

تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی دارای هسته با ضریب پواسون منفی

نیما مهندسی

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران،
mohandesi.n@qut.ac.ir

مصطفی طالبی توتی*

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران، talebi@qut.ac.ir

چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته‌ی استوانه ساندویچی با هسته‌ای از مواد پواسون منفی (آگرتیک) مورد بررسی قرار گرفته است. پوسته مورد نظر از رویه‌هایی با ماده همسانگرد و هسته‌ای از مواد با ضریب پواسون منفی تشکیل شده که این خاصیت نتیجه ساختار هسته می باشد. ابتدا به کمک معادلات ساختاری مواد پواسون منفی و مواد همسانگرد و استفاده از فرضیات لایه معادل، سفتی کششی، خمشی و کوپلینگ سازه محاسبه می‌شود. سپس با توجه به شرایط مرزی و کامل بودن پوسته در جهت محیطی، میدان جابه‌جایی حدس زده می‌شود. با جایگذاری میدان جابه‌جایی در معادلات حرکت با مشتقات جزئی، معادلات به شکل معادلات غیرخطی با مشتقات معمولی تبدیل می‌شود. در ادامه برای حل این معادلات از روش عددی رانگ-کوتا بهره گرفته می‌شود. سپس به قصد صحت سنجی نتایج با نتایج موجود در ادبیات تحقیق مقایسه و در انتها اثر مشخصات هندسی هسته با ساختار پواسون منفی همانند زاویه، طول و ضخامت المان‌ها و مشخصات هندسی پوسته‌ی استوانه‌ای همانند شعاع و طول استوانه بر مشخصات فرکانسی سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. **واژه‌های کلیدی:** ارتعاشات غیر خطی، پوسته استوانه‌ای ساندویچی، مواد پواسون منفی، روش رانگ-کوتا، ارتعاشات اجباری، رخساره فاز.

Nonlinear vibrations of auxetic sandwich cylindrical shell

N. Mohandesi

Department of Mechanical Engineering, Qom University of technology, Qom, Iran

M. Talebitooti

Department of Mechanical Engineering, Qom University of technology, Qom, Iran

Abstract

In this research, the nonlinear vibrations of a cylindrical sandwich shell with a core of auxetic structure (negative Poisson's ratio) are investigated. The intended shell consists of two layers with isotropic material and a core of auxetic material with a negative Poisson's coefficient which is the result of the geometric structure of the core. First, with the help of the constitutive equations of auxetic materials and isotropic materials and using the assumptions of the equivalent layer, the tensile, bending, and coupling stiffness of the structure is calculated. Then, according to the boundary conditions and for circular cylindrical, the displacement field is estimated. By replacing the displacement field in the equations of motion with partial derivatives, the equations are transformed into nonlinear equations with ordinary derivatives. In the following, Runge-Kutta numerical method is used to solve these equations. Then, the results are compared with the results in the research literature, and finally, the effect of the geometric characteristics of the auxetic core, such as the angle, length and thickness and geometric characteristics of the cylindrical shell, such as the radius and length of the cylinder, are examined.

Keywords: Nonlinear Vibration, Sandwich Cylindrical Shell, Auxetic Material, Runge-Kutta Method, Forced Vibration, Phase Portrait.

مصنوعی در یک ماده‌ی فومی توسط لیکس^۲ ساخته شد [۱]. نتایج بررسی مواد کامپوزیتی با ضریب پواسون منفی نشان می‌دهد که مواد با ضریب پواسون منفی مقاومت بهتری در مقابل شکست دارند [۲]. مواد با ضریب پواسون منفی موادی خاص و جذاب هستند. سازه‌ها با ضریب پواسون منفی به دلیل خواص منحصربه‌فرد و عالی خود یکی از بهترین گزینه‌ها برای جایگزینی سازه‌ها و مواد رایجی است که امروزه در صنایع مختلف در حال استفاده می‌باشند. یک نمونه از کاربردهای مهم سازه‌ها با ضریب پواسون منفی در مهندسی هوافضا یا در مهندسی عمران، جذب ضربه‌های قوی مانند امواج انفجاری است. بنابراین این مواد یا ساختارها اغلب به عنوان لایه بیرونی برای محافظت از سازه‌های داخلی استفاده می‌شوند.

۱- مقدمه

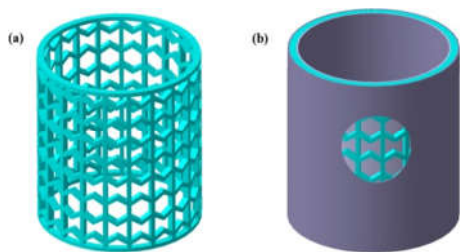
بیشتر مواد طبیعی با نسبت پواسون مثبت مشخص می‌شوند. به عبارتی مشاهده می‌شود که وقتی به صورت طولی کشیده می‌شوند (فشرده می‌شوند) به صورت جانبی منقبض (منبسط) می‌شوند. با این وجود، نظریه کلاسیک الاستیسیته، وجود موادی با نسبت پواسون منفی را که با عنوان آگرتیک^۱ شناخته می‌شود، منع نمی‌کند. رفتار مواد با ضریب پواسون منفی اولین بار در دهه‌ی ۱۹۲۰ میلادی در مواد تک کریستال گزارش شد. اگرچه رفتار مواد با ضریب پواسون منفی را می‌توان به صورت طبیعی نیز یافت اما برای اولین بار به صورت

²Lakes

¹Auxetic

این مواد نقش مهمی در برابر بارهای انفجار ناشی از امواج ضربه‌ای موشک‌ها و پرتابه‌های مافوق صوت ایفا می‌کند و یا حداقل اثرات منفی این سلاح‌ها را کاهش می‌دهند. در نتیجه، مواد با ضریب پواسون منفی در بسیاری از قسمت‌های مهم برای اهداف عمرانی و دفاعی استفاده شده‌است. همچنین سازه‌های ساندویچی به دلیل خواصی همانند سفتی و سختی بالا و همچنین با هدف به حداقل رساندن وزن سازه، امروزه جایگزین مناسبی برای سازه‌های ساخته شده با مواد معمول هستند و کاربرد‌های ویژه‌ای در صنایع مختلف هوافضا، خودرو سازی و غیره پیدا کرده‌اند. پوسته‌ی استوانه‌ای با ضریب پواسون منفی هم مشخصاً در ساخت موارد مختلفی همانند بدنه‌ی هواپیما در صنعت هوافضا و در زمینه‌ی پزشکی در ساخت استنت^۱‌های قلبی کاربرد دارد. در کاربرد دیگر، گلوله یا پوسته‌ی ای که یک جزء آن از مواد با ضریب پواسون منفی می‌باشد به طوری که پرتابه کلی دارای نسبت پواسون صفر یا منفی است. در این حالت حرکت پرتابه به سمت هدف با کاهش انبساط جانبی به دلیل خاصیت ضریب پواسون منفی تحت نیروی رانش فشاری تسهیل می‌شود. یک کاربرد بالقوه جالب دیگر از مواد با ضریب پواسون منفی در ساخت فیلترهای هوشمند نهفته است. اگر فیلتری از این فوم‌ها ساخته شود، با کشش فوم در یک جهت، منافذ بزرگتر می‌شوند. با بزرگ شدن یکنواخت منافذ، می‌توان یک فیلتر قابل تنظیم نیز ایجاد کرد که می‌تواند از سوراخ‌های بسیار کوچک تا سوراخ‌های بسیار بزرگ متغیر باشد. مشاهده شده است که مواد با ضریب پواسون منفی مورد استفاده در ساندویچ پانل‌ها دارای خواص آکوستیک جذابی هستند و مشخص شده است که در فرکانس‌های تا ۱۶۰۰ هرتز فوم‌های پلیمری و فلزی ساخته شده از این مواد در مقایسه با مواد معمولی دارای جذب صوتی افزایش یافته‌ای هستند. معمولاً سازه‌های ساندویچی از سه لایه تشکیل می‌شوند که دو لایه فوقانی و تحتانی رویه نامیده می‌شود و همچنین یک لایه به عنوان هسته در نظر گرفته می‌شود. عموماً رویه‌ها از مواد نازک و مقاومت بالا و هسته از موادی با ضخامت زیاد و چگالی کم ساخته می‌شوند. هسته‌هایی با معماری سبک^۲ به عنوان جایگزینی بهینه و مناسب برای سازه‌های ساندویچی تلقی می‌شوند. مزیت استفاده از پوسته‌ی استوانه‌ای با هسته با ضریب پواسون منفی این است که به دلیل وزن کم و استحکام بالا، می‌توان سازه‌های بهینه‌تری را ساخت که به طور گسترده در صنایع همانند هوافضا که وزن کم بسیار اهمیت دارد، استفاده شوند. این امر همچنین می‌تواند مواد مصرفی را کاهش دهد. رایج‌ترین مواد با ضریب پواسون منفی مورد استفاده شده در صنایع، مواد با ضریب پواسون منفی لانه زنبوری^۳ می‌باشند. معمولاً هسته‌ی سازه‌های ساندویچی به صورت فوم (ریز ساختار) و یا سلولار (درشت ساختار) ساخته می‌شوند. با توجه به این واقعیت که اکثر سازه‌های مورد استفاده در صنعت، سازه‌های دارای انحنای باشند همانند بدنه‌ی یک هواپیما یا محافظه‌های احتراق در صنایع فضایی، به همین منظور پژوهش در زمینه‌ی رفتار مواد پیشرفته‌ی جدید در حالت سازه‌های انحنادار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. خواص کلی سازه‌های استوانه‌ای به خواص مواد

سازنده، ویژگی‌های هندسی هسته و رویه بستگی دارد. همچنین می‌توان گفت از میان سازه‌های ساندویچی، سازه‌های دارای انحنای همانند استوانه تحمل بار زیادی را به خاطر انحنای خودشان نشان می‌دهند [۳ و ۴ و ۵]. تحلیل‌های ارتعاشاتی سازه‌های مکانیکی که تحت بارگذاری دینامیکی و نوسانی قرار می‌گیرند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشند. در یک پژوهش تحلیلی، پوسته‌ی استوانه‌ای از جنس مواد درجه بندی شده تابعی^۴ مورد تحلیل ارتعاشات غیرخطی قرار گرفت [۶]. همچنین در پژوهشی مشابه به تحلیل ارتعاشاتی یک پوسته‌ی مخروطی از جنس مواد درجه بندی شده تابعی تحت اثر نیروهای آیرودینامیکی پرداخته شد [۷]. تحلیل کماتش پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در محیط گرمایی انجام شد [۸]. تاکنون پژوهش‌های مختلفی برای معرفی توپولوژی‌های جدید در مورد مواد با ضریب پواسون منفی انجام شده است و بدین جهت می‌توان دورنمای وسیعی را برای پژوهش‌های آتی در مورد تحلیل‌های ارتعاشاتی این مواد متصور بود. اخیراً مواد با ضریب پواسون منفی مورد توجه ویژه جامعه علمی قرار گرفته است. بر اساس نظریه تغییر شکل برشی بالاتر ردی و اصل همپلتون، ژانگ و همکاران [۹] پاسخ‌های گذرا غیرخطی یک صفحه ساندویچ لانه‌زنبوری با ضریب پواسون منفی تحت بارهای دینامیکی ضربه را مطالعه کردند. ژیانگ گائو و همکاران [۱۰ و ۱۱] رفتار دینامیکی سازه‌های با ضریب پواسون منفی را تحت بار ضربه‌ای مورد مطالعه‌ی عددی و تحلیلی قرار دادند. در مطالعه‌ی کوک و همکاران [۱۲] سازه‌ی با ضریب پواسون منفی را مورد بررسی تحلیلی و عددی قرار دادند. نتایج عددی نشان داد که مواد با ضریب پواسون منفی بسته به عنوان هندسه و توپولوژی می‌تواند رفتارهای مختلفی از خود نشان دهد. در یک پژوهش عددی و تجربی تغییر شکل و جذب انرژی استوانه با شبکه بندی با ضریب پواسون منفی تحت بارگذاری مورد مطالعه قرار گرفت [۱۳]. طرحواره‌ی از پوسته‌ی استوانه‌ای با هسته‌ی از مواد با ضریب پواسون منفی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- طرحواره‌ی از پوسته‌ی استوانه‌ای با هسته‌ی از مواد با ضریب پواسون منفی [۱۳]

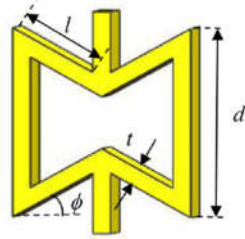
رفتار ارتعاشاتی پوسته استوانه‌ی کامپوزیت با هسته لانه زنبوری تحت فشار متحرک به صورت پژوهش تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفت [۱۴]. در تحقیقی دیگر، ارتعاش آزاد پوسته‌ی مخروطی ساندویچی متشکل از یک هسته از مواد با ضریب پواسون منفی با و بدون تقویت‌کننده محیطی تحت شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت [۱۵].

¹ stent

² Lightweight - Architecture

³ Honeycomb

⁴ Functionally graded material



شکل ۲- طرحواره‌ای از ساختارهای با ضریب پواسون منفی [۱۷]

در شکل ۲ پارامترهای l ، t و d به ترتیب به ضخامت، عرض و طول المان با ضریب پواسون منفی و همچنین ϕ به زاویه‌ی بین دیواره‌ی به داخل فرو رفته با راستای افق اشاره می‌کند. ثابتهای الاستیک مهندسی هسته‌ی با ضریب پواسون منفی به کمک پارامترهای هندسی و خصوصیات ماده به صورت معادله‌ی (۱) قابل محاسبه است [۱۸ و ۱۹].

$$\begin{aligned} E_1^c &= E \frac{\eta_3^3 (\eta_1 - \sin \phi)}{\cos \phi [1 + (\tan^2 \phi + \eta_1 \sec^2 \phi) \eta_3^2]}, \\ E_2^c &= E \frac{\eta_3^3}{\cos \phi (\eta_1 - \sin \phi) (\tan^2 \phi + \eta_3^2)}, \\ G_{12}^c &= G \frac{\eta_3^2}{\eta_1 (1 + 2\eta_1) \cos \phi}, G_{23}^c = G \frac{\eta_3 \cos \phi}{\eta_1 - \sin \phi} \\ G_{13}^c &= G \frac{\eta_3}{2 \cos \phi} \left[\frac{\eta_1 - \sin \phi}{1 + 2\eta_1} + \frac{\eta_1 + 2 \sin^2 \phi}{2(\eta_1 - \sin \phi)} \right], \\ \mu_{12}^c &= - \frac{\sin \phi (1 - \eta_3^2) (\eta_1 - \sin \phi)}{\cos^2 \phi [1 + (\tan^2 \phi + \sec^2 \phi \eta_1) \eta_3^2]}, \\ \mu_{21}^c &= - \frac{\sin \phi (1 - \eta_3^2)}{(\tan^2 \phi + \eta_3^2) (\eta_1 - \sin \phi)}, \\ \rho^c &= \rho \frac{\eta_3 (\eta_1 + 2)}{2 \cos \phi (\eta_1 - \sin \phi)} \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط (۱) c به هسته اشاره می‌کند. طرحواره‌ای از پوسته‌ی استوانه‌ای با هسته با ضریب پواسون منفی در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین E و μ به ترتیب به مدول یانگ و ضریب پواسون می‌باشند و همچنین پارامترهای η_1 و η_3 به صورت رابطه‌ی های (۲) تعریف می‌شود.

$$\eta_1 = \frac{d}{l}, \quad \eta_3 = \frac{t}{l} \quad (2)$$

مطابق با نظریه کلاسیک، رابطه کرنش-جابجایی پوسته‌ی استوانه‌ای به صورت معادله‌ی (۳) بیان می‌گردد [۲۰].

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - z \kappa_x, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 - z \kappa_y, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 - 2z \kappa_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

جایی که

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \kappa_{xy} &= \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به اهمیت سازه‌های پوسته استوانه‌ای از مواد با ضریب پواسون منفی، و استفاده از آن در صنایع مختلف، تحلیل ارتعاشاتی این سازه‌ها می‌تواند بسیار مهم باشد. در این پژوهش به ارتعاشات غیر خطی سازه‌ی پوسته استوانه‌ای با هسته‌ای از مواد با ضریب پواسون منفی پرداخته شده است. با مرور پژوهش‌های گذشته در مورد پوسته‌ی استوانه‌ای با هسته‌ای از مواد با ضریب پواسون منفی و با توجه به عدم بررسی ارتعاشات غیرخطی تحت بار خارجی برای این سازه و عدم بررسی تاثیر پارامترهای هندسی ساختار با ضریب پواسون منفی بر رفتار دینامیکی غیرخطی سازه، تحقیق حاضر حائز اهمیت است. نتایج تحلیل خطی با نتایج تحلیل خطی یک پژوهش تجربی صحت سنجی شده است و برای بررسی تاثیر پارامترهای مختلف هسته‌ی با ضریب پواسون منفی، نمودارهای جابه‌جایی بر حسب زمان و همچنین نمودار جابه‌جایی بر حسب نسبت فرکانسی رسم گردید. و همچنین نمودارهای رخساره فاز برای شکل مودهای مختلف رسم گردید.

۲- معادلات حاکم

در این پژوهش یک پوسته‌ی استوانه‌ای با سه لایه در نظر گرفته شده است که یک لایه به عنوان هسته از مواد با ضریب پواسون منفی می‌باشد و دو لایه‌ی دیگر با یک ماده‌ی همسانگرد در نظر گرفته می‌شود. نوع ساختار با ضریب پواسون منفی در نظر گرفته شده برای این پژوهش، از نوع درون رو^۱ می‌باشد. این نام گذاری به زاویه‌ی منفی و دیواره‌ی مایل به داخل این نوع سلول ها اشاره دارد. این رایج‌ترین مکانیزم ایجاد سازه با ضریب پواسون منفی می‌باشد که اولین بار توسط گیسون^۲ و اشبی^۳ [۱۶] معرفی شد. همچنین لازم به ذکر است که خاصیت ضریب پواسون منفی ایجاد شده در لایه میانی به دلیل خواص هندسی می‌باشد و جنس ماده‌ی استفاده شده این خاصیت را ندارد. در یک پژوهش تجربی که برای تحلیل مشخصات ارتعاشاتی یک استوانه هسته‌ی ضریب پواسون منفی انجام شد، فرکانس‌های طبیعی استوانه با هسته‌ی ضریب پواسون منفی به روش آنالیز مودال تجربی بدست آمد که از داده‌های این مسئله جهت صحت‌سنجی این پژوهش بهره گرفته می‌شود [۱۷]. طرحواره‌ای از ساختار با ضریب پواسون منفی در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود، مشخص است که در اثر کشش این المان، علاوه بر جهت کشیدگی، المان از سمت عمود بر جهت کشیدگی نیز افزایش طول پیدا می‌کند، به این صورت که المان هم افزایش طولی و هم افزایش جانی پیدا می‌کند که این به معنای پواسون منفی می‌باشد.

¹ Re-Entrant

² Gibson

³ Ashby

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) &= \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{N_x}{R} &+ \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ ph \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q &= \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon \rho_1 \frac{\partial w}{\partial t} \\ \text{where } \rho_1 &= \int_{-h/2}^{-h_c/2} \rho dz + \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \rho^c dz + \int_{h_c/2}^{h/2} \rho dz \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه (۹)، ρ_1 بیانگر جرم متوسط پوسته ساندویچی استوانه‌ای بر واحد سطح با در نظر گرفتن هر سه لایه بیرونی و درونی و هسته می‌باشد. P بیانگر بار فشاری محوری است که روی دو سر پوسته اعمال می‌شود. q فشار خارجی است که به طور یکنواخت روی سطح پوسته توزیع می‌شود.

۳- تحلیل غیرخطی دینامیکی

شرایط مرزی در این مقاله به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته می‌شود، بنابراین در $x=L$ و $x=0$ می‌توان نوشت:

$$w = 0, v = 0, M_x = 0 \quad (10)$$

به جهت ارضای شرایط مرزی فوق، میدان جابه‌جایی به صورت معادله (۱۱) در نظر گرفته می‌شود [۲۱ و ۲۲].

$$\begin{aligned} u &= U(t) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \\ v &= V(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \\ w &= W(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \quad (11)$$

در معادلات (۱۱) U و V و W به دامنه‌ی حرکت ارتعاشی و همچنین m و n به شماره‌ی شکل مودهای طولی و محیطی پوسته استوانه اشاره می‌کنند. با جایگذاری روابط (۱۱) در معادلات (۹)، این معادلات از معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. از سوی دیگر، با دقت قابل قبولی، می‌توان از فرض ولمیر [۲۳] در تحلیل دینامیکی استفاده کرد به گونه‌ای که چون $w \ll v, v \ll u$ می‌توان از نیروهای اینرسی $\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ و $\rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ صرف‌نظر کرد. با این فرض و از حل معادلات اول و دوم از روابط (۹) و جایگذاری نتایج در معادله سوم، معادله (۱۲) بدست می‌آید.

$$\rho_1 \frac{d^2 W}{dt^2} + 2\varepsilon \rho_1 \frac{dW}{dt} + a_1 W - a_2 W^2 + a_3 W^3 = \frac{16q}{\pi^2 mn} \quad (12)$$

ضرایب a_1, a_2, a_3 مربوط به رابطه (۱۲) مطابق با رابطه (۱۳) بیان می‌گردد.

در روابط فوق $\varepsilon^0, \gamma^0, \kappa$ به ترتیب به کرنش نرمال، کرنش برشی صفحه‌ی میانی و انحنای اشاره دارد. و همچنین R بیانگر شعاع پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشد.

مطابق قانون هوک و براساس نظریه کلاسیک، معادلات ساختاری برای پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی به صورت معادله (۵) ارائه می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که درایه‌های ماتریس سفتی در رابطه (۵) به صورت رابطه (۶) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} Q_{11}^c &= \frac{E_1^c}{1 - \mu_{12}^c \mu_{21}^c}, Q_{12}^c = \frac{\mu_{12}^c E_2^c}{1 - \mu_{12}^c \mu_{21}^c} \\ Q_{22}^c &= \frac{E_2^c}{1 - \mu_{12}^c \mu_{21}^c}, Q_{66}^c = G_{12}^c \\ Q_{11}^T &= Q_{22}^T = \frac{E}{1 - \mu^2}, Q_{12}^T = \frac{\mu E}{1 - \mu^2}, Q_{66}^T = \frac{E}{2(1 + \mu)} \\ Q_{12}^B &= Q_{22}^B = \frac{E}{1 - \mu^2}, Q_{12}^B = \frac{\mu E}{1 - \mu^2}, Q_{66}^B = \frac{E}{2(1 + \mu)} \end{aligned} \quad (6)$$

در روابط (۶) T و B به ترتیب به لایه بالایی و لایه پایینی اشاره می‌کند. با انتگرال‌گیری از مولفه‌های تنش در راستای ضخامت، منته‌های نیروی محوری، برشی و ممان به صورت رابطه (۷) قابل محاسبه خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که در این رابطه، N به منته‌های نیروی محوری، Q به منته‌های نیروی برشی و M به منته‌های ممان اشاره می‌کند. مقادیر A, B, D از انتگرال‌گیری مطابق رابطه (۸) بدست می‌آید.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{-h_c/2} Q_{ij}^B(1, z, z^2) dz + \int_{-h_c/2}^{h_c/2} Q_{ij}^c(1, z, z^2) dz + \int_{h_c/2}^{h/2} Q_{ij}^T(1, z, z^2) dz \quad (8)$$

در رابطه (۸) h و h_c به ترتیب به ضخامت کل لایه‌های استوانه و ضخامت هسته اشاره دارد. معادله حرکت غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک براساس نظریه بهبود یافته‌ی پوسته‌ی دائل به صورت روابط (۹) نوشته می‌شود [۲۰].

۲-۳- منحنی دامنه-فرکانس

برای ارتعاشات غیرخطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار گسترده عرضی $q=Q*\sin(t)$ و با فرض اعمال بار اولیه فشاری معادله‌ی (۱۶) برقرار است.

$$\rho_1 \frac{d^2 W}{dt^2} + 2\varepsilon \rho_1 \frac{dW}{dt} + a_1 W - a_2 W^2 + a_3 W^3 - \frac{16Q}{\pi^2 mn} \sin \Omega t = 0 \quad (16)$$

با تقسیم رابطه‌ی (۱۶) به ρ_1 و همچنین با توجه به رابطه‌ی (۱۵)، معادله‌ی (۱۷) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dW}{dt} + \omega_{mn}^2 (W - HW^2 + KW^3) - F \sin \Omega t = 0 \quad (17)$$

در معادله‌ی (۱۷) $H=a_2/a_1$ ، $K=a_3/a_1$ و همچنین $F=16Q/\rho_1 \pi^2 mn$ می‌باشد. برای بدست آوردن رابطه‌ی دامنه - فرکانس رابطه‌ی (۱۸) را در نظر گرفته می‌شود.

$$W = A \sin \Omega t \quad (18)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۸) در رابطه‌ی (۱۷)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد.

$$X \equiv A(\omega_{mn}^2 - \Omega^2) \sin \Omega t + 2\varepsilon A \Omega \cos t - \omega_{mn}^2 H A^2 \sin^2 \Omega t + K \omega_{mn}^2 A^3 \sin^3 \Omega t - F \sin \Omega t = 0 \quad (19)$$

با انتگرال گیری به صورت

$$\int_0^{\pi/2\Omega} X \sin \Omega t dt = 0 \quad (20)$$

رابطه‌ی دامنه - فرکانس به صورت معادله (۲۱) بدست می‌آید.

$$\alpha^2 - \frac{4\varepsilon}{\pi \omega_{mn}} \alpha = 1 - \frac{8}{3\pi} HA + \frac{3K}{4} A^2 - \frac{F}{A \omega_{mn}^2} \quad (21)$$

در معادله‌ی (۲۱)، A نشان دهنده‌ی دامنه و α نشان دهنده‌ی نسبت فرکانس (فرکانس طبیعی غیر خطی به فرکانس طبیعی خطی) می‌باشد که به صورت رابطه زیر قابل بیان است.

$$\alpha = \frac{\Omega}{\omega_{mn}} \quad (22)$$

بدون در نظر گرفتن میرایی رابطه‌ی (۲۱) به صورت روابط (۲۳) بازنویسی می‌شود.

$$\Omega^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{8}{3\pi} HA + \frac{3K}{4} A^2\right) - \frac{F}{A} \quad (23)$$

or

$$\alpha^2 = 1 - \frac{8}{3\pi} HA + \frac{3K}{4} A^2 - \frac{F}{A \omega_{mn}^2}$$

در معادله‌ی (۲۳)، Ω نشان دهنده‌ی فرکانس طبیعی غیر خطی می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۲۰) مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی غیر خطی تحت تاثیر نیروی تحریک می‌باشد. با حذف عبارت شامل نیروی تحریک، فرکانس طبیعی غیر خطی برای حالت ارتعاشات آزاد به صورت رابطه‌ی (۲۴) حاصل می‌شود.

$$\omega_{NL}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{8}{3\pi} HA + \frac{3K}{4} A^2\right) \quad (24)$$

$$a_1 = -L_{33} - \frac{L_{31}(L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}) + L_{32}(L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23})}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2},$$

$$a_2 = N_3 + \frac{L_{31}(L_{12}N_2 - L_{22}N_1) + L_{32}(L_{12}N_1 - L_{11}N_2)}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2} + \frac{N_5(L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}) + N_6(L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23})}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2} \quad (13)$$

$$a_3 = -N_4 - \frac{N_5(L_{12}N_2 - L_{22}N_1) + N_6(L_{21}N_1 - L_{11}N_2)}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}$$

که در رابطه‌ی (۱۳) عملگرهای L و N را به صورت روابط (۱۴) قابل محاسبه هستند.

$$L_{11} = -A_{11} \frac{\pi^2 m^2}{L^2} - A_{66} \frac{n^2}{R^2}, n$$

$$L_{12} = L_{21} = (-A_{12} - A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R}) \frac{\pi mn}{LR},$$

$$L_{13} = L_{31} = -A_{12} \frac{\pi m}{LR} + B_{11} \frac{\pi^3 m^3}{L^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\pi mn^2}{LR^2},$$

$$L_{22} = (-A_{66} + \frac{2B_{66}}{R} - \frac{D_{66}}{R}) \frac{\pi^2 m^2}{L^2} + (-A_{11} + \frac{2B_{11}}{R} - \frac{D_{11}}{R^2}) \frac{n^2}{R^2},$$

$$L_{23} = L_{32} = (-\frac{A_{11}}{R} + \frac{B_{11}}{R^2}) \frac{n}{R} + (B_{11} - \frac{D_{11}}{R}) \frac{n_3}{R^3} + (B_{12} + 2B_{66} - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R}) \frac{\pi^2 m^2 n}{L^2 R},$$

$$L_{33} = 2B_{12} \frac{\pi^2 m^2}{L^2 R} + 2B_{11} \frac{n^2}{R^3} - D_{11} \frac{\pi^4 m^4}{L^4} - D_{11} \frac{n^4}{R^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^2 m^2 n^2}{L^2 R^2} - \frac{A_{11}}{R^2} + \frac{Ph \pi^2 m^2}{L^2}, \quad (14)$$

$$N_1 = -32A_{11} \frac{\pi m^2}{9L^3 n} + 16(A_{12} - A_{66}) \frac{n}{9\pi LR^2},$$

$$N_2 = (-A_{66} + A_{12} + \frac{B_{66} - B_{12}}{R}) \frac{16m}{9L^2 R} + (-A_{11} + \frac{B_{11}}{R}) \frac{32n^2}{9\pi^2 R^3 m},$$

$$N_3 = 16A_{12} \frac{m}{3L^2 R n} + 16A_{11} \frac{n}{3\pi^2 R^3 m} + 32(B_{66} - B_{12}) \frac{mn}{3L^2 R^2},$$

$$N_4 = -9A_{11} \frac{\pi^4 m^4}{32L^4} - (A_{12} + 2A_{66}) \frac{\pi^2 m^2 n^2}{16L^2 R^2} - 9A_{11} (\frac{n^4}{32R^4}),$$

$$N_5 = 32A_{11} \frac{\pi m^2}{9L^3 n} + 32(A_{12} - A_{66}) \frac{n}{9\pi LR^2},$$

$$N_6 = (A_{12} - A_{66} + \frac{B_{66} - B_{12}}{R}) \frac{32m}{9L^2 R} + (A_{11} - \frac{B_{11}}{R}) \frac{32n^2}{9\pi^2 R^3 m}$$

۱-۳- فرکانس طبیعی

با حذف ترم‌های غیرخطی رابطه‌ی (۱۳)، فرکانس طبیعی خطی سیستم ارتعاشاتی بدین صورت قابل محاسبه است.

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{a_1}{\rho_1}} \quad (15)$$

۳-۳- پاسخ غیر خطی سیستم

معادله‌ی غیر خطی ارتعاشی به صورت رابطه‌ی (۱۷) تعریف می‌شود که این معادله به صورت عددی حل می‌شود و برای حل عددی این معادله از روش عددی رانگ-کوتا استفاده می‌گردد. با حل این معادله نمودار-های دامنه بر حسب نسبت فرکانس و همچنین تغییرات دامنه بر حسب زمان برای بررسی اثر تغییر زاویه‌ی المانهای ساختار با ضریب پواسون منفی و همچنین تغییرات طول و شعاع استوانه رسم می‌گردد.

۴- بحث روی نتایج

به جهت اهمیت پوسته‌های استوانه‌ای با هسته‌های با ضریب پواسون منفی در صنایع گوناگون، تحلیل‌های ارتعاشاتی این سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در این پژوهش، ارتعاش آزاد و اجباری این نوع از سازه با مدل غیر خطی مورد تحلیل قرار گرفته است. ابتدا روش حل این مسئله، با داده‌های یک پژوهش تجربی مقایسه گردید. همچنین در بخش نتایج نمودارهای دامنه بر حسب زمان، دامنه بر حسب نسبت فرکانس رسم گردید. و نیز رخساره‌ی فاز برای چندین مود مختلف رسم گردید. پارامترهای مختلف طراحی سازه‌های با ضریب پواسون منفی، مورد مقایسه قرار گرفت.

۴-۱- صحنه سنجی نتایج

برای تایید نتایج تحلیلی به دست آمده از این پژوهش، نتایج با داده‌های یک پژوهش تجربی مقایسه گردید. ویژگی‌های ماده‌ی مورد بررسی به شرح جدول (۱) است.

جدول ۱- ویژگی‌های پوسته‌ی ساندویچی استوانه‌ای

E(GPa)	E _{1c} (MPa)	E _{2c} (MPa)	ρ(kg/m ³)	L(m)	t (s)
۲۱۰	۳۸۸۵٫۲	۹۹۹٫۶	۷۸۰۰	۰/۱۰۴	۰/۱
d	h ₁ (m)	h ₂ (m)	η ₁	η ₃	φ
۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۲	۰/۰۰۳	۲/۲۸	۰/۳۱	۶۰
μ	h(m)	ε			
۰/۳	۰/۰۰۷	۰/۱			

پارامتر فرکانسی جهت صحنه سنجی نتایج با مرجع [۱] به صورت رابطه‌ی (۲۵) تعریف می‌شود.

$$f = \omega R \sqrt{\rho(1 - \mu^2)} / E \quad (25)$$

نتایج تحلیلی پژوهش حاضر با نتایج تجربی مقاله لی [۱۶] مقایسه می‌گردد و همچنین طبق رابطه‌ی (۲۶) درصد خطا بین نتایج تجربی و تحلیلی بدست می‌آید که در جدول قابل ملاحظه است.

$$\text{error}(\%) = \frac{|\Omega_{\text{Theory}} - \Omega_{\text{Experiment}}|}{\Omega_{\text{Theory}}} \quad (26)$$

خطای قابل ملاحظه‌ای در شکل مود سوم دیده می‌شود که می‌تواند مربوط به خطای اپراتور یا خطای تجهیزات اندازه‌گیری مربوط باشد.

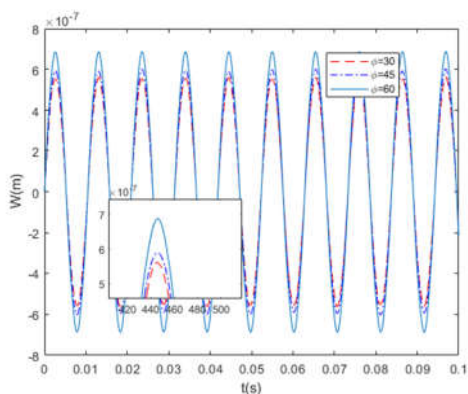
جدول ۲- نتایج تحلیلی و نتایج تجربی

درصد خطا	نتایج تحلیلی	نتایج تجربی [۱۷]	شکل مود (n)
۱۲/۸۳	۰/۱۰۸۰	۰/۱۲۳۹	۱
۱/۸۵	۰/۱۵۳۵	۰/۱۵۰۷	۲
۲۹/۴۸	۰/۲۴۲۷	۰/۳۴۴۲	۳
۱/۹۱	۰/۳۸۸۲	۰/۳۸۰۹	۴
۱/۵۶	۰/۵۸۵۴	۰/۵۷۶۴	۵

۴-۲- نتایج

با در نظر گرفتن معادلات (۱۷) و (۲۳) و حل عددی این معادلات به روش رانگ-کوتا، نمودارهای دامنه بر حسب زمان و همچنین نمودار-های دامنه بر حسب نسبت فرکانس به دست می‌آید. اثر تغییر پارامترهای مختلف تحت این نمودارها بررسی می‌گردد. لازم به ذکر است که در رسم نمودارها، ویژگی‌های ماده به شرح جدول (۱) می‌باشد و در صورت تغییر، در عنوان و یا توضیحات شکل به آن اشاره می‌گردد.

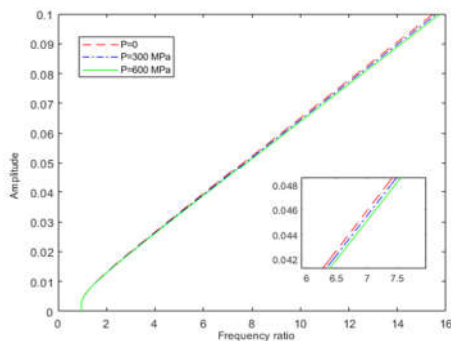
تاریخچه‌ی زمانی سیستم برای زاویه‌های مختلف المان به صورت نمودار شکل ۳ رسم گردیده است و مشاهده می‌گردد که با افزایش زاویه دامنه‌ی نوسان افزایش پیدا می‌کند. با افزایش φ، هرچند مدول الاستیسیته هسته در جهت طولی افزایش می‌یابد، اما مدول الاستیسیته در جهت محیطی کاهش و چگالی هسته افزایش می‌یابد که این عوامل به نرمتر شدن عملکرد پوسته در مدهای محیطی منجر می‌شود و که نتیجه آن افزایش دامنه نوسان خواهد بود.



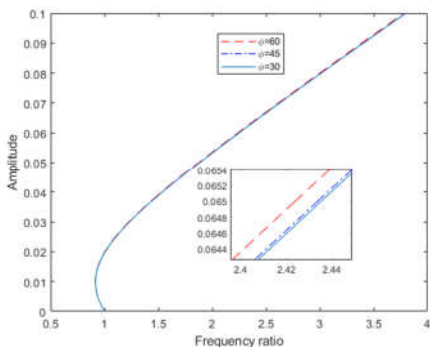
شکل ۳- تغییرات جابه‌جایی بر حسب زمان و بررسی اثر زاویه المان در حالت L/R=2, P=0, F=1500 و شکل مود اول

همچنین تاریخچه‌ی زمانی سیستم برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع استوانه درحالیکه طول ثابت است و شعاع کاهش می‌یابد، مطابق شکل ۴ رسم گردیده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش نسبت

فرکانسی کمتر از ۱ خواهد بود. اما اگر دامنه بیشتر از مقدار مذکور باشد، فرکانس غیرخطی از فرکانس خطی سیستم بیشتر خواهد شد. البته می توان اینگونه نیز بیان کرد که در دامنه های کوچک، سیستم رفتار نرم تر و در دامنه های بیشتر، رفتار سفت تر از خود نشان می دهد. همچنین از شکل ۷ نیز مشخص است که در یک دامنه مشخص، نسبت فرکانسی پوسته با هسته ای که دارای زاویه ϕ کوچکتری است، مقدار بیشتری را دارا می باشد که دلیل آن سفتی بیشتر این پوسته می باشد که در توضیحات شکل ۳ نیز به آن اشاره شد.

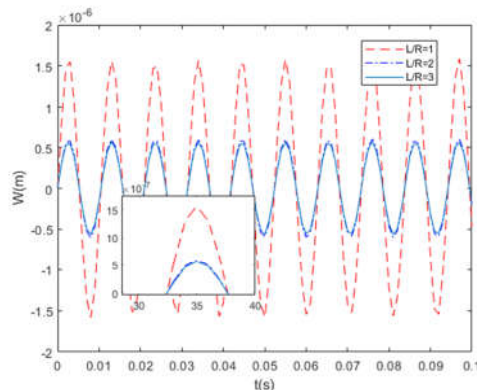


شکل ۶- تغییرات جابه جایی بر حسب نسبت فرکانس و بررسی اثر فشار اولیه در حالت $L/R=2$ و $F=0$ ، $\phi=60^\circ$



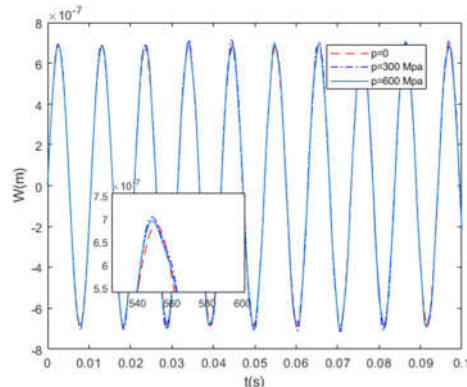
شکل ۷- تغییرات جابه جایی بر حسب فرکانس و بررسی اثر زاویه المان با ضریب پواسون منفی در حالت $L/R=2$ و $P=0$ ، $F=0$ ، $\phi=30^\circ$

(یعنی کاهش شعاع) سفتی سیستم افزایش می یابد و در نتیجه دامنه جابه جایی کاهش می یابد که همین انتظار نیز وجود داشت.



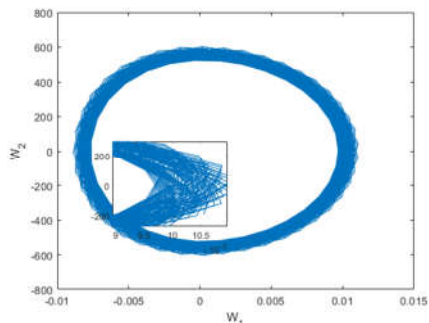
شکل ۴- تغییرات جابه جایی بر حسب زمان و بررسی اثر نسبت طول به شعاع در حالت $P=0$ و $F=1500$ ، $\phi=60^\circ$

تاریخچه زمانی سیستم برای فشار اولیه های مختلف در نمودار شکل ۵ رسم گردیده است. از این نمودار مشاهده می گردد هرچند تغییرات دامنه ی نوسان محسوس نیست اما با افزایش فشار اولیه دامنه ی نوسان افزایش پیدا می کند که دلیل آن این است اعمال فشار محوری به پوسته باعث می شود که در واقع استحکام پوسته کاهش یابد و پوسته راحت تر و با مقاومت کمتر نوسان کند.

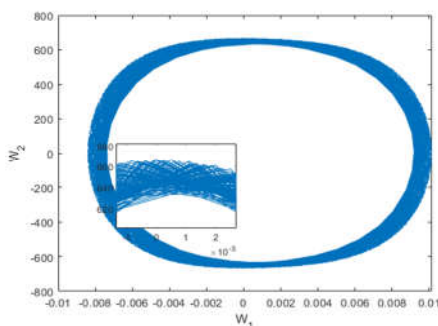


شکل ۵- تغییرات جابه جایی بر حسب زمان و بررسی اثر فشار اولیه در حالت $L/R=2$ و $F=1500$ ، $\phi=30^\circ$

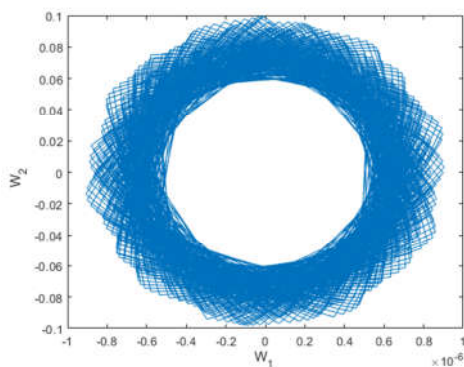
از حل معادله غیر خطی رابطه (۲۴) برای ارتعاش آزاد سیستم، دامنه ی نوسانات بر حسب نسبت فرکانس رسم گردید که در شکل های ۶ و ۷ نمایش داده شده است. در شکل ۶ تغییرات دامنه بر حسب نسبت فرکانسی (فرکانس غیرخطی ارتعاش آزاد به فرکانس خطی) برای بارهای فشاری مختلف رسم شده است. مطابق این دو شکل بسته به اینکه دامنه جابه جایی اولیه چه مقدار باشد، فرکانس ارتعاش سیستم تغییر می کند. همانطور که دانسته شده است در سیستم های غیرخطی، فرکانس به دامنه مرتبط است. مطابق شکل ۷ اگر دامنه کمتر از ۰.۲ باشد، فرکانس غیرخطی از فرکانس خطی کمتر می شود و نسبت



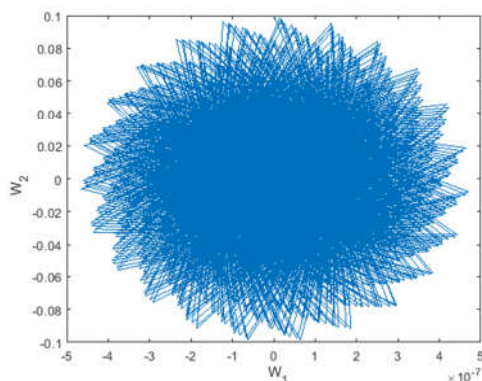
شکل ۱۰- رخساره فاز برای شکل مود اول و سرعت اولیه ۰/۰۱



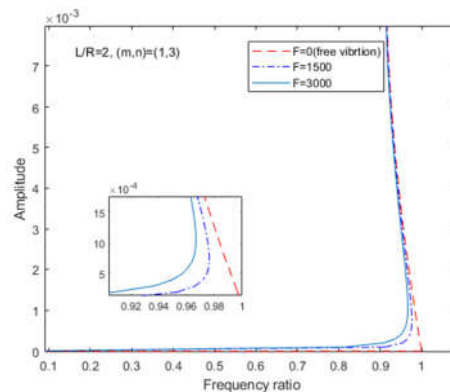
شکل ۱۱- رخساره فاز برای شکل مود سوم و سرعت اولیه ۰/۰۱



شکل ۱۲- رخساره فاز برای شکل مود پنجم و سرعت اولیه ۰/۰۱

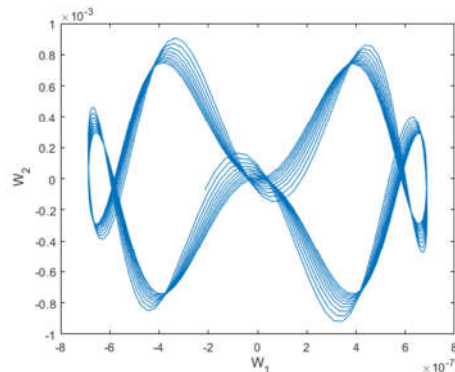


شکل ۱۳- رخساره فاز برای شکل مود هفتم و سرعت اولیه ۰/۰۱



شکل ۸- تغییرات جابه جایی بر نسبت فرکانس و بررسی اثر نیرو در حالت $P=0$ و $L/R=2$ ، $\phi=60^\circ$

مطابق شکل ۸ اثر وجود نیروی خارجی و ارتعاشات اجباری مورد توجه قرار گرفته است. در این شکل تأثیر دامنه نیروی خارجی بر منحنی فرکانس-دامنه در ارتعاش اجباری نشان داده شده است. منحنی خط-چین مورد ارتعاش آزاد است ($F=0$)، منحنی نقطه-خط موردی است که $F=1500$ و منحنی با خط کامل برای مورد $F=3000$ است. مشاهده می‌شود که وقتی دامنه نیروی خارجی افزایش می‌یابد، منحنی فرکانس-دامنه از منحنی مورد ارتعاش آزاد دورتر می‌شود و در واقع در یک نسبت فرکانسی مشخص، دامنه ارتعاشی سیستم با نیروی بزرگتر، بیشتر خواهد بود اما این اثر در نسبتهای فرکانسی دور از ۱، کمتر می‌باشد.



شکل ۹- رخساره فاز برای شکل مود اول و شرایط اولیه صفر

مطابق شکل ۹ رخساره فاز^۱، که بیانگر تغییرات سرعت به تغییرات موقعیت می‌باشد برای شکل مود اول با شرایط اولیه صفر رسم شده است.

مطابق شکل ۱۰، ۱۱ و ۱۲ که رخساره فاز برای مود اول و سرعت اولیه ۰/۰۱ رسم شده است. مشاهده می‌گردد که برای شکل مود اول، سوم و پنجم نمودار به صورت یک چمبره^۲ می‌باشد. نمودار رخساره فاز نشان دهنده نقاط پایداری سیستم ارتعاشاتی می‌باشد.

^۱ Phase Portrait

^۲ torus

- [10] Gao, Q., Zhao, X., Wang, C., Wang, L., & Ma, Z. Crashworthiness analysis of a cylindrical auxetic structure under axial impact loading. *Science China Technological Sciences*. 2020
- [11] Gao, Q., Liao, W. H., & Huang, C. Theoretical predictions of dynamic responses of cylindrical sandwich filled with auxetic structures under impact loading. *Aerospace Science and Technology*. 2020; 107: 106270.
- [12] Quoc, T. H., Tu, T. M., & Van Tham, V. Free vibration and dynamic response of sandwich composite plates with auxetic honeycomb core. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*. 2021; 15(4), 1-14.
- [13] Guo, Y., Zhang, J., Chen, L., Du, B., Liu, H., Chen, L., ... & Liu, Y. Deformation behaviors and energy absorption of auxetic lattice cylindrical structures under axial crushing load. *Aerospace Science and Technology*. 2020; 98:105662.
- [14] Eipakchi, H., & Nasrekani, F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure. *Composite Structures*. 2020; 254: 112847.
- [15] Alinia, M., Nopour, R., Aghdam, M.M., & Hedayati, R. The effect of auxeticity on the vibration of conical sandwich shells with ring support under various boundary conditions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023; 152: 130-147.
- [16] Ashby, M. F., Gibson, L. J. *Cellular solids: structure and properties*, Press Synd. Univ. Cambridge, Cambridge, UK. 1997; 175-231.
- [17] Li, B., & Fu, T. Analysis of vibration characteristics of auxetic sandwich cylindrical shells resting on elastic foundation. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2023; 24(5): 1865-1882.
- [18] Zhu, Xiufang, et al. Vibration frequencies and energies of an auxetic honeycomb sandwich plate. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019; 26.23:1951-1957.
- [19] Qing, Tian D., and Chun Y. Zhi. Wave propagation in sandwich panel with auxetic core. 2010; 393-402.
- [20] Brush, D. O., Almroth, B. O., & Hutchinson, J. W. *Buckling of bars, plates, and shells*. 1975.
- [21] Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Applied Acoustics*. 2000; 61(1): 111-129
- [22] Loy, C. T., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1999; 41(3): 309-324.
- [23] Vol'mir, A. S. *The nonlinear dynamics of plates and shells*. Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh. 1974.

رخساره فازی که در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود نشان می‌دهد که رخساره فاز از حالت چنبره‌ای تبدیل به کانونی شده است و پایداری به سمت مرکز میل می‌کند. لازم به توضیح است که در رسم نمودارهای رخساره فاز زاویه المان ۶۰ درجه، نسبت طول به شعاع استوانه ۲، $P=0$ ، $F=1500$ در نظر گرفته شده است.

۵- نتیجه‌گیری

مقاله حاضر به مطالعه ارتعاش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته‌ای دارای ضریب پواسون منفی تحت بارهای مکانیکی محوری و عرضی پرداخته است. معادلات حاکم با استفاده از نظریه پوسته دائل بهبود یافته، با در نظر گرفتن غیرخطی بودن هندسی در تمام روابط کرنش-جابجایی برای پوسته استوانه‌ای استخراج گردید. به اختصار نتایج زیر حاصل گردید.

با افزایش زاویه‌ی بین دیواره‌های المان هسته با ضریب پواسون منفی دامنه افزایش می‌یابد.

با افزایش فشار اولیه محوری، مشاهده می‌گردد که دامنه‌ی نوسان افزایش می‌یابد، هر چند افزایش قابل ملاحظه‌ای نمی‌باشد.

در ارتعاش آزاد و در دامنه‌های کوچک، فرکانس غیرخطی از فرکانس خطی کوچکتر و بالعکس.

در ارتعاش آزاد و در یک دامنه مشخص، پوسته با هسته‌ای که دارای زاویه ϕ کوچکتری است، نسبت فرکانسی بیشتری را دارا می‌باشد.

اثر بزرگی نیروی خارجی بر دامنه ارتعاشات پوسته برای فرکانسهای تحریک نزدیک به فرکانس خطی سیستم، بزرگتر است.

۶- مراجع

- [1] Lakes, R. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987; 1038-1041.
- [2] Donoghue, J. P., K. L. Alderson, and K. E. Evans. The fracture toughness of composite laminates with a negative Poisson's ratio. *physica status solidi (b)*. 2009; 246.9: 2011-2017.
- [3] Eipakchi, H., & Nasrekani, F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure. *Composite Structures*. 2020; 254: 112847.
- [4] Sarvestani, H. Y., Akbarzadeh, A. H., Niknam, H., & Hermenean, K. 3D printed architected polymeric sandwich panels: Energy absorption and structural performance. *Composite Structures*. 2018; 200, 886-909
- [5] Ruan, H., Ning, J., Wang, X., & Li, D. Novel tubular structures with negative Poisson's ratio and high stiffness. *physica status solidi (b)*. 2021; 258(4): 2000503.
- [6] Bich, D. H., & Nguyen, N. X. Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations. *Journal of Sound and Vibration*. 2012; 331(25): 5488-5501.
- [7] Yang, S. W., Zhang, W., Hao, Y. X., & Niu, Y. Nonlinear vibrations of FGM truncated conical shell under aerodynamics and in-plane force along meridian near internal resonances. *Thin-Walled Structures*. 2019; 142, 369-391
- [۸] نکویی م، محمدی م، راغبی م، تحلیل کماتش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در محیط گرمایی. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، ۱۴۰۰.
- [9] Zhang, J., Zhu, X., Yang, X., & Zhang, W. Transient nonlinear responses of an auxetic honeycomb sandwich plate under impact loads. *International Journal of Impact Engineering*. 2019; 134:103383.