماسی و پاسخ دینامیکی میله تحت اثر ضربه طولی با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۹-۲۰].

نکته‌ای که باید در خصوص تحقیقات ارائه شده در نظر گرفته شود این است که این پژوهش‌ها محدود به میله‌های با مصالح همگن هستند. آنالیز انتشار موج تنش در محیط‌های پیچیده با استفاده از روش‌های مورد اشاره بسیار پیچیده و در بعضی از موارد غیرممکن است. در چنین مواردی بایستی از روش‌های عددی استفاده گردد. روش‌های عددی که تاکنون در آنالیز انتشار امواج در میله‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در ادامه ارائه شده است. با استفاده از روش تفاضل محدود مودهای کماتش میله الاستیک تحت اثر سرعت‌های متفاوت ضربه طولی بدست آمده است [۲۱]. انتشار موج در یک میله لاغر که تحت اثر ضربه یک جسم صلب قرار گرفته با استفاده از روش المان محدود شبیه‌سازی شده است [۲۲]. از روش المان مرزی برای آنالیز روابط پاشندگی در یک میله با سطح مقطع دلخواه استفاده شده است [۲۳]. آنالیز انتشار موج تنش به وجود آمده از ضربه با استفاده از روش زیرسازه دینامیکی در میله‌های غیریکنواخت مورد مطالعه قرار گرفته و نحوه استفاده از این روش در حل مسایل میله‌های کامپوزیت تحت اثر ضربه طولی شرح داده شده است [۱۱]. اثر اندرکنش غیرمستقیم بر انتشار موج در مامواد دواتمی یک‌بعدی مورد بررسی قرار گرفته و روابط پراکنش موج و منحنی‌های پراکنش توسعه داده شده است [۲۹]. هر کدام از روش‌های عددی اشاره شده، نقاط قوت و ضعف خاص خود را دارند که باعث ایجاد محدودیت استفاده از آنها در مسایل انتشار امواج شده است. از بین این روش‌ها، روش المان محدود یک روش قدرتمند در حل مسایل پیچیده به شمار می‌رود. با این حال، در این روش نیاز به استفاده از المان‌های ریز جهت رسیدن به جواب مطلوب مورد نیاز است.

روش دیگر مورد استفاده در این مقاله تحت عنوان روش المان موج شناخته می‌شود و در سال‌های اخیر برای حل مسایل انتشار امواج در محیط‌های پیچیده مورد استفاده قرار گرفته است [۹ و ۲۴-۲۵]. در این روش از مدل‌سازی ریاضی مستقیم برای مدل‌سازی گسستگی‌های شدیدی در حین انتشار موج در سرعت‌ها، تنش‌ها و همچنین کرنش‌های ایجاد شده در المان‌ها استفاده می‌شود. با توجه به استفاده از مدل‌سازی مستقیم ریاضی در این روش، دیگر نیازی به فرمول‌بندی و حل معادلات دیفرانسیل حرکت نیست و در نتیجه حل‌های ارائه شده در این روش در بسیاری از موارد با حل دقیق مسئله تطابق کامل دارند [۲۷].

در این پژوهش، انتشار امواج در میله‌های ناهمگن لاغر که مسئله

معمول در مدل‌سازی مصالح کامپوزیت است، تحت اثر ضربه و تماس‌ها و بازگشت‌های متوالی در نظر گرفته شده است. فرض شده است که یک جسم صلب با جرم و سرعت مشخص به میله کامپوزیت برخورد کند و سپس نحوه انتشار پیچیده موج تنش در این میله مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین فرض شده است که رفتار مصالح خطی باشد. بخش‌های مختلف مقاله به صورت مقابل است: ابتدا در بخش دوم معادلات ریاضی حاکم بر مسئله ارائه شده است. در بخش سوم معادلات پایه روش المان موج توصیف شده و سپس در بخش چهارم نحوه مدل‌سازی شرط مرزی ضربه - تماس در این روش توضیح داده شده است. به منظور صحت سنجی روابط ارائه شده و قابلیت روش در مدل‌سازی ضربه در میله‌های کامپوزیت چند لایه مثال‌های عددی متنوعی در بخش پنجم در نظر گرفته شده است. نوآوری این مقاله معرفی شرط مرزی است که حالت ضربه - تماس را در میله‌های کامپوزیت مدل‌سازی کند و نحوه انتشار موج تنش در این نوع از میله‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- معادلات ریاضی حاکم بر مسئله

در نظر بگیرید که انتهای یک میله همگن به جرم  $m$ ، مدول الاستیسیته  $E$ ، چگالی  $\rho$ ، سطح مقطع  $A$ ، و به طول  $L$  در زمان  $t = 0$  با یک جسم صلب به جرم  $M$  که با سرعت اولیه  $v_{M,in}$  در حرکت است، برخورد کند. فرض می‌شود که میله در حالت الاستیک خود باقی بماند و جابجایی طولی به وجود آمده در آن با  $u(x, t)$  نشان داده شود. برای این میله می‌توان رابطه کرنش  $\epsilon(x, t)$  و تنش  $\sigma(x, t)$  را به صورت روابط (۱) و (۲) بدست آورد:

$$\epsilon(x, t) = \partial_x u(x, t) \quad (1)$$

$$\sigma(x, t) = E \partial_x u(x, t) \quad (2)$$

با داشتن این روابط، نیروی به وجود آمده در میله به صورت رابطه (۳) خواهد بود:

$$F(x, t) = A \sigma(x, t) \quad (3)$$

معادله دیفرانسیل حرکت برای موج طولی در ساده‌ترین فرم به صورت رابطه (۴) است:

$$\partial_{tt}^2 u(x, t) - c^2 \partial_{xx}^2 u(x, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

که در آن  $c = \sqrt{E/\rho}$  سرعت انتشار موج طولی است [۲۶]. رابطه (۴) را در جملات تنش و سرعت می‌توان به صورت دو معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه اول و به صورت رابطه (۵) نوشت:

$$\begin{cases} \partial_t \sigma(x, t) - E \partial_x v(x, t) = 0 \\ \rho \partial_t v(x, t) - \partial_x \sigma(x, t) = \rho b(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

که در این روابط  $\partial_t(\blacksquare)$  بیانگر مشتق نسبت به زمان و  $\partial_x(\blacksquare)$  بیانگر مشتق نسبت به موقعیت است. رابطه (۵) را می‌توان به فرم ماتریسی نیز نوشت، که در این حالت با معرفی ماتریس  $F = [\sigma \ v]^T$  و ماتریس  $C = [0 \ b]^T$  می‌توان نوشت:

$$\partial_t F + R \partial_x F = C \quad (6)$$

که در آن

مقادیر ویژه‌ای که برای ماتریس  $R$  بدست می‌آیند،  $\sqrt{E/\rho}$  و  $-\sqrt{E/\rho}$  خواهند بود که متناظر با سرعت انتشار دو موج الاستیک در دو جهت مثبت و منفی است که مخالف جهت هم انتشار می‌یابند.

"المان موج" توصیف می‌شود. با کمک گرفتن از شکل ۱-پ، و با در نظر گرفتن سلول واحد نشان داده شده در شکل روابط روش پیشنهادی ارائه خواهند شد، و با داشتن این معادلات می‌توان برای هر ترکیب دلخواهی از لایه‌های کامپوزیت نحوه انتشار موج در طول میله را مدلسازی نمود. در گام زمانی  $i$  فرض می‌شود که گام زمانی برابر  $\Delta t_i$  و سرعت موج متناظر برای المان  $j$  برابر  $c_j = \Delta x_j / \Delta t_i$  باشد که مقادیر آنها نامعلوم است. با توجه به رابطه (۷)، در تنش‌ها و سرعت‌ها گسستگی‌های شدید وجود خواهد داشت، که برای آنالیز انتشار موج فرض می‌شود که در یک لحظه زمانی بسیار کوچک این گسستگی‌ها رخ دهند. بنابراین، بایستی بین یک لحظه زمانی  $t_{i-1}^+$  و  $t_{i-1}^-$  تمایز وجود داشته باشد که متناظر با لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید (منفی) و لحظه بلافاصله بعد از ایجاد گسستگی (مثبت) است. در لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید المان می‌تواند در یک حالت شبه‌استاتیکی قرار داشته باشد که در این زمان سرعت  $v_{j,0}$  و جابجایی‌های گرهی  $u_{j,0}^+$  معلوم خواهند بود. بنابراین می‌توان روابط مکانیکی را برای یک المان در این لحظه نوشت که شامل، کرنش مورد نظر، روابط نیروی اعمالی به المان در گره‌های آن و همچنین تنش متناظر به وجود آمده مطابق روابط (۱۰-۱۱) نوشته می‌شود [۹]:

$$F_{j,0}^{\pm} = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial u_{j,0}^{\pm}} = \pm E_j A_j (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) / \Delta x_j \quad (10)$$

$$\sigma_{j,0} = \frac{F_{j,0}}{A_j} = E_j (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) / \Delta x_j \quad (11)$$

با توجه به این حقیقت که سرعت‌های  $v_{j,0}$  و  $v_{j-1,0}$  در المان‌های مجاور  $j-1$  و  $j$  می‌توانند متفاوت از هم باشند، در نتیجه گسستگی سرعت در گره  $j$  مطابق با شکل ۱-ب به وجود خواهد آمد و این گره در تعادل نخواهد بود. از این رو، گسستگی‌های شدید در سرعت‌ها و تنش‌ها و در مابین این المان‌ها در زمان  $t_{i-1}^+$  به وجود خواهد آمد. با توجه به این حقیقت که گره‌ها در المان‌های مجاور باید در تعادل باشند، لذا چنین گسستگی‌هایی باید بلافاصله (یعنی در زمان  $t_{i-1}^+$  به مقادیر جدید سرعت‌های مرزی  $v_{j-1}^+$ ،  $v_j^-$  و تنش‌های مرزی  $\sigma_{j-1}^-$ ،  $\sigma_j^+$  کاهش یابند. تمامی این مقادیر باید در طول گام زمانی  $\Delta t_i$  ثابت بمانند و در نتیجه باید شرط مرزی بین المانی (رابطه (۱۲)) را اقناع کنند:

$$\sigma_j^+ + \sigma_j^- - \sigma_{j-1}^+ = 0 \quad \text{الف- (۱۲)}$$

$$v_{j-1}^+ = v_j^- \quad \text{ب- (۱۲)}$$

که در آن تنش خارجی است که می‌تواند در گره مشترک المان‌ها وارد شود، رابطه (۱۲) الف بیانگر شرط تعادل مرز داخلی المان‌ها و رابطه (۱۲) ب بیانگر پیوستگی بین المانی است. در مرحله بعد، آنالیز انتشار امواج تنش و سرعت در طول المان صورت می‌گیرد. در این حالت از اصل پایداری مومنوم و در دو فاز استفاده می‌گردد. برای این منظور گام زمانی  $\Delta t_i$  به دو قسمت تقسیم می‌شود. در نصف اول این گام زمانی، یعنی تا زمانی که امواج به وسط المان‌ها نرسیده‌اند، می‌توان نوشت [۹]:

$$\begin{cases} v_{j-1}^+ = v_{j-1,0} + \frac{(\sigma_{j-1}^+ - \sigma_{j-1,0})\Delta t_i}{\rho_j \Delta x_{j-1}} \\ v_j^- = v_{j,0} - \frac{(\sigma_j^- - \sigma_{j,0})\Delta t_i}{\rho_j \Delta x_j} \end{cases} \quad (13)$$

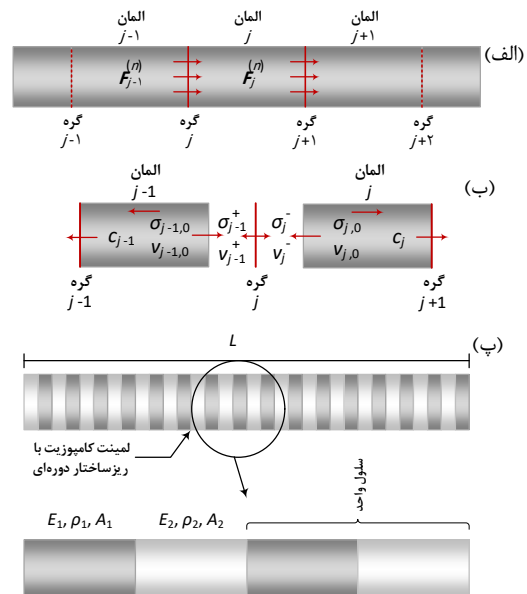
رابطه (۶) به عنوان فرم محلی قانون تعادل  $F$  شناخته می‌شود. این رابطه را می‌توان به فرم انتگرالی (۷) برای هر بازه دلخواه  $x_1$  تا  $x_2$  نیز نوشت:

$$\partial_t \left( \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx \right) = R(F(x_1,t) - F(x_2,t)) + \int_{x_1}^{x_2} C(x,t) dx \quad (7)$$

با نوشتن معادله تعادل به فرم رابطه (۷) می‌توان نتیجه گرفت که  $F$  هم در زمان‌های مختلف و هم در موقعیت‌های مختلف می‌تواند گسستگی‌های شدید (در تنش و سرعت) را داشته باشد.

### ۳- روش المان موج

با توجه به نتیجه بدست آمده از رابطه (۷)، یک روش عددی تحت عنوان روش المان موج که شامل گسسته‌سازی یک میله به طول  $L$  به المان‌هایی با طول دلخواه (شکل ۱-الف را ببینید) پیشنهاد شده است که در آن، روش انتشار گسستگی‌های قوی در سرعت‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها با سرعت موج محدود بیان شده است.



شکل ۱- نحوه گسسته‌سازی المان‌ها در زمان دلخواه  $\Delta t_n$

با توجه به شکل ۱-الف، در صورتی که مبدأ محور  $x$  در مرز المان‌ها قرار داده شود و جهت مثبت آن به سمت راست در نظر گرفته شود، گسستگی‌های تنش و کرنش تحت اندرکنش المان‌های  $j-1$  و  $j$  به صورت رابطه (۸) می‌تواند در زمان  $t=0$  نوشته شود:

$$v(x,0) = \begin{cases} v_{j-1,0}, & x < 0 \\ v_{j,0}, & x > 0 \end{cases}; \sigma(x,0) = \begin{cases} \sigma_{j-1,0}, & x < 0 \\ \sigma_{j,0}, & x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

سپس، با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل حرکت (رابطه ۴ در جملات تنش) با استفاده از روش مشخصه‌ها و در نظر گرفتن شرایط اولیه (رابطه ۸) می‌توان به رابطه (۹) رسید:

$$v(x,t) = 0.5[v_{j,0} + v_{j-1,0} + (\sigma_{j,0} - \sigma_{j-1,0})/\rho c] \quad (9)$$

که برای  $c_j \Delta t_i < x < c_{j-1} \Delta t_i$ ، یعنی برای ناحیه آشفته معتبر است. در ادامه، با در نظر گرفتن میله کامپوزیت نشان داده شده در شکل ۱-پ، نحوه مدلسازی مسئله انتشار موج در المان‌هایی تحت عنوان

با استفاده از رابطه (۱۳)، مقادیر سرعت در سمت راست المان  $z-1$  و سمت چپ المان  $z$  و ارتباط آنها با تنش‌های وارده مشخص شده و با جایگذاری روابط (۱۳) در روابط (۱۲)، سرعت مرزی جدید بدست می‌آید:

$$v_{j-1}^+ = v_j^- = \frac{\rho_{j-1}\Delta x_{j-1}v_{j-1,0} + \rho_j\Delta x_j v_{j,0}}{\rho_{j-1}\Delta x_{j-1} + \rho_j\Delta x_j} + \frac{(\sigma_{j,0} - \sigma_{j-1,0} + \sigma_j^*)\Delta t_i}{\rho_{j-1}\Delta x_{j-1} + \rho_j\Delta x_j} \quad (14)$$

در نتیجه می‌توان تنش‌های مرزی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \sigma_{j-1}^+ = \sigma_{j-1,0} + \frac{\rho_{j-1}\Delta x_{j-1}(v_{j-1}^+ - v_{j-1,0})}{\Delta t_i} \\ \sigma_j^- = \sigma_{j,0} - \frac{\rho_j\Delta x_j(v_j^- - v_{j,0})}{\Delta t_i} \\ \sigma_j^- = \sigma_{j-1}^+ - \sigma_j^+ \end{cases} \quad (15)$$

به این ترتیب با استفاده از روابط (۱۴)-(۱۵) سرعت‌ها و تنش‌ها در مرز بین دو المان  $z-1$  و  $z$  مشخص می‌شوند. در نصف دوم این گام زمانی، امواج به مرکز المان‌ها رسیده و به سمت انتهای المان  $z$  باز خواهند گشت. با اعمال اصل پایستگی مومنتوم به کل المان و در گام زمانی  $\Delta t_i$ ، سرعت جدید المان مشخص خواهد شد:

$$v_j = v_{j,0} + \frac{(\sigma_{j-1}^+ - \sigma_j^- - \sigma_j^*)\Delta t_i}{\rho_j\Delta x_j} \quad (16)$$

جدول ۱- شبه‌کد حل مسایل ضربه - تماس در روش المان موج

ورودی: تعداد المان (N)، تعداد گام‌های زمانی (NT)، شرایط مرزی و اولیه، مشخصات مصالح
<pre> for i = 1 to NT do (گام زمانی)     محاسبه گام زمانی (<math>t_n = i\Delta t_i</math>) و محاسبه سرعت، تنش و جابجایی در المان اول (روابط ۱۳ تا ۱۵)     if <math>\delta &lt; 0</math> then         تغییر شرط مرزی در گره اول به حالت گیردار (رابطه ۲۰)         محاسبه نیرو و سرعت برای المان اول با استفاده از روابط ۲۴ تا ۲۵         if <math>F_1^- &gt; 0</math> then             تغییر شرط مرزی به حالت آزاد (<math>F_1^- = 0</math>) (رابطه ۲۰)             محاسبه سرعت با استفاده از رابطه (۱۳)         else             شرط مرزی گیردار تغییر نمی‌کند (رابطه ۲۰)             محاسبه جابجایی (<math>\Delta u_1^+</math>) و سرعت با استفاده از روابط ۱۸ و ۲۴         end     else         تغییر شرط مرزی به حالت آزاد (<math>F_1^- = 0</math>) (رابطه ۲۰)         محاسبه سرعت با استفاده از رابطه (۱۳)     end     محاسبه میزان شکاف <math>\delta</math> متناظر با شکل ۲     for i = 2 to N do (محاسبات المانی)         محاسبات مربوط به المان‌های ۲ تا N و گره‌های متناظر         با استفاده از روابط (۱۳) تا (۱۸)         اعمال شرط مرزی گره انتهایی (به صورت گیردار)     end end </pre>

خروجی: تنش‌ها، سرعت‌ها، جابجایی‌ها، نیروی تماسی برای لحظات مختلف

با در نظر گرفتن بخش دوم رابطه (۱۳)، حالت جدید اینرسی - تنش به صورت رابطه (۱۷) خواهد بود (شکل ۱-ب را ببینید):

$$\begin{cases} \sigma_j = \sigma_j^- + \sigma_j^+ - \sigma_{j,0} \\ v_j = v_j^- + v_j^+ - v_{j,0} \end{cases} \quad (17)$$

و جابجایی‌های جدید گرهی توسط رابطه (۱۸) تعیین می‌گردد:

$$u_j^\pm = u_{j,0}^\pm + v_j^\pm \Delta t_i \quad (18)$$

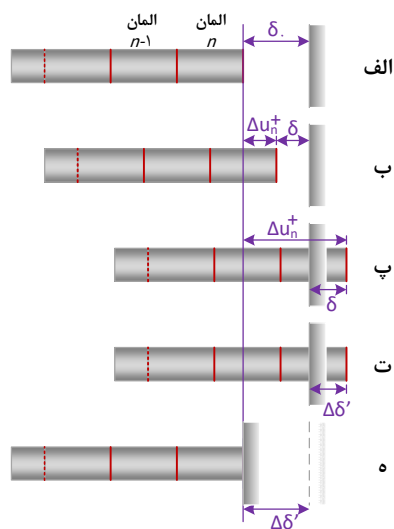
با اتمام گام زمانی  $\Delta t_i$  (یعنی  $t_i^- = t_{i-1}^- + \Delta t_i$ ) حالت مکانیکی تمامی

المان‌ها دوباره به حالت شبه‌استاتیکی باز خواهد گشت؛ و دوباره با مشخص بودن سرعت‌ها و جابجایی‌های جدید گرهی می‌توان دوباره حالت جدید المان‌های موج را مشخص کرده و روند محاسبات قبلی را تکرار کرد.

تنها مورد مجهول باقیمانده گام زمانی  $\Delta t_i$  یا همان سرعت المان‌های موج است، که بایستی با اعمال قانون انرژی برای کل میله بدست آید. برای این منظور باید مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر با کار انجام یافته توسط سیستم قرار داده شود:

$$P_{iE} + K_{iE} = W_{iE}^+ \quad (19)$$

که در آن  $P_{iE}$  و  $K_{iE}$  به ترتیب مقادیر مولفه‌های انرژی پتانسیل و جنبشی در لحظه زمانی  $t_i^-$  و  $W_{iE}^+$  کل کار انجام یافته توسط سیستم در کل فرآیند انتشار موج است.



شکل ۲- حالت‌های تبدیل شرایط مرزی برای ضربه و شکاف

#### ۴- نحوه مدل‌سازی ضربه - تماس در روش المان موج

در بسیاری از سیستم‌های مهندسی، واحدهایی وجود دارند که در اثر ضربه به هم برخورد کرده و در لحظاتی از هم جدا می‌شوند و این شکاف‌ها از یک زمان به زمان دیگر در طول فرآیند برخورد می‌توانند ایجاد شوند. روش‌های عددی باید قادر باشند تا این تماس‌های مکرر و بازگشت‌های کوتاه مدت که در نقاط مختلف جسم و در لحظات زمانی متفاوت می‌تواند ایجاد شود را مدل کنند [۲۷]. در این بخش به معرفی شرط مرزی ضربه - تماس پرداخته شده است که قادر است تماس‌های مکرر و بازگشت‌هایی که در فرآیند ضربه - تماس در انتهای یک جسم رخ می‌دهد را مدل‌سازی نماید. همچنین، در این پژوهش: الف) معادلات روش المان موج برای میله‌های کامپوزیت معرفی شده است؛ ب) شرط مرزی ضربه - تماس برای مدل‌سازی تماس‌های مکرر و بازگشت‌های کوتاه مدت ارائه گردیده است، پ) مسایل ضربه - تماس با ماهیت انتشار موج پیچیده تنش در میله‌های کامپوزیت مورد مطالعه قرار گرفته است؛ ت) اثرات نسبت جرم در انتشار موج تنش در میله‌های یکنواخت و کامپوزیت در نظر گرفته شده است؛ ه) انتشار، انعکاس و انتقال موج در انتهای گیردار، بین لایه‌های کامپوزیت و همچنین در

$$F_n^+ = -F_{n,0} - \frac{\rho_n A_n v_{n,0} \Delta x_n}{\Delta t_i} \quad (22)$$

که هر دو  $F_n^+ \leq 0$  و  $F_n^+ > 0$  ممکن است رخ دهد. اگر  $F_n^+ \leq 0$  باشد، شرط  $v_n^+ = 0$  صحیح بوده و محاسبات ادامه می‌یابد. در غیر این صورت،  $F_n^+ = 0$  قرار داده شده و گام حاضر تحت شرط مرزی آزاد دوباره محاسبه می‌شود. شکاف نهایی برای  $\delta_0 = 0$  و  $\Delta\delta' = 0$  برابر  $-\Delta u_n^+$  است. مقدار کاهش یافته با  $\Delta\delta' \neq 0$  منجر می‌شود به:

$$\delta_r = \delta - \Delta\delta' \quad (23)$$

با  $\Delta\delta' < 0$  شکاف کاهش یافته  $\delta_r$  همیشه مثبت خواهد بود و  $\delta_r > \delta$ . اما، با  $\Delta\delta' > 0$  مقدار  $\delta_r$  ممکن است منفی گردد. در این حالت، ضروری است که  $\delta_r = 0$  قرار داده شده و مقدار کاهش یافته  $\Delta\delta'_r = \delta$  بدست آید. چون  $\Delta\delta'_r < \Delta\delta'$  است، موقعیت واقعی مرز به طور کامل از طریق گام‌های بعدی بازبایی خواهد شد. حداکثر اختلافی که می‌تواند بین موقعیت مرز واقعی و مرز مدلسازی شده وجود داشته باشد برابر  $\frac{\Delta\delta'_{max}}{\Delta x} = 0.5 \frac{v_n^+}{c}$  و نسبت آن به طول المان برابر  $\frac{\Delta\delta'_{max}}{\Delta x} = 0.5 \frac{v_n^+}{c} \Delta t_i$  است. چون در روش المان موج نسبت  $v/c \ll 1$  است، بنابراین نسبت  $\Delta\delta'_{max}/\Delta x \ll 1$  خواهد بود. با این الگوریتم می‌توان مسئله ضربه-تماس در روش المان موج را مدلسازی کرد. شبه‌کد مربوط به مسایل بررسی شده در این پژوهش، در جدول ۱ ارائه شده است.

## ۵- مثال‌های عددی

به منظور ارائه قابلیت‌های روش در مدلسازی مسایل ضربه - تماس، مثال‌های عددی در این بخش ارائه شده است. میله‌ها در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد هستند و تحت اثر ضربه ناشی از برخورد یک جسم صلب به انتهای آزاد قرار می‌گیرند (شکل ۹ را ببینید). دو حالت در مثال‌ها در نظر گرفته شده است، حالت اول زمانی که جسم صلب به میله برخورد کرده و بازگشت نداشته باشد (یعنی تماس دائمی بعد از برخورد) و در حالت دوم جسم صلب به میله برخورد کرده و تماس‌ها و شکاف‌های متوالی می‌تواند رخ دهد. به منظور توصیف انتشار موج ابتدا میله یک لایه در نظر گرفته شده و سپس نحوه انتشار موج در میله‌های چند لایه کامپوزیت ارائه شده است.

### ۵-۱- برخورد جسم صلب به میله تک لایه

یک میله استوانه‌ای یک انتها گیردار به طول ۲ متر، شعاع میله ۳۷ میلی‌متر و مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگاپاسکال و چگالی ۷۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود که یک جسم صلب به جرم  $M$  با سرعت اولیه ۱ متر بر ثانیه به انتهای آزاد میله برخورد می‌کند. در حالت تماس میله - جرم، روابط سرعت و نیرو به صورت زیر نوشته می‌شود (شکل ۹ را با یک لایه میله در نظر بگیرید):

$$v_1^- = \frac{0.5\gamma v_{1,0} + v_{M,0} + 0.5 \frac{F_{1,0} \Delta t}{M}}{1 + 0.5\gamma} \quad (24)$$

$$F_1^- = -\frac{\frac{M\gamma}{\Delta t}(v_{1,0} - v_{M,0}) + F_{1,0}}{1 + 0.5\gamma} \quad (25)$$

که در آن  $\gamma = \frac{\rho c \Delta t}{M}$  است. برای توصیف تغییرات زمانی هموار سرعت جرم، کافی است که  $\gamma \ll 1$  انتخاب شود. همچنین، خاطر نشان می‌گردد که برای بدست آوردن روابط (۲۴) - (۲۵)، در ابتدا با توجه

وجه مشترک گسسته بین میله و جسم صلب به طور کامل مطالعه شده است.

برای سادگی، مرز بین المان آخر  $n = z$  میله الاستیک که به یک دیوار صلب برخورد می‌کند را در نظر بگیرید (شکل ۲). شرط مرزی گیردار در جملات جابجایی به صورت ناهمگن، و در جملات سرعت به صورت همگن بوده و با فرض اینکه برخورد در  $x = L$  رخ می‌دهد، شرایط مرزی تبدیل مکانیزم به صورت رابطه (۲۰) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{الف- (۲۰)} \quad & \text{شرط مرزی آزاد (با وجود شکاف):} \\ & E\partial_x u(L, t) = \sigma(L, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب- (۲۰)} \quad & \text{شرط مرزی گیردار (بدون وجود شکاف):} \\ & u(L, t) = \delta_0; v(L, t) = 0 \end{aligned}$$

در این حالت، فرض می‌شود که شکاف بین میله - دیوار در شروع گام زمانی برابر  $\delta_0$  بوده و در گام آخر برابر  $\delta$  باشد. چهارحالت مختلف می‌توان برای مقادیر این شکاف‌ها در طول گام زمانی حاضر در نظر گرفت: حالت اول: شکاف ثابت یا متغیر ( $\delta_0 > 0$  یا  $\delta > 0$ )؛ حالت دوم: تغییر از شکاف اولیه ( $\delta_0 > 0$ ) به تماس ( $\delta = 0$ )؛ حالت سوم: تماس دائمی ( $\delta_0 = 0$  یا  $\delta = 0$ )؛ حالت چهارم: تغییر از تماس اولیه ( $\delta_0 = 0$ ) به شکاف نهایی ( $\delta \geq 0$ ).

در حالت اول و دوم، در ابتدای گام زمانی تماسی وجود ندارد ( $\delta_0 > 0$ ) (شکل ۲-الف). مطابق با شرط مرزی آزاد (رابطه ۲۰)، می‌توان سرعت مرزی المان آخر را با قرار دادن  $F_n^+ = 0$  (در رابطه (۱۳)) و با در نظر گرفتن  $F_{n,0} = \sigma_{n,0}/A_n$  بدست آورد:

$$v_n^+ = v_{n,0} + \frac{F_{n,0} \Delta t_i}{\rho_n A_n \Delta x_n} \quad (21)$$

شکاف محاسبه شده در انتهای گام برابر  $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$  خواهد بود، که در آن  $\Delta\delta = -\Delta u_n^+ = -v_n^+ \Delta t_i$  و هر دو  $\delta \geq 0$  و  $\delta < 0$  ممکن است رخ دهند. اگر  $\delta \geq 0$  باشد (شکل ۲-ب) شرط  $F_n^+ = 0$  برقرار بوده و محاسبات می‌تواند ادامه یابد. اگر  $\delta < 0$  بدست آید، تماس در طول گام زمانی  $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t_i$  به وقوع می‌پیوندد (شکل ۲-پ).

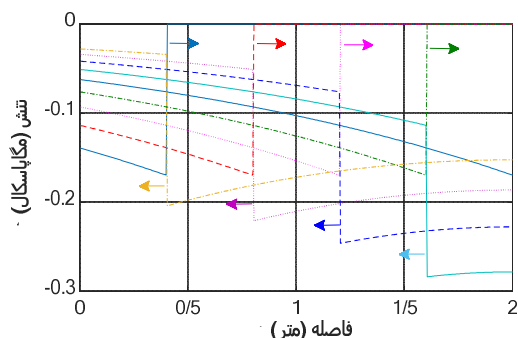
لحظه‌ای که شرط مرزی برای در نظر گرفتن در ابتدای گام یا در انتهای گام تغییر می‌کند نیز باید مشخص گردد. فرض می‌شود که یک شکاف اولیه یا نهایی به صورت موقت  $\delta'_0 = \delta_0 + \Delta\delta'$  یا  $\delta' = \delta_0 + \Delta\delta'$  و با در نظر گرفتن تغییر محلی موقعیت دیوار به وقوع بپیوندد. حداقل مقدار  $|\Delta\delta'|$  می‌تواند با مقایسه اندازه  $|\delta|$  با  $\delta_0$  مشخص گردد. اگر  $|\delta| \leq \delta_0$  باشد، فرض می‌شود که مرز به سمت عقب برای  $|\delta|$  حرکت می‌کند، به این معنی که باید  $|\Delta\delta'| = |\delta|$  قرار داده شود، و تماس در انتهای گام رخ می‌دهد (شکل ۲-ت). اگر  $|\delta| > \delta_0$  باشد، در نظر گرفته می‌شود که مرز به سمت جلو برای  $\delta_0$  حرکت می‌کند، یعنی باید  $-\delta_0 = \Delta\delta'$  قرار داده شود، و تماس بلافاصله در شروع گام رخ می‌دهد (شکل ۲-ه).

بنابراین، شکاف اولیه  $\delta'$  برای گام بعدی یا شکاف  $\delta'_0$  برای گام حاضر مساوی صفر می‌شود. در حالت آخر، گام حاضر باید دوباره با شرط مرزی  $v_n^+ = 0$  محاسبه گردد. این محاسبات دوباره فقط برای گرهی که درگیر است صورت می‌گیرد.

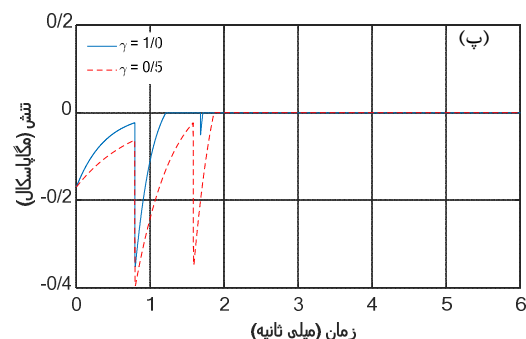
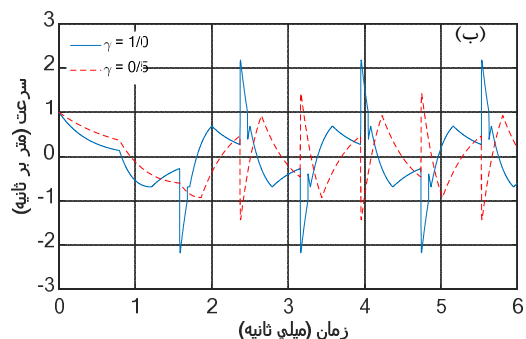
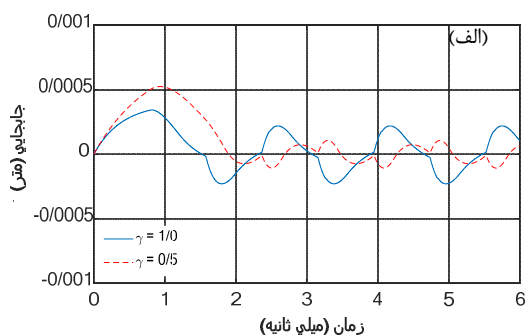
در حالت دوم و سوم، تماس در ابتدای گام حاضر وجود خواهد داشت، یعنی  $\delta_0 = 0$  است. با فرض اینکه تماس در طول گام باقی خواهد ماند، از شرط مرزی  $v_n^+ = 0$  نیروی عکس‌العمل بدست می‌آید:

به اینکه حالت تماس میله - جرم در نظر گرفته شده است.

ارتعاش ۱/۵۸۴ میلی ثانیه برمی گردد. بین لحظات ۱/۲۱۲ میلی ثانیه و ۱/۶۷۸ میلی ثانیه جرم از میله جدا می شود. تنش در انتهای آزاد صفر شده، و سرعت های جرم و میله، زمانی که شکاف ظاهر می شود، واگرا می شوند.

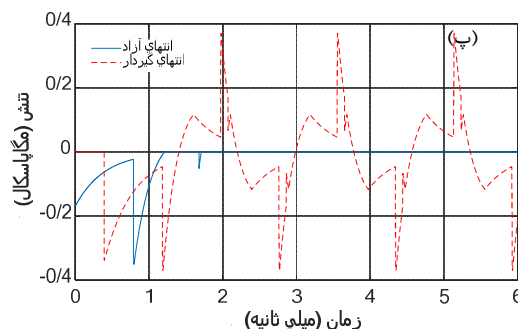
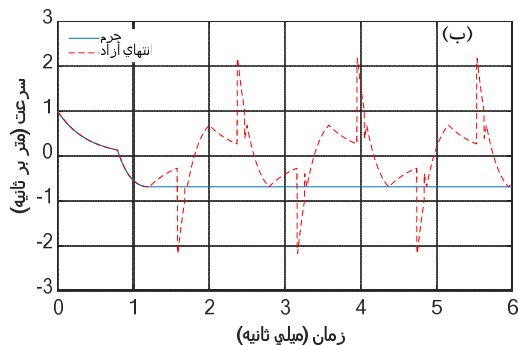
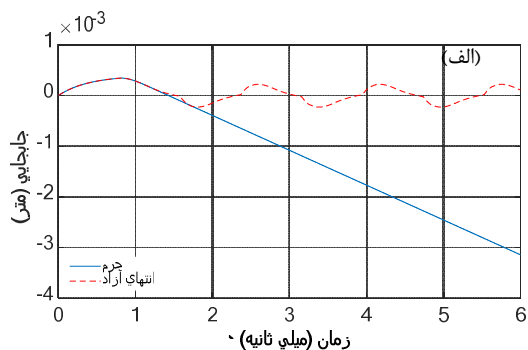


شکل ۴- انتشار موج تنش در میله تحت اثر ضربه یک جسم صلب



شکل ۵- تغییر پارامترهای دینامیکی جرم/میله مثال ۱-۵

در یک زمان کوتاه، انتهای آزاد میله از جسم صلب سبقت می گیرد و



شکل ۳- تغییر پارامترهای دینامیکی جرم/میله مثال ۱-۵

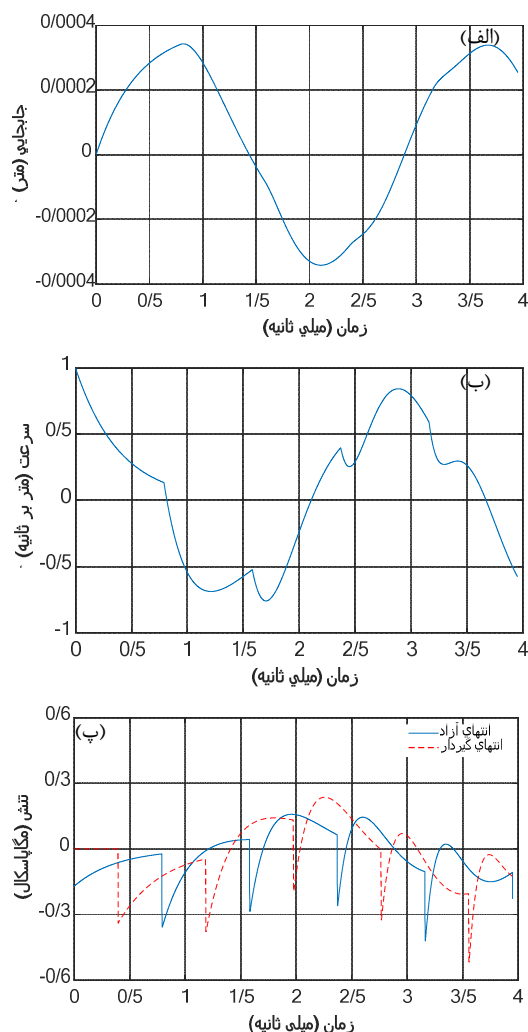
در نتیجه می توان شرایط مرزی در گره  $z = 1$  را با استفاده از پارامترهای زیر تعریف کرده و روابط ارائه شده را توسعه داد:

$$M\Delta v_M = -F_1^- \Delta t;$$

$$v_1^- = v_{M,0} + 0.5\Delta v_M$$

شرایط انتقال جرم - میله از تماس به شکاف و بالعکس با استفاده از فرآیند تعیین شده در بخش ۴ مشخص می گردد. شکل ۳ نحوه تغییر پارامترهای دینامیکی جرم/میله بعد از برخورد برای جسمی با جرمی برابر با جرم میله را در برابر زمان نشان می دهد. شکل ۳-الف تاریخچه زمانی جابجایی برای جرم و در انتهای آزاد میله را مشخص کرده است. شکل ۳-ب بیان کننده سرعت جرم و میله است و شکل ۳-پ تنش در انتهای آزاد میله و انتهای گیردار را نشان می دهد. نتایج نشان داده شده در شکل ۳ کاملاً فرآیند موج به وجود آمده توسط ضربه را نمایش می دهند و با حل تحلیلی مسئله تطابق کامل دارند. موج به وجود آمده از ضربه اولیه در زمان  $0.3960$  میلی ثانیه به انتهای گیردار می رسد، برای دومین بار در زمان  $1/189$  میلی ثانیه، و سپس با دوره تناوب

خواهد بود، که در آن  $\Gamma$  نسبت امپدانس‌های مکانیکی ( $\Gamma = A_1 \rho_1 c_1 / A_2 \rho_2 c_2$ ) است، و  $A_i$ ،  $\rho_i$  و  $c_i$  (مسواوی یک یا دو) نشان دهنده به ترتیب چگالی مصالح، سرعت موج و سطح مقطع میله نام است.



شکل ۶- تغییر پارامترهای دینامیکی جرم/میله مثال ۵-۲

برای میله دو لایه یک انتها گیردار، حل تحلیلی تنش در انتهای تماسی را می‌توان با استفاده از روش دالامبر [۱۱ و ۲۸] و به صورت رابطه (۲۷) بدست آورد:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma'_{02} e^{-\frac{\alpha_2 t}{t_2}} & \text{for } t \in [0, 2t_2] \\ 2R_{21}\sigma'_{02} e^{-\frac{\alpha_2(t-2t_2)}{t_2}} + \sigma'_{02} e^{-\frac{\alpha_2(t-2t_2)}{t_2}} & \text{for } t \in [2t_2, 2t_2 + 2t_1] \end{cases} \quad (27)$$

که در آن  $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$ ،  $t_2 = L_2/c_2$ ،  $t_1 = L_1/c_1$ ،  $\sigma'_{02} = v_M \sqrt{E_2 \rho_2}$  و  $\alpha_2 = \rho_2 A_2 L_2 / M$  و  $c_2 = \sqrt{E_2 / \rho_2}$  است.

با توجه به پیچیدگی‌های زیادی که در حین انتشار موج در میله‌های کامپوزیت رخ می‌دهد، بدست آوردن حل تحلیلی بسیار سخت است و حل تحلیلی ارائه شده در رابطه (۲۷) فقط تا مدت زمان محدودی

دوباره ضربه رخ می‌دهد، و تنش فشاری دوباره ظاهر می‌شود. از هم جداشدگی نهایی در زمان ۱/۷۱۱ میلی‌ثانیه به وقوع می‌پیوندد و پس از آن نوسان بدون میرایی پیچیده‌ای با دوره تناوب اشاره شده ایجاد می‌شود. سطح تماس میله و جسم صلب تا زمان ۱/۲۱۳ میلی‌ثانیه جابجایی یکسانی را در حین تماس با یکدیگر تجربه می‌کنند، پس از آن جابجایی جسم صلب بزرگتر از انتهای تماسی میله در اولین فاز جداشدگی میله و جسم صلب است. در فاز دوم برخورد میله با جسم صلب، اندازه تنش بسیار کوچک است.

نحوه انتشار موج تنش در طول میله در لحظات زمانی مختلف در شکل ۴ نشان داده شده است. فرآیند بیان شده در مورد شکل ۳ در شکل ۴ نیز قابل مشاهده است. همچنین به منظور نشان دادن تأثیرات تغییر  $\gamma$  در پاسخ میله، جرم جسم صلب به دو برابر جرم میله افزایش داده شده ( $\gamma = 0.5$ ) و نتایج با حالت قبل در شکل ۵ مقایسه شده است. در شکل ۵، جابجایی میله پیوسته است، اما هر دو نیروی تماسی و سرعت در انتهای آزاد، ناپوستگی‌هایی را در گام‌های زمانی مختلف نشان می‌دهند، که متناظر با ورود اغتشاش اولیه توسط امواج منعکس شده است.

#### ۵-۲- برخورد جسم صلب به میله بدون بازگشت

در این مثال فرض شده است که برخلاف مثال ۵-۱، بعد از برخورد، جرم و میله از هم جدا نشوند، یعنی اینکه بعد از برخورد برگشتی رخ ندهد. در این حالت، سرعت میله و سرعت متوسط جرم، و همچنین جابجایی‌ها در مرز مشترک بایستی یکسان باشند. نتایج بدست آمده در این حالت در شکل ۶ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌گردد، نحوه انتشار موج کاملاً تغییر یافته است. به منظور مشخص شدن نحوه انتشار موج در طول میله، در شکل ۷ در لحظات زمانی مختلف موج تنش نمایش داده شده است. مشابه با مثال ۵-۱ برای مشخص شدن اثرات تغییر جرم جسم صلب در تاریخچه زمانی امواج تنش، جرم جسم صلب به دو برابر افزایش داده شده و با حالت قبلی مقایسه شده که در شکل ۸ نشان داده شده است.

#### ۵-۳- برخورد جسم صلب به میله کامپوزیت دو لایه

برای نشان دادن قابلیت‌های روش المان موج در مدل‌سازی انتشار موج تنش ناشی از ضربه در میله‌های کامپوزیت، مثال حاضر در نظر گرفته شده است. خصوصیات مربوط به میله‌ها مطابق با جدول ۲ انتخاب شده است [۱۱]. سیستم شماره ۱ شامل میله آلومینیومی (میله ۱) و میله فولادی (میله ۲) است که سطح مقطع یکسانی دارند. در این سیستم یک جسم صلب با جرم ۰/۸۱ کیلوگرم و سرعت ۱/۰ متر بر ثانیه به میله دو لایه برخورد می‌کند (شکل ۹).

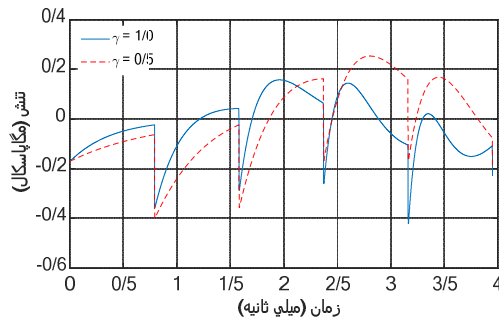
زمانی که موج تنش ورودی  $\sigma_I$  به مرز مشترک میله ۱ و میله ۲ می‌رسد، این موج به یک موج انعکاسی  $\sigma_R$  تبدیل می‌شود که به سمت میله ۲ بازمی‌گردد، و به یک موج انتقالی  $\sigma_T$  تبدیل می‌شود که به سمت میله ۱ انتشار پیدا می‌کند. مطابق با تعادل نیروها و سازگاری سرعت‌های ذره در دو سمت وجه مشترک دو میله، رابطه موج انعکاسی  $\sigma_R$  و موج انتقالی  $\sigma_T$  با موج ورودی  $\sigma_I$  به صورت [۱۱ و ۲۵]:

$$R_{21} = \frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1}; T_{21} = \frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2\Gamma(A_2/A_1)}{\Gamma + 1} \quad (26)$$

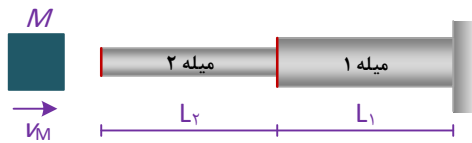
می‌تواند نحوه انتشار موج در میله را مشخص نماید، لذا از روش‌های جایگزین عددی به منظور مدلسازی انتشار موج استفاده می‌شود که در این مقاله روش المان موج به این منظور معرفی شده است.

جدول ۲- پارامترهای مربوط به میله کامپوزیت دو لایه [۱۱]

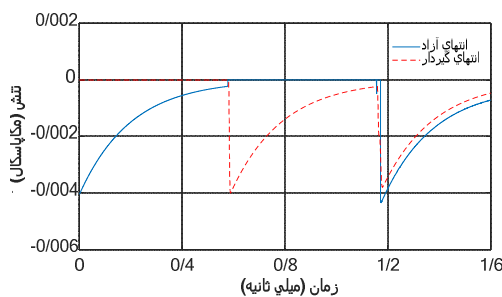
سیستم	میله ۱			
	$E_i$ (GPa)	$\rho_i$ (kg/m <sup>3</sup> )	$A_i$ (m <sup>2</sup> )	$L_i$ (m)
۱	۷۰	۲۷۰۰	$1 \times 10^{-4}$	۱/۵
۲	۷۰	۲۷۰۰	$2 \times 10^{-4}$	۱/۵
سیستم	میله ۲			
	$E_i$ (GPa)	$\rho_i$ (kg/m <sup>3</sup> )	$A_i$ (m <sup>2</sup> )	$L_i$ (m)
۱	۲۱۰	۷۸۰۰	$1 \times 10^{-4}$	۱/۵
۲	۷۰	۲۷۰۰	$1 \times 10^{-4}$	۱/۵



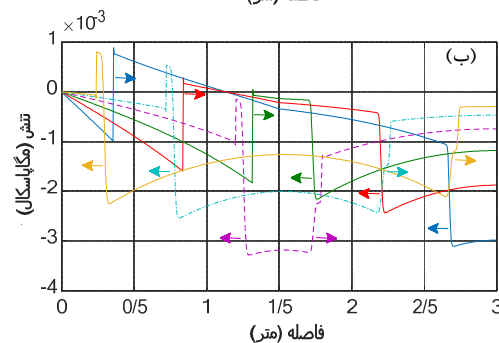
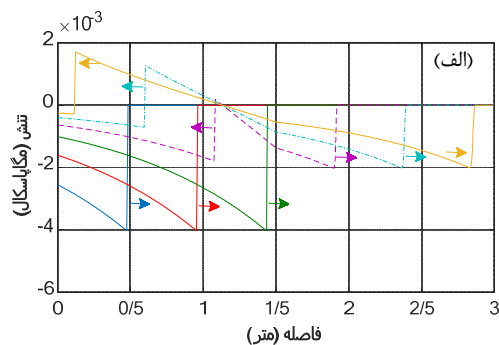
شکل ۸- تغییر در تاریخچه زمانی با تغییر جرم جسم صلب



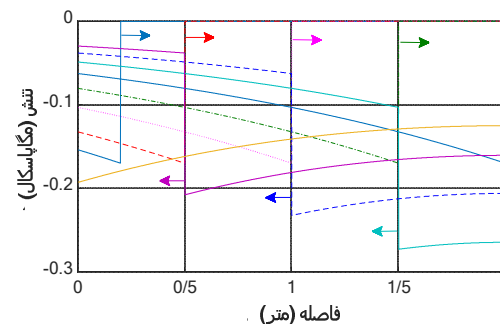
شکل ۹- برخورد میله کامپوزیت دو لایه با جسم صلب.



شکل ۱۰- اندازه تنش در انتهای آزاد و انتهای گیردار میله دولایه.



شکل ۱۱- انتشار موج تنش در میله دو لایه در زمان‌های مختلف.



شکل ۷- انتشار موج تنش در طول میله مثال ۵-۲

تاریخچه زمانی تنش تماسی، بین جسم صلب و میله دولایه یک انتهای گیردار و همچنین در انتهای گیردار در شکل ۱۰ نشان داده شده است. با توجه به شکل، تنش تماسی در زمان  $0.578$  میلی‌ثانیه به صورت ناگهانی به صفر تغییر می‌کند که به دلیل انعکاس موج فشاری به صورت موج کششی و از بین رفتن تماس در انتهای تماسی میله با جسم صلب رخ داده است.

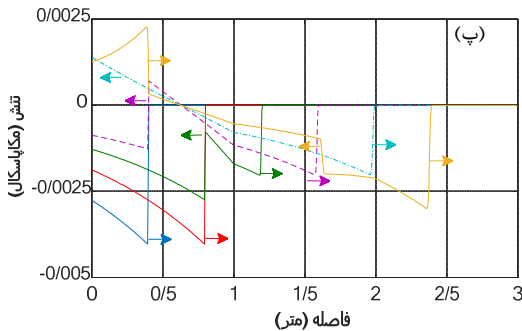
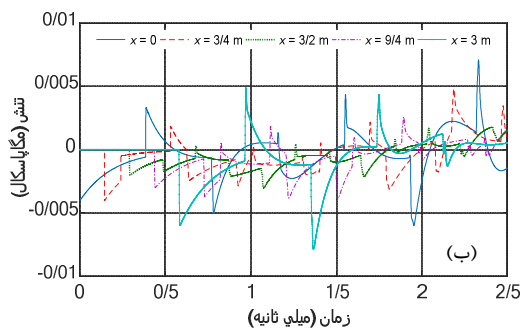
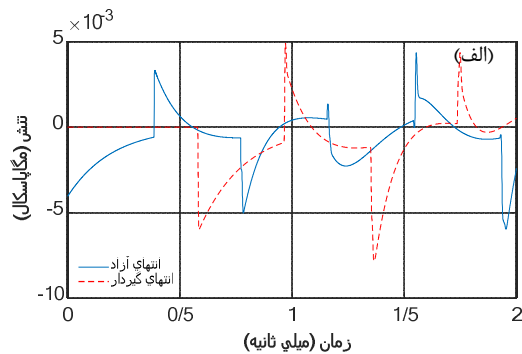
شکل ۱۱ نشان دهنده انتشار موج تنش در طول میله دولایه با مصالح مختلف در گام‌های زمانی مختلف است. خاطر نشان می‌گردد که حل تحلیلی ارائه شده فقط قادر به تعیین تنش فقط برای محدود خاصی از زمان بوده و حل تحلیلی کامل برای این مثال تاکنون ارائه نشده است. با دقت در شکل ۱۱-الف مشخص می‌گردد که موج تنش از سمت چپ شروع به انتشار در میله می‌کند، با رسیدن موج تنش به وجه مشترک میله ۱ و ۲ موج انعکاسی و انتقالی ایجاد شده و هر کدام در جهتی که در بالا به آن اشاره شد، شروع به انتشار می‌کنند که دقیقاً مطابق با حل تحلیلی ارائه شده است. زمانی که موج کششی منعکس شده به انتهای آزاد میله می‌رسد، ضربه متوقف می‌شود. پس از پایان ضربه، انتهای آزاد میله کامپوزیت موج را با قطبیت معکوس و به صورت موج فشاری منعکس می‌کند. موج انتقالی نیز به انتهای گیردار میله کامپوزیت رسیده و به صورت موج فشاری انعکاس می‌کند. موج فشاری منعکس شده از طرف انتهای آزاد دوباره به وجه مشترک میله ۱ و ۲ رسیده (شکل ۱۱-ب) و دوباره باعث ایجاد موج فشاری انتقالی و کششی انعکاسی می‌شود.



مشخص شده است. سپس، به منظور بررسی تاثیر تغییر جرم جسم صلب در پاسخ دینامیکی میله، جرم صلب دو برابر حالت قبل در نظر گرفته شده است که با  $\gamma = 0.5$  در شکل مشخص شده است.

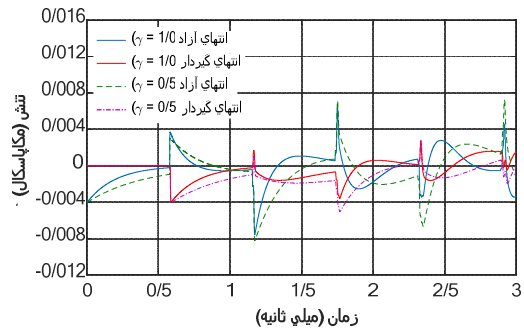
#### ۵-۵- برخورد جسم صلب به میله کامپوزیت دو لایه با در نظر گرفتن اثر تغییرات مساحت مقطع

نحوه انتشار موج تنش در میله کامپوزیت دو لایه که دو سطح مقطع متفاوت دارند، در شکل ۱۳ نشان داده شده است. خصوصیات مصالح مربوط به این سیستم در جدول ۲ با نام سیستم شماره ۲ مشخص شده است. با توجه به اینکه نسبت امیدانس در این مثال بزرگتر از یک است، موج ورودی اولیه  $\sigma_I$  پس از برخورد جسم به میله شروع به انتشار از سمت چپ می‌کند، با رسیدن این موج به وجه مشترک میله ۱ و ۲، یک موج فشاری انتقالی  $\sigma_T$  در میله ۱ ایجاد می‌شود و به سمت انتهای گیردار میله انتشار پیدا می‌کند.

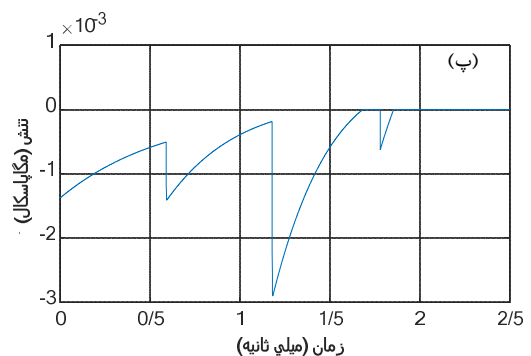
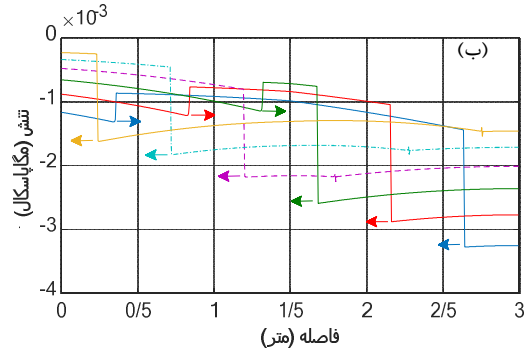
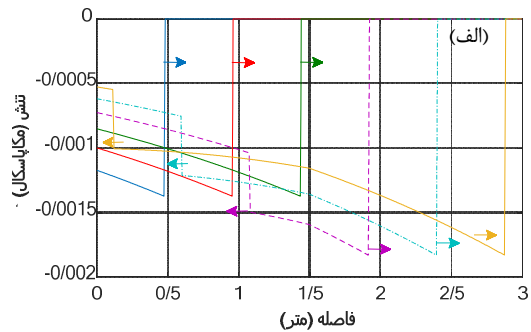


شکل ۱۴- تغییرات پارامتر تنش در میله کامپوزیت سه لایه

یک موج فشاری انعکاسی  $\sigma_R$  نیز از سمت وجه مشترک به سمت انتهای آزاد میله انتشار پیدا می‌کند. جزئیات مربوط به انتشار موج تنش



شکل ۱۲- تغییر تاریخچه زمانی امواج تنش مثال ۴-۵



شکل ۱۳- انتشار موج تنش در میله با اثر تغییر مساحت

#### ۵-۴- برخورد جسم به میله کامپوزیت بدون بازگشت

در این مثال، مثال ۳-۵ با فرض جدا نشدن جسم صلب از میله، بعد از برخورد حل شده است. شکل ۱۲ نشان دهنده تاریخچه زمانی تنش در انتهای آزاد و گیردار میله است که در حالت اول فرضیات مثال ۳-۵ برای جرم جسم صلب تغییر داده نشده است که با  $\gamma = 1$  در شکل

در طول میله در شکل ۱۳-الف و ب قابل مشاهده است. تاریخچه زمانی تغییرات تنش در میله کامپوزیت در شکل ۱۳-پ نشان داده شده و همان طور که مشاهده می‌کنید، رسیدن موج فشاری انعکاسی از وجه مشترک میله ۱ و ۲ به انتهای آزاد میله باعث ایجاد دومین پیک در زمان ۰/۵۸۹ میلی‌ثانیه شده است. تنش تماسی در سومین پیک به مقدار بیشینه خود می‌رسد، که در این زمان موج فشاری انعکاسی از انتهای گیردار و موج فشاری انعکاسی دوم از طرف وجه مشترک میله ۱ و ۲ به صورت همزمان و در زمان ۱/۱۸۲ میلی‌ثانیه به انتهای آزاد میله می‌رسند. نتایج بدست آمده انطباق کامل با نتایج تحلیلی ارائه شده در رابطه (۲۷) دارند.

## ۶- نتایج

انتشار موج تنش ناشی از برخورد یک جسم صلب به میله‌های کامپوزیت چند لایه یک انتها آزاد و انتهای دیگر گیردار با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده برای روش المان موج مورد بررسی قرار گرفت. مدلسازی دقیق مربوط به ضربه‌های متوالی و شرط مرزی مورد نیاز در روش المان موج ارائه گردید. خاطر نشان می‌گردد که حل تحلیلی که بتواند فرآیند پیچیده انتشار موج در اینگونه مسایل را ارائه دهد بسیار کم است، بنابراین روش عددی که بتواند مدلسازی دقیقی از فرآیند انتشار موج تنش را ارائه دهد بسیار حائز اهمیت است. نتایج بدست آمده از این روش با حل تحلیلی ارائه شده برای مسایل ساده‌تر مقایسه شده و نشان داده شد که این روش قابلیت تحلیل مسایل با دقت خوبی را دارا است.

## ۷- مراجع

- [1] Babitsky VI. Theory of vibro-impact systems and applications. *Meccanica*, Vol. 34, No. 4, pp. 299-300, 1999.
- [2] Goldsmith W. *IMPACT—the theory and physics of colliding solids*, 2001.
- [3] Ibrahim RA. *Vibro-impact dynamics: modeling, mapping and applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [4] Zhang J, Li W, Zhao L, He G. A continuous contact force model for impact analysis in multibody dynamics. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 153:103946, 2020.
- [5] Afsharfard A. Suppressing forced vibrations of structures using smart vibro-impact systems. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 83, pp. 1643-1652, 2016.
- [6] Jin J, Yang W, Koh HI, Park J. Development of tuned particle impact damper for reduction of transient railway vibrations. *Applied Acoustics*, Vol. 169, 107487, 2020.
- [7] Shen Y, Yin X. Dynamic substructure model for multiple impact responses of micro/nano piezoelectric precision drive system. *Science in China Series E: Technological Sciences*, Vol. 52, No. 3, pp. 622-33, 2009.
- [8] Sadeghi O, Bakhtiari-Nejad M, Yazdandoost F, Shahab S, Mirzaeifar R. Dissipation of cavitation-induced shock waves energy through phase transformation in NiTi alloys. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 137, pp. 304-314, 2018.
- [9] Khaji N, Mirzajani M, Hori M. Analysis of Elastic Pulse Dispersion in Periodically Layered Composite Rods using Wave Finite Element Method. *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 13, No. 05, 2150050, 2021.
- [10] Krehl PO. *History of shock waves, explosions and impact: a chronological and biographical reference*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [11] Shen Y, Yin X. Dynamic substructure analysis of stress waves generated by impacts on non-uniform rod structures. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 74, pp. 154-72, 2014.
- [12] Stepanov R, Romenskiy D, Tsarenko S. Dynamics of Longitudinal Impact in the Variable Cross-Section Rods. *InIOP Conference Series: Materials Science and Engineering* Vol. 317, No. 1, pp. 012029, IOP Publishing, 2018.
- [13] Li S, Wang Y, Wu H, Liu L. Dynamic response of drill string when sonic drilling rig is applied to blasting hole operation. *Geoenergy Science and Engineering*, Vol. 221, 2023.
- [14] Bituryn AA. Modeling of the maximum deflection of a stepped rod having an initial curvature upon impact against a rigid barrier. *Mechanics of Solids*, Vol. 54, 1098-107, 2019.
- [15] Yin XC, Qin Y, Zou H. Transient responses of repeated impact of a beam against a stop. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 22-23, 7323-39, 2007.
- [16] Gazonas GA, Scheidler MJ, Velo AP. Exact analytical solutions for elastodynamic impact. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 75, pp. 172-187, 2015.
- [17] Bituryn AA. Calculation of the critical velocity of a stepwise rod system under a longitudinal impact. *Journal of applied mechanics and technical physics*, Vol. 52, pp. 530-535, 2011.
- [18] Yang H, Li Y, Zhou F. Stress waves generated in a Rayleigh-Love rod due to impacts. *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 159, 104027, 2022.
- [19] Malla RB, Vila LJ. Dynamic impact force in an axial member with coupled effects of structural vibration and various support conditions. *Engineering Structures*, Vol. 144, pp. 210-224, 2017.
- [20] Wang S, Wang Y, Huang Z, Yu TX. Dynamic behavior of elastic bars and beams impinging on ideal springs. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 3, 2016.
- [21] Ma H, Yang Q, Han ZJ, Lu GY. Dynamic buckling of elastic bar under axial impact based on finite difference method. In *Advanced Materials Science and Engineering AMSE2016*, pp. 164-169, 2016.
- [22] Elkaranshaw HA, Bajaba NS. A Finite Element Simulation of Longitudinal Impact Waves in Elastic Rods. Materials with Complex Behaviour II: Properties, *Non-Classical Materials and New Technologies*, pp. 3-17, 2012.
- [23] Gunawan A, Hirose S. Boundary element analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 29, No. 10, pp. 913-924, 2005.
- [24] Mirzajani M, Khaji N, Hori M. Stress wave propagation analysis in one-dimensional micropolar rods with variable cross-section using micropolar wave finite element method. *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 10, No. 04, 2018.
- [25] Mirzajani M, Khaji N, Hori M. Wave propagation analysis of micropolar elastic beams using a novel micropolar wave finite element method. *Mechanics of advanced materials and structures*, Vol. 28, No. 6, pp. 551-567, 2021.
- [26] Graff KF. *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation; 2012.
- [27] B.F. Shorr, *The wave finite element method in "Foundation of Engineering Mechanics Series"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [28] Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [29] Fathinejad, P., Ghavanloo, E., Fazelzadeh, S. A. Wave Propagation in One-Dimensional Diatomic Metamaterials with Indirect Interactions. *Journal of Mechanical Engineering (jmeut)*, Vol. 52, No. 2, pp. 99-103, 2022 (in persian).