نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۱، جلد ۵۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۲۳۹-۲۴۸ – پژوهشی کامل- DOI: 10.22034/jmeut.2022.48879.3009

طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی در حضور اغتشاش باد برای یک سیستم بازیابی نوآورانه با نصب بازوی ماهر بر روی پرنده‌ی عمودپرواز

ابراهیم پناه‌پوری کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران، ebpanahpoori@ut.ac.ir

مجتبی دهقان منشادی* استاد، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، mdmanshadi@mut-es.ac.ir

مهدی نوری‌دبیر مربی، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، nooridabir@mut-es.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک سیستم بازیابی نوآورانه با نصب بازوی ماهر روی یک پرنده‌ی عمودپرواز ارائه شده است. پس از قرار گرفتن پرنده در موقعیت مطلوب، بازوی ماهر، قلاب متصل به دو کابل را بلند کرده و به سمت محل بازیابی حرکت می‌دهد. سپس قلاب، محل بازیابی را گرفته و ربات از آن جدا می‌شود. با این کار پرنده‌ی عمودپرواز از طریق ۲ کابل کم وزن، آویزان می‌شود. برای حل مشکل دینامیک کوپله‌ی سیستم بازو-عمودپرواز، اثرات دینامیک ربات به عنوان اغتشاش برای پرنده در نظر گرفته شده و با استفاده از ممنتوم خطی و زاویه‌ای، بر حسب تغییرات مرکز جرم و اینرسی بازوی ماهر، تخمینی از نیرو و گشتاور وارد بر پرنده، ارائه شده است. این سیستم باید در برابر اغتشاش باد، اثرات آیرودینامیکی نامطلوب و خطای پارامترها کارآمد باشد، بنابراین کنترلگر مدلغزشی فراپیچشی برای ردیابی مسیر پرنده‌ی عمودپرواز و ربات، طراحی و شبیه‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تخمین گشتاورهای ناشی از حرکت بازو به درستی انجام می‌شود. همچنین کنترلگر طراحی شده، عملکرد مطلوبی در ردیابی مسیر و کاهش اثرات اغتشاش ناشی از حرکت بازو را دارد.

واژه‌های کلیدی: سیستم بازیابی، بازوی ماهر، دینامیک بازوی هوایی، پرنده‌ی عمودپرواز، کنترلگر مدلغزشی، کنترلگر فراپیچشی.

Design of a Sliding Mode Controller in the Presence of Wind Disturbance for a Novel Recovery System of Vertical Take-off and Landing UAV Equipped with Manipulator

E. Panahpoori School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

M. Dehghan Manshadi Mechanical and Aerospace Engineering Department, Malek-Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

M. Noori Dabir Mechanical and Aerospace Engineering Department, Malek-Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

Abstract

In this study, a novel recovery system was designed for a vertical take-off and landing (VTOL) UAV. In the desired position, the manipulator moves the cables and gripper toward a fixed rod, then the gripper grasp the rod and the arm disconnects from the gripper. Therefore, the VTOL is hung through 2 light cables. Due to coupled dynamics, the effects of the manipulator are considered as disturbance. Then by using the theory of linear and angular momentum and the changes in the center of mass and inertia of the manipulator, an estimation of the force and torque due to the movement of the arm is presented. This system must be efficient against wind disturbance, undesired aerodynamic effects and parameters error. Therefore the sliding mode controller is designed to track the desired trajectory of VTOL. Results of simulation show that the estimation of torques that is applied to the VTOL due to arm movement is done correctly. The designed controller also has a good performance in tracking the desired trajectory and reducing the effects of disturbance caused by arm movement.

Keywords: Recovery system, Manipulator, Aerial manipulator dynamic, VTOL, Sliding mode controller, Super twisting sliding mode controller.

۱- مقدمه

استفاده از عمودپروازها در سال‌های اخیر برای انجام مأموریت‌های سخت، پرخطر و غیرممکن برای انسان، به طور چشمگیری افزایش یافته است. عمودپروازها پس از انجام عملیات، برای فرود ایمن، نیازمند تجهیزات و تدابیر از قبل پیش‌بینی شده هستند. در برخی از موقعیت‌ها مانند عملیات در سطح دریاها، به علت مشکل بودن تأمین یک باند مناسب برای فرود، از تجهیزات دیگری برای فرود استفاده می‌شود. در این مواقع، از تجهیزاتی مانند تور، چترنجات به تنهایی یا به همراه کیسه‌ی هوا استفاده می‌شود که در پژوهش [۱] مورد بررسی قرار گرفته است. در روش دیگری که در مطالعه‌ی [۲] آمده، از یک کابل استفاده شده که هنگام بازیابی، قلاب‌های تعبیه‌شده روی بال‌ها یا بدنه‌ی پهپاد به این کابل برخورد کرده و متوقف می‌شود اما ریسک آسیب به پرنده در هنگام بازیابی وجود دارد. در پژوهش کلازن و همکاران [۳] به جای نصب توری ثابت بر روی عرشه کشتی برای بازیابی، از یک توری معلق استفاده می‌شود که به وسیله‌ی دو پهپاد، در هوا نگه‌داشته شده و عمودپرواز هنگام بازیابی، با برخورد با این تور معلق، از حرکت می‌ایستد. عملیات بازیابی همچنین می‌تواند به کمک یک عمودپرواز یا هواپیمای مادر و در هوا انجام گیرد. در این روش، مکانیزم بازیابی بر روی یک عمودپرواز مادر قرار گرفته و با حرکت دو پرنده به سمت یکدیگر و فعال شدن مکانیزم بازیابی، عمودپرواز کوچک‌تر به عمودپرواز مادر متصل می‌شود. در پژوهش [۴] مسیریابی مربوط به این روش بازیابی به کمک الگوریتم ژنتیک و برای بازیابی یک گروه از پهپادها مورد بررسی قرار گرفته است.

در این پژوهش یک سیستم بازیابی با نصب بازوی ماهر بر روی یک عمودپرواز ارائه شده است. این بازو می‌تواند در مکانی که از قبل،

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mdmanshadi@mut-es.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۰/۰۸/۲۱

تاریخ پذیرش: ۰۱/۰۵/۳۱

سیم یا میله‌ای تعبیه شده، با گرفتن میله، به طور ایمن و پایدار بازیابی شود. با این سیستم بازیابی جدید، امکان بازیابی عمودپرواز در ارتفاع ایجاد شده و از مخاطراتی که با فرود روی زمین برای عمودپرواز رخ می‌دهد، جلوگیری می‌شود. نصب بازوی ماهر بر روی عمودپروازها نظیر کوادروتورها، با اهدافی مانند گرفتن و جابه‌جایی اجسام [۵]، ساخت‌وساز، تست‌های غیرمخرب صنایع گاز و پتروشیمی [۶] و... در پژوهش‌های گذشته مورد توجه بوده است. تجهیز عمودپرواز با بازوی ماهر، اگرچه قابلیت‌های آن را افزایش می‌دهد، اما اضافه کردن بازو به آن‌ها، کار کنترل پایدار مجموعه را دشوارتر می‌کند.

روش‌های متفاوتی برای کنترل این سیستم‌ها در تحقیقات گذشته مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در مطالعه‌ی [۷] یک الگوریتم کنترل حرکتی سلسله مراتبی دولایه برای یک کوادروتور مجهز به بازوی رباتیک پیشنهاد گردیده اما تحلیل پایداری آن مورد توجه نبوده است. یک کنترلگر دفع اغتشاشات فعال با قابلیت عدم برخورد با اشیا برای یک کوادروتور توسط چانگ و همکارانش [۸] پیشنهاد گردیده است. در پژوهش [۹] مدلسازی و کنترل یک کوادکوپتر مجهز به بازوی رباتیک برای تعامل فیزیکی با محیط انجام شده است. در مقاله [۱۰] یک بازوی رباتیک برای انجام مأموریت مونتاژ روی یک کوادروتور نصب گردیده و با استخراج معادلات دینامیکی و سینماتیکی آن‌ها، یک کنترلگر انتگرالی پسگام با پارامترهای متغیر پیشنهاد گردیده اما روشی برای محاسبه‌ی اثرات حرکت بازو بر کوادروتور ارائه نشده است. با توجه به مدل غیرخطی کوادروتور که با عدم قطعیت همراه است، از روش کنترل‌های مقاوم از جمله مد لغزشی برای ردیابی و پایداری سیستم استفاده می شود که در پژوهش [۱۱] ارائه شده است.

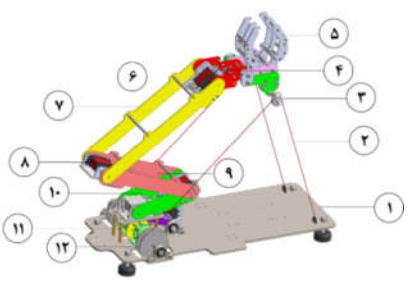
طراحی و کنترل یک بازوی رباتیک ۵ درجه آزادی سبک، برای استفاده در ربات‌های هوایی در پژوهش [۱۲] انجام شده است. طراحی مکانیکی این بازو به شکلی است که بتواند هنگام فرود در خود جمع شود. طراحی به گونه‌ای انجام شده که مرکز جرم تا حد ممکن به بخش اصلی کوادروتور نزدیک باشد. ردیابی مسیر برای یک کوادروتور مجهز به بازوی رباتیک در تحقیق [۱۳] انجام شده است. همچنین یک کنترلگر تطبیقی برای ردیابی مسیر پیشنهاد گردیده است و تحلیل پایداری حلقه بسته‌ی سیستم انجام شده است. بر مبنای پژوهش‌های قبلی، در طراحی کنترلگر با در نظر گرفتن اثرات اینرسی متغیر بازو که به پرنده وارد می‌شود و همچنین با انتخاب کنترلگر مد لغزشی، کاهش اثرات سایر اغتشاشات مانند باد و نیروهای آیرودینامیکی نامطلوب نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این مقاله، ابتدا سیستم بازیابی نوآورانه تشریح شده و کارکرد اجزای مختلف آن ارائه می‌شود. همچنین نحوه‌ی عملکرد این سیستم در بازیابی پرنده عمودپرواز، ارائه می‌شود. اساس این سیستم بازیابی، یک بازوی رباتیک است که در بخش ۳، معادلات دینامیکی آن به روش اویلر-لاگرانژ استخراج می‌شود. در بخش ۴، دینامیک سیستم بازو-پرنده عمودپرواز مورد بررسی قرار گرفته و بر اساس قاعده‌ی ممنتوم خطی و زاویه‌ای، اثرات حرکت بازوی رباتیک بر روی عمودپرواز، با در نظر گرفتن تغییرات مرکز جرم بازو، به صورت نیرو و گشتاور تخمین زده می‌شوند. نیرو و گشتاور تخمینی در طراحی کنترلگر پرنده در نظر گرفته شده تا اثرات آن‌ها بر حرکت عمودپرواز به حداقل برسد. طراحی کنترلگر مدلغزشی مرتبه دوم فراپیچشی برای عمودپرواز و بازو در بخش ۵ انجام شده است. در بخش ۶، شبیه‌سازی بازو- عمودپرواز و کنترلگر در نرم‌افزار Matlab ارائه شده و گشتاور تخمینی ناشی از حرکت ربات که به عمودپرواز وارد می‌شود، از طریق مدلسازی فیزیکی سیستم در محیط Simscape نرم‌افزار Matlab، صحت‌سنجی شده است.

۲- اجزای سیستم بازیابی

مدل سه بعدی سیستم بازیابی و اجزای آن در شکل ۱ نمایش داده شده است. در شکل ۱، صفحه‌ی نگه‌دارنده، به عنوان تکیه‌گاه سیستم بازیابی با شماره ۱ نمایش داده شده است. در این شکل، کابل‌های سیستم بازیابی با شماره ۲ نمایش داده شده است. بعد از گرفتن میله‌ی مربوط به بازیابی توسط مکانیزم قلاب ربات، این دو کابل وظیفه‌ی تحمل وزن عمودپرواز و متعلقات آن را بر عهده دارند. هر کدام از کابل‌ها، از یک طرف به بدنه‌ی عمودپرواز ثابت شده و از طرف دیگر، روی یک قرقره (شماره‌ی ۱۲) جمع و باز می‌شود. هنگام جمع شدن ربات، یک فنر پیچشی، وظیفه‌ی جمع کردن این کابل بر روی قرقره را بر عهده دارد. هنگام باز شدن بازو، چون کابل از روی قرقره شماره‌ی ۳ عبور می‌کند، در نتیجه این کابل از روی قرقره شماره‌ی ۱۲ باز می‌شود. در شکل ۱، چنگک بازو با شماره‌ی ۵ نشان داده شده است. این چنگک، نقش گرفتن و رها کردن میله یا کابلی را که پرنده قرار است از آن معلق شود، بر عهده دارد. بازوها و مکان سروموتورهای ربات نیز در شکل ۱ نمایش داده شده است. بازوی چهارم طی حرکت ربات، وظیفه‌ی افقی نگه‌داشتن مکانیزم قلاب را بر عهده دارد.

چرخ قفل کابل سیستم بازیابی (شماره‌ی ۱۱)، جزئی از مکانیزم قفل کردن کابل سیستم بازیابی است که هنگام معلق شدن عمودپرواز،



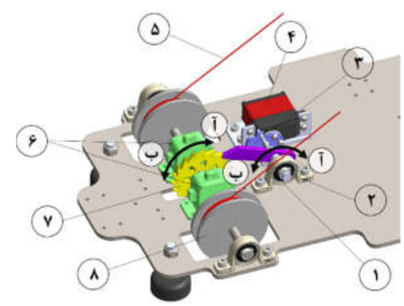
شکل ۱- اجزای سیستم بازیابی: ۱) صفحه‌ی نگهدارنده ۲) کابل سیستم بازیابی ۳) قرقره ۴) بازوی چهارم ۵) چنگک ۶) سروموتور مربوط به بازوی چهار ۷) بازوی سوم ۸) سروموتور محرک بازوی سوم ۹) بازوی دوم ۱۰) بازوی اول ۱۱) چرخ قفل کابل سیستم بازیابی ۱۲) قرقره‌ی جمع کننده‌ی کابل سیستم بازیابی

با قفل شدن، مانع چرخش قرقره‌ی ۱۲ شده و در نتیجه کابل سیستم بازیابی، قابلیت باز شدن را از دست می‌دهد. در شکل ۱، قرقره‌ی ۱۲ وظیفه‌ی جمع و باز کردن کابل سیستم بازیابی را بر عهده دارد. شکل ۲ مکانیزم قفل کابل سیستم بازیابی را نشان می‌دهد.

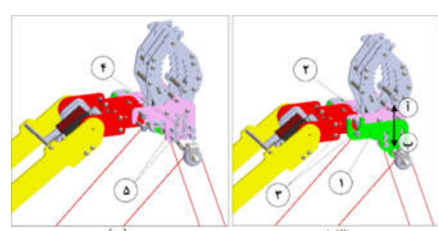
در شکل ۲، سروموتور شماره‌ی ۴، از طریق بازوی شماره‌ی ۳، اهرم قفل (شماره‌ی ۲) را حرکت می‌دهد. اتصال سروموتور با اهرم قفل به صورت غیرمستقیم بوده تا نیروهایی که به اهرم قفل از طریق چرخ قفل منتقل می‌شود، اثری بر سروموتور نداشته باشد. وقتی مطابق شکل ۲، سروموتور اهرم قفل را در جهت (آ) حرکت می‌دهد، چرخ و اهرم قفل از هم جدا شده و در نتیجه با کشیده شدن کابل

توسط انتهای بازوی رباتیک، کابلی که روی قرقره جمع شده، شروع به باز شدن می‌کند. در این حالت، چرخ قفل بدون مانعی بر سر راه آن، در جهت (آ) حرکت می‌کند. پس از اینکه چنگک ربات، میله‌ی بازیابی را گرفت، سروموتور اهرم قفل را در جهت (ب) چرخانده و نوک اهرم، در شیارهای چرخ قفل قرار می‌گیرد. در این حالت وقتی کابل سیستم بازیابی تحت کشش قرار گیرد، چرخ قفل تمایل به چرخش در جهت (آ) دارد. در این حالت به علت وجود اهرم قفل در برابر آن، چرخ قفل، متوقف شده و مانع از چرخش قرقره‌ها و بازشدن کابل می‌شود. در حالتی که چنگک میله را رها کرده و بازوی رباتیک در حال بسته شدن باشد، سروموتور اهرم قفل را در جهت (آ) چرخانده و فنرهای پیچشی شماره‌ی ۶، چرخ قفل را در جهت (ب) حرکت می‌دهند. در این حالت قرقره‌های جمع‌کننده‌ی کابل، هم جهت با چرخ قفل دوران کرده و کابل سیستم بازیابی روی این قرقره‌ها جمع می‌شود.

چنگک ربات به صورتی طراحی شده که پس از معلق شدن عمودپرواز، نیرویی به بازوهای ربات وارد نشود. اجزایی که در این کار دخیل هستند، در شکل ۳ نمایش داده شده است. مطابق شکل ۳ قسمت الف، صفحات ۱ و ۲، نسبت به یکدیگر قابلیت حرکت خطی دارند و می‌توانند، در جهت (آ) یا (ب) حرکت کنند. این کار از طریق شیارهای روی صفحه‌ی ۱ و راهنماهای ۵ انجام می‌شود. موقعی که به چنگک نیرویی وارد نمی‌شود، فنرهای ۴، دو صفحه‌ی ۱ و ۲ را نزدیک به یکدیگر نگه می‌دارد و دو صفحه به محورهای ۳ متصل می‌شوند. محورهای ۳، به بازوی چهارم متصل هستند. زمانی که عمودپرواز معلق



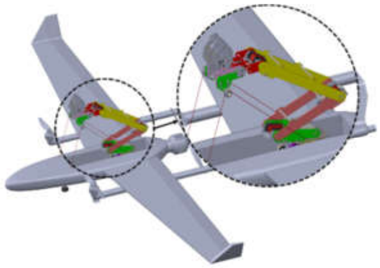
شکل ۲- اجزای مکانیزم قفل کابل سیستم بازیابی: ۱) یاتاقان ۲) اهرم قفل ۳) اتصال دهنده‌ی سروموتور با اهرم قفل ۴) سروموتور ۵) کابل ۶) فنر پیچشی جمع‌کننده کابل ۷) چرخ قفل کابل سیستم بازیابی ۸) قرقره‌ی جمع‌کننده‌ی کابل



شکل ۳- اجزای مؤثر در جداسازی بازوی چهارم از قلاب پس از بازیابی عمودپرواز در ارتفاع

شده و چنگک تحت نیروی گرانش قرار می‌گیرد، صفحات ۱ و ۲ از هم دور شده و فنرها در حالت کشش قرار می‌گیرند. در این حالت صفحات ۱ و۲ از محورهای ۳ جدا شده و نیروی گرانش عمودپرواز، به چنگک و کابل سیستم بازیابی وارد می‌شود.

در شکل ۴، نمایی از نصب سیستم بازیابی بر روی یک عمودپرواز نمایش داده شده است.

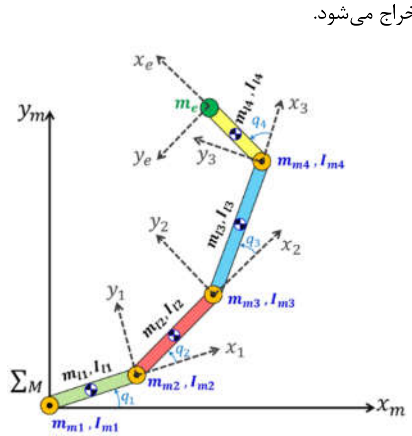


شکل ۴- نصب سیستم بازیابی نوآورانه بر روی یک عمودپرواز

۳- دینامیک بازوی رباتیک

دینامیک بازوی رباتیک در ادامه به روش اویلر-لاگرانژ استخراج می‌شود. در شکل ۵، پارامترها و مشخصات بازوها که در دینامیک ربات اثرگذار هستند، نمایش داده شده است.

در این روش، انرژی جنبشی و پتانسیل اجزا یعنی بازوها، موتورها و مجری نهایی (چنگک) محاسبه و از قاعده‌ی اویلر-لاگرانژ، دینامیک بازو استخراج می‌شود.



شکل ۵- پارامترها و مشخصات فیزیکی بازوی رباتیک برای به دست آوردن دینامیک آن

اگر متغیرهای q_i $(i = 1,2,\dots n)$ موقعیت یک ربات n درجه آزادی را نشان دهند، لاگرانژی سیستم به صورت رابطه‌ی (۱) تعریف می‌شود.

$$L = T - U \tag{۱}$$

که T و U، به ترتیب نشان‌دهنده‌ی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بازوها هستند. دینامیک ربات مطابق رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \tag{۲}$$

که ξ_i گشتاورهای مرتبط با متغیرهای مفاصل q_i هستند. انرژی جنبشی کل از مجموع انرژی جنبشی موتورها، بازوها و مجری نهایی به صورت رابطه‌ی (۳) محاسبه می‌شود.

$$T = \sum_{i=1}^{4}(T_{l_i} + T_{m_i}) + T_e \tag{۳}$$

که در این رابطه، T_{l_i} انرژی جنبشی بازوی i و T_{m_i} انرژی جنبشی موتور در مفصل i و T_e انرژی جنبشی مجری نهایی(چنگک) است. انرژی جنبشی بازوی i، که شامل بخش‌های خطی و دورانی است، از رابطه‌ی (۴) محاسبه می‌گردد.

$$T_{l_i}=\frac{1}{2}m_{l_i}{}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}^{T}\,{}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}+\frac{1}{2}\,{}^M\boldsymbol{\omega}_{l_i}^{T}\,{}^M\boldsymbol{R}_{l_i}\boldsymbol{I}_{l_i}^{l_i}{}^M\boldsymbol{R}_{l_i}^{T}\,{}^M\boldsymbol{\omega}_{l_i} \quad (۴)$$

که m_{l_i} جرم بازوی iام، ${}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}$ سرعت خطی مرکز جرم بازوی i نسبت به دستگاه مختصات M، ${}^M\boldsymbol{\omega}_{l_i}$ سرعت دورانی بازوی i و ${}^M\boldsymbol{R}_{l_i}$ ماتریس دوران از دستگاه متصل به مرکز جرم بازوی i نسبت به دستگاه مختصات M و $\boldsymbol{I}_{l_i}^{l_i}$ ماتریس ممان اینرسی بازوی i در دستگاه مختصات مرکز جرم بازوی i است. در ادامه باید این انرژی به صورت تابعی از متغیرهای مفاصل ارائه شوند. برای این کار از جاکوبی هندسی و روابط (۵) و (۶) می‌توان استفاده کرد.

$${}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P1}^{(l_i)}\dot{q}_1+\cdots+\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Pi}^{(l_i)}\dot{q}_i=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(l_i)}\dot{\boldsymbol{q}} \quad (۵)$$

$${}^M\boldsymbol{\omega}_{l_i}=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O1}^{(l_i)}\dot{q}_1+\cdots+\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Oi}^{(l_i)}\dot{q}_i=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(l_i)}\dot{\boldsymbol{q}} \quad (۶)$$

که بردار $\dot{\boldsymbol{q}}=[\dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dots\ \dot{q}_n]^T$ شامل مشتق متغیرهای مفاصل بازو (q_i) است. همچنین ماتریس $\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(l_i)}$ جاکوبی مربوط به سرعت خطی مرکز جرم بازوهاست و ستون j آن با $\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Pj}^{(l_i)}$ نمایش داده شده و برای مفاصل دورانی از رابطه‌ی زیر [۱۴] محاسبه می‌شوند.

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Pj}^{(l_i)}=\boldsymbol{z}_{j-1}\times\left({}^M\boldsymbol{P}_{l_i}-{}^M\boldsymbol{P}_{j-1}\right) \quad (۷)$$

$\boldsymbol{z}_{j-1}$ نشان‌دهنده‌ی محور z دستگاه مختصات $j-1$ است که در مفصل j نصب شده است. بردار ${}^M\boldsymbol{P}_{j-1}$ نیز نشان‌دهنده‌ی مختصات مبدأ دستگاه $j-1$ نسبت به دستگاه M است. بردار ${}^M\boldsymbol{P}_{l_i}$ مرکز جرم بازوی i را نسبت به دستگاه M نشان می‌دهد. $\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(l_i)}$ ماتریس جاکوبی سرعت زاویه‌ای مرکز جرم بازوی i است و ستون‌های آن از طریق رابطه‌ی (۸) محاسبه می‌شوند.

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Oj}^{(l_i)}=\boldsymbol{z}_{j-1} \quad (۸)$$

بنابراین انرژی جنبشی بازوها بر حسب متغیرهای مفاصل از رابطه‌ی (۹) محاسبه می‌گردد.

$$T_{l_i}=\frac{1}{2}m_{l_i}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(l_i)T}\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(l_i)}\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(l_i)T}\,{}^M\boldsymbol{R}_{l_i}\boldsymbol{I}_{l_i}^{l_i}{}^M\boldsymbol{R}_{l_i}^{T}\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(l_i)}\dot{\boldsymbol{q}} \quad (۹)$$

همچنین مجری نهایی، به صورت یک جرم متمرکز فرض شده و انرژی جنبشی آن یعنی T_e تنها شامل سرعت خطی در نظر گرفته می‌شود و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن شبیه به محاسبه‌ی انرژی بازوها است. بنابراین برای اختصار از آوردن روابط آن صرف نظر شده است.

با فرض اینکه موتور مربوط به مفصل i، روی بازوی $i-1$ قرار دارد، انرژی جنبشی موتور i به صورت رابطه‌ی (۱۰) قابل بیان است.

$$T_{m_i}=\frac{1}{2}m_{m_i}{}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}^{T}\,{}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}+\frac{1}{2}\,{}^M\boldsymbol{\omega}_{m_i}^{T}\,{}^M\boldsymbol{R}_{m_i}\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}{}^M\boldsymbol{R}_{m_i}^{T}\,{}^M\boldsymbol{\omega}_{m_i} \quad (۱۰)$$

که در آن m_{m_i} جرم موتور، ${}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}$ سرعت خطی مرکز جرم موتور، $\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}$ ماتریس اینرسی موتور نسبت به مرکز جرم آن و ${}^M\boldsymbol{\omega}_{m_i}$ سرعت زاویه‌ای موتور است. اگر θ_{m_i} موقعیت زاویه‌ای موتور باشد و با فرض انتقال صلب، رابطه‌ی (۱۱) برقرار است.

$$k_{ri}\dot{q}_i=\dot{\theta}_{m_i} \quad (۱۱)$$

که در آن k_{ri} نسبت کاهش چرخدنده است. بنابراین سرعت زاویه‌ای موتور به صورت (۱۲) محاسبه می‌شود.

$${}^M\boldsymbol{\omega}_{m_i}=\boldsymbol{\omega}_{i-1}+k_{ri}\dot{q}_i\boldsymbol{z}_{m_i} \quad (۱۲)$$

که $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$ سرعت زاویه‌ای بازوی $i-1$ است که موتور روی آن قرار گرفته است و $\boldsymbol{z}_{m_i}$ بردار یکه در جهت محور موتور است. برای بیان انرژی جنبشی موتورها بر حسب متغیرهای مفاصل، مشابه روابطی که برای بازوها حاصل شد، سرعت خطی و زاویه‌ای موتورها از روابط (۱۳) و (۱۴) به دست می‌آیند.

$${}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P1}^{(m_i)}\dot{q}_1+\cdots+\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Pi}^{(m_i)}\dot{q}_i=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(m_i)}\dot{\boldsymbol{q}} \quad (۱۳)$$

$${}^M\boldsymbol{\omega}_{m_i}=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O1}^{(m_i)}\dot{q}_1+\cdots+\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Oi}^{(m_i)}\dot{q}_i=\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(m_i)}\dot{\boldsymbol{q}} \quad (۱۴)$$

همچنین ستون‌های ماتریس جاکوبی برای مفاصل دورانی از رابطه‌ی (۱۵) به دست می‌آید.

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Pj}^{(m_i)}=\boldsymbol{z}_{j-1}\times\left({}^M\boldsymbol{P}_{m_i}-{}^M\boldsymbol{P}_{j-1}\right) \quad (۱۵)$$

که بردار ${}^M\boldsymbol{P}_{m_i}$ مرکز جرم موتور i را نسبت به دستگاه M نشان می‌دهد. همچنین ستون‌های ماتریس جاکوبی $\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(m_i)}$ از رابطه‌ی (۱۶) به دست می‌آیند.

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Oj}^{(m_i)}=\begin{cases}\boldsymbol{\mathcal{J}}_{Oj}^{(l_i)} & j=0.1.2.\dots.i-1\\ k_{r_i}\boldsymbol{z}_{m_i} & j=i\end{cases} \quad (۱۶)$$

در نهایت انرژی جنبشی موتور به صورت (۱۷) محاسبه می‌شود.

$$T_{m_i}=\frac{1}{2}m_{m_i}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(m_i)T}\boldsymbol{\mathcal{J}}_{P}^{(m_i)}\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(m_i)T}\,{}^M\boldsymbol{R}_{m_i}\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}{}^M\boldsymbol{R}_{m_i}^{T}\boldsymbol{\mathcal{J}}_{O}^{(m_i)}\dot{\boldsymbol{q}} \quad (۱۷)$$

انرژی پتانسیل بازوی رباتیک، شامل انرژی پتانسیل بازوها، موتورها و مجری نهایی بوده و از رابطه‌ی (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$U=-\sum_{i=1}^{4}\left(m_{l_i}\boldsymbol{g}_0^{T}\,{}^M\boldsymbol{P}_{l_i}+m_{m_i}\boldsymbol{g}_0^{T}\,{}^M\boldsymbol{P}_{m_i}\right)-m_e\boldsymbol{g}_0^{T}\,{}^M\boldsymbol{P}_e \quad (۱۸)$$

که m_e نشان‌دهنده‌ی جرم مجری نهایی در انتهای ربات و ${}^M\boldsymbol{P}_e$ بردار مرکز جرم مجری نهایی در دستگاه M است. همچنین $\boldsymbol{g}_0$ بردار شتاب گرانش در دستگاه M به صورت $\boldsymbol{g}_0=[0\ -g\ 0]^T$ است.

پس از محاسبه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل، با مشتق گرفتن به کمک روش لاگرانژ، معادله‌ی دینامیک ربات به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}.\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\tau_q}+\Delta_{\boldsymbol{\tau q}} \quad (۱۹)$$

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$ ماتریس اینرسی، $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}.\dot{\boldsymbol{q}})$ ماتریس نیروهای کوریولیس و ژیروسکوپی و $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$ ماتریس نیروهای گرانشی است. همچنین $\boldsymbol{\tau_q}$ بردار گشتاور مفاصل و $\Delta_{\boldsymbol{\tau q}}$ گشتاورهای ناشی از اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها را نشان می‌دهد.

۴- معادلات دینامیکی سیستم بازو-عمودپرواز

در شکل ۶، طرحواره‌ای از عمودپرواز و بازوهای ربات نمایش داده شده است. دستگاه مختصات Σ_B در مرکز جرم عمودپرواز (نقطه‌ی O) و دستگاه مختصات Σ_M در محل نصب ربات به عمودپرواز قرار گرفته است. دستگاه مختصات جهانی نیز با Σ_W مشخص شده است. در این مدلسازی، جرم کابل نگه‌دارنده و میزان ضریب سختی فنر پیچشی که وظیفه‌ی جمع کردن این کابل را بر عهده دارد، ناچیز در نظر گرفته شده است.

در دستگاه W موقعیت خطی عمودپرواز با ${}^W\boldsymbol{P}_b$ و سرعت خطی آن با ${}^W\boldsymbol{V}_b$، نمایش داده شده و به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) فرض می‌شوند.

$$\boldsymbol{P}_b={}^W\boldsymbol{P}_b=[x\ y\ z]^T \quad (۲۰)$$

$$\boldsymbol{V}_b=\dot{\boldsymbol{P}}_b={}^W\boldsymbol{V}_b={}^W\dot{\boldsymbol{P}}_b=[\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]^T \quad (۲۱)$$

همچنین جهت‌گیری عمودپرواز بر اساس زوایای اویلر به صورت ${}^W\boldsymbol{\phi}_b$ و مشتق زوایای اویلر ${}^W\dot{\boldsymbol{\phi}}_b$ مطابق روابط (۲۲) و (۲۳) هستند.

$$\boldsymbol{\phi}_b = {}^W\boldsymbol{\phi}_b = [\varphi\ \theta\ \psi]^T \tag{۲۲}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_b = {}^W\dot{\boldsymbol{\phi}}_b = [\dot\varphi\ \dot\theta\ \dot\psi]^T \tag{۲۳}$$

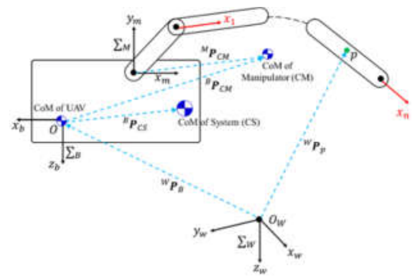
زوایای φ، θ و ψ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی زوایای رول، پیچ و یاو هستند. بنابراین جهت‌گیری دستگاه B نسبت به دستگاه W به کمک ماتریس دوران (۲۴) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&{}^W\boldsymbol{R}_B(\varphi.\theta.\psi) = \boldsymbol{R}_z(\psi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\varphi)\\ &= \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\varphi S_\theta C_\psi - C_\varphi S_\psi & C_\varphi S_\theta C_\psi + S_\varphi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\varphi S_\theta S_\psi + C_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\theta S_\psi - S_\varphi C_\psi \\ -S_\theta & S_\varphi C_\theta & C_\varphi C_\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۲۴}$$

در ماتریس بالا، C_* نشان‌دهنده‌ی $\cos(*)$ و S_* نشان‌دهنده‌ی $\sin(*)$ است. ${}^B\boldsymbol{\omega}_b$ نشان‌دهنده‌ی سرعت‌های زاویه‌ای عمودپرواز در دستگاه B بوده و ارتباط آن با مشتق زوایای اویلر، از رابطه‌ی (۲۵) محاسبه می‌گردد.

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_b = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b)\,{}^B\boldsymbol{\omega}_b \tag{۲۵}$$

که ماتریس $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b)$ از رابطه‌ی (۲۶) به دست می‌آید.



شکل ۶- طرحواره بازوی رباتیک و عمودپرواز و دستگاه‌های مختصات متصل به آن‌ها

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b) = \begin{bmatrix} 1 & S_\varphi \tan\theta & C_\varphi \tan\theta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & S_\varphi / C_\theta & C_\varphi / C_\theta \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

همچنین جهت‌گیری دستگاه مختصات M نسبت به دستگاه مختصات B با ${}^B\boldsymbol{R}_M$ نمایش داده شده و به کمک ماتریس دوران (۲۷) به دست می‌آید.

$${}^B\boldsymbol{R}_M = \begin{bmatrix} \hat{x}_m\cdot\hat{x}_b & \hat{y}_m\cdot\hat{x}_b & \hat{z}_m\cdot\hat{x}_b \\ \hat{x}_m\cdot\hat{y}_b & \hat{y}_m\cdot\hat{y}_b & \hat{z}_m\cdot\hat{y}_b \\ \hat{x}_m\cdot\hat{z}_b & \hat{y}_m\cdot\hat{z}_b & \hat{z}_m\cdot\hat{z}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

و برداری که از مبدأ مختصات دستگاه M به مبدأ مختصات دستگاه B متصل می‌شود، به صورت (۲۸) فرض می‌شود.

$${}^B\boldsymbol{P}_M = [{}^B_M p_x\ \ {}^B_M p_y\ \ {}^B_M p_z]^T \tag{۲۸}$$

در شکل ۶، مرکز جرم ربات با CM و مرکز جرم کل سیستم بازو-عمودپرواز با CS نمایش داده شده است. بردارهای ${}^M\boldsymbol{P}_{CM}$ و ${}^B\boldsymbol{P}_{CM}$ به ترتیب، نشان‌دهنده‌ی مرکز جرم بازوی رباتیک نسبت به دستگاه‌های M و B است. همچنین مرکز جرم سیستم بازو-عمودپرواز نسبت به دستگاه B با بردار ${}^B\boldsymbol{P}_{CS}$ بیان شده است.

برای تخمین اثرات ناشی از حرکت ربات بر عمودپرواز از روش ارائه شده در پژوهش [۱۵] استفاده شده است با این تفاوت که در این مقاله اثرات موتورها و مجری نهایی نیز در کنار بازوها در نظر گرفته شده و دستگاه‌های مختصات ربات و بدنه‌ی عمودپرواز بر یکدیگر منطبق نیستند. بر همین اساس، $\boldsymbol{M}_{Lin}$ ممنتوم خطی برای کل سیستم در نظر گرفته شده و از رابطه‌ی (۲۹) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{M}_{Lin} = m_s[{}^W\dot{\boldsymbol{P}}_B + {}^W\boldsymbol{R}_B({}^B\boldsymbol{\omega}_b \times {}^B\boldsymbol{P}_{CS} + {}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{CS})] \tag{۲۹}$$

که ${}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{CS}$ سرعت مرکز جرم سیستم بازو-عمودپرواز نسبت به دستگاه Bاست و مجموع جرم ربات و عمودپرواز با m_s نمایش داده شده است. همچنین ممنتوم زاویه‌ای برای کل سیستم با $\boldsymbol{M}_{Ang}$ نمایش داده شده و از رابطه‌ی (۳۰) محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{Ang} &= {}^W\boldsymbol{P}_B \times \boldsymbol{M}_{Lin} + m_s({}^W\boldsymbol{R}_B\,{}^B\boldsymbol{P}_{CS} \times {}^W\dot{\boldsymbol{P}}_B)\\ &+ {}^W\boldsymbol{R}_B[({}^B\boldsymbol{I}_b^O + {}^B\boldsymbol{I}_m^O)\,{}^B\boldsymbol{\omega}_b + {}^B\boldsymbol{M}_{Ang.m}]\end{aligned} \tag{۳۰}$$

${}^B\boldsymbol{I}_b^O$ و ${}^B\boldsymbol{I}_m^O$ ماتریس‌های اینرسی عمودپرواز و بازوی رباتیک حول نقطه‌ی O هستند که در دستگاه B بیان شده‌اند. ${}^B\boldsymbol{M}_{Ang.m}$ ممنتوم زاویه‌ای بازوی رباتیک در دستگاه B است که با تقریب در نظر گرفته شده در پژوهش [۱۵] به صورت رابطه‌ی (۳۱) در نظر گرفته می‌شود.

$${}^B\boldsymbol{M}_{Ang.m} = \frac{m_s^2}{m_m}\,{}^B\boldsymbol{P}_{CS} \times {}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{CS} \tag{۳۱}$$

m_m نشان‌دهنده‌ی جرم ربات و ${}^B\boldsymbol{P}_{CS}$ به صورت رابطه‌ی (۳۲) است.

$${}^B\boldsymbol{P}_{CS} = \frac{m_m}{m_s}\,{}^B\boldsymbol{P}_{CM} \tag{۳۲}$$

دینامیک سیستم به کمک نظریه‌ی ممنتوم خطی و زاویه‌ای [۱۶] قابل استخراج است. بر اساس این روش، مشتق ممنتوم خطی و زاویه‌ای، برابر با نیرو و گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم خواهد بود. بنابراین به کمک مشتق ممنتوم خطی و زاویه‌ای و نیروهای خارجی، روابط (۳۳) و (۳۴) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&m_s{}^W\ddot{\boldsymbol{P}}_B = -F_t{}^W\boldsymbol{R}_B e_3 + m_s g e_3\\ &- m_s{}^W\boldsymbol{R}_B[{}^B\boldsymbol{\omega}_b \times ({}^B\boldsymbol{\omega}_b \times {}^B\boldsymbol{P}_{CS}) + {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times {}^B\boldsymbol{P}_{CS}]\\ &- m_s{}^W\boldsymbol{R}_B(2\,{}^B\boldsymbol{\omega}_b \times {}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{CS} + {}^B\ddot{\boldsymbol{P}}_{CS})\end{aligned} \tag{۳۳}$$

$$\begin{aligned}&({}^B\boldsymbol{I}_b^O + {}^B\boldsymbol{I}_m^O)\,{}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\tau} - {}^B\boldsymbol{\omega}_b \times \left(({}^B\boldsymbol{I}_b^O + {}^B\boldsymbol{I}_m^O)\,{}^B\boldsymbol{\omega}_b\right)\\ &+ \boldsymbol{m}_s\left({}^B\boldsymbol{P}_{CS} \times {}^W\boldsymbol{R}_B^{-1}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{e}_3 - {}^W\ddot{\boldsymbol{P}}_B)\right) - {}^B\dot{\boldsymbol{I}}_m^O\,{}^B\boldsymbol{\omega}_b\\ &- {}^B\boldsymbol{\omega}_b \times {}^B\boldsymbol{M}_{Ang.m} - {}^B\dot{\boldsymbol{M}}_{Ang.m}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

g شتاب گرانش و $\boldsymbol{e}_3 = [0\ 0\ 1]^T$ است. همچنین F_t نیروی رانش و $\boldsymbol{\tau}$ گشتاوری است که توسط عمودپرواز در نقطه‌ی O وارد و از رابطه‌ی (۳۵) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} F_t \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & C_T & C_T & C_T \\ -l_x C_T & l_x C_T & l_x C_T & -l_x C_T \\ l_{y1} C_T & -l_{y2} C_T & l_{y1} C_T & -l_{y2} C_T \\ C_m & C_m & -C_m & -C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

نیروی رانش روتورها، با مجذور سرعت زاویه‌ای متناسب بوده و با ضریب C_T با یکدیگر مرتبط می‌شوند. همچنین پارامتر C_m ضریب پسای گشتاور ناشی از چرخش موتورهای عمودپرواز بوده و پارامترهای l_x، l_{y1} و l_{y2} فاصله‌ی موتورهای عمودپرواز از محورهای x و y دستگاه مختصات بدنه عمودپرواز (دستگاه B) هستند. سرعت زاویه‌ای چرخش موتورهای عمودپرواز با پارامتر $\omega_i (i = 1.2.3.4)$ نشان داده شده است.

بردار مکان و سرعت مرکز جرم سیستم بازو-عمودپرواز نسبت به دستگاه B از روابط (۳۶) و (۳۷) قابل محاسبه هستند.

$${}^B\boldsymbol{P}_{CS} = \frac{1}{m_s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{l_i}\,{}^B\boldsymbol{P}_{l_i} + \sum_{i=1}^{n} m_{m_i}\,{}^B\boldsymbol{P}_{m_i} + m_e\,{}^B\boldsymbol{P}_e\right) \tag{۳۶}$$

$${}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{CS} = \frac{1}{m_s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{l_i}\,{}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i} + \sum_{i=1}^{n} m_{m_i}\,{}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i} + m_e\,{}^B\dot{\boldsymbol{P}}_e\right) \tag{۳۷}$$

مرکز جرم بازوی i نسبت به دستگاه B با ${}^B\boldsymbol{P}_{l_i}$ نمایش داده شده و از رابطه‌ی (۳۸) محاسبه می‌گردد.

$${}^B\boldsymbol{P}_{l_i} = {}^B\boldsymbol{R}_M\,{}^M\boldsymbol{P}_{l_i} + {}^B\boldsymbol{P}_M \tag{۳۸}$$

همچنین سرعت خطی مرکز جرم بازوی i و سرعت زاویه‌ای آن در دستگاه B از روابط (۳۹) و (۴۰) به دست می‌آیند.

$${}^B\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i} = {}^B\boldsymbol{R}_M\,{}^M\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i} \tag{۳۹}$$

$${}^B\boldsymbol{\omega}_{l_i} = {}^B\boldsymbol{R}_M\,{}^M\boldsymbol{\omega}_{l_i} \tag{۴۰}$$

که ${}^{M}\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}$ و ${}^{M}\boldsymbol{\omega}_{l_i}$ از رابطه‌ی (۵) و (۶) محاسبه می‌شود. بردار مکان موتور i با ${}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}$ و سرعت خطی و زاویه‌ای آن در دستگاه B با بردارهای ${}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}$ و ${}^{B}\boldsymbol{\omega}_{m_i}$ نمایش داده می‌شود و مشابه روابطی که برای بازوها بیان شد، به کمک ماتریس‌های جاکوبی محاسبه می‌شوند. همچنین چنگک و اجزای آن که در انتهای ربات قرار گرفته‌اند، به عنوان یک جرم متمرکز فرض شده‌اند که مکان آن نسبت به دستگاه B با ${}^{B}\boldsymbol{P}_{e}$ بیان و سرعت خطی آن در دستگاه B با بردار ${}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{e}$ نمایش داده شده است.

ماتریس ممان اینرسی ربات در دستگاه B از رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}{}^{B}\boldsymbol{I}_{m}^{O} &= \sum_{i=1}^{n} {}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}\,\boldsymbol{I}_{l_i}^{l_i}\;{}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}^{-1} + m_{l_i}\left(\left\|{}^{B}\boldsymbol{P}_{l_i}\right\|^{2}\boldsymbol{I}_{3\times3} \right.\\ &\left. -\;{}^{B}\boldsymbol{P}_{l_i}\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{l_i}\right)^{T}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left\{{}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}\,\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}\;{}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}^{-1}\right.\\ &\left. + m_{m_i}\left\|{}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}\right\|^{2}\boldsymbol{I}_{3\times3} - {}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}\right)^{T}\right\}\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left\{m_e\left(\left\|{}^{B}\boldsymbol{P}_{e}\right\|^{2}\boldsymbol{I}_{3\times3} - {}^{B}\boldsymbol{P}_{e}\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{e}\right)^{T}\right)\right\}\end{aligned} \tag{۴۱}$$

که ${}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}$ و ${}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}$ ماتریس‌های دوران دستگاه‌های مختصات نصب شده در مرکز جرم بازوها و موتورها نسبت به دستگاه B هستند. ماتریس $\boldsymbol{I}_{3\times3}$ نشان‌دهنده‌ی ماتریس همانی است. با توجه به رابطه‌ی (۴۱)، مشتق ماتریس ممان اینرسی ربات در دستگاه B از رابطه‌ی (۴۲) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}{}^{B}\dot{\boldsymbol{I}}_{m}^{O} &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{S}\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_{l_i}\right){}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}\,\boldsymbol{I}_{l_i}^{l_i}\;{}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}^{-1}\right.\\ &- {}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}\,\boldsymbol{I}_{l_i}^{l_i}\;{}^{B}\boldsymbol{R}_{l_i}^{-1}\boldsymbol{S}\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_{l_i}\right) + m_{l_i}\left(2\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{l_i}\right)^{T}{}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}\,I_{3\times3}\right.\\ &\left.\left. - {}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{l_i}\right)^{T} - {}^{B}\boldsymbol{P}_{l_i}\left({}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{l_i}\right)^{T}\right)\right\}\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{S}\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_{m_i}\right){}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}\,\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}\;{}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}^{-1}\right.\\ &- {}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}\,\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}\;{}^{B}\boldsymbol{R}_{m_i}^{-1}\boldsymbol{S}\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_{m_i}\right) + m_{m_i}2\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}\right)^{T}{}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}\,I_{3\times3}\\ &\left. - {}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}\right)^{T} - {}^{B}\boldsymbol{P}_{m_i}\left({}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{m_i}\right)^{T}\right\}\\ &+ m_e\left(2\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{e}\right)^{T}{}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{e}\,I_{3\times3} - {}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{e}\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{e}\right)^{T} - {}^{B}\boldsymbol{P}_{e}\left({}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{e}\right)^{T}\right)\end{aligned} \tag{۴۲}$$

که $\boldsymbol{S}\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_{l_i}\right)$ به صورت رابطه (۴۳) است.

$$\boldsymbol{S}\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_{l_i}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{B}_{l_i}\omega_z & {}^{B}_{l_i}\omega_y \\ {}^{B}_{l_i}\omega_z & 0 & -{}^{B}_{l_i}\omega_x \\ -{}^{B}_{l_i}\omega_y & {}^{B}_{l_i}\omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۳}$$

با توجه به پژوهش [۱۷] اثرات دینامیک کوپله‌ی بازوی رباتیک به عنوان اغتشاش به عمودپرواز اعمال می‌شود. با استفاده از معادلات (۳۳) و (۳۴)، دینامیک سیستم بازو-عمودپرواز از رابطه‌ی (۴۴) قابل محاسبه است.

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{P}}_b = -\dfrac{F_t}{m_s}{}^{W}\boldsymbol{R}_B\boldsymbol{e}_3 + g\boldsymbol{e}_3 + \dfrac{\boldsymbol{F}_{dis}}{m_s}\\ {}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = {}^{B}\boldsymbol{I}_b^{-1}\left(\boldsymbol{\tau} - {}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times\left({}^{B}\boldsymbol{I}_b\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\right) + {}^{B}\boldsymbol{\tau}_{dis}\right)\end{cases} \tag{۴۴}$$

که در رابطه‌ی بالا، ${}^{B}I_b$ ماتریس اینرسی عمودپرواز نسبت به محورهای دستگاه مختصات B در نقطه O است. $\boldsymbol{F}_{dis}$ نیروی حاصل از حرکت بازوی رباتیک در دستگاه مختصات W است که به عنوان اغتشاش به عمودپرواز اعمال می‌شود. همچنین ${}^{B}\boldsymbol{\tau}_{dis}$ گشتاورهای ناشی از ربات نسبت به دستگاه B است که به صورت اغتشاش به عمودپرواز وارد می‌شود. این نیرو و گشتاور از روابط (۴۵) و (۴۶) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{dis} &= -m_s{}^{W}\boldsymbol{R}_B\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times\left({}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times{}^{B}\boldsymbol{P}_{CS}\right)\right.\\ &\left. + {}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b\times{}^{B}\boldsymbol{P}_{CS} + 2\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times{}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{CS} + {}^{B}\ddot{\boldsymbol{P}}_{CS}\right)\end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned}{}^{B}\boldsymbol{\tau}_{dis} &= -{}^{B}\boldsymbol{I}_m^{O}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b - {}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times\left({}^{B}\boldsymbol{I}_m^{O}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\right)\\ &- {}^{B}\dot{\boldsymbol{I}}_m^{O}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b + m_s\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{CS}\times{}^{W}\boldsymbol{R}_B^{-1}\left(g e_3 - \dot{\boldsymbol{V}}_b\right)\right)\\ &-\frac{m_s^2}{m_m}\,{}^{B}\boldsymbol{P}_{CS}\times{}^{B}\ddot{\boldsymbol{P}}_{CS} - \frac{m_s^2}{m_m}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times\left({}^{B}\boldsymbol{P}_{CS}\times{}^{B}\dot{\boldsymbol{P}}_{CS}\right)\end{aligned} \tag{۴۶}$$

۵- طراحی کنترلگر برای سیستم بازو-عمودپرواز

با تخمین نیرو و گشتاور ناشی از ربات که به عمودپرواز وارد می‌شود و در نظر گرفتن خطای تخمین و سایر اغتشاشات، دینامیک سیستم به صورت رابطه‌ی (۴۷) بیان می‌شود.

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{P}}_b = -\dfrac{\boldsymbol{F}_t}{m_s}{}^{W}\boldsymbol{R}_B\boldsymbol{e}_3 + g\boldsymbol{e}_3 + \dfrac{\widehat{\boldsymbol{F}}_{dis}}{m_s} + \dfrac{\boldsymbol{\Delta}_F}{m_s}\\ {}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = {}^{B}\boldsymbol{I}_b^{-1}\left(\boldsymbol{\tau} - {}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times\left({}^{B}\boldsymbol{I}_b\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\right) + {}^{B}\hat{\boldsymbol{\tau}}_{dis}\right) + {}^{B}\boldsymbol{I}_b^{-1}\boldsymbol{\Delta}_\tau\end{cases} \tag{۴۷}$$

که $\boldsymbol{\Delta}_F$ و $\boldsymbol{\Delta}_\tau$ اثرات نیرو و گشتاور ناشی از خطای تخمین، سایر اغتشاشات و همچنین عدم قطعیت‌های مدل هستند. در ادامه، ورودی کنترلی مجازی $\boldsymbol{\nu}_1$ به شکل رابطه‌ی (۴۸) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{\nu}_1 = -\frac{F_t}{m_s}{}^{W}\boldsymbol{R}_{B.d}\boldsymbol{e}_3 + g\boldsymbol{e}_3 + \frac{\widehat{\boldsymbol{F}}_{dis}}{m_s} \tag{۴۸}$$

ماتریس ${}^{W}\boldsymbol{R}_{B.d}$ نشان‌دهنده‌ی ماتریس دورانی است که به ازای زوایای اویلر مطلوب $\boldsymbol{\phi}_{b.d} = [\varphi_d \quad \theta_d \quad \psi_d]^T$ ایجاد می‌شود. بنابراین دینامیک انتقالی سیستم، به شکل معادله (۴۹) بیان می‌شود.

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{P}}_b = \boldsymbol{\nu}_1 + \dfrac{\boldsymbol{\Delta}_F}{m_s} + \boldsymbol{\Delta}(e_{\phi_b})\\ \boldsymbol{\Delta}(e_{\phi_b}) = \dfrac{F_t}{m_s}\left({}^{W}\boldsymbol{R}_{B.d} - {}^{W}\boldsymbol{R}_B\right)\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_{\phi_b} = \boldsymbol{\phi}_b - \boldsymbol{\phi}_{b.d}\end{cases} \tag{۴۸}$$

با در نظر گرفتن ورودی کنترل مجازی، مطابق روش ارائه شده در پژوهش [۱۸]، زوایای رول و پیچ به صورت رابطه‌ی (۵۰) بیان می شوند. در این حالت، با فرض ورودی کنترلی مجازی به صورت بردار $\boldsymbol{\nu}_1 = [\nu_{1x} \quad \nu_{1y} \quad \nu_{1z}]^T$، نیروی رانش و زوایای رول و پیچ مطلوب از طریق روابط (۵۰) به دست می‌آیند.

$$\begin{cases}F_t = \left\|m_s\boldsymbol{\nu}_1 - m_s g\boldsymbol{e}_3 - \widehat{\boldsymbol{F}}_{dis}\right\|\\ \varphi_d = \arcsin\left(\dfrac{m_s}{F_t}\left(\nu_{1x}S_{\psi_d} - \nu_{1y}C_{\psi_d}\right)\right)\\ \theta_d = \arctan\left(\dfrac{1}{\nu_{1z} - g}\left(\nu_{1x}C_{\psi_d} - \nu_{1y}S_{\psi_d}\right)\right)\end{cases} \tag{۴۹}$$

گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ به شکل رابطه‌ی (۵۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= -{}^{B}\boldsymbol{I}_b\,\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_b)\dot{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\phi}_b)\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b + {}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\times\left({}^{B}\boldsymbol{I}_b\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}_b\right)\\ &+ {}^{B}\boldsymbol{I}_b\,\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_b)\boldsymbol{\nu}_2 - {}^{B}\hat{\boldsymbol{\tau}}_{dis}\end{aligned} \tag{۵۰}$$

که ماتریس $\dot{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\phi}_b)$ از مشتق ماتریس $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b)$ به دست می‌آید. با قرار دادن رابطه‌ی (۵۱) در رابطه‌ی (۴۷)، دینامیک سیستم به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{P}}_b = \boldsymbol{\nu}_1 + \dfrac{\boldsymbol{\Delta}_F}{m_s} + \boldsymbol{\Delta}(e_{\phi_b})\\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_b = \boldsymbol{\nu}_2 + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b)\,{}^{B}\boldsymbol{I}_b^{-1}\boldsymbol{\Delta}_\tau\end{cases} \tag{۵۱}$$

$\boldsymbol{\nu}_2$ یک ورودی کنترلی مجازی است و در بخش بعدی نحوه‌ی محاسبه‌ی آن ارائه می‌شود.

۱-۵- طراحی کنترلگر مقاوم مد لغزشی درجه دوم فراپیچشی برای حرکت انتقالی عمودپرواز

برای طراحی این کنترلگر، بردار صفحه‌ی لغزش $\boldsymbol{s}_P = [s_{1P} \quad s_{2P} \quad s_{3P}]^T$ به صورت رابطه‌ی (۵۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{s}_P = \dot{\boldsymbol{e}}_P + \boldsymbol{c}_P \boldsymbol{e}_P \quad (۵۲)$$

که $\boldsymbol{c}_P = [c_{1P} \quad c_{2P} \quad c_{3P}]^T$ شامل پارامترهای طراحی $c_{iP} > 0 (i = 1.2.3)$ است. بردار خطا و مشتق آن نیز به صورت (۵۴) هستند.

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_P = \boldsymbol{P}_{b.d} - \boldsymbol{P}_b = [x_d - x \quad y_d - y \quad z_d - z]^T \\ \dot{\boldsymbol{e}}_P = \dot{\boldsymbol{P}}_{b.d} - \dot{\boldsymbol{P}}_b = [\dot{x}_d - \dot{x} \quad \dot{y}_d - \dot{y} \quad \dot{z}_d - \dot{z}]^T \end{cases} \quad (۵۳)$$

بردارهای $\boldsymbol{P}_{b.d}$ و $\dot{\boldsymbol{P}}_{b.d}$ نشان‌دهنده‌ی موقعیت و سرعت مطلوب عمودپرواز نسبت به دستگاه W است. با مشتق گرفتن از صفحه‌ی لغزش، رابطه‌ی (۵۵) ایجاد می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{s}}_P = \ddot{\boldsymbol{P}}_{b.d} - \ddot{\boldsymbol{P}}_b + \boldsymbol{c}_P \dot{\boldsymbol{e}}_P \quad (۵۴)$$

به کمک رابطه‌ی (۴۹) و رابطه‌ی (۵۵)، معادله‌ی (۵۶) حاصل می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{s}}_P = \ddot{\boldsymbol{P}}_{b.d} - (\boldsymbol{v}_1 + \frac{\boldsymbol{\Delta}_F}{m_s} + \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{e}_{\phi_b})) + \boldsymbol{c}_P \dot{\boldsymbol{e}}_P \quad (۵۵)$$

با توجه به مشتق صفحه‌ی لغزش، ورودی کنترلی $\boldsymbol{v}_1$ به صورت رابطه (۵۷) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{v}_1 = \ddot{\boldsymbol{P}}_{b.d} + \boldsymbol{c}_P \dot{\boldsymbol{e}}_P + \boldsymbol{u}_{sP} \quad (۵۶)$$

قانون کنترلی سوییچینگ $\boldsymbol{u}_{sP} = [u_{s1P} \quad u_{s2P} \quad u_{s3P}]^T$ از الگوریتم کنترلگر مد لغزشی فراپیچشی و از رابطه‌ی (۵۸) به دست می‌آید.

$$u_{siP} = k_{iP}\sqrt{|s_{iP}|}\operatorname{sgn}(s_{iP}) + w_{iP}\int \operatorname{sgn}(s_{iP})\,dt \quad (i = 1.2.3) \quad (۵۷)$$

$\operatorname{sgn}(*)$ تابع علامت بوده و پارامترهای k_{iP} و w_{iP} اعدادی مثبت هستند.

برای تحلیل پایداری کنترلگر می‌توان از روش لیاپانوف، استفاده کرد. برای این کار، تابع لیاپانوف به صورت (۵۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$V(\boldsymbol{s}_P) = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_P^T \boldsymbol{s}_P \quad (۵۸)$$

در نتیجه مشتق تابع لیاپانوف به صورت (۶۰) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{s}_P) &= s_{1P}\dot{s}_{1P} + s_{2P}\dot{s}_{2P} + s_{3P}\dot{s}_{3P} \\ &= \sum_{i=1}^{3} s_{iP}\Big\{-k_{iP}\sqrt{|s_{iP}|}sgn(s_i) - w_{iP}\int sgn(s_{iP})\,dt \\ &- \frac{\Delta_{Fi}}{m_s} - \delta_i\Big\} \end{aligned} \quad (۵۹)$$

بردارهای خطا و عدم قطعیت، به صورت (۶۱) در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_F = [\Delta_{F1} \quad \Delta_{F2} \quad \Delta_{F3}]^T \\ \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{e}_{\phi_b}) = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]^T \end{cases} \quad (۶۰)$$

با توجه به مشتق تابع لیاپانوف، می‌توان رابطه‌ی (۶۲) را نوشت.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{s}_P) \le \sum_{i=1}^{3}\Big\{&-k_{iP}|s_{iP}|\sqrt{|s_{iP}|} - |s_{iP}|\int w_{iP}\,dt \\ &- |s_{iP}|\frac{\Delta_{F1}}{m_s} - |s_{iP}|\delta_i\Big\} \end{aligned} \quad (۶۱)$$

با نوشتن $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{e}_{\phi_b})$ و $\frac{\Delta_F}{m_s}$ به فرم انتگرالی، رابطه‌ی (۶۳) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{s}_P) \le \sum_{i=1}^{3}\Big\{&-k_{iP}|s_{iP}|\sqrt{|s_{iP}|} - |s_{iP}|\int w_{iP}\,dt \\ &- |s_{iP}|\int \frac{\dot{\Delta}_{Fi}}{m_s}\,dt - |s_{iP}|\int \dot{\delta}_i dt\Big\} \end{aligned} \quad (۶۲)$$

با فرض $\lambda_i > \left|\frac{\dot{\Delta}_{Fi}}{m_s}\right|$ و $\gamma_i > |\dot{\delta}_i|$ رابطه‌ی (۶۴) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{s}_P) \le \sum_{i=1}^{3}\Big\{&-k_{iP}|s_{iP}|\sqrt{|s_{iP}|} - |s_{iP}|\int w_{iP}\,dt \\ &+ |s_{iP}|\int \lambda_i\,dt + |s_{iP}|\int \gamma_i dt\Big\} \end{aligned} \quad (۶۳)$$

اگر شرط $\lambda_i + \gamma_i < w_{iP}$ برقرار باشد، مشتق تابع لیاپانوف مطابق رابطه‌ی (۶۵) منفی خواهد شد و پایداری کنترلگر تضمین خواهد شد.

$$\dot{V}(\boldsymbol{s}_P) \le 0 \quad (۶۴)$$

۲-۵- طراحی کنترلگر مقاوم مد لغزشی درجه دوم فراپیچشی برای حرکت دورانی عمودپرواز

مشابه طراحی کنترلگر مد لغزشی برای موقعیت، صفحه‌ی لغزش $\boldsymbol{s}_\phi = [s_{1\phi} \quad s_{2\phi} \quad s_{3\phi}]^T$ به صورت رابطه‌ی (۶۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{s}_\phi = \dot{\boldsymbol{e}}_\phi + \boldsymbol{c}\boldsymbol{e}_\phi \quad (۶۵)$$

بردار خطای زوایا و مشتق آن از رابطه‌ی (۶۷) محاسبه می‌گردند.

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{\phi}_{b.d} - \boldsymbol{\phi}_b = [\varphi_d - \varphi \quad \theta_d - \theta \quad \psi_d - \psi]^T \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\phi = \dot{\boldsymbol{\phi}}_{b.d} - \dot{\boldsymbol{\phi}}_b = [\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi} \quad \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \quad \dot{\psi}_d - \dot{\psi}]^T \end{cases} \quad (۶۶)$$

بردارهای $\boldsymbol{\phi}_{b.d}$ و $\dot{\boldsymbol{\phi}}_{b.d}$ زوایای اویلر مطلوب و مشتق آن نسبت به دستگاه W را نشان می‌دهد. مشتق صفحه‌ی لغزش، از رابطه‌ی (۶۸) به دست می‌آید.

$$\dot{\boldsymbol{s}}_\phi = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{b.d} - \ddot{\boldsymbol{\phi}}_b + \boldsymbol{c}_\phi \dot{\boldsymbol{e}}_\phi \quad (۶۷)$$

به کمک رابطه‌ی (۵۲) و رابطه‌ی (۶۸)، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{s}}_\phi = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{b.d} - (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b)\,{}^B\boldsymbol{I}_b^{-1}\boldsymbol{\Delta}_\tau) + \boldsymbol{c}_\phi \dot{\boldsymbol{e}}_\phi \quad (۶۸)$$

ورودی کنترلی $\boldsymbol{v}_2$ به صورت (۷۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{v}_2 = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{b.d} + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{e}}_\phi + \boldsymbol{u}_{s\phi} \quad (۶۹)$$

قانون کنترلی سوییچینگ $\boldsymbol{u}_{s\phi}$ از الگوریتم کنترلگر مد لغزشی فراپیچشی و مشابه رابطه‌ی (۵۸) به دست می‌آید.

برای تحلیل پایداری کنترلگر، می‌توان تابع لیاپانوف را مشابه رابطه‌ی (۵۹) در نظر گرفت. همچنین بردارهای خطای تخمین و عدم قطعیت گشتاور، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_b)\,{}^B\boldsymbol{I}_b^{-1}\boldsymbol{\Delta}_\tau = [\Delta_{\tau1\phi} \quad \Delta_{\tau2\phi} \quad \Delta_{\tau3\phi}]^T \quad (۷۰)$$

با فرض $\boldsymbol{\eta}_i > |\dot{\boldsymbol{\Delta}}_{\tau i\phi}|$، در صورتی که $\boldsymbol{\eta}_i < \boldsymbol{w}_{i\phi}$ باشد، مشتق تابع لیاپانوف منفی خواهد شد و پایداری کنترلگر اثبات خواهد شد.

۳-۵- طراحی کنترلگر مقاوم مد لغزشی درجه دوم فراپیچشی برای بازوی رباتیک

برای کنترل بازوی رباتیک در حضور اغتشاشات ناشی از عمودپرواز نیز از کنترلگر مد لغزشی مرتبه دوم فراپیچشی استفاده شده است. برای طراحی این کنترلگر، بردار صفحه‌ی لغزش $\boldsymbol{s}_q = [s_{q1} \quad s_{q2} \quad s_{q3} \quad s_{q4}]^T$ به صورت رابطه‌ی (۷۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{s}_q = \dot{\boldsymbol{e}}_q + \boldsymbol{c}_q \boldsymbol{e}_q \quad (۷۱)$$

بردار $\boldsymbol{c}_q = [c_{q1} \quad c_{q2} \quad c_{q3} \quad c_{q4}]^T$ شامل پارامترهای مثبت $c_{qi} > 0 (i = 1.2.3.4)$ است و بردار خطا و مشتق آن به صورت زیر هستند.

$$\boldsymbol{e}_q = [q_{1d} - q_1 \quad q_{2d} - q_2 \quad q_{3d} - q_3 \quad q_{4d} - q_4]^T \quad (۷۲)$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_q = [\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1 \quad \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2 \quad \dot{q}_{3d} - \dot{q}_3 \quad \dot{q}_{4d} - \dot{q}_4]^T \quad (۷۳)$$

با مشتق گرفتن از صفحه‌ی لغزش، رابطه‌ی (۷۵) ایجاد می‌شود.

نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۱، جلد ۵۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۲۳۹-۲۴۸ – پژوهشی کامل - ابراهیم پناه‌پوری و همکاران

$$\dot{\boldsymbol{s}}_q = \ddot{\boldsymbol{e}}_q + \boldsymbol{c}_q\dot{\boldsymbol{e}}_q = \ddot{\boldsymbol{q}}_d - \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}_q\dot{\boldsymbol{e}}_q \tag{۷۴}$$

به کمک معادله‌ی (۱۹) و معادله‌ی (۷۵) رابطه‌ی (۷۶) حاصل می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{s}}_q = \ddot{\boldsymbol{q}}_d - \boldsymbol{B}_M^{-1}\{-\boldsymbol{C}_M\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{G}_M + \boldsymbol{\tau}_q + \Delta_{\boldsymbol{\tau q}}\} + \boldsymbol{c}_q\dot{\boldsymbol{e}}_q \tag{۷۵}$$

در نتیجه، $\boldsymbol{\tau}_q$ به صورت معادله‌ی (۷۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau}_q = \boldsymbol{B}_M\ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{B}_M\boldsymbol{c}_q\dot{\boldsymbol{e}}_q + \boldsymbol{C}_M\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}_M - \Delta_{\boldsymbol{\tau q}} + \boldsymbol{B}_M\boldsymbol{u}_{sq} \tag{۷۶}$$

قانون کنترلی سوییچینگ u_s از الگوریتم کنترلگر مد لغزشی فراپیچشی و به صورت (۷۸) و (۷۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{u}_{sq} = [u_{s1q} \quad u_{s2q} \quad u_{s3q} \quad u_{s4q}]^T \tag{۷۷}$$

$$u_{siq} = k_{iq}\sqrt{|s_{iq}|}\mathrm{sgn}(s_{iq}) + w_{iq}\int \mathrm{sgn}(s_{iq})\,dt \quad (i = 1.2.3.4) \tag{۷۸}$$

با قرار دادن $\boldsymbol{\tau}_q$ در معادله‌ی $\dot{\boldsymbol{s}}$ رابطه‌ی (۸۰) حاصل می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{s}}_q = -\boldsymbol{u}_{sq} - \boldsymbol{B}_M^{-1}\Delta_{\boldsymbol{\tau q}} \tag{۷۹}$$

که مولفه‌های $\dot{\boldsymbol{s}}_q$ به ازای به صورت رابطه‌ی (۸۱) هستند.

$$\dot{s}_{iq} = -k_{iq}\sqrt{|s_{iq}|}\mathrm{sgn}(s_{iq}) - w_{iq}\int \mathrm{sgn}(s_{iq})\,dt - \Delta_{\tau qi} \quad (i = 1.2.3.4) \tag{۸۰}$$

که عبارت $\boldsymbol{B}_M^{-1}\Delta_{\boldsymbol{\tau q}}$ به صورت رابطه‌ی (۸۲) فرض شده است.

$$\boldsymbol{B}_M^{-1}\Delta_{\boldsymbol{\tau q}} = [\Delta_{\tau q1} \quad \Delta_{\tau q2} \quad \Delta_{\tau q3} \quad \Delta_{\tau q4}]^T \tag{۸۱}$$

برای تحلیل پایداری، تابع لیاپانوف به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$V(\boldsymbol{s}_q) = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_q^T\boldsymbol{s}_q \tag{۸۲}$$

مشتق تابع لیاپانوف به شکل رابطه‌ی (۸۴) خواهد شد.

$$\dot{V}(\boldsymbol{s}_q) = s_{1q}\dot{s}_{1q} + s_{2q}\dot{s}_{2q} + s_{3q}\dot{s}_{3q} + s_{4q}\dot{s}_{4q} = \sum_{i=1}^{4} s_{iq}\left\{-k_{iq}\sqrt{|s_{iq}|}\mathrm{sgn}(s_{iq}) - w_{iq}\int \mathrm{sgn}(s_{iq})\,dt - \Delta_{\tau qi}\right\} \tag{۸۳}$$

با نوشتن $\boldsymbol{B}_M^{-1}\Delta_{\boldsymbol{\tau q}}$ به فرم انتگرالی، اگر شرط $\beta_i > |\Delta_{\tau qi}|$ و شرط $w_{iq} > \beta_i$ برقرار باشد، رابطه‌ی (۸۵) برقرار شده و پایداری کنترلگر تضمین می‌شود.

$$\dot{V}(\boldsymbol{s}_q) \le \sum_{i=1}^{4}\left\{-k_{iq}|s_{iq}|\sqrt{|s_{iq}|} - |s_{iq}|\int (w_{iq} - \beta_i)\,dt\right\} \le 0 \tag{۸۴}$$

۶- شبیه‌سازی و نتایج

برای بررسی عملکرد کنترلگر و تخمین نیرو و گشتاور ناشی از بازوی رباتیک که به عمودپرواز اعمال می‌شود، سیستم بازو و عمودپرواز در محیط Simulink نرم‌افزار Matlab پیاده‌سازی شده‌اند. ابتدا مختصات محل آویز در دستگاه M بیان شده و به کمک سینماتیک معکوس، زوایای نهایی مفاصل بازو محاسبه می‌شوند. سپس این زوایا به صورت ورودی شیب به کنترلگر ربات وارد می‌شوند. همچنین مختصات مطلوب عمودپرواز و زاویه‌ی یاو مطلوب با توجه به مختصات محل آویز محاسبه شده و به صورت ورودی از نوع شیب به کنترلگر عمودپرواز وارد می‌شود. مشخصات فیزیکی ربات در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- مشخصات فیزیکی بازوی رباتیک

متغیر	متغیر	واحد
$m_{l_4} = 0.052$	$m_{l_1} = 0.06$	kg
$m_e = 0.3$	$m_{l_2} = 0.073$	kg
$m_{m_i}(i = 1.2.3.4) = 0.06$	$m_{l_3} = 0.08$	kg
$a_3 = 0.3$	$a_1 = 0.2$	m
$a_4 = 0.16$	$a_2 = 0.25$	m

همچنین پارامترهای کنترل‌کننده در جدول ۲ آورده شده است.

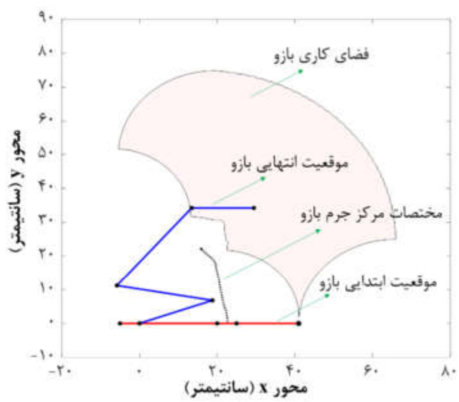
جدول ۲- پارامترهای کنترلگر ربات و عمودپرواز

$c_{1\phi} = c_{2\phi} = c_{3\phi} = 16$	$c_{1P} = c_{2P} = 1$
$k_{1\phi} = k_{2\phi} = k_{3\phi} = 110$	$c_{3P} = 2$
$w_{1\phi} = w_{2\phi} = w_{3\phi} = 10$	$k_{1P} = k_{2P} = k_{3P} = 50$
$k_{1\phi} = 210$	$w_{1P} = w_{2P} = w_{3P} = 3$
$k_{1q} = k_{2q} = k_{3q} = k_{4q} = 150$	$c_{1q} = c_{2q} = c_{3q} = 20$
$w_{1q} = w_{2q} = w_{3q} = w_{4q} = 38$	$c_{4q} = 40$

در شکل ۷، محدوده‌ی فضای کاری مجری نهایی، موقعیت ابتدایی (حالت جمع شده) و انتهایی بازوی رباتیک و مسیر حرکت مرکز جرم آن نمایش داده شده است.

فضای کاری مجری نهایی به کمک سینماتیک مستقیم و با در نظر گرفتن محدودیت حرکت در مفاصل که در رابطه‌ی (۸۶) آمده، ترسیم شده است.

$$\begin{cases} 0 < q_1 < 90 \\ 0 < q_1 + q_2 < 90 \\ 0 < q_1 + q_2 + q_3 < 90 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \end{cases} \tag{۸۵}$$



شکل ۷- موقعیت ابتدایی و انتهایی ربات، فضای کاری مجری نهایی و مسیر حرکت مرکز جرم بازوی رباتیک

در شبیه‌سازی، ابتدا عمودپرواز از ثانیه‌ی صفر تا ۵، به اندازه‌ی ۳ متر در خلاف جهت z حرکت می‌کند. سپس از ثانیه‌ی ۷ تا ۱۱، به اندازه‌ی ۱ متر در جهت محور x جابه‌جا می‌شود. ربات از ثانیه‌ی صفر تا ۱۵ در حالت جمع شده قرار داشته و از ثانیه‌ی ۱۵ تا ۲۰، از حالت جمع شده، به موقعیت نهایی و مطلوب خود حرکت می‌کند. همچنین نیرو و گشتاور اغتشاش باد و اثرات نامطلوب آیرودینامیکی به صورت رابطه‌ی (۸۷) در سه جهت به بدنه‌ی عمودپرواز اعمال شده و ردیابی مسیر و عملکرد کنترلگر تحت این شرایط بررسی شده است.

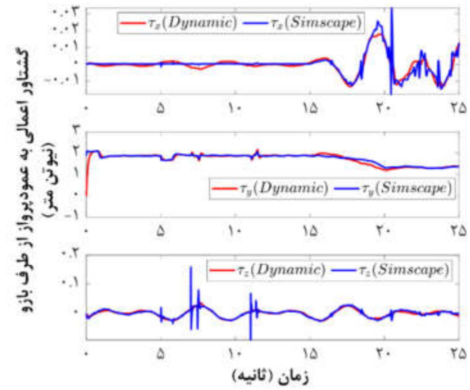
$$\begin{cases} F_{\mathrm{dis\_UAV}} = [w_x \; w_y \; w_z\,] \\ \tau_{\mathrm{dis\_UAV}} = [w_\varphi \; w_\theta \; w_\psi\,] \end{cases} \tag{۸۶}$$

مؤلفه‌های اغتشاش به صورت (۸۸) و (۸۹) در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{cases} w_x = 3(\sin(0.5\pi t) + \cos(0.6\pi t)) \\ w_y = 2(\sin(0.6\pi t) + \cos(0.4\pi t)) \\ w_z = 3(\sin(2\pi t) + \cos(0.5\pi t)) \end{cases} \tag{۸۷}$$

$$\begin{cases} w_\varphi = \sin(0.4\pi t) + 0.7\cos(2\pi t) \\ w_\theta = 0.8\sin(0.7\pi t) - \cos(\pi t) \\ w_\psi = 0.9\sin(2\pi t) + 0.8\cos(\pi t) \end{cases} \tag{۸۸}$$

برای صحت‌سنجی روش ارائه شده برای تخمین نیرو و گشتاور ناشی از حرکت باز که به عنوان اغتشاش به عمودپرواز اعمال می‌شود، مجموعه‌ی عمودپرواز و بازوها در بخش Simscape نرم‌افزار مدلسازی شده‌اند. برای این کار، مدل ۳ بعدی ربات و عمودپرواز از نرم‌افزار Solidworks به نرم‌افزار Matlab وارد می‌شود. ابعاد، جرم و ممان اینرسی‌های ربات و عمودپرواز، از روی فایل ۳ بعدی فراخوانی می‌شوند.



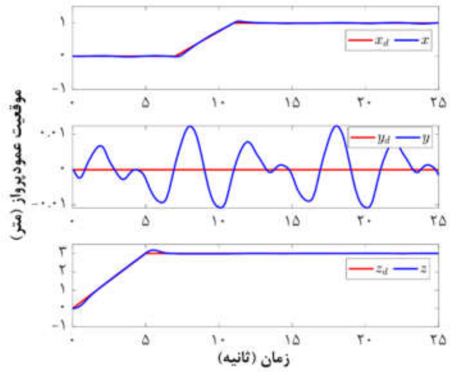
شکل ۸- گشتاور تخمین زده شده ناشی از حرکت بازوی رباتیک از روابط دینامیکی در مقایسه با گشتاور اندازه‌گیری شده از مدلسازی بازو- عمودپرواز در Simscape

گشتاور تخمین زده شده ناشی از حرکت ربات که به عمودپرواز وارد می‌شود، با استفاده از رابطه‌ی (۴۶) در مقایسه با گشتاور اندازه‌گیری شده از مدلسازی بازو-عمودپرواز در Simscape نرم‌افزار Matlab در شکل ۸ نمایش داده شده است. طبق این شکل، استفاده از روابط تخمین اثرات حرکت ربات بر عمودپرواز، نتایج قابل قبولی ارائه می‌کند.

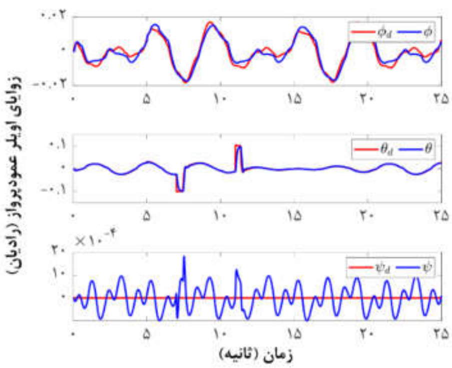
شکل ۹، مسیر مطلوب و مسیر طی شده توسط عمودپرواز را نشان می‌دهد. در این حرکت، عمودپرواز باید طی ۳ ثانیه به ارتفاع ۳ متری رسیده و از ثانیه ۷ تا ۹، در جهت x، ۱ متر جابه‌جا شود. شکل ۹، عملکرد مطلوب کنترلگر مدلغزشی را در ردیابی مسیر و دفع اغتشاش، نشان می‌دهد.

شکل ۱۰ نیز ردیابی زوایای اویلر مطلوب را نشان می‌دهد. زاویه‌ی یاو مطلوب با توجه به جهت‌گیری عمودپرواز نسبت به میله‌ی آویز مشخص شده و زوایای رول و پیچ مطلوب توسط رابطه‌ی (۵۰) محاسبه می‌شود. با توجه به شکل ۱۰، ردیابی زوایای اویلر توسط کنترلگر مدلغزشی مرتبه دوم طراحی شده، به خوبی انجام شده است.

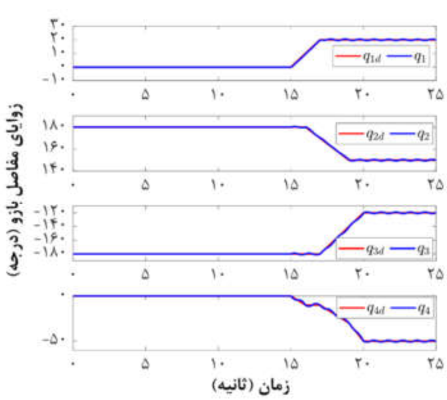
برای بررسی عملکرد کنترلگر بازوی رباتیک در دفع اغتشاشات، از ثانیه‌ی ۱۵ به بعد، اغتشاشی به شکل $\tau_{\text{dis\_q}} = 0.2\sin(2\pi t)$ به بازوها اعمال شده است. شکل ۱۱، ردیابی زوایای مفاصل بازوها و عملکرد مطلوب کنترلگر بازوها را در حضور اغتشاشات نشان می‌دهد.



شکل ۹- ردیابی مسیر مطلوب عمودپرواز توسط کنترلگر مد لغزشی فراپیچشی برای موقعیت



شکل ۱۰- ردیابی زوایای اویلر مطلوب توسط کنترلگر مد لغزشی فراپیچشی برای زوایا



شکل ۱۱- مسیر مطلوب و ردیابی شده برای مفاصل ربات

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک سیستم نوآورانه مبتنی بر بازوی رباتیک، برای بازیابی یک پرنده‌ی عمودپرواز ارائه گردید. این سیستم، قابلیت بازیابی در ارتفاع را از طریق معلق شدن از یک میله یا کابل فراهم می‌کند. در موقعیت‌هایی که امکان فرود بر روی زمین وجود ندارد، بازیابی پرنده در ارتفاع انجام می‌شود. برای کاهش اثر نیروها و گشتاورهایی که حین حرکت بازوی رباتیک به عمودپرواز وارد می‌شود، روشی ارائه شد که در مقایسه با مدلسازی سیستم در محیط Simscape، صحت تخمین

اثرات حرکت ربات، تأیید شد. این اثرات در کنترلگر عمودپرواز در نظر گرفته شدند. چون پرنده‌ی عمودپرواز، یک سیستم تحریک ناقص است، بخش موقعیت خطی و زاویه‌ای آن جداسازی شده و برای هر کدام، یک کنترلگر مدلغزشی فراپیچشی ارائه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد، که کنترلگر طراحی شده، عملکرد خوبی در دفع اغتشاشات داشته و ردیابی مسیر عمودپرواز به خوبی انجام شده است.

برای کنترل ربات نیز، یک کنترلگر مدلغزشی فراپیچشی طراحی گردید که اغتشاشات وارد شده به مفاصل بازوها را به خوبی دفع کرده و عملکرد مطلوبی را در ردیابی زوایای مفاصل نشان داد.

۸- مراجع

[1] Prisacariu V., Pop S., and Cîrciu I., Recovery system of the multi-helicopter UAV, *Review of the Air Force Academy,* No. 1, pp. 91, 2016.

[2] Fiori L., Doshi A., Martinez E., Orams M. B., and Bollard-Breen B., The use of unmanned aerial systems in marine mammal research, *Remote Sensing,* Vol. 9, No. 6, pp. 543, 2017.

[3] Klausen K., Fossen T. I., and Johansen T. A., Autonomous recovery of a fixed-wing UAV using a net suspended by two multirotor UAVs, *Journal of Field Robotics,* Vol. 35, No. 5, pp. 717-731, 2018.

[4] Liu Y., Qi N., Yao W., Zhao J., and Xu S., Cooperative path planning for aerial recovery of a UAV swarm using genetic algorithm and homotopic approach, *Applied Sciences,* Vol. 10, No. 12, p. 4154, 2020.

[5] Mellinger D., Lindsey Q., Shomin M., and Kumar V., Design, modeling, estimation and control for aerial grasping and manipulation, In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*: IEEE, pp. 2668-2673, 2011.

[6] Keemink A. Q., Fumagalli M., Stramigioli S., and Carloni R., Mechanical design of a manipulation system for unmanned aerial vehicles, in *IEEE international conference on robotics and automation*: IEEE, pp. 3147-315, 2,201.

[7] Arleo G., Caccavale F., Muscio G., and Pierri F., Control of quadrotor aerial vehicles equipped with a robotic arm, in *21St mediterranean conference on control and automation*: IEEE, pp. 1174-1180, 2013.

[8] Xie Y. *et al.*, Obstacle avoidance and path planning for multi-joint manipulator in a space robot, *IEEE Access,* Vol. 8, pp. 3511-3526, 2019.

[9] Forte F., Naldi R., Macchelli A., and Marconi L., Impedance control of an aerial manipulator, in *American Control Conference (ACC)*: IEEE, pp. 3839-3844, 2012.

[11] Jimenez-Cano A. E., Martin J., Heredia G., Ollero A., and Cano R., Control of an aerial robot with multi-link arm for assembly tasks, in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*: IEEE, pp. 4916-4921, 2013.

[۱۲] جدید میلانی پ. و حامد م.، بررسی عملکرد کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه اول و دوم در کنترل مسیر کوادروتور همراه با عدم قطعیت، *مجلهٔ مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۵۱، ش. ۳، ص ۲۵-۳۴، ۱۴۰۰.

[13] Bellicoso C. D., Buonocore L. R., Lippiello V., and Siciliano B., Design, modeling and control of a 5-DoF light-weight robot arm for aerial manipulation, in *23rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*: IEEE, pp. 853-858, 2015.

[14] Caccavale F., Giglio G., Muscio G., and Pierri F., Adaptive control for UAVs equipped with a robotic arm, *IFAC Proceedings Volumes,* Vol. 47, No. 3, pp. 11049-11054, 2014.

[15] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., and Oriolo G., *Robotics: Modelling, Planning and Control* , pp. 39-103, 2009.

[16] Zhang G., He Y., Dai B., Gu F., Han J., and Liu G., Robust Control of an Aerial Manipulator Based on a Variable Inertia Parameters Model, *IEEE Transactions on Industrial Electronics,* Vol. 67, No. 11, pp. 9515-9525, 2019.

[17] Wittenburg J., *Dynamics of Multibody Systems*. Springer Science & Business Media, 2008.

[18] Jimenez-Cano A., Heredia G., Bejar M., Kondak K., and Ollero A., Modelling and control of an aerial manipulator consisting of an autonomous helicopter equipped with a multi-link robotic arm, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering,* Vol. 230, No. 10 ,pp. 1860-1870, 2016.

[19] Labbadi M. and Cherkaoui M., Novel robust super twisting integral sliding mode controller for a quadrotor under external disturbances, *International Journal of Dynamics and Control,* Vol. 8, No. 3, pp. 805-815, 2020.