

بهینه‌سازی توپولوژی وصله در ترمیم چسبی نامتقارن ورق‌های ترک‌دار فلزی

پریسا قناتی* استادیار، گروه مهندسی هوافضا، دانشکده انرژی‌های تجدیدپذیر، ارومیه، ایران، parisa.ghanati@uut.ac.ir

چکیده

ترمیم چسبی ترک‌های موجود در سازه‌های فلزی از طریق چسباندن وصله، به دلیل مقاومت زیاد، سهولت و سرعت انجام کاربرد زیادی پیدا کرده است. بدیهی است که کارایی این ترمیم متأثر از شکل وصله است. در این تحقیق به بهینه‌سازی شکل وصله با ضخامت ثابت، در ترمیم چسبی نامتقارن یک ورق آلومینیومی با ترک مرکزی، تحت کشش تک‌محوره عمود بر امتداد ترک، پرداخته شده است. بدین منظور از الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی بر پایه همگن‌سازی توزیع چگالی انرژی کرنشی استفاده شده است. مدل امان محدود سه‌لایه‌ای دوبعدی نپولسی و مال برای مدل‌سازی و تحلیل سیستم ترمیم به کار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که کارایی شکل بهینه حاصل از این الگوریتم در کاهش انرژی کرنشی آزاد شده در نوک ترک در واحد افزایش طول ترک، که یک معیار کارایی ترمیم است، متأثر از ابعاد فضای هندسی اولیه طراحی نسبت به طول ترک، و حجم آن نسبت به حجم ماده وصله است. لذا با انتخاب مناسب فضای اولیه، شکل بهینه حاصل از این الگوریتم، هم از دیدگاه معیار کارایی ترمیم و هم از دیدگاه ساخت مطلوب است.

واژه‌های کلیدی: ترک، ترمیم چسبی نامتقارن، وصله، بهینه‌سازی توپولوژی، چگالی انرژی کرنشی، امان محدود.

Topology optimization of patch in unsymmetric bonded repair of cracked metal sheets

P. Ghanati

Department of Aerospace Engineering, Faculty of Renewable Energies, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Abstract

Bonded repair of cracks by gluing patches in metal structures has been widely used due to high strength and speed, and easiness. Obviously, the efficiency of this repair is affected by the shape of the patch. In this research, the shape of the patch with constant thickness is optimized in the unsymmetric bonded repair of an aluminum plate with a central crack, under uniaxial tension perpendicular to the crack. For this purpose, a topology optimization algorithm based on the strain energy density homogenization has been used. The two-dimensional three-layer finite element model of Naboulsi and Maal has been used to model and analyze the repair system. The results show that the optimal shape efficiency of this algorithm in reducing the strain energy released at the crack tip per unit of crack extension is affected by the dimensions of the design initial geometric space relative to the crack length and its volume relative to the patch material volume. It is a efficiency criterion of repair. Therefore, with the appropriate selection of the initial space, the optimal shape of this algorithm is desirable both from the point of view of the repair efficiency criterion and from the point of view of construction.

Keywords: Crack, Unsymmetric bonded repair, Patch, Topology optimization, Strain energy density, Finite element.

توجهی افت می‌کند. اتصال وصله هم می‌تواند توسط پیچ و پرچ باشد (ترمیم مکانیکی) و هم توسط چسب (ترمیم چسبی) [۲]. ترمیم مکانیکی اولین روش ترمیم بوده که به صورت استاندارد از آن استفاده می‌شود. انجام این نوع ترمیم نیاز به سوراخ‌کاری قطعه دارد و این امر خود باعث ایجاد تمرکز تنش می‌شود که می‌تواند زمینه را برای بوجود آمدن ترک‌هایی در اطراف سوراخ‌ها، به دلیل خستگی، فراهم کند. علاوه بر این، خوردگی زیاد به دلیل نفوذ و باقی‌ماندن رطوبت مابین وصله و قطعه ترک‌دار فلزی یکی دیگر از معایب این روش به شمار می‌رود. لذا پس از آن در چند دهه اخیر، روش ترمیم چسبی کاربرد بیشتری به خصوص در صنایع هوایی پیدا کرده است. در این روش وصله توسط چسب به ناحیه ترک‌دار قطعه اتصال می‌یابد. ترمیم چسبی در مقایسه با ترمیم مکانیکی، بار را به طور یکنواخت‌تر و موثرتر از ناحیه اطراف ترک به وصله منتقل می‌کند و کاهش ضریب شدت تنش بیشتری را موجب می‌شود. مقاومت به خوردگی، سرعت و سهولت انجام ترمیم از دیگر مزایای مهم ترمیم چسبی به شمار می‌آید [۳].

به لحاظ هندسی ترمیم یک ورق ترک‌دار با وصله به دو نوع متقارن یا اتصال دوطرفه، و نامتقارن یا اتصال یک‌طرفه تقسیم می‌شود.

۱- مقدمه

بدیهی است که تعمیر و نگهداری قطعات آسیب‌دیده در سازه‌هایی که بر اساس فلسفه طراحی تحمل آسیب طراحی شده‌اند، ضرورت دارد. ترک ناشی از خستگی یکی از آسیب‌هایی است که در قطعات تحت بارگذاری‌های متناوب بوجود می‌آید و از دیدگاه مکانیک شکست با گذشت زمان رشد می‌کند [۱]. بواسطه وجود ترک، استحکام قطعه کمتر از استحکام اولیه می‌شود و بعد از مدت معینی قطعه تحمل بار را ندارد. اگر تعداد ترک‌ها کم و طول آنها نسبت به اندازه کل قطعه کوچک باشد، ترمیم آن نسبت به تعویض کل قطعه اقتصادی‌تر است. روش‌های مختلفی برای جلوگیری از رشد ترک یا کاهش سرعت رشد آن وجود دارد. یکی از این روش‌ها ترمیم قطعه ترک‌دار با استفاده از یک ورق (وصله) از جنس همان قطعه می‌باشد. بدین صورت که وصله-ای در محل ترک و ناحیه اطراف آن به عنوان تقویت‌کننده به قطعه متصل می‌شود. در این روش، تقویت‌کننده مانند پلی تنش اعمال شده را از ناحیه آسیب‌دیده انتقال می‌دهد. لذا جابجایی نوک ترک محدود می‌شود و به این ترتیب ضریب شدت تنش در نوک ترک به طور قابل

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: parisa.ghanati@uut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۱/۰۲/۰۵

تاریخ پذیرش: ۰۱/۰۵/۱۰

در نوع اول، دو تکه وصله از دو طرف به ورق ترک‌دار اتصال می‌یابد. این نحوه قرار گرفتن وصله‌ها باعث می‌شود که وقتی ورق ترک‌دار تحت بار کششی است، اجزاء ترمیم تنها تحت تنش کششی صفحه‌ای قرار بگیرند. اما در ترمیم نامتقارن که یک تکه وصله از یک طرف به ورق ترک‌دار اتصال می‌یابد، جابجایی محور خنثی باعث ایجاد گشتاور خارج از صفحه می‌گردد و ورق ترمیم شده دچار خمش خارج از صفحه می‌شود. به همین دلیل، ترمیم نامتقارن کارایی کمتری نسبت به ترمیم متقارن در جلوگیری از رشد ترک و کاهش سرعت رشد آن دارد. ولی چون اغلب دسترسی به قسمت‌های درونی سازه به راحتی امکان‌پذیر نیست، استفاده از ترمیم نامتقارن ناگزیر است.

بدیهی است که کارایی ترمیم چسبی هم متأثر از جنس وصله و چسب و هم ابعاد هندسی آن‌ها می‌باشد. تحقیقات متعدد به بررسی اثر جنس پرداخته‌اند. از جمله تحقیق اخیر در سال ۲۰۲۰ میلادی [۴] که به بررسی اثر جنس وصله کامپوزیتی و چسب در کاهش ضریب شدت تنش نوک ترک در مود اول و ترکیبی، در یک مدل المان محدود سه-بعدی ترمیم چسبی نامتقارن پرداخته است. تاکنون تحقیقاتی نیز برای بهینه‌سازی ابعاد هندسی وصله (ضخامت و شکل) در ترمیم چسبی، بر اساس معیارهای مختلف از جمله کاهش ضریب شدت تنش نوک ترک و کاهش بیشترین تنش برشی در چسب انجام شده است. تحقیقاتی که در مورد بررسی اثر ضخامت وصله در کارایی ترمیم چسبی انجام شده [۵-۷] نشان می‌دهند که توزیع ضخامت بهینه وصله بیشتر به بار اعمالی به سیستم ترمیم بستگی دارد تا به شکل وصله، و توزیع ضخامت وصله تاثیر چندانی در تعیین شکل و ابعاد بهینه وصله ندارد. لذا بهینه‌سازی شکل و توزیع ضخامت می‌تواند به طور مستقل انجام پذیرد. از گذشته تاکنون تحقیقات متعدد برای دستیابی به شکل بهینه وصله در ترمیم چسبی انجام شده است. در یک تحقیق در سال ۲۰۰۰ میلادی [۸] به بررسی اثرات ابعاد هندسی وصله کامپوزیتی در کاهش ضریب شدت تنش نوک ترک در ترمیم چسبی متقارن پرداخته شد. در سال ۲۰۰۵ میلادی کوچک‌زاده و قناتی [۹] با مقایسه بین اشکال متعارف با ابعاد مختلف، بهترین شکل وصله کامپوزیتی برای کاهش ضریب شدت تنش نوک ترک در مود اول، در ترمیم چسبی نامتقارن را به دست آوردند. در تحقیق دیگر در سال ۲۰۱۳ میلادی [۱۰] با مقایسه بین اشکال متعارف با ابعاد مختلف، بهترین شکل وصله کامپوزیتی برای کاهش ضریب شدت تنش نوک ترک در مود ترکیبی اول و دوم، در ترمیم چسبی متقارن به دست آمد و مشابه این تحقیق در سال ۲۰۱۶ میلادی [۱۱] با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک برای ترمیم چسبی نامتقارن انجام شد. در تحقیقی که در سال ۲۰۱۷ میلادی انجام شد [۱۲]، به بهینه‌سازی شکل وصله کامپوزیتی در ترمیم چسبی یک ورق کامپوزیتی با استفاده از الگوریتم نقطه داخلی بر پایه برنامه‌ریزی خطی انجام شد. در این تحقیق تابع هدف بهینه‌سازی، اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق ترمیم‌شده در مقایسه با حالت بدون ترمیم، در نظر گرفته شد که با شرط برقراری الزامات وزنی و استحکام ترمیم، باید حداقل ممکن شود. همین محققان در سال ۲۰۲۱ میلادی [۱۳] همین مسئله بهینه‌سازی را با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی خطی متوالی انجام دادند. در یک تحقیق دیگر در سال ۲۰۱۹ میلادی [۱۴] با مقایسه بین اشکال متعارف وصله، به بررسی اثر شکل، مساحت اتصال چسبی و حجم وصله کامپوزیتی در کاهش ضریب شدت تنش نوک

ترک در مود اول و کاهش بیشترین تنش برشی در چسب، در ترمیم چسبی نامتقارن یک ورق آلومینیومی پرداخته شد. در این تحقیق مدل سه‌بعدی المان محدود برای مدل‌سازی سیستم ترمیم مورد استفاده قرار گرفت.

مفهوم توپولوژی در بهینه‌سازی سازه‌های را به این صورت می‌توان بیان کرد که در طی بهینه‌سازی توپولوژی، بهترین توزیع جرمی ماده مشخص در یک فضای هندسی معین برای طراحی سازه بهینه، با شرایط مرزی و بارگذاری مشخص، بدست می‌آید. از مزایای بهینه‌سازی توپولوژی این است که این روش نیاز به تغییر در المان‌بندی ندارد و از مشکلات عددی کمتری برخوردار است. یکی از مشکلات عمده این روش وابستگی به اندازه المان است. وابستگی به اندازه المان به این دلیل است که با ریزتر شدن المان‌ها، جزئیات بیشتری از شکل سازه بهینه نمایش داده می‌شود. البته این به آن معنی نیست که همواره استفاده از المان‌های ریز مناسب است. چون پاسخ بدست آمده از المان‌های درشت، از دیدگاه ساخت مطلوب‌تر است. تاکنون تحقیقات اندکی در به کارگیری الگوریتم‌های بهینه‌سازی توپولوژی برای بهینه‌سازی شکل وصله در ترمیم چسبی قطعاً ترک‌دار انجام شده است. در تحقیقی که در سال ۲۰۱۷ میلادی انجام شد [۱۵]، یک الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی برای بهینه‌سازی شکل وصله کامپوزیتی در ترمیم چسبی متقارن یک ورق ترک‌دار تحت بارگذاری ترکیبی مود اول و دوم ارائه شد که در آن تابع هدف بهینه‌سازی، یک پارامتر تعریف شده بر حسب ضریب شدت تنش نوک ترک در مودهای اول و دوم می‌باشد که باید حداکثر ممکن شود. در این تحقیق مدل‌سازی سه‌بعدی المان محدود برای سیستم ترمیم در محیط نرم‌افزار ABAQUS انجام شد. در تحقیق حاضر، بهینه‌سازی توپولوژی وصله با ضخامت ثابت، در ترمیم چسبی نامتقارن یک ورق با ترک مرکزی تحت کشش تک محوره عمود بر امتداد ترک انجام می‌شود. در این راستا مدل‌سازی المان محدود سیستم ترمیم نامتقارن بر اساس مدل سه‌لایه‌ای دوبعدی نبولسی و مال^۱ در محیط نرم افزار ANSYS انجام می‌شود. همچنین الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی نرم‌افزار ANSYS، بر پایه همگن‌سازی توزیع چگالی انرژی کرنشی، برای بهینه کردن شکل وصله به کار گرفته می‌شود تا با بررسی نتایج، کارایی شکل بهینه حاصل از این الگوریتم در کاهش انرژی کرنشی آزاد شده در نوک ترک در واحد افزایش طول ترک، که یک معیار کارایی ترمیم است، مورد ارزیابی قرار گیرد.

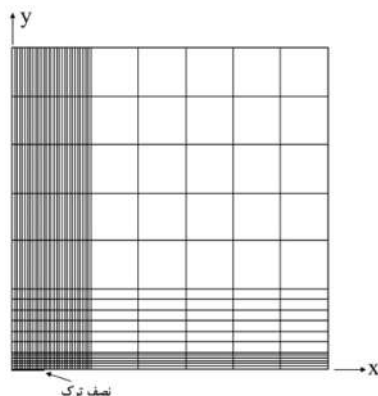
۲- تعریف مسئله

مطابق شکل ۱، یک ورق مربعی با ترک مرکزی افقی تحت بار کششی یکنواخت و عمود بر امتداد ترک قرار گرفته و توسط وصله مربعی به عنوان فضای هندسی اولیه طراحی، که در یک سمت به ورق ترک‌دار چسبانده شده، ترمیم شده است. لایه چسب با ابعاد برابر با ابعاد وصله مربعی، مابین ورق ترک‌دار و وصله است. هر سه لایه به موازات صفحه $x-y$ قرار گرفته‌اند و محور z در امتداد ضخامت لایه‌ها می‌باشد. مرکز ورق ترک‌دار و لایه چسب و وصله در صفحه $x-y$ بر هم منطبق و در موقعیت $x=0$ و $y=0$ قرار دارند. مبدأ دستگاه مختصات در

¹ Naboulsi and Mall

نیز درجات آزادی چرخشی گره‌ها، یعنی به ترتیب چرخش راستای ضخامت هر لایه حول محورهای x و y می‌باشند. در این مدل اتصال بین سه لایه با اعمال قیدهای جابجایی که معادل‌سازی مؤلفه‌های میدان جابجایی در مرز بین لایه‌ها است، برقرار می‌شود [۹].

در این تحقیق که از نرم افزار ANSYS برای مدل‌سازی و تحلیل سیستم ترمیم استفاده شده است، از یک المان صفحه‌ای تعریف شده در این نرم افزار به نام شل ۹۳^۱ که از نظریه صفحه میندیلین پیروی می‌کند، برای المان‌بندی هر سه لایه استفاده شده است. هر المان چهارضلعی و با ضخامت ثابت برابر با ضخامت هر لایه می‌باشد و از هشت گره تشکیل شده است که چهار گره در رئوس و چهار گره در وسط اضلاع می‌باشند. المان‌بندی یک‌چهارم مدل کامل در شکل ۲ نشان داده شده است. گره‌های سه لایه در ناحیه ترمیم شده، در صفحه $x-y$ بر هم منطبق هستند تا بتوان قیدهای جابجایی را برای برقراری اتصال بین لایه چسب با ورق ترک‌دار و وصله اعمال کرد. چنانچه مشاهده می‌شود، در لبه‌های وصله و در اطراف نوک ترک، به دلیل پیش‌بینی وقوع تمرکز تنش بالا، المان‌ها ریزتر شده‌اند. هر چقدر المان‌های نوک ترک و اطراف آن ریزتر شود، مقدار تنش محاسبه شده در نوک ترک بیشتر می‌شود. المان‌ها در اطراف ترک، مربعی و هم‌اندازه هستند. طول ضلع هر المان در اطراف ترک (Δa) برابر ۱ میلی‌متر است. آزمون همگرایی تحقیق پیشین [۹] نشان می‌دهد که این اندازه برای المان‌های اطراف نوک ترک مناسب است. به جز گره‌های روی نصف طول ترک در ورق ترک‌دار (گره‌های واقع در سمت چپ نوک ترک روی محور x) که روی سطح آزاد ترک هستند، قیدهای جابجایی ناشی از شرایط مرزی تقارن به گره‌های هر لایه که روی صفحات تقارن xz و yz قرار گرفته‌اند، اعمال می‌شوند. اعتبار این مدل المان محدود در تحقیق پیشین [۹] مورد بررسی و تایید قرار گرفته است.

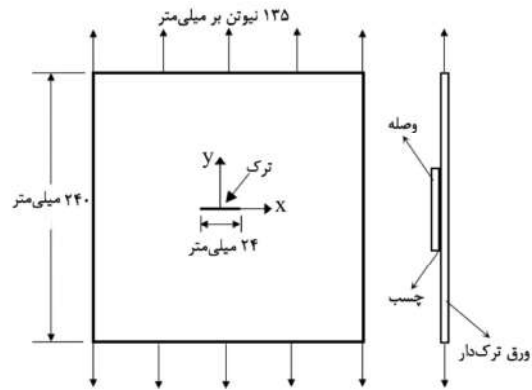


شکل ۲- المان‌بندی یک‌چهارم مدل کامل

۴- بهینه‌سازی توپولوژی وصله

روند بهینه‌سازی توپولوژی به این صورت است که فضای هندسی اولیه طراحی یعنی وصله مربعی در این مسئله، به المان‌های حجمی کوچک تقسیم می‌شود. هر المان می‌تواند پر از ماده و یا خالی از ماده و

وسط لایه ورق ترک‌دار یعنی در سطح میانی آن قرار دارد. هندسه اجزاء و بارگذاری به گونه‌ای است که نسبت به صفحات xz و yz تقارن وجود دارد، لذا به جای مدل کامل، یک‌چهارم آن تحلیل می‌شود. خواص مکانیکی و ضخامت اجزاء در جدول ۱ آمده است. برای یافتن بهترین شکل وصله با ضخامت ثابت، باید توزیع بهینه ماده وصله در این فضای هندسی اولیه طراحی به دست آید.



شکل ۱- هندسه و بارگذاری سیستم ترمیم چسبی نامتقارن (الف) نمای جانبی (ب) نمای روبرو از سطح ترمیم نشده

جدول ۱- خواص هندسی و مکانیکی اجزای سیستم ترمیم چسبی

لایه	ضخامت (میلی‌متر)	مدول الاستیک (گیگاپاسکال)	ضریب پواسون
ورق آلومینیومی	۳/۰۰	۷۱/۷۰۹	۰/۳۳
چسب اپوکسی	۰/۱۵	۲/۱۵۸	۰/۳۵
وصله آلومینیومی	۲/۲۵	۷۱/۷۰۹	۰/۳۳

۳- مدل‌سازی المان محدود

در این تحقیق مطابق تحقیق پیشین [۹] برای دستیابی به سرعت بالاتر و دقت قابل قبول، از مدل سه‌لایه‌ای نیولسی و مال برای مدل‌سازی المان محدود دوبعدی ترمیم چسبی نامتقارن استفاده می‌شود. در مدل سه‌لایه‌ای هر سه جزء ترمیم، یعنی ورق ترک‌دار فلزی، وصله هم‌جنس با آن و چسب، با المان صفحه‌ای میندیلین مدل می‌شوند. صفحه این المان در وسط هر لایه یعنی در سطح میانی آن فرض می‌شود. در این المان هر گره دارای ۳ درجه آزادی انتقالی و ۲ درجه آزادی چرخشی است. اگر \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} به ترتیب درجات آزادی انتقالی یعنی جابجایی‌های گره‌ها در جهت x و y و z باشند، مطابق تئوری صفحه میندیلین میدان جابجایی در راستای ضخامت هر لایه، خطی و به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(x, y) + z\bar{\theta}_y(x, y) \\ v &= \bar{v}(x, y) - z\bar{\theta}_x(x, y) \\ w &= \bar{w}(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

که کمیت z ، مؤلفه موقعیت در جهت ضخامت هر لایه است و در وسط هر لایه که گره‌ها روی آن واقع شده‌اند، z برابر صفر است. $\bar{\theta}_y$ و $\bar{\theta}_x$

^۱ Shell 93

یا حاوی مقداری ماده بین این دو حالت باشد. بدین ترتیب چگالی نسبی برای هر المان به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X_e = \frac{\rho_e}{\rho} \quad (2)$$

که ρ چگالی ماده موجود در المان و ρ_e نسبت جرم ماده موجود در المان به حجم المان می‌باشد، که به آن چگالی مصنوعی می‌گویند. به عبارت دیگر چگالی نسبی المان، نسبت حجم ماده واقعی موجود در المان به حجم المان می‌باشد. که مقدار آن بین ۱ (المان کاملاً پر) و ۰ (المان خالی)، تغییر می‌کند. علت تعریف چگالی نسبی المان در بازه [۰،۱]، حفظ پیوستگی در روند بهینه‌سازی است. در این صورت برای بیان خاصیت مکانیکی هر المان، می‌توان ماده مصنوعی در داخل المان تعریف کرد که خواص مکانیکی آن تابع چگالی نسبی المان است. به این ترتیب اگر ابعاد المان در مقایسه با ابعاد سازه کوچک باشد، تغییرات خواص مکانیکی ماده در مقیاس سازه، روند نرمی خواهد داشت. ساده‌ترین مسئله بهینه‌سازی توپولوژی، یافتن توزیع جرمی ماده همسانگرد و کاملاً الاستیک در یک فضای هندسی معین طراحی است که چگالی نسبی المان‌ها متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی هستند. به عبارت دیگر بردار متغیرهای طراحی به صورت زیر است.

$$X = X(X_{e1}, X_{e2}, \dots, X_{eN}) \quad (3)$$

که N ، تعداد المان‌های تشکیل‌دهنده فضای طراحی می‌باشد. معمول‌ترین تابع هدف این مسئله، برای یک سازه تحت شرایط استاتیکی، نرمی متوسط سازه است که باید حداقل ممکن شود و یا سفتی متوسط سازه که باید حداکثر ممکن شود. نرمی متوسط سازه را انرژی کرنشی جذب شده توسط سازه، تحت بارگذاری استاتیکی، تعریف می‌کنند که برابر با کار انجام شده توسط نیروهای خارجی وارد بر سازه برای تغییر شکل سازه از ابتدای شروع تغییر شکل تا تغییر شکل نهایی سازه الاستیک می‌باشد که در فرم روابط المان محدود به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \quad (4)$$

که $[K]$ ، ماتریس سفتی سازه و $\{U\}$ ، بردار جابجایی گره‌های سازه المان‌بندی شده می‌باشد. ماتریس سفتی سازه از ترکیب ماتریس سفتی تک تک المان‌ها به دست می‌آید و ماتریس سفتی هر المان به خواص مکانیکی آن المان یعنی خواص مکانیکی ماده مصنوعی داخل المان بستگی دارد که آن نیز تابع چگالی نسبی هر المان است. روش‌های متعددی برای محاسبه خواص مکانیکی ماده مصنوعی بر حسب خواص مکانیکی ماده واقعی و چگالی نسبی المان ارائه شده است که رایج‌ترین آن روش SIMP^۱ می‌باشد که کارایی بالایی نیز دارد. مطابق این روش، برای ماده مصنوعی داخل هر المان با چگالی نسبی X_e ، ماتریس ضرایب ساختاری در فرم ماتریسی روابط ساختاری ماده، که مؤلفه‌های آن خواص مکانیکی ماده هستند، برابر است با حاصل ضرب X_e^P در ماتریس ضرایب ساختاری ماده واقعی داخل المان. توان P را ضریب جریمه^۲ می‌نامند. طبق تجربه، برای رسیدن به طرح بهینه اقتصادی و قابل ساخت است که در آن چگالی نسبی المانها به سمت ۱ یا ۰ میل

می‌کند، مقدار P بهتر است بزرگتر یا مساوی ۳ باشد [۱۶].
با توجه به مطالب ذکر شده، مسئله بهینه‌سازی با هدف حداقل ممکن کردن نرمی متوسط سازه یعنی \bar{C} به عنوان تابع هدف، و با شرط برقراری الزامات زیر تعریف می‌شود.

$$[K]\{U\} = \{F\}, \quad r = \frac{V}{V_0}, \quad 0 < X_{Min} \leq X_e \leq 1 \quad (5)$$

که $\{F\}$ بردار نیروهای خارجی وارد بر سازه در محل گره‌ها می‌باشد. r کسری از فضای هندسی اولیه طراحی است که باید از ماده پر شود. به عبارت دیگر با معلوم بودن حجم فضای هندسی اولیه طراحی یعنی V_0 ، و حجم معلوم ماده واقعی که باید در این فضا به طور بهینه توزیع شود یعنی V ، مقدار r مشخص می‌شود. مقدار حداقل چگالی نسبی X_{Min} نیز عدد کوچکی مثل ۰/۰۰۱ در نظر گرفته می‌شود تا ماتریس سفتی سازه تکنه نشود. می‌توان نشان داد [۱۶] که حل این مسئله بهینه‌سازی بر پایه شرط بهینگی، با تشکیل تابع لاگرانژ مسئله منجر به شرط بهینگی زیر می‌شود.

$$\frac{X_e^P q_{0e}}{X_e V_e} = \frac{\lambda}{P} \quad (6)$$

که در رابطه فوق q_{0e} ، انرژی کرنشی ذخیره شده در المان پر از ماده واقعی، λ ضریب لاگرانژ و V_e حجم المان است. لذا صورت کسر سمت چپ رابطه فوق، انرژی کرنشی ذخیره شده در المان، و مخرج نیز حجم ماده واقعی موجود در المان با چگالی نسبی X_e است. بنابراین سمت چپ رابطه فوق نشان‌دهنده چگالی حجمی انرژی کرنشی ذخیره شده در هر المان است. سمت راست نیز مقداری ثابت است. پس در حالت بهینه چگالی حجمی انرژی کرنشی در همه المان‌های وصله یکسان می‌باشد، لذا الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی باید مقادیر چگالی نسبی المان‌های وصله، یا متغیرهای طراحی را به گونه‌ای تعیین کند که توزیع چگالی انرژی کرنشی در فضای هندسی اولیه طراحی در نظر گرفته شده برای وصله، که یک ورق مربعی با ضخامت ثابت است، حتی الامکان همگن یا یکنواخت باشد. متغیرهای طراحی، قیود و تابع هدف این مسئله بهینه‌سازی در جدول ۲ آمده است. در این تحقیق این مسئله بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی موجود در نرم افزار ANSYS حل می‌شود.

جدول ۲- متغیرهای طراحی، قیود و تابع هدف مسئله بهینه‌سازی

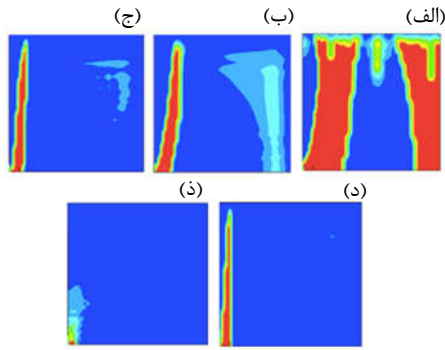
تابع هدف	متغیرهای طراحی	قیود طراحی
نرمی متوسط سازه: \bar{C}	چگالی نسبی المان‌ها: $X_{e1}, X_{e2}, \dots, X_{eN}$	$[K]\{U\} = \{F\}$
		$r = \frac{V}{V_0}$
		$0 < X_{Min} \leq X_e \leq 1$

۵- استخراج نتایج

چنانچه ذکر شد، تحلیل و بهینه‌سازی بر روی یک چهارم مدل کامل ترمیم چسبی نامتقارن اعمال می‌شود. لذا یک چهارم حجم اولیه وصله به عنوان فضای هندسی اولیه طراحی است که باید توزیع حجم معینی از ماده با ضخامت ثابت، در این فضا بهینه شود. برای مشاهده توزیع بهینه ماده واقعی وصله در همه راستاهای ممکن، فضای اولیه،

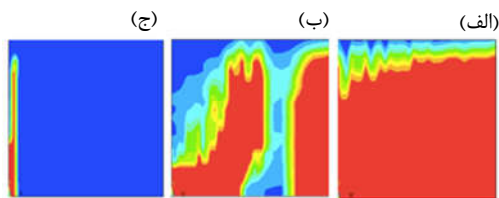
^۱ SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

^۲ Penalty Factor



شکل ۴- توزیع بهینه ماده وصله در مربعی به ضلع ۱۲۰ میلی‌متر، الف) ۵۰/۰۰، ب) ۸۵/۰۰، ج) ۹۰/۰۰، د) ۹۲/۰۰، ذ) ۹۳/۲۰ درصد اختلاف حجم

مطابق شکل‌های ۳ و ۴، با کاهش حجم ماده واقعی وصله و به عبارت دیگر با افزایش درصد اختلاف حجم، ناحیه قرمز رنگ به دو ناحیه تقسیم می‌شود و با کاهش بیشتر حجم، از مقدار ماده در امتداد محور x برداشته می‌شود و ناحیه‌ای که از محور y دورتر است، رفته‌رفته کوچکتر شده و بیشتر ماده در امتداد محور y و نزدیک به آن توزیع می‌شود. در شکل ۵ توزیع بهینه برای حجم مشخص ماده واقعی وصله برابر ۲۲۳۵/۶ میلی‌متر مکعب، در سه فضای هندسی اولیه متفاوت آورده شده است. مطابق این شکل با افزایش ابعاد فضای هندسی اولیه بهینه‌سازی توپولوژی توزیع بهینه را در امتداد محور y و نزدیک به آن نشان می‌دهد. حتی نزدیک نوک ترک المان‌های با چگالی نسبی خیلی پایین وجود دارند.

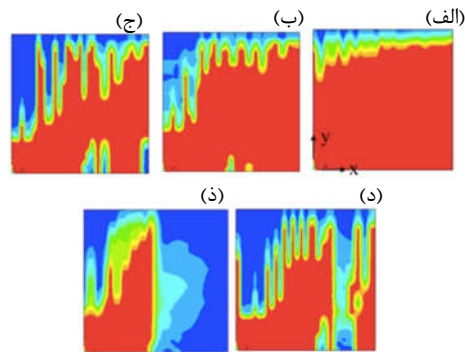


شکل ۵- توزیع بهینه حجم مشخص ماده وصله در مربعی به ضلع، الف) ۳۳، ب) ۴۰، ج) ۱۲۰ میلی‌متر

۶- ارزیابی نتایج

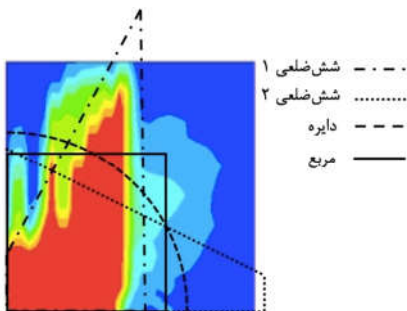
برای ارزیابی نتایج بهینه‌سازی توپولوژی، انرژی کرنشی آزاد شده در نوک ترک در واحد افزایش طول ترک (Δa) که معیار مناسبی برای شناسایی شروع رشد ناگهانی ترک و چگونگی آن می‌باشد، برای توزیع‌های بهینه ماده وصله محاسبه و با سایر شکل‌های وصله مقایسه می‌شود. با توجه به هندسه، شرایط مرزی و بارگذاری سیستم ترمیم چسبی نامتقارن در این تحقیق، رشد ترک فقط در مود اول یعنی بازشوندگی رخ می‌دهد. لذا انرژی کرنشی آزاد شده کل در نوک ترک در مود اول می‌تواند معیار کارایی مناسبی برای ترمیم چسبی باشد، به طوری که کاهش بیشتر آن نسبت به حالت بدون ترمیم به معنی کارایی بالاتر ترمیم است. برای محاسبه انرژی کرنشی آزاد شده کل در

مربعی در نظر گرفته شده است. در واقع این فضای هندسی مربعی شکل به عنوان شکل اولیه قبل از اعمال بهینه‌سازی و کاهش حجم است. برای چندین درصد اختلاف حجم بین فضای هندسی اولیه طراحی و حجم ماده واقعی وصله یعنی $100 \times (1-f)$ ، و برای ابعاد مختلف فضای اولیه مربعی، نتایج استخراج شده‌اند. این ابعاد با در نظر گرفتن نتایج تحقیق پیشین [۹] بیشتر از ۲/۵ برابر طول ترک انتخاب شده‌اند. شکل ۳ توزیع بهینه در فضای مربعی به ضلع ۳۳ میلی‌متر را برای چندین درصد اختلاف حجم نشان می‌دهد.



شکل ۳- توزیع بهینه ماده وصله در مربعی به ضلع ۳۳ میلی‌متر، الف) ۸/۷۶، ب) ۲۲/۶۶، ج) ۳۰/۰۰، د) ۴۰/۰۰، ذ) ۶۰/۰۰ درصد اختلاف حجم

در شکل ۴ نیز ابعاد فضای هندسی اولیه وصله، برابر ابعاد ورق ترک‌دار انتخاب شده است. در داخل فضای اولیه مربعی، رنگ قرمز نشان‌دهنده المان‌هایی است که چگالی نسبی آنها به ۱ میل می‌کند (یعنی پر از ماده) و رنگ آبی نشان‌دهنده المان‌هایی است که چگالی نسبی آنها به ۰ میل می‌کند (یعنی خالی از ماده). دیگر رنگ‌ها نیز نشان‌دهنده المان‌های با چگالی نسبی مابین ۰ و ۱ هستند. اگر نواحی آبی رنگ و یا قرمز رنگ نسبت به سایر نواحی غالب باشند، با دقت خوبی می‌توان گفت که مرز نواحی با رنگ قرمز شکل بهینه وصله حاصل از اعمال کاهش حجم در الگوریتم بهینه‌سازی بر پایه شرط بهینگی رابطه ۶ را به ما نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که کانتورهای نشان داده شده در شکل‌های ۳ و ۴ با اطلاعات مربوط به چگالی نسبی روی گره‌ها رسم شده‌اند. تعریف چگالی نسبی هر المان متوسط چگالی متغیرهای طراحی، یکی از روش‌های حل مشکل شطرنجی شدن به دلیل عدم پیوستگی کافی در مقادیر عددی خواص و پاسخ المان‌های مجاور می‌باشد. در این صورت چگالی نسبی هر المان متوسط چگالی نسبی گره‌های آن خواهد بود.



شکل ۷- نمایش شکل‌های وصله در جدول ۳

در تحقیق پیشین [۹] نشان داده شد که این اشکال در مقایسه با سایر اشکال دیگر مثل، مستطیل و بیضی کارایی بالاتری از دیدگاه میزان انرژی کرنشی آزاد شده در نوک ترک دارند. علت انتخاب کانتور شکل ۳ برای ارزیابی و مقایسه نتیجه بهینه‌سازی توپولوژی این است که اولاً این کانتور نسبتاً مشابه شکل وصله شش‌ضلعی ۱ است که به عنوان شکل بهینه در تحقیق پیشین [۹] انتخاب شد و هم از دیدگاه ساخت مطلوب است. مطابق جدول ۳ نتیجه بهینه‌سازی توپولوژی، کمترین مقدار انرژی کرنشی آزاد شده کل در نوک ترک را دارد. ولی کمترین مقدار انرژی کرنشی آزاد شده انتقالی، برای وصله‌های شش-ضلعی است و نتیجه توپولوژی بعد از آن‌ها قرار دارد. این نشان می‌دهد که انرژی کرنشی آزاد شده چرخشی که ناشی از خمش در ترمیم نامتقارن است و تغییر ضریب شدت تنش در راستای ضخامت ورق را موجب می‌شود، در نتیجه توپولوژی کمتر از شش‌ضلعی‌ها است. در جدول ۴ نیز، مقادیر انرژی کرنشی آزاد شده کل و انتقالی در واحد افزایش طول ترک بین کانتورهای نشان داده شده در شکل ۵ با هم مقایسه شده است. داده‌های جدول نشان می‌دهد که با بزرگتر شدن فضای هندسی اولیه طراحی، مقدار انرژی کرنشی آزاد شده کل و انتقالی افزایش می‌یابند.

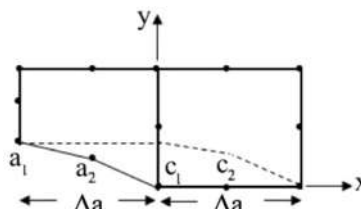
جدول ۴- نتیجه بهینه‌سازی توپولوژی برای ابعاد مختلف فضای هندسی اولیه

ضلع مربع (میلی‌متر)	G_I^U (N.m/m)	G_I (N.m/m)
۳۳	۰/۵۳۸۴۴	۰/۶۶۵۰۴
۴۰	۰/۵۴۵۲۷	۰/۶۷۲۶۲
۱۲۰	۰/۹۰۱۳۴	۱/۱۴۱۴۵

۷- بررسی امکان ساخت

امکان ساخت شکل بهینه حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی موضوع مهمی است که تعیین کننده کارایی بهینه‌سازی توپولوژی در عمل می‌باشد. چنانچه ذکر شد، یکی از معیارهای مطلوب بودن شکل بهینه حاصل از توپولوژی از دیدگاه ساخت، این است که نواحی با چگالی نسبی نزدیک ۰ (آبی رنگ) و نزدیک ۱ (قرمز رنگ) نسبت به سایر نواحی با چگالی نسبی مابین، غالب باشند. در این صورت با صرف نظر از ماده موجود در سایر نواحی، با دقت خوبی می‌توان گفت که مرز نواحی با رنگ قرمز شکل بهینه وصله می‌باشد. دو معیار دیگر مطلوب

نوک ترک در مود اول از روش اصلاح شده بسته شدن نوک ترک^۱ که بر پایه نظریه آیروین^۲ استوار است، استفاده می‌شود. مطابق این روش در ترمیم نامتقارن، انرژی کرنشی آزاد شده کل در نوک ترک در واحد افزایش طول ترک در مود اول (G_I) برابر مجموع مقدار انتقالی (G_I^U) و چرخشی (G_I^θ) آن است که به ترتیب به درجات آزادی انتقالی عمودی و چرخشی حول محور x، در دو گره آزاد سمت چپ نوک ترک (a_1 و a_2) بستگی دارند. در شکل ۶ دو المان مربعی واقع شده در دو سمت نوک ترک در المان‌بندی یک چهارم مدل کامل مشاهده می‌شود.



شکل ۶- دو المان نوک ترک در المان‌بندی یک چهارم مدل کامل

با توجه به نامگذاری گره‌ها G_I از رابطه زیر بدست می‌آید [۹]:

$$G_I = G_I^U + G_I^\theta$$

$$G_I^U = \frac{2}{\Delta a} \sum_{i=1}^2 F_{y_i}^{c_i} \bar{v}^a_i \quad (7)$$

$G_I^\theta = \frac{1}{\Delta a} \sum_{i=1}^2 M_{x_i}^{c_i} \bar{\theta}_x^a_i$

و F_y و M_x به ترتیب نیرو در جهت y و ممان حول محور x هستند که در محل دو گره مقید واقع در نوک ترک (c_i) و سمت راست نوک ترک (c_2) محاسبه می‌شوند.

در جدول ۳ مقادیر انرژی کرنشی آزاد شده کل و انتقالی در واحد افزایش طول ترک، برای نتیجه بهینه‌سازی توپولوژی برای حجم مشخص ماده واقعی وصله برابر ۹۸۰/۱ میلی‌متر مکعب، در فضای هندسی اولیه با حجم ۳۳×۳۳×۲/۲۵ میلی‌متر مکعب، که همان کانتور ذ در شکل ۳ می‌باشد، با شکل‌های وصله مربع، دایره و دو شش‌ضلعی با همان حجم ماده واقعی مقایسه شده است. یک چهارم شکل این وصله‌ها همراه با نتیجه توپولوژی شکل ۳، در شکل ۷ نشان داده شده است.

جدول ۳- نتیجه بهینه‌سازی توپولوژی و شکل‌های دیگر وصله

شکل وصله	G_I^U (N.m/m)	G_I (N.m/m)
توزیع بهینه شکل ۳	۰/۵۵۸۴۷	۰/۶۸۷۳۷
شش‌ضلعی ۱	۰/۵۵۶۹۰	۰/۶۸۸۶۰
شش‌ضلعی ۲	۰/۵۵۶۹۵	۰/۶۸۸۶۳
دایره	۰/۵۶۱۲۲	۰/۶۹۴۹۶
مربع	۰/۵۷۱۷۶	۰/۷۰۸۲۹

¹ Modified Crack Closure Method

² Irwin

۹- مراجع

- [1] Forrest P. G., *Fatigue of Metals*. Pergamon, 2013.
- [2] Domazet Z., Comparison of Fatigue Crack Retardation Methods. *Engineering Failure Analysis*, Vol. 3, No. 2, pp. 137-147, 1996.
- [3] Baker A. A. and Jones R., *Bonded Repair of Aircraft Structures*. Martinus-Nijhoff Publishers, the Netherlands, 1988.
- [4] سلیمانیان مبارکه ع.، براتی ا.، صادقی ق. و شاه‌حیدری م.، تعیین و بررسی ضرایب شدت تنش و زاویه شکست اولیه در ورق‌های ترک‌دار ترمیم شده با وصله کامپوزیتی یک‌طرفه تحت مود یک و مود ترکیبی. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۵۰، ش. ۳، ص ۱۱۵-۱۲۴، ۱۳۹۹.
- [5] Renaud G. and Hansen J. S., Shape Optimization of a Composite Patch Repair. *Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 93, pp. 327-333, 1989.
- [6] Kaye R. H. and Heller M., Through-Thickness Shape Optimization of Bonded Repairs and Lap-Joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 22, pp. 7-21, 2002.
- [7] Heller M. and Kaye R. H., Computational Shape Optimization of Bonded Repairs. In *6th Joint FAA/DOD/NASA Aging Aircraft Conference*, 2002.
- [8] Mahadesh Kumar A. and Hakeem S. A., Optimum Design of Symmetric Composite Patch Repair to Centre Cracked Metallic Sheet. *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 285-292 2000.
- [9] کوچک‌زاده م. و قناتی پ.، شکل بهینه وصله کامپوزیتی در ترمیم چسبی نامتقارن. *مجله مهندسی مکانیک شریف*، د. ۲۱، ش. ۳۱، ص ۵۷-۶۳، ۱۳۸۴.
- [10] Ramji M., Srilakshmi R. and Bhanu Prakash M., Towards Optimization of Patch Shape on the Performance of Bonded Composite Repair Using FEM. *Composites: Part B*, Vol. 45, pp. 710-720, 2013.
- [11] Talebi B., Abedian A. and Firooz S., Optimization of Composite Patch Repair for Inclined Crack on Aluminum Plate Using Genetic Algorithm. In *30th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, S, 2016.
- [12] Echer L., Marczak R. J. and Souza C. E., Studies on Shape Optimization of Repair Patches for Damaged. In *XXXVIII Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Santa Catarina, Brazil, 2017.
- [13] Echer L., Souza C. E. and Marczak R. J. R., A Study on the Best Conventional Shapes for Composite Repair Patches. *Materials Research*, Vol. 24, No. 2, e20210304, 2021.
- [14] Baghdadi M., Serier B., Salem M., Zaoui B and Kaddouri K., Modeling of a Cracked and Repaired Al 2024T3 Aircraft Plate: Effect of the Composite Patch Shape on the Repair Performance. *Frattura ed Integrità Strutturale*, Vol. 50, pp. 68-85, 2019.
- [15] Braun M., Villa E. I. and Riojas-Roldan H., A Topological Optimization Algorithm Applied to the Design of Composites Patch Repair of Mixed-Mode Cracked Plate. *Journal of Composite Materials*, Vol. 52, No. 17, pp. 2387-2395, 2018.
- [16] Bendse M. P. and Sigmund O., *Topology Optimization Theory: Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 2003.
- [17] Eswara Prasad N. and Wanhill R. J. H., *Aerospace Materials and Material Technologies*. Springer, Singapore, 2017.

بودن این شکل بهینه برای ساخت این است که اولاً ناحیه قرمز رنگ به هم پیوسته و یکپارچه و دوماً حتی الامکان دارای مرز صاف باشد. چنانچه در بخش قبلی ذکر شد، کانتور شکل ۳ علاوه بر این که از دیدگاه کارایی ترمیم مطلوب است، دارای معیارهای مطلوبیت از دیدگاه ساخت نیز می‌باشد، به جز ناصافی مرز فوقانی و تحتانی مدل کامل که در مرحله ساخت باید این ناصافی‌ها با دقت قابل قبولی که کمترین تغییر ماده را سبب شود، حذف شوند. زیرا به دلیل تمرکز تنش در نواحی مرزی دارای برآمدگی‌های تیزتر، امکان کنده شدن اتصال چسبی وجود دارد.

از آنجایی که قطعه بهینه شده در این تحقیق یک ورق آلومینیومی با ضخامت ثابت می‌باشد، با انواع مختلف روش‌های برشکاری، این شکل بهینه قابل ساخت است که هر کدام مزایا و معایبی دارند [۱۷]. با توجه به این که ضخامت ورق وصله زیر ۳ میلی‌متر می‌باشد، برشکاری با لیزر به دلیل عرض برش باریک، لبه برش تمیز، سرعت و دقت بالا، امکان برش انواع شکل‌ها، و صرفه‌جویی از دیدگاه مصرف انرژی برای ساخت این شکل بهینه مناسب تر است [۱۷].

۸- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این تحقیق برای یافتن بهترین شکل وصله با ضخامت ثابت در ترمیم چسبی نامتقارن یک ورق با ترک مرکزی تحت کشش تک محوره عمود بر امتداد ترک، از روش بهینه‌سازی توپولوژی برپایه همگن‌سازی توزیع چگالی انرژی کرنشی در فضای هندسی اولیه طراحی برای وصله، استفاده شد. نتایج نشان دادند که نتیجه بهینه‌سازی توپولوژی در فضای هندسی اولیه طراحی به ابعاد ۲/۷۵ برابر طول ترک و با ۶۰ درصد اختلاف حجم با ماده واقعی وصله، هم در مقایسه با سایر شکل‌های وصله با همان حجم ماده، بر اساس معیار کارایی در نظر گرفته شده در این تحقیق مطلوب‌تر است و هم از دیدگاه ساخت مطلوب است. ولی با بزرگتر شدن فضای هندسی اولیه طراحی برای حجم ثابت ماده واقعی وصله، یعنی با افزایش درصد اختلاف حجم، شکل بهینه به دست‌آمده از توپولوژی، از آنچه که مطلوب معیار کارایی ترمیم چسبی است، دورتر می‌شود. نکته مهمی که باید به آن اشاره کرد، این است که شرط بهینگی الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی دقیقاً در راستای معیار کارایی ترمیم چسبی عمل نمی‌کند. تغییرات توزیع چگالی انرژی کرنشی در وصله، هم ناشی از شدت تنش در نوک ترک و هم ناشی از خمش در ترمیم نامتقارن است ولی اثر شدت تنش نوک ترک در این امر قوی‌تر است. با بزرگتر کردن فضای هندسی اولیه طراحی، توزیع بهینه ماده در جهت دورتر شدن از نوک ترک به سمت مرکز سطح آزاد ترک می‌باشد. به عبارت دیگر بیشتر ماده وصله در راستای عمود بر سطح آزاد ترک در امتداد محور تقارن لا توزیع می‌شود که مطلوب نیست. می‌توان گفت با انتخاب ابعاد مناسب فضای هندسی اولیه طراحی نسبت به طول ترک و با در نظر گرفتن درصد مناسب اختلاف حجم با ماده واقعی وصله، هم مقدار ماده مورد نیاز برای ساخت وصله و هم توزیع بهینه آن با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی به دست می‌آید که هم از دیدگاه کارایی ترمیم چسبی و هم از دیدگاه ساخت مطلوب است.