

کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی در حضور نامعینی تحت بارگذاری متناوب با شرایط مرزی مختلف

کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، farzin.parham17@gmail.com
دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، habibahmadif@shahroodut.ac.ir
دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، kamran.foroutan@shahroodut.ac.ir
کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، mohammadheydari@shahroodut.ac.ir

فرزین پرهام
حبیب احمدی*
کامران فروتن
محمد حیدری سرائی

چکیده

در سال‌های اخیر کنترل ارتعاشات تیرها، به طور چشمگیری، مورد توجه پژوهشگران بوده است و تحقیقات فراوانی در این زمینه به عمل آمده است. با توجه به اینکه جنس تیرهای بررسی شده، اکثراً فلز یا مواد مرکب بوده‌اند، لذا در این تحقیق به منظور افزایش مقاومت فیزیکی و حرارتی، تیر مورد بررسی از جنس مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. در این مقاله به بررسی کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف تحت بارگذاری خارجی پرداخته شده است. دو لایه پیزوالکتریک به سطوح بالایی و پایینی تیر متصل شده‌اند تا به عنوان حسگر و عملگر استفاده شوند. معادلات حرکت با استفاده از روش گلرکین گسسته‌سازی و با استفاده از شبیه‌سازی عددی حل شده است. برای کنترل ارتعاشات تیر از روش کنترل خطی‌سازی پسخورد و روش مود لغزشی استفاده شده است و نمودارهای خیز-زمان و ولتاژ زمان برای پنج حالت شرط مرزی دوسر گیردار، گیردار-آزاد، گیردار-ساده، آزاد-آزاد و ساده-ساده نمایش داده شده است. نتایج روش‌های کنترلی ذکر شده با عدم قطعیت و بدون عدم قطعیت، برای تمام شرایط مرزی باهم مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: تیر مدرج تابعی، کنترل فعال، ارتعاشات غیرخطی، روش خطی‌سازی پسخورد، روش مود لغزشی.

Nonlinear Active Vibration Control of Functionally Graded Beam in Presence of Uncertainty under Periodic Load with Different Boundary Conditions

F. Parham
H. Ahmadi*
K. Foroutan
M. Heydari Saraei

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Abstract

In recent years, the vibrations control of beams has been significantly considered by researchers and a lot of research has been done in this field. Given that the material of studied beams was mostly metal or composite, so in this study, in order to increase the physical and thermal resistance, the studied beam was considered as functionally graded (FG). In this paper, the active control of nonlinear vibrations for an FG beam with different boundary conditions under external loading is investigated. Two piezoelectric layers are connected to the upper and lower surfaces of the beam to be used as sensors and actuators. To discretize the equations of motion, Glerkin method is used, and the numerical simulation is utilized to solve the discretized equations. In order to control the vibrations of the beam, the feedback linearization control and the sliding mode methods have been used. The time-amplitude and time-voltage curves are shown for five boundary conditions, including, clamped-clamped, free-clamped, simply-clamped, free-free and simply-supported ends. The results of the mentioned control methods are compared for all boundary conditions in the presence and absence of uncertainty.

Keywords: FGM beam, Active control, Nonlinear vibration, Linearization feedback method, Sliding mode method.

مدرج تابعی با در نظر گرفتن حرکت سیال خنک از داخل آن پرداخته‌اند. آن‌ها با فرض مدرج تابعی بودن جنس، معادله‌ی توزیع گرما در راستای ضخامت را حل کرده‌اند. آیدین [۳] به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر مدرج تابعی دارای ترک، پرداخته است؛ او ترک را به صورت یک فنر بدون جرم در نظر گرفته است. تانگ و همکاران [۴]، ارتعاشات آزاد یک تیر مدرج تابعی را مورد بررسی قرار داده‌اند و روشی برای محاسبه تحلیلی فرکانس‌های طبیعی تیر مفروض ارائه کرده‌اند. تیان و همکاران [۵] با استفاده از یک مدل نیمه تحلیلی، ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی دارای تخلخل و مقطع دو مخروطی و با استفاده از یک مدل نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. اله کرمی و قصاب‌زاده سریزدی [۶]، ارتعاشات آزاد پوسته مدرج تابعی نازک را مورد بررسی قرار داده‌اند.

۱- مقدمه

سازه‌های نسبتاً سبک و انعطاف‌پذیر به صورت بسیار گسترده در مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه مطالعه مواد مدرج تابعی دارای اهمیت بسیار بالایی می‌باشد. مواد مدرج تابعی به موادی جدید و پیشرفته با ساختارهای ناهمگن گفته می‌شود که به طور معمول از دو ماده سرامیک و فلز ساخته می‌شوند [۱]. کنترل ارتعاشات برای از بین بردن حرکات نامطلوب سیستم صورت می‌گیرد. در این تحقیق کنترل فعال مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این نوع کنترلگر، با اعمال مقدار معینی انرژی (مثل نیرو، گشتاور، گرما و ...) بر ساختار کنترل‌شونده، آن را کنترل می‌کند.

فاضل‌زاده و حسینی [۲] به بررسی ارتعاشات یک تیر توخالی

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: habibahmadif@shahroodut.ac.ir

آن‌ها با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همپلتون معادله حاکم بر مساله را بدست آورده‌اند. کارامانلی [۷]، رفتار ارتعاشات آزاد یک تیر مدرج تابعی دو جهته را برای شرایط مرزی مختلف و با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم، مورد بررسی قرار داده است. پیل افکن و خواجه‌زاده [۸] به بررسی ارتعاشات نانوتیر مگنو-الکترو-الاستیک تیموشنکو پرداخته‌اند. در این مطالعه از نظریه الاستیسیته موضعی خطی با فرض میدان‌های جابه‌جایی یک بعدی و میدان الکترو مغناطیس دو بعدی استفاده شده است. پاتیل و کادولی [۹] به حل معادلات دیفرانسیل حاکم به منظور کنترل ارتعاشات یک تیر مدرج تابعی با استفاده از لایه‌های مغناطیسی و روش مربعات دیفرانسیلی پرداخته‌اند. پاندا و همکاران [۱۰] به بررسی ارتعاشات فعال یک تیر مدرج تابعی هوشمند با استفاده از یک لایه میرایی فعال مقید ساخته شده از مواد الیاف‌های کامپوزیتی فعال پرداخته‌اند.

برانت و پروسلایر [۱۱] به وسیله الگوریتم ژنتیک، محل عملگرها و حسگرها را روی یک صفحه‌ی مدرج تابعی بهینه کرده‌اند و همچنین با استفاده از تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه‌ی دوم به کنترل ارتعاشات آن صفحه پرداخته‌اند. بوداگی و شاکری [۱۲] از بازخورد منفی سرعت برای افزایش میرایی یک تیر با مقطع مستطیلی مواد مدرج تابعی استفاده و عوامل دمایی و جنس را بر پارامترهای کنترل بررسی کرده‌اند. شنگ و وانگ [۱۳] به بررسی کنترل فعال ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی پرداخته‌اند و تأثیرات مواد پیزوالکتریک مختلف و فرم‌های بارگیری متنوع روی کنترل فعال ارتعاشی را مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین شنگ و وانگ [۱۴] به حل تقریبی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک، تحت شوک حرارتی و بارهای مکانیکی حرکتی پرداخته‌اند و با استفاده از روش بازخورد سرعت منفی، کنترل فعال ارتعاشات را مورد بررسی قرار داده‌اند. هی و همکاران [۱۵]، فرمول‌بندی‌های المان محدود را برای کنترل ارتعاشات صفحه‌های مدرج تابعی با حضور حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک مورد بررسی قرار داده‌اند و از الگوریتم کنترل بازخورد سرعت ثابت برای کنترل فعال پاسخ دینامیکی استفاده نموده‌اند. مروانی و همکاران [۱۶] به بررسی ارتعاشات فعال یک تیر پیزوالکتریک مدرج تابعی با استفاده از روش عددی پرداخته است. آن‌ها به منظور کنترل ارتعاشات، از روش رگولاتور درجه دوم خطی به عنوان یکی از روش‌های کنترلی بهینه استفاده نموده‌اند.

جعفری و فتح‌آبادی [۱۷]، کنترل ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک، تحت بارگذاری متحرک با سرعت ثابت را مورد بررسی قرار داده‌اند. کایاچیک و همکاران [۱۸] به بررسی ارتعاشات آزاد تیر یک سرگیردار پرداخته‌اند و سپس کنترل ارتعاشات آن را با استفاده از مواد پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر مورد بررسی قرار داده‌اند. ملکی و همکاران [۱۹]، به بررسی ارتعاش آزاد و پاسخ استاتیکی تیر مدرج تابعی پیزوالکتریک با استفاده از اصل همپلتون پرداخته‌اند. پنگ و همکاران [۲۰] به بررسی مدل المان محدود تیر کامپوزیتی با حسگر و عملگر پیزوالکتریک، جهت کنترل فعال موقعیت و کنترل ارتعاشات تیر از روش بازخورد سرعت منفی استفاده نموده‌اند. فلاح و ابراهیم نژاد [۲۱] به آنالیز ارتعاشات آزاد و کنترل فعال ارتعاشات تیرهای هوشمند با عملگرها و حسگرهای پیزوالکتریک پرداخته‌اند و از کنترلگر بازخورد سرعت منفی

استفاده نموده‌اند.

لی و لیو [۲۲] به بررسی کنترل فعال ارتعاشی تیر ساندویچی با هسته مشبک هرمی پرداخته‌اند و از مدل بازخورد سرعت جهت طراحی کنترلگرها استفاده نموده‌اند. بلوتار و همکاران [۲۳]، به بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر ساندویچی پیزوالاستیک/پیزو با کنترل فعال پرداخته‌اند.

دامن‌پاک و همکاران [۲۴]، به بررسی کنترل فعال پاسخ دینامیکی غیرخطی تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر، تحت پالس‌های انفجاری پرداخته‌اند و از روش کنترل بازخورد سرعت منفی استفاده کرده‌اند. چنگ‌کیو و همکاران [۲۵]، به طراحی یک حسگر شتاب برای تیر یک‌سرگیردار با وصله‌های پیزوالکتریک، جهت کنترل فعال ارتعاشات با استفاده از روش کنترل بازخورد نسبی و روش کنترل مود لغزشی، پرداخته‌اند.

سلماسی و همکاران [۲۶]، به سرکوب ارتعاشات فعال بازوی مکانیکی انعطاف‌پذیر با استفاده از عملگر پیزوالکتریک، بر پایه مدل المان محدود، پرداخته‌اند و از روش کنترل نسبی استفاده نموده‌اند. چو و همکاران [۲۷]، به بررسی روش دامنه زمان برای حل همزمان مسأله کنترل فعال مقاوم ارتعاشات خمشی و پیچشی تیر کامپوزیتی انعطاف‌پذیر تحت آشفتگی برشی و پارامتری پرداخته‌اند.

لی و همکاران [۲۸]، کنترل ارتعاشات یک تیر طره‌ای انعطاف‌پذیر با استفاده از پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار داده‌اند. با استفاده از اصل همپلتون و روش گلرکین، معادله دیفرانسیل غیرخطی برای طراحی قانون کنترل را بدست آورده‌اند. چو و همکاران [۲۹] به بررسی کنترل فعال ارتعاشات یک صفحه به روش مد لغزشی با استفاده از پیزوالکتریک پرداخته‌اند.

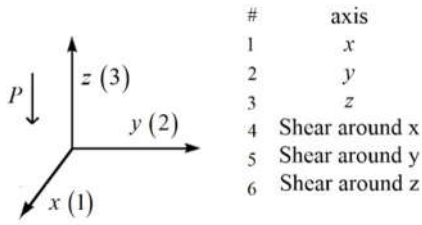
حیدری و هادیان جزی [۳۰]، کنترل فعال ارتعاشات یک تیر هوشمند دوار با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مطالعه اثر تعداد زوج وصله‌های پیزوالکتریک بر روی کنترل ارتعاشات تیر بررسی شده است. اخیراً پرهام و همکاران [۳۱] به بررسی کنترل فعال تیر مدرج تابعی تحت بارگذاری پرودییک با استفاده از روش‌های کنترلی خطی‌سازی پس‌خورد و مود لغزشی برای شرط مرزی یک‌سرگیردار پرداخته‌اند.

با توجه به سوابق مطالعات، می‌توان گفت تحقیقات در زمینه تحلیل ارتعاشات تیر مدرج تابعی با شرط مرزی‌های مختلف بررسی شده است ولی تحلیل کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی آن‌ها با استفاده از روش‌های کنترلی غیر خطی کمتر مورد توجه واقع شده است. لذا نوآوری کار حاضر به‌صورت زیر می‌باشد: بررسی کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی تحت بارگذاری متناوب با حضور حسگر و عملگر پیزوالکتریک در حضور نامعینی با استفاده از روش‌های کنترلی خطی‌سازی پس‌خورد و مود لغزشی برای انواع شرایط مرزی. در این تحقیق، معادلات حرکت با استفاده از روش گلرکین گسسته‌سازی و با استفاده از شبیه‌سازی عددی حل شده است.

۲- شرح مسئله

۲-۱- هندسه مسئله

در این تحقیق یک تیر مدرج تابعی پیزوالکتریک در نظر گرفته



شکل ۳- نامگذاری محورها

که σ بردار تنش، ϵ بردار کرنش، E بردار میدان الکتریکی بکار گرفته شده، ξ نفوذپذیری الکتریکی، d ماتریس ثابت‌های کرنش پیزوالکتریک، S ماتریس ضرایب تسلیم، D بردار تغییر مکان الکتریکی می‌باشد. همچنین بالا نویس‌های D ، E و σ به ترتیب حاکی از این است که اندازه‌گیری‌های بکار برده شده با توجه به جابه‌جایی ثابت، میدان الکتریکی ثابت و تنش ثابت است.

۳-۲- معادلات اساسی تیر

جابه‌جایی تیر مدرج تابعی پیزوالکتریک با استفاده از نظریه تیر اولر-برنولی، به صورت روابط زیر بیان می‌شوند [۳۴].

$$\bar{u}(x, z, t) = u(x, t) - (z - \delta)w(x, t), \quad (3)$$

$$\bar{w}(x, z, t) = w(x, t) \quad (4)$$

\bar{u} و \bar{w} پارامترهای جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه در تیر در هر زمانی، در امتداد محور x و محور z می‌باشند. u و w نیز پارامترهای جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه در تار خنثی $z = \delta$ می‌باشند. δ فاصله‌ی بین تار خنثی و سطح میانی تیر می‌باشد.

با استفاده از نظریه کرنش غیرخطی فن کارمن، رابطه‌ی هندسی مطابق با رابطه‌ی (۳) به صورت زیر می‌باشد [۳۴]:

$$\epsilon_x = u_x + \frac{1}{2}w_x^2 - (z - \delta)w_{xx} \quad (5)$$

که ϵ_x کرنش می‌باشد و همچنین فرض می‌شود که جنس ماده مدرج تابعی مخلوطی از سرامیک و آهن می‌باشد. خواص مواد مدرج تابعی را به صورت زیر می‌توان نشان داد [۳۴]:

$$\left(\frac{E_f}{\rho_f}\right) = \left(\frac{E_c}{\rho_c}\right)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{E_m}{\rho_m}\right)\left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n\right] \quad (6)$$

که در اینجا، E مدول یانگ، ρ چگالی و n شاخص کسر حجمی می‌باشد. رابطه الاستیک خطی برای بستر لایه مدرج تابعی به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_x = Q_{11}\epsilon_x \quad (7)$$

که Q_{11} ضریب سختی نام دارد و به صورت زیر می‌باشد:

$$Q_{11} = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \quad (8)$$

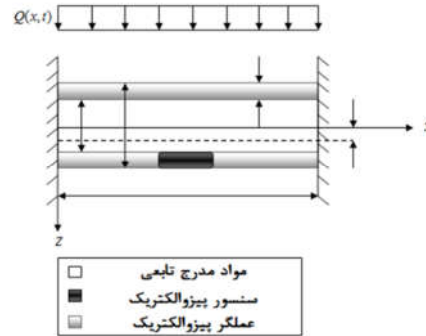
همچنین رابطه الاستیک برای ماده پیزوالکتریک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_x = C_{11}(\epsilon_x - d_{31}E_z) \quad (9)$$

که C_{11} ثابت الاستیک کاهش‌یافته و d_{31} ثابت کرنش پیزوالکتریک می‌باشد.

با توجه به اینکه ضخامت لایه پیزوالکتریک باریک است و پتانسیل الکتریکی خودالقایی، بسیار کوچکتر از ولتاژ اعمالی می‌باشد، تغییرات پتانسیل الکتریکی در سراسر لایه پیزوالکتریک خطی فرض شده است.

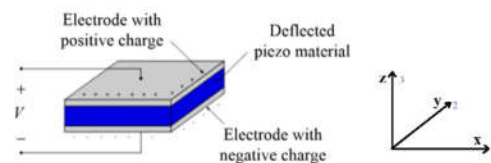
شده است (شکل ۱). تیر یک‌سر گیردار با عملگرهای پیزوالکتریک متقارن و کاملاً چسبیده بر سطح بالا و پایین لایه مدرج تابعی می‌باشند. از ضخامت چسب صرف نظر شده است. ضخامت تیر مدرج تابعی پیزوالکتریک، طول تیر، ضخامت‌های بستر لایه مدرج تابعی و عملگر پیزوالکتریک به ترتیب h ، L ، H و hp می‌باشند. سیستم مختصات دکارتی oxz بر روی سطح هندسی میانی ($z = 0$) قرار گرفته است. جهت اصلی ماده موازی با محور مختصات فرض شده است و لایه‌های پیزوالکتریک در جهت Z قطبی شده‌اند.



شکل ۱- طرحواره تیر مدرج تابعی پیزوالکتریک

۲-۲- معادلات ساختاری پیزوالکتریک

بر اساس این معادلات، فرض می‌شود که مجموع کرنش در مبدل‌های پیزوالکتریک برابر با جمع کرنش‌های مکانیکی ایجاد شده به وسیله تنش‌های مکانیکی اعمالی و تحریک قابل کنترل کرنش به دلیل اعمال ولتاژ الکتریکی می‌باشد. محور ۱ برابر محور x ، محور ۲ برابر محور y و محور ۳ برابر محور z می‌باشد. محور ۳ برای مواد پیزوالکتریک در جهت دوقطبی‌های اولیه پیزوالکتریک و محورهای ۱ و ۲ عمود بر محور ۳ می‌باشند (شکل ۲) [۳۲].



شکل ۲- محورهای مواد پیزوالکتریک [۳۲]

معادلات الکتریکی-مکانیکی برای مواد پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شوند [۳۳]:

$$\epsilon_i = S_{ij}^E \sigma_j + d_{mi} E_m \quad (1)$$

$$D_m = d_{mi} \sigma_i + \xi_{ij}^q E_k \quad (2)$$

که اندیس‌های $i, j = 1, 2, 3$ و $m, k = 1, 2, 3$ نشان دهنده جهت‌ها در سیستم مختصات می‌باشند (شکل ۳).

میدان الکتریکی القایی E_z در لایه پیزوالکتریک با اعمال ولتاژ الکتریکی $V(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۵]:

$$E_z = \frac{V(t)}{hp} \quad (10)$$

که hp ضخامت لایه پیزوالکتریک می‌باشد.

۲-۴- معادلات غیرخطی تیر مدرج تابعی با پیزوالکتریک

با استفاده از روش همیلتون، معادلات دینامیکی غیرخطی تیر مدرج تابعی با پیزوالکتریک به صورت زیر استخراج می‌شود [۳۴]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (k - U + R) dt = 0 \quad (11)$$

که t_0 و t_1 دو زمان دلخواه می‌باشند و δ اپراتور تغییرات می‌باشد. k و U انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل می‌باشند که از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\delta k = \int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV \quad (12)$$

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (13)$$

R انرژی پتانسیل ایجاد شده توسط بار خارجی q_s می‌باشد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta R = \int_V q_s \delta w ds \quad (14)$$

با استفاده از روابط (۵)، (۶)، (۸) و (۱۱)-(۱۴)، معادلات دینامیکی غیرخطی تیر مدرج تابعی با پیزوالکتریک به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۳۴]:

$$N_x = I_0 \ddot{u} - I_1 \dot{w}_{xx} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، I_0 و I_1 و I_2 ثابت‌های اینرسی جرم تیر می‌باشند که در زیر نشان داده شده است:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ z - \delta \\ (z - \delta)^2 \end{pmatrix} \rho dz \quad (16)$$

همچنین در رابطه (۱۵)، M و N ، به ترتیب نیروی محوری و ممان خمشی منتجه، تحت بارهای پیزوالکتریک می‌باشند و به صورت رابطه زیر با تنش مرتبط می‌باشند [۳۴]:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x(z - \delta) \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x + \frac{1}{2} w_{xx} \\ -w_{xx} \end{pmatrix} \quad (17)$$

A ، B و D در رابطه (۱۷) به ترتیب ضریب‌های سفتی کششی، کششی-خمشی و خمشی می‌باشند که به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ D \end{pmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ z - \delta \\ (z - \delta)^2 \end{pmatrix} E dz \quad (18)$$

همانطور که قبلاً گفته شد، با توجه به مفهوم تار خنثی، تأثیر ارتباط کششی-خمشی در نظر گرفته نشده است، پس با قرار دادن $B = 0$ مقدار δ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\delta = \frac{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z E dz}{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} E dz} \quad (19)$$

باید به این نکته اشاره کرد که تار خنثی ($z - \delta$) و سطح هندسی میانی ($z = 0$)، زمانی که کسرحجمی تیر مدرج تابعی صفر است ($n = 0$)، با هم برابر می‌باشند که در این حالت مانند تیر همگن عمل

می‌کند.

با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸)، ضریب سفتی خمشی

به صورت زیر بدست می‌آید:

$$D = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (z - \delta)^2 E dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 E dz - \frac{(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z E dz)^2}{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} E dz} \quad (20)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های اینرسی درون صفحه‌ای و اینرسی چرخشی [۳۶]، معادلات غیرخطی حاکم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N_{,x} = 0 \quad (21)$$

$$(Nw_{,x})_{,x} + M_{,xx} + q_s = I_0 \ddot{w} \quad (22)$$

از رابطه (۲۱) می‌توان به این نتیجه رسید که نیروی محوری N در راستای محور x ثابت می‌باشد. با توجه به رابطه (۱۷) و صرف نظر کردن از سفتی کششی-خمشی ($B = 0$)، می‌توان نوشت:

$$N_0 = A(u_x + \frac{1}{2} w_x^2) \quad (23)$$

با صرف نظر کردن از کرنش طولی نسبت به کرنش عرضی و با انتگرال‌گیری از معادله (۲۳) نسبت به محور x ، داریم:

$$N = \frac{A}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \quad (24)$$

لذا با صرف نظر کردن از بار عرضی q_s و جایگذاری روابط (۲۴) و (۱۷) در رابطه (۲۲)، معادله غیرخطی حاکم بر تیر مدرج تابعی با پیزوالکتریک به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$I_0 \ddot{w} + Dw_{,xxxx} + N^P w_{,xx} - \frac{A}{2L} \int_0^L w_x^2 dx w_{,xx} + Q = 0 \quad (25)$$

که $Q = 7 \times 10^5 \sin(8000t)$ بار خارجی می‌باشد. N^P بار الکتریکی نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N^P = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} E d_{31} E_z dz \quad (26)$$

۲-۵- معادلات حاکم بر حرکت

به منظور گسسته‌کردن معادله حرکت بدست آمده (معادله (۲۵))، از روش گلرکین استفاده می‌شود. در این روش بصورت زیر برای هر یک از حالت‌های شرایط مرزی که در جدول ۱ ذکر شده است، تابع شکلی انتخاب شده است که هم شرایط هندسی و هم شرایط مرزی طبیعی را ارضا نماید. لازم به ذکر است که در این تحقیق برای حالت آزاد-آزاد، توابع ویژه مربوط به فرکانس غیر صفر استفاده شده است.

$$w(x, t) = W(t) \phi_n(x) \quad (27)$$

در این روش رابطه (۲۷) را در معادله (۲۵) جایگذاری کرده، حاصل را در معادله (۲۷) با اندیس m ضرب کرده و از ۰ تا L انتگرال‌گیری کرده و معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{W} + a_1 W + a_2 W^3 + a_3 V W + a_4 Q = 0 \quad (28)$$

که در رابطه (۲۸)، V ولتاژ تحریک می‌باشد و مقدار ضرایب a_i ($i = 1, 2, \dots, 4$) در جدول ۱ برای هر یک از حالت‌های شرایط مرزی نشان داده شده است.

جدول ۱- توابع شکل و مقدار ضرایب معادله (۲۸) با توجه به حالت‌های شرایط مرزی

نوع شرایط مرزی	تابع شکل [۳۷]	ضرایب $a_i (i = 1, 2, \dots, 4)$
گیردار-گیردار	$\phi_n(x) = \frac{(1 - \cos(\frac{2n\pi x}{L}))}{2}$	$a_1 = \frac{16D\pi^4}{3I_0L^4}; a_2 = \frac{A\pi^4}{3I_0L^4}; a_4 = \frac{4}{3I_0}$ $a_3 = \frac{-96E_p E_f (h + h_p)\pi^2 d_{31}}{(6E_f h^3 + 3E_p ((h + 2h_p)^3 - h^3))I_0L^2}$
گیردار-ساده	$\phi_n(x) = \cosh(\frac{\beta_n x}{L}) - \cos(\frac{\beta_n x}{L}) - \cot(\beta_n) \cdot (\sinh(\frac{\beta_n x}{L}) - \sin(\frac{\beta_n x}{L})); \beta_n = \frac{(4n + 1)\pi}{4}$	$a_1 = \frac{237.81516D}{I_0L^4}; a_2 = \frac{64.97236A}{I_0L^4}; a_4 = \frac{0.8583}{I_0}$ $a_3 = \frac{-273.95028E_p E_f (h + h_p)d_{31}}{(2E_f h^3 + E_p ((h + 2h_p)^3 - h^3))I_0L^2}$
گیردار-آزاد	$\phi_n(x) = \sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - \frac{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)}{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)} \times (\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)); \beta_n = (\frac{2n - 1}{2}\pi) \frac{1}{L}$	$a_1 = \frac{15.7459D}{I_0L^4}; a_2 = \frac{-6.5484A}{I_0L^4}; a_4 = \frac{-2.04215}{I_0}$ $a_3 = \frac{66.55596E_p E_f (h + h_p)d_{31}}{(2E_f h^3 + E_p ((h + 2h_p)^3 - h^3))I_0L^2}$
ساده-ساده	$\phi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$	$a_1 = \frac{D\pi^4}{I_0L^4}; a_2 = \frac{A\pi^4}{4I_0L^4}; a_4 = \frac{4}{\pi I_0}$ $a_3 = \frac{-24E_p E_f (h + h_p)\pi^2 d_{31}}{(2E_f h^3 + E_p ((h + 2h_p)^3 - h^3))I_0L^2}$
آزاد-آزاد	$\phi_n(x) = \sinh(\beta_n x) + \sin(\beta_n x) + \frac{-\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)}{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)} \times (\cosh(\beta_n x) + \cos(\beta_n x)); \beta_n = (\frac{2n + 1}{2}\pi) \frac{1}{L}$	$a_1 = \frac{493.1332D}{I_0L^4}; a_2 = \frac{314.4586A}{I_0L^4}; a_4 = \frac{0.007442}{I_0}$ $a_3 = \frac{-297.48396E_p E_f (h + h_p)d_{31}}{(2E_f h^3 + E_p ((h + 2h_p)^3 - h^3))I_0L^2}$

۳- طراحی کنترلگر

۳-۱- روش کنترلی خطی سازی پسخورد

ایده اصلی این روش، آن است که دینامیک سیستم غیرخطی (به‌طور کامل یا جزئی) به خطی تبدیل شوند طوری که بتوان از روش‌های کنترل خطی استفاده کرد. روش‌های خطی سازی پسخورد را می‌توان روشی در تبدیل مدل‌های اصلی سیستم به مدل‌های معادل به شکل ساده‌تر در نظر گرفت. بنابراین آن‌ها را می‌توان در توسعه‌ی کنترل کننده‌های غیرخطی تطبیقی یا مقاوم نیز استفاده کرد [۳۸].

همان‌طور که قبل گفته شد، معادله‌ی سیستم مورد نظر به‌صورت رابطه (۲۸) می‌باشد، که $a_3 VW$ برای کنترل فعال ارتعاشات سیستم، طبق رابطه‌ی (۲۹) تعریف می‌شود:

$$a_3 VW = -(a_1 W + a_2 W^3 + a_4 Q + \dot{W}_d + k_d(\dot{W}_d - \dot{W}) + k_p(W_d - W)) \quad (29)$$

که $k_d > 0$ ، $k_p > 0$ و $\dot{W}_d = \dot{W}_d = W_d = 0$ می‌باشد، پس از ساده‌سازی، قانون کنترلی طبق رابطه‌ی زیر برای سیستم مورد بررسی پیشنهاد می‌شود:

$$\ddot{e} = \dot{W}_d - \dot{W} \quad \text{و} \quad \dot{e} = W_d - W \quad , \quad e = W_d - W$$

با توجه به اینکه $\ddot{e} = \dot{W}_d - \dot{W}$ و $\dot{e} = W_d - W$ می‌باشند، رابطه (۲۹) را در رابطه (۲۸) جایگذاری کرده و در نتیجه رابطه‌ی دینامیک خطا به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = 0 \quad (31)$$

رابطه‌ی (۳۱) یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی درجه دوم را نمایش می‌دهد و با فرض $k_d > 0$ ، $k_p > 0$ همیشه پایدار نمای می‌باشد، لذا سیستم با اعمال کنترلگر (۳۰) در رابطه (۲۸) پایدار خواهد بود.

۳-۲- کنترلر مود لغزشی

یک روش ساده برای کنترل مقاوم، روش کنترل مود لغزشی نامیده می‌شود. به‌طور شهودی، این روش مبتنی بر این نکته است که بسیار آسان‌تر است که سیستم‌های مرتبه اول را (یعنی، سیستم‌هایی که

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول توصیف شده‌اند)، چه غیرخطی دارا باشند و چه نامعینی داشته باشند کنترل کرد، تا اینکه سیستم‌های عمومی‌تر مرتبه n -ام (یعنی، سیستم‌هایی که با معادلات مرتبه‌ی n توصیف می‌شوند) را کنترل کرد. به همین خاطر، یک ساده کردن نمادی معرفی می‌شود که در حقیقت اجازه می‌دهد مسائل مرتبه n -ام با مسائل مرتبه‌ی اول معادل جایگزین شوند. آنگاه به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای مسایل تبدیل شده، عملکرد کامل، می‌تواند در اصل با وجود بی‌دقتی‌های دلخواه پارامتر به‌دست آید. اما چنین عملکردی، در ازای بهای بسیار زیاد تلاش کنترلی به‌دست می‌آید. این مسئله نوعاً با سایر منابع عدم قطعیت مدل‌سازی در تضاد است، مثلاً حضور دینامیک‌های صرف نظر شده که ممکن است تلاش زیاد کنترلی آن‌ها را تحریک کند. با توجه به این مطلب، بایستی قوانین کنترلی را طوری اصلاح کرد که با داشتن فعالیت کنترل قابل قبول به مصالحه‌ی بین عملکرد ردیابی و تلاش کنترلی مناسب دست یافت.

قانون کنترلی مود لغزشی به‌صورت رابطه زیر در نظر گرفته

$$V = -\frac{1}{a_3 W} (a_1 W + a_2 W^3 + a_4 Q + \dot{W}_d - k_d \dot{W} - k_p W) \quad (30)$$

می‌شود:

$$\dot{W} = f(x) + V \quad (32)$$

که $V = a_3 W u$ و $f(x)$ شامل ترم‌های خطی و غیرخطی سیستم می‌باشد و به‌صورت رابطه (۳۲) تعریف می‌شود:

$$f(x) = \hat{f} + \Delta f \quad (33)$$

که \hat{f} معلوم و Δf نامعلوم می‌باشد و از طرفی $|\Delta f| \leq F$ می‌باشد. سطح لغزش به‌صورت رابطه (۳۴) تعریف می‌شود.

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (34)$$

که λ ثابت مثبت می‌باشد. از رابطه‌ی (۳۴) مشتق گرفته و با جایگذاری $\dot{e} = \dot{W}_d - \dot{W}$ در آن، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

پیزوالکتریک ماده پیزوالکتریک 8166 kg/m^3 ، 207.79 GPa می‌باشند. مشخصات ماده پیزوالکتریک $E_p = 63 \text{ GPa}$ ، $\rho_p = 7600 \text{ kg/m}^3$ ، $V_p = 0.3$ و ثابت کرنش پیزوالکتریک $d_{31} = 2.54 \times 10^{-10} \text{ m/V}$ می‌باشد. ضریب پواسون لایه مدرج تابعی، ثابت و برابر با 0.28 فرض شده است [۳۴].

۴-۲- اعتبارسنجی

در جدول ۲ و ۳، فرکانس طبیعی اول و دوم کار حاضر با نتایج در مطالعه ماجکوت [۳۹]، برای تیرهای اولر-برنولی و تیموشنکو با تکیه‌گاه ساده و یک سرگیردار مقایسه شده و خطای فرکانس‌های بدست آمده، نشان داده شده است. مشخصات تیر $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ، $L = 1 \text{ m}$ ، $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ و سطح مقطع $b \times h = 0.02 \times 0.03 \text{ m}^2$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲- فرکانس طبیعی اول و دوم کار حاضر با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی برای تیر با تکیه‌گاه ساده

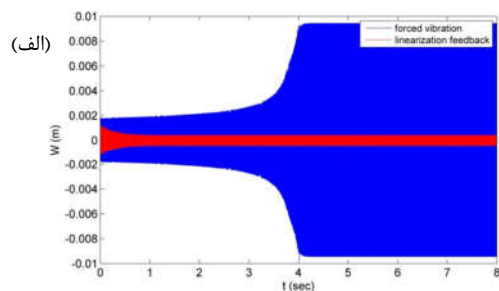
مد	کار حاضر	تیموشنکو	خطا	اولر-برنولی	خطا
۱	۴۴۱٫۸	۴۴۰٫۸	۰٫۲۲	۴۴۱٫۸	۰
۲	۱۷۶۷٫۲	۱۷۵۱٫۳	۰٫۹	۱۷۶۷٫۲	۰

جدول ۳- فرکانس طبیعی اول و دوم کار حاضر با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی برای تیر یک سرگیردار

مد	کار حاضر	تیموشنکو	خطا	اولر-برنولی	خطا
۱	۱۵۷٫۴	۱۵۷٫۶	۰٫۱۲	۱۵۳٫۶	۲٫۴
۲	۹۸۷٫۳	۹۸۷٫۷	۰٫۰۴	۹۶۲٫۶	۲٫۵

۴-۳- روش کنترل خطی‌سازی پسخورد

روش کنترل خطی‌سازی پسخورد جهت کنترل ارتعاشات تیر مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک در حضور بارگذاری خارجی، اعمال شده و نتایج آن با مقایسه با حالت ارتعاشات اجباری در نمودارهای خیز-زمان و ولتاژ-زمان، برای δ شرط مرزی دوسرگیردار، گیردار-آزاد، گیردار-ساده، آزاد-آزاد و ساده-ساده به ترتیب در شکل‌های (۴)-(۸) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این روش، ارتعاشات سیستم را کنترل کرده و خیز را به طور مطلوب کاهش می‌دهد. همچنین برای تمام شرایط مرزی، کنترلگر با ولتاژ کم و معقولی سیستم را کنترل می‌نماید.



$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda \dot{e} = \dot{W}_d - \dot{W} + \lambda \dot{e} \quad (35)$$

کنترلگر طبق رابطه‌ی زیر با فرض وجود نامعینی در سیستم تعریف می‌شود:

$$V_{eq} = \dot{W}_d - \dot{f} + \lambda \dot{e} \quad (36)$$

برای جبران نامعینی‌های موجود در سیستم، قانون کنترلی طبق رابطه زیر برای سیستم مورد مطالعه پیشنهاد می‌شود:

$$V = V_{eq} - k \text{sign}(s) \quad (37)$$

که در رابطه بالا، $k \text{sign}(s)$ عبارتی است که برای جبران نامعینی‌ها به تابع کنترلگر اضافه شده است.

برای اثبات پایداری بر مبنای کنترلگر مبتنی بر مود لغزشی، تابع لیاپانوفی مطابق با رابطه (۳۸) برای سطح لغزش تعریف می‌شود [۳۸].

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (38)$$

مشاهده می‌شود که تابع لیاپانوف یک تابع مثبت می‌باشد. برای پایداری، بایستی مشتق تابع فوق منفی معین شود؛ لذا با مشتق گرفتن از رابطه (۳۸)، می‌توان رابطه زیر را نوشت.

$$\dot{V} = s^T \dot{s} \quad (39)$$

برای اینکه مشتق تابع لیاپانوف، منفی شود، باید شرطی طبق رابطه (۴۰) برقرار شود.

$$s^T \dot{s} \leq -\eta |s| \quad (40)$$

در معادله (۴۰)، η ثابت اکیداً مثبت است. با جایگذاری رابطه (۳۲) در رابطه (۳۵) و همچنین جایگذاری (۳۶) و (۳۷) در نتیجه حاصله برای \dot{s} و در نهایت با جایگذاری \dot{s} در رابطه (۴۰)، نامعادله (۴۱) بدست می‌آید.

$$k \leq -\eta - \text{sign}(s)(\dot{f} - \dot{f}) \quad (41)$$

با توجه به فرض کراندار بودن نامعینی سیستم می‌توان رابطه (۴۲) را نوشت.

$$|\dot{f} - f| \leq c \quad (42)$$

در رابطه بالا، c کران بالای $|\dot{f} - f|$ است. با استفاده از رابطه (۴۲) مقدار k که شرط (۴۱) را ارضا نماید، می‌توان طبق رابطه (۴۳) انتخاب نمود.

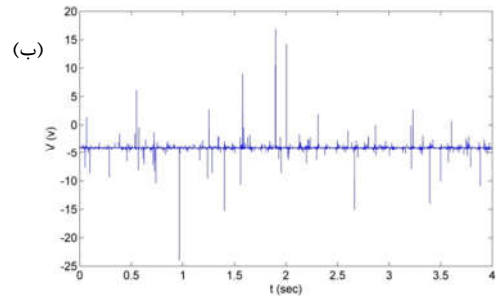
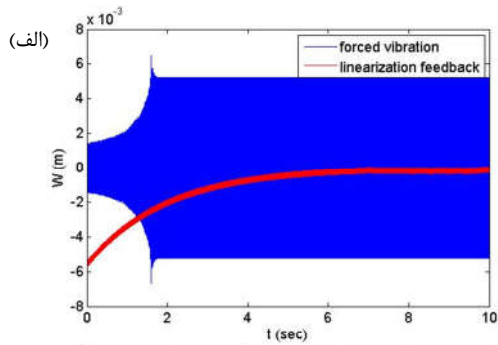
$$k = -\eta - c \quad (43)$$

لذا با انتخاب k طبق رابطه (۴۳)، شرط لغزش (۴۰) برقرار شده و مقدار s تا رسیدن به سطح لغزش $s = 0$ کاهش می‌یابد؛ بنابراین مقدار خطای ردیابی سیستم به سمت صفر میل خواهد نمود. لذا کنترلگر مبتنی بر مود لغزشی، باعث همگرایی مجانبی سیستم خواهد شد.

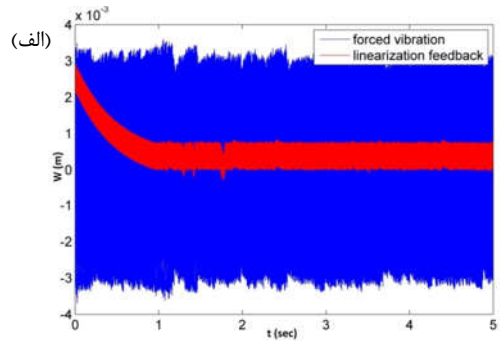
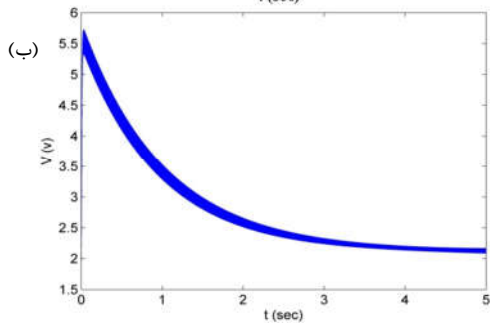
۴- نتایج

۴-۱- مشخصات تیر

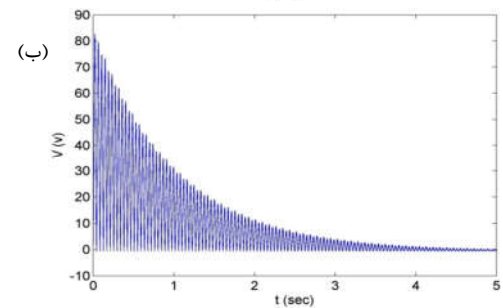
در این تحقیق تیر مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک، به طول $L = 0.2 \text{ m}$ ، ضخامت‌های $H = 0.002 \text{ m}$ و $h = 0.008 \text{ m}$ در نظر گرفته شده است. فرض شده است که ماده مدرج تابعی از سیلیکون نیتريد (Si_3N_4) و فولاد ضدزنگ ($SUS304$) ساخته شده است. سطح بالایی لایه مدرج تابعی، از جنس سرامیک و سطح پایینی از جنس فلز می‌باشد و لایه‌های پیزوالکتریک از جنس $PZT - 5A$ می‌باشند. چگالی و مدول یانگ برای Si_3N_4 به ترتیب 322.27 GPa ، 2370 kg/m^3 و برای $SUS304$ به ترتیب



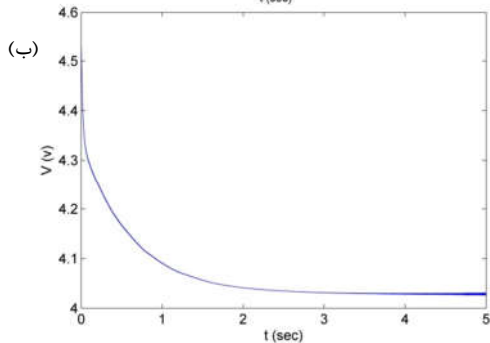
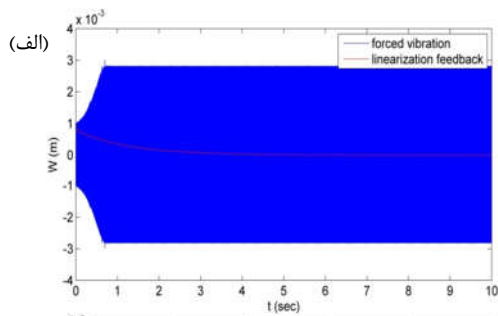
شکل ۴- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی دوسرگیردار با اعمال روش کنترل خطی سازی پسخورد



شکل ۶- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی گیردار-ساده با اعمال روش کنترل خطی سازی پسخورد



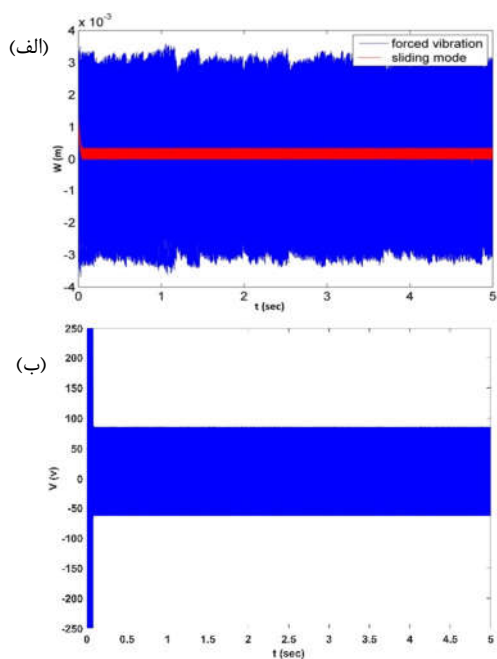
شکل ۵- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی گیردار-آزاد با اعمال روش کنترل خطی سازی پسخورد



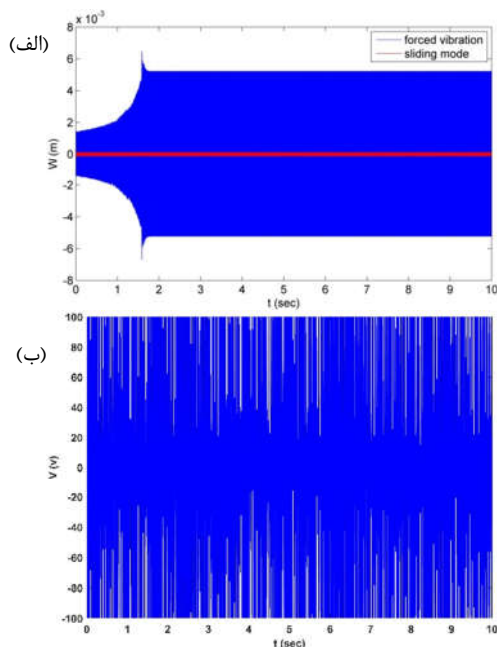
شکل ۷- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی آزاد-آزاد با اعمال روش کنترل خطی سازی پسخورد

۴-۴- روش کنترل مود لغزشی

در این بخش از روش کنترل مود لغزشی برای کنترل ارتعاشات استفاده شده و نتایج در شکل‌های (۹)-(۱۳) نمایش داده شده است. مقدار عدم قطعیت در مدل ۲۵٪ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این روش به خوبی سیستم را کنترل می‌کند و خیز تیر را کاهش می‌دهد. همچنین با توجه به نمودارهای ولتاژ-زمان می‌توان دریافت که کنترلر با ولتاژ معقول و پایینی، ارتعاشات سیستم مورد نظر را کنترل می‌نماید.



شکل ۱۰- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی گیردار-آزاد با اعمال روش کنترل مود لغزشی

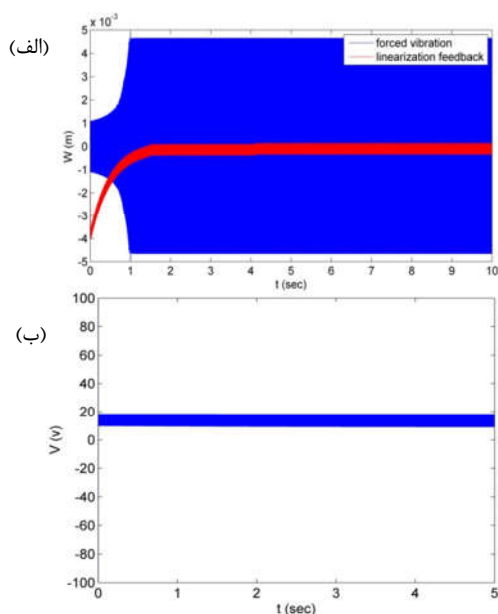


شکل ۱۱- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی گیردار-ساده با اعمال روش کنترل مود لغزشی

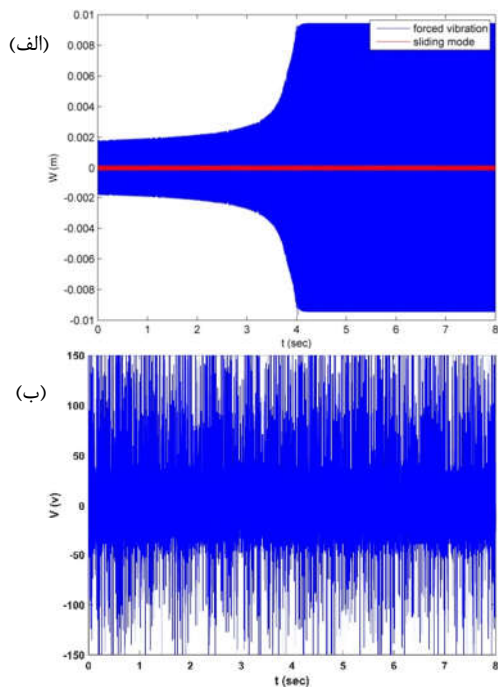
۴-۵- مقایسه روش خطی‌سازی پس‌خورد (بدون عدم قطعیت)

قطعیت) با روش مود لغزشی (با عدم قطعیت)

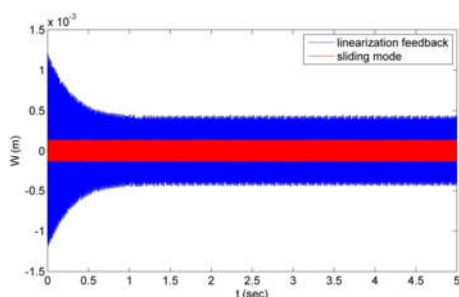
نمودارهای مقایسه‌ای دو روش خطی‌سازی پس‌خورد بدون عدم قطعیت، و مود لغزشی با عدم قطعیت، جهت کنترل تیر مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک، برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، در شکل (۱۴) نمایش داده شده است. همچنین درصد کاهش دامنه ارتعاشی در حالت مانا



شکل ۸- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی ساده-ساده با اعمال روش کنترل خطی‌سازی پس‌خورد



شکل ۹- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی دوسرگیردار با اعمال روش کنترل مود لغزشی



شکل ۱۴- روش خطی سازی پسخورد (بدون عدم قطعیت) و روش مود لغزشی (با عدم قطعیت) برای شرط مرزی گیردار-گیردار

جدول ۴- بررسی میزان کاهش دامنه ارتعاشات در حالت مانا برای شرایط مرزی مختلف نسبت به حالتی که کنترلگر استفاده نمی شود

نوع شرایط مرزی	میزان کاهش برای روش خطی سازی پسخورد (%)	میزان کاهش برای روش مود لغزشی (%)
گیردار-گیردار	۹۵,۲۷	۹۸,۵۹
گیردار-ساده	۸۹,۷۸	۹۵,۱۴
گیردار-آزاد	۹۳,۷۸	۹۷,۹۷
ساده-ساده	۹۹,۸۹	۹۹,۹۴
آزاد-آزاد	۹۶,۹۹	۹۷,۱۱

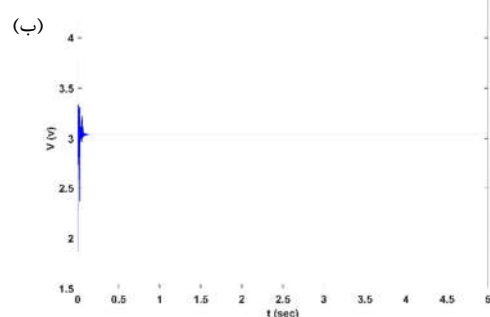
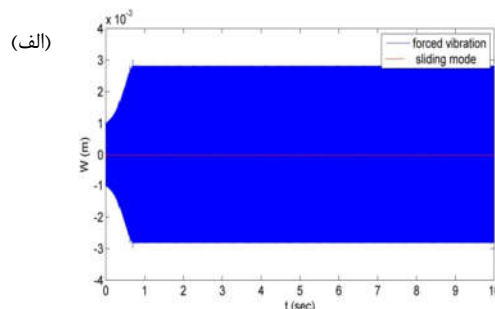
۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، به بررسی کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی تحت بارگذاری متناوب با حضور حسگر و عملگر پیزوالکتریک در حضور نامعینی با استفاده از روش‌های کنترلی خطی سازی پسخورد و مود لغزشی برای انواع شرایط مرزی پرداخته شده است. معادلات حرکت با استفاده از روش گلرکین گسسته سازی و با استفاده از شبیه سازی عددی حل شده است. نتایج نشان می دهد که هم روش خطی سازی پسخورد و هم روش مود لغزشی، ارتعاشات سیستم تعریف شده برای انواع شرایط مرزی را به خوبی کنترل می کند. اما، روش مود لغزشی با عدم قطعیت نسبت به روش خطی سازی پسخورد بدون عدم قطعیت، ارتعاشات تیر را بهتر و در مدت زمان کمتری کنترل می کند.

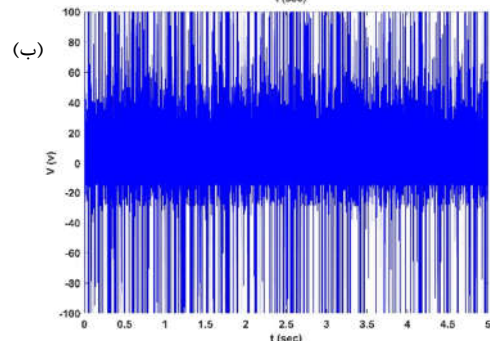
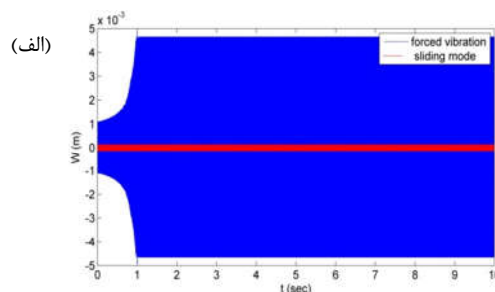
۶- مراجع

- [1] Shiota I. and Miyamoto Y. eds., *Functionally graded materials 1996*. Elsevier, 1997.
- [2] Fazelzadeh S.A. and Hosseini M., Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials. *Journal of fluids and structures*, Vol. 23, No.8, pp. 1251-1264, 2007.
- [3] Aydin K., Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 42, pp. 112-124, 2013.
- [4] Xue X. and Tang J., Vibration control of nonlinear rotating beam using piezoelectric actuator and sliding mode approach. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 14, No.6, pp. 885-908, 2008.
- [5] Tian J., Zhang Z. and Hua, H., Free vibration analysis of rotating functionally graded double-tapered beam including porosities. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 150, pp. 526-538, 2019.

برای شرایط مرزی مختلف نسبت به حالتی که کنترلگر استفاده نمی شود نیز در جدول ۴ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود در همه شرایط مرزی، روش مود لغزشی با عدم قطعیت بهتر از روش خطی سازی پسخورد بدون عدم قطعیت عمل می کند و ارتعاشات تیر را بهتر و در مدت زمان کمتری کنترل می کند.



شکل ۱۲- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی آزاد-آزاد با اعمال روش کنترل مود لغزشی



شکل ۱۳- (الف) خیز-زمان و (ب) ولتاژ-زمان برای شرط مرزی ساده-ساده با اعمال روش کنترل مود لغزشی

- pairs. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 67, pp. 571-578, 2014.
- [23] Belouettar S., Azrar L., Daya E.M., Laptev V. and Potier-Ferry M., Active control of nonlinear vibration of sandwich piezoelectric beams: A simplified approach. *Computers & structures*, Vol. 86, No.3-5, pp. 386-397, 2008.
- [24] Damanpack A.R., Bodaghi M., Aghdam M.M. and Shakeri M., Active control of geometrically non-linear transient response of sandwich beams with a flexible core using piezoelectric patches. *Composite Structures*, Vol. 100, pp. 517-531, 2013.
- [25] Qiu Z.C., Zhang X.M., Wang Y.C. and Wu Z.W., Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator. *Journal of sound and vibration*, Vol. 326, No.3-5, pp. 438-455, 2009.
- [26] Salmasi H., Fotouhi R. and Nikiforuk P.N., Vibration control of a flexible link manipulator using smart structures. *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 41, No.2, pp. 11787-11792, 2008.
- [27] Chou J.H., Chen S.H., Chang M.Y. and Pan A.J., Active robust vibration control of flexible composite beams with parameter perturbations. *International journal of mechanical sciences*, Vol. 39, No.7, pp. 751-760, 1997.
- [28] Li S., He P. and Lin X., Asymmetrical Barrier Function-Based Adaptive Vibration Control for Nonlinear Flexible Cantilever Beam with Obstacle Restriction. *IEEE Access*, No.9, pp. 58306-58318, 2021.
- [29] Qiu Z.C., Wang T.X. and Zhang X.M., Sliding mode predictive vibration control of a piezoelectric flexible plate. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 32, No.1, pp. 65-81, 2021.
- [۳۰] حیدری م. و هادیان جزئی ش.، کنترل فعال ارتعاشات یک تیر هوشمند دوار با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۴۸، ش. ۳، ص ۶۷-۷۶، ۱۳۹۷.
- [۳۱] پرهام ف.، احمدی ح.، فروتن ک. و حیدری سرائی م.، کنترل ارتعاشات تیر مدرج تابعی در حضور نامعینی تحت بارگذاری پرودیگ. بیست و هشتمین کنفرانس سالانه بین‌المللی انجمن مهندسان مکانیک ایران، تهران، ایران، ۱۳۹۹.
- [32] <https://learn.digilentinc.com/Documents/139>.
- [33] Djodjodhardjo H., Jafari M., Wiriadidjaja S., and Ahmad K.A., Active vibration suppression of an elastic piezoelectric sensor and actuator fitted cantilevered beam configurations as a generic smart composite structure. *Composite Structures*, Vol. 132, pp. 848-863, 2015.
- [34] Fu Y., Wang J. and Mao Y., Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No.9, pp. 4324-4340, 2012.
- [35] Zheng Y.F., Fu Y.M. and Wang F., Nonlinear dynamic stability for piezoelectric laminated plate with damage. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, pp. 570-576, 2006.
- [36] Ke L.L., Yang J. and Kitipornchai S., An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams. *Meccanica*, Vol. 45, No.6, pp. 743-752, 2010.
- [37] Hagedorn Peter, and Anirvan DasGupta. *Vibrations and waves in continuous mechanical systems*. Chichester: Wiley, 2007.
- [38] Slotine Jean-Jacques E., and Weiping Li. *Applied nonlinear control*. Vol. 199, No.1, Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.
- Majkut L., Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 47, No.1, pp. 193-210, 2009.
- [۶] اله‌کرمی ف. و قصاب زاده سریزدی م.، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم مدرج تابعی دو جهتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۴۶، ش. ۱، ص ۱۵-۲۸، ۱۳۹۴.
- [7] Karamanli A., Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory. *Composite Structures*, Vol. 189, pp. 127-136, 2018.
- [۸] پیل افکن ر. و خواجه زاده س.، تحلیل ارتعاشی نانو تیر مگنتو الکترو الاستیک تیموشنکو با مدل معادلات انتگرال-دیفرانسیل. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۴۸، ش. ۴، ص ۶۷-۷۶، ۱۳۹۷.
- [9] Patil M.A. and Kadoli R., Differential quadrature solution for vibration control of functionally graded beams with Terfenol-D layer. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 84, pp. 137-157, 2020.
- [10] Panda R.K., Nayak B. and Sarangi S.K., Active vibration control of smart functionally graded beams. *Procedia Engineering*, Vol. 144, pp. 551-559, 2016.
- [11] Bruant I. and Proslie L., Improved active control of a functionally graded material beam with piezoelectric patches. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 21, No.10, pp. 2059-2080, 2015.
- [12] Bodaghi M., Damanpack A.R., Aghdam M.M. and Shakeri M., Nonlinear active control of FG beams in thermal environments subjected to blast loads with integrated FGP sensor/actuator layers. *Composite Structures*, Vol. 94, No.12, pp. 3612-3623, 2012.
- [13] Sheng G.G. and Wang X., Studies on dynamic behavior of functionally graded cylindrical shells with PZT layers under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 323, No.3-5, pp. 772-789, 2009.
- [14] Sheng G.G. and Wang X., Dynamic characteristics of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads. *Composite Structures*, Vol. 93, No.1, pp. 162-170, 2010.
- [15] He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker, S. and Liew, K.M., Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No.9, pp. 1641-1655, 2001.
- [16] Maruani J., Bruant I., Pablo, F. and Gallimard, L., A numerical efficiency study on the active vibration control for a FGPM beam. *Composite Structures*, Vol. 182, pp. 478-486, 2017.
- [17] Jafari A.A. and Fathabadi M., Forced vibration of FGM Timoshenko beam with piezoelectric layers carrying moving load. *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 9, No.2, pp. 69-77, 2013.
- [18] Kayaci Ö., Bruch Jr J.C., Sloss J.M., Adali S. and Sadek I.S., Integral equation approach for piezo patch vibration control of beams with various types of damping. *Computers & structures*, Vol. 86, No.3-5, pp. 357-366, 2008.
- [۱۹] ملکی م.، محمدی ص. و فروتن م.، بررسی ارتعاش آزاد و پاسخ استاتیکی تیر مدرج هدفمند پیزوالکتریک براساس نظریه الاستیسیته دوبعدی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۴۸، ش. ۳، ص ۲۲۸-۳۱۹، ۱۳۹۷.
- [20] Peng X.Q., Lam K.Y. and Liu G.R., Active vibration control of composite beams with piezoelectrics: a finite element model with third order theory. *Journal of sound and vibration*, Vol. 209, No.4, pp. 635-650, 1998.
- [21] Fallah N. and Ebrahimnejad M., Finite volume analysis of adaptive beams with piezoelectric sensors and actuators. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No.2, pp. 722-737, 2014.
- [22] Li F.M. and Lyu X.X., Active vibration control of lattice sandwich beams using the piezoelectric actuator/sensor