

تحلیل گرفتن اجسام نرم توسط پنجه رباتیکی در حضور نیروی خارجی

حمیدرضا صفری

دانشجو، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، h.safari2384@gmail.com

حسین کیادلیری

دانشجو، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، hookia1995@gmail.com

اسماعیل خانمیرزا*

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، khanmirza@iust.ac.ir

چکیده

جابجایی و مدل‌سازی اجسام نرم یک کار چالش برانگیز در حوزه رباتیک می‌باشد. این اجسام بدلیل درجه آزادی بی‌نهایتی که دارند دارای محاسبات سنگینی برای مدل‌سازی می‌باشند. برای پرداختن به این چالش در این مقاله ابتدا، مدل‌سازی جسم نرم با استفاده از روش جرم-فنر-میراگر (MSD) انجام می‌شود که یک روش خوب برای اجرای برنامه‌های زمان-واقعی می‌باشد. سپس بررسی و تحلیل گرفتن جسم مطرح می‌شود و در آن با چالش‌هایی از قبیل بهترین موقعیت گرفتن، شناسایی برخورد، شناسایی عمق نفوذ برای محاسبه نیروی وارده از پنجه به جسم مواجه شده و به حل آن پرداخته می‌شود. سرانجام، برای رسیدن به بهترین عملکرد در شبیه‌سازی و انتخاب بهترین پارامترها در این کار از الگوریتم PSO استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: جسم نرم، بررسی و تحلیل گرفتن، عمق نفوذ، شناسایی برخورد، الگوریتم PSO.

Grasp Analysis of soft objects using robotic gripper in the presence of an external force

H. R. Safari

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

H. Kiadaliri

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

E. Khanmirza

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

Abstract

Manipulating and modeling soft objects is a challenging task in the field of robotics. These objects have heavy calculations for modeling due to their infinite degree of freedom. To address this challenge in this paper, we first model soft objects using the mass-spring-damper (MSD) method, which is a good choice to run real-time applications. Then we express the Grasping analysis and introduce challenges such as finding the best position for grasping, contact detection, penetration depth detection to calculate the force applied from the gripper to the object and provide the solution. We also use the Particle swarm optimization (PSO) algorithm to achieve the best performance in the simulation and select the best parameters in this work. Finally, after satisfying the static equilibrium and reducing its error to zero.

Keywords: Soft Body, Grasping Analysis, Penetration Depth, Contact Detection, PSO Algorithm.

عملگرهای هندسی برای تغییر شکل اجسام جامد را توسط تبدیل فضای مختصات آن معرفی کردند. این عملگرها راه را برای روش‌های تغییر شکل فرم-آزاد تعمیم‌یافته^۳، هموار کردند که به عنوان روش FFD شناخته می‌شوند و توسط سدربرگ و همکاران در سال ۱۹۸۶ معرفی شده‌اند [۴]. سال بعد، آقای کاس و همکاران کانتورهای فعال دو بعدی صریح را معرفی کردند [۵]، که به دنبال آن توسط ترزوپولوس و همکاران [۶] به موارد سه‌بعدی تعمیم داده شدند و اصطلاح "مدل‌های شکل‌پذیر"^۴ را ابداع کردند. تحلیل‌ها با توجه به اینکه توصیف جسم مبتنی بر مدل می‌باشد یا مستقل از آن، طبقه‌بندی می‌شوند. نمودار درختی مربوط به این بخش در شکل ۱ نمایش داده شده است.

جابجایی اجسام با سفتی‌های مختلف توسط پنجه رباتیکی در [۷] بررسی شده‌است. گرفتن اجسام صفحه‌ای شکل‌پذیر، با استفاده از تحلیل تماس در [۸] ارائه شده است. اخیراً، در [۹] نویسندگان یک رویکرد جدید برای بلند کردن یک جسم سه‌بعدی را پیشنهاد می‌کنند که باعث تغییر شکل کوچک جسم با استفاده از دو انگشت صلب با

۱- مقدمه

با رشد روزافزون علم رباتیک و گسترش استفاده از آن در بسیاری از زمینه‌ها از قبیل صنعت، کاربردهای پزشکی، کاربردهای خدماتی و ... محققان برآن شدند که بسیاری از کاربردهای ربات را برای استفاده از آن‌ها در مسائل مختلف پیگیری نمایند. در سه دهه اخیر، تحقیقات روی روش‌های جابجایی^۱ و گرفتن^۲ اجسام صلب با استفاده از پنجه رباتیکی به تکامل رسیده‌است، اما به دلیل چالش‌های فراوانی که در زمینه مدل‌سازی و گرفتن اجسام نرم وجود دارد، متأسفانه مطالعات جامعی روی آن صورت نگرفته‌است.

بیش از سه دهه روی موضوع جابجایی و گرفتن اجسام صلب توسط پنجه رباتیکی کار شده و تحقیقات آن به تکامل رسیده است، اما در زمینه اجسام شکل‌پذیر مطالعه گسترده‌ای صورت نگرفته‌است [۱] و [۲]. تا سال‌های ۱۹۸۰، روش‌های مدل‌سازی مبتنی بر رایانه تنها برای اجسام صلب کارایی داشت. در سال ۱۹۸۴، بار و همکاران [۳] یک سری

³ generalized free-form deformation technique

⁴ Deformable Models

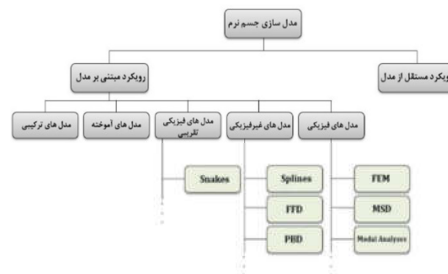
¹ Manipulation

² grasping

اصطکاک تماسی می‌شود. تغییرشکل جسم با استفاده از روش اجزاء محدود FEM براساس نظریه الاستیسیته غیرخطی ردیابی شدند. میرا و همکاران [۱۰] یک برنامه‌ریز را نشان می‌دهند که می‌تواند اقدامات دست انسان را برای تعیین نقاط تماس را بوجود آورد. اکثر رویکردهای موجود در مدل‌های الاستیک خطی، با تغییرشکل کوچک فرض می‌شود و بر نظریه‌های الاستیسیته کلاسیک تمرکز دارد و رفتار دینامیکی تغییرشکل جسم را نادیده می‌گیرند، که برای مدل‌سازی تغییرشکل بزرگ مناسب نیستند. محققان حجم این مدل را به عنوان یک سیستم غیرخطی جرم و فنر در نظر گرفته‌اند و براساس شبکه چهاروجهی شبکه‌بندی می‌کنند؛ توده‌های متمرکز نشان‌دهنده گره‌ها و فنرهای غیرخطی یال‌ها را نشان می‌دهند [۱۱ و ۱۲]. محاسبه تغییرشکل کلی جسم و تغییرشکل نواحی تماس براساس ردیابی گره‌های شبکه به وسیله حل معادله حرکت دینامیکی براساس قانون دوم نیوتن انجام می‌شود.

مساله اصلی که در کاربردهای کنترل زمان-واقعی مورد توجه قرار می‌گیرد مربوط به پایداری نیروهای اصطکاک و گذار بین حالت لغزش و چسبیدگی^۱ است.

در این مقاله، یک مدل تماس غیر خطی سه‌بعدی معرفی می‌شود تا تزویج^۲ بین نیروهای تماسی و تغییرشکل جسم را توضیح دهد. این مدل متشکل از دو بخش است: یک نیروی نرمال غیرخطی [۱۳ و ۱۴] و یک نیروی اصطکاک مماسی غیرخطی با اثر لغزش و چسبیدگی.



شکل ۱- نمودار درختی مدل‌سازی جسم نرم

دقت در شبیه‌سازی گرفتن جسم نرم، به دقت در تشخیص مقدار نفوذ و تشخیص تماس بستگی خواهد داشت. در کارهای اخیر صورت گرفته، موضوع تشخیص برخورد بین جسم و پنجه، دارای نواقص و مشکلات مهمی بود که دقت شبیه‌سازی را به شدت کاهش می‌داد. برای مثال تشخیص برخورد فقط برای جابجایی‌های بزرگ انگشت پنجه قابل تشخیص بود که این امر مشکلات ساختاری بزرگی را به خصوص در موارد حساس بوجود می‌آورد. بنابراین، جنبه اول نوآوری این طرح، در مبحث تشخیص برخورد لحاظ شده‌است و با توجه به یک روش و منطق هندسی، تشخیص برخورد دقیق و بدون خطا تعریف شده‌است تا از بروز خطاهای در دسر ساز رها جلوگیری شود. جنبه دوم نوآوری در محاسبه دقیق عمق نفوذ می‌باشد. این مقوله نیز در کارهای گذشته به درستی محاسبه نمی‌شد و هنگامی که انگشت

¹ Slipping and sticking
² Coupling

با لبه‌های المان تماس برقرار می‌کرد و یا زمانی که نوک انگشت به چندین المان به صورت همزمان برخورد می‌کرد، در محاسبه عمق نفوذ خطاهایی را بوجود می‌آورد و باعث عدم تطابق عمق نفوذ بدست آمده با واقعیت می‌شد و همچنین دقت آن بسیار به اندازه شبکه‌بندی جسم حساس بود. با توجه به نقش مستقیم عمق نفوذ در محاسبه میزان نیروی عکس‌العمل جسم در شبیه‌سازی و همچنین محاسبه شرط تعادل استاتیکی، در راستای گام دوم نوآوری به تصحیح این مشکل پرداخته شده است.

۲- مدل‌سازی جسم نرم

به دلیل نامحدود بودن درجه آزادی^۳ (DOF) اجسام نرم، مدل‌سازی آن‌ها پیچیده و مشکل می‌باشد. در رابطه (۱)، یک سیستم دینامیکی که توسط مجموعه‌ای از ذرات (n گره در شبکه) در یک ساختار مش^۴ با حرکت‌هایی که توسط قانون دوم نیوتن بیان می‌شود، مدل‌سازی شده- است [۱۵]:

$$m_i \ddot{x}_i + f_i^{nodal} + \sum_{j \in N(i)} f_{ij}^{int-nodal} = f_i^{ext} \quad (1)$$

$$i \in \{1, \dots, n\}$$

که در اینجا N(i) شماره‌ی گره‌هایی است که به گره i متصل هستند. همچنین m_i جرم گره i، x_i موقعیت گره i، f_i^{ext} نیروی داخلی وارد شده به گره i بطور مستقیم، f_{ij}^{int-nodal} نیروی داخلی وارد شده به گره i از طرف گره متصل به آن z و f_i^{ext} نیروی خارجی وارد شده به گره i می‌باشد.

اگر جرم‌های نقطه‌ای، مجازاً در یک سیال لزج، شناور در نظر گرفته شود [۱۶] عبارت f_i^{nodal} بدین صورت فرمول‌بندی می‌شود:

$$f_i^{nodal} = b_i \dot{x}_i \quad (2)$$

که در آن b_i ثابت میرایی در گره i است. از طرف دیگر عبارت f_{ij}^{int-nodal} شامل دو جزء می‌باشد که نشان‌دهنده نیروهای کشسانی و میرایی بین دو گره i و j است:

$$f_{ij}^{int-nodal} = f_{ij}^s + f_{ij}^d \quad (3)$$

برای فنرهای خطی، می‌توان f_{ij}^s را به صورت زیر نوشت:

$$f_{ij}^s = k \Delta l_{ij} \hat{x}_{ij} \quad (4)$$

که Δl_{ij} اندازه تغییر طول فنر نسبت به حالت اولیه، k ضریب کشسانی فنر، l_{ij}⁰ طول اولیه بین دو گره i و j، z، x_{ij} اختلاف جابجایی بین دو گره i و j است و x̂_{ij} بیانگر راستای تغییر جهت می‌باشد.

عبارت f_{ij}^d نشان‌دهنده اثرات لزجت بین دو گره i, j می‌باشد که به موازات فنر قرار گرفته است:

$$f_{ij}^d = c \dot{x}_{ij} \hat{x}_{ij} \quad (5)$$

³ degrees of freedom
⁴ mesh

که در اینجا c ثابت میرایی بین گره i و گره متصل به آن z می باشد. در انتها معادلات به حالت ماتریسی زیر استخراج می شود:

$$\dot{X} = F(t, X) + F^{ext} \quad (6)$$

این فرمول بندی یک مدل MSD ویسکوالاستیک غیرخطی با دو نوع شبیه سازی میرایی را توصیف می کند که برای حل این معادله دیفرانسیل بدست آمده از روش حل عددی Runge-kutta مرتبه ۴ استفاده می شود [۱۷].

هستند.

این فاکتورها در تابع اکتشافی به صورت زیر می باشند.

$$H(G) = w_1 S_1 + w_2 S_2 + w_3 S_3 + n_c P_c + n_e P_e \quad (7)$$

در رابطه بالا اندیس مربوط به w از ۱ تا ۳ تغییر می کند که ضرایب وزن دار هستند و P_e و P_c پارامترهای جریمه می باشند. مقادیر تجربی این پارامترها به صورت زیر می باشد:

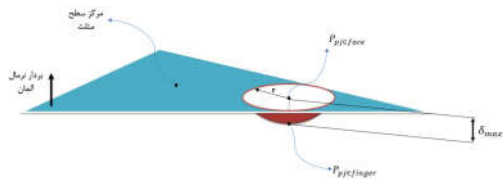
$$w_1 = 0.2, w_2 = 0.4, w_3 = 0.4, P_c = P_e = 0.2$$

۳-۲- تشخیص برخورد

این مبحث جزو مهم ترین چالش های موجود در این حوزه است زیرا در کارهای اخیر انجام شده، هیجگاه معیار دقیق و بدون خطایی برای این موضوع وجود نداشت به بیان دیگر این موضوع در کارهای اخیر با درصد خطای بالا و تحت یک سری شرایط خاص انجام می گرفت که این مشکل در مسائلی که نیاز به دقت بالایی داشت بسیار مهم تر می شد [۲۰]. در این مقاله با ارائه یک روش مناسب و ابتکاری خطاهای موجود حذف شده و منجر به یک الگوریتم تشخیص برخورد دقیق شده است.

هنگام به وقوع پیوستن برخورد، بین نوک انگشت و سطح المان جسم نرم، محل برخورد، تشکیل یک دایره به شعاع r خواهد داد (شکل ۳).

بعد از برخورد و تشکیل دایره روی وجه المان، مساله سه بعدی، تبدیل به حل یک مساله دوبعدی هندسی خواهد شد؛ زیرا هم دایره تشکیل شده و هم المان سطحی جسم دوبعدی هستند و مساله تشخیص برخورد، بین این دو شکل هندسی خواهد بود. در ابتدا مختصات از حالت جهانی به مختصات محلی یعنی روی هر المان انتقال می یابد.



شکل ۳- تصویری از برخورد نوک انگشت پنجه با یک المان از سطح

ماتریس انتقال از دستگاه مختصات جهانی به دستگاه مختصات محلی به صورت زیر می باشد.

$$DH = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & -B_{3 \times 1} \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

حال با استفاده از ماتریس انتقال و با ضرب آن در معادله نوک انگشت در مختصات جهانی، به معادله آن در مختصات محلی خواهیم رسید، که با داشتن مختصات محلی انگشت و هر المان، مسئله سه بعدی به یک مسئله دوبعدی تبدیل شده و تشخیص برخورد ممکن خواهد شد.

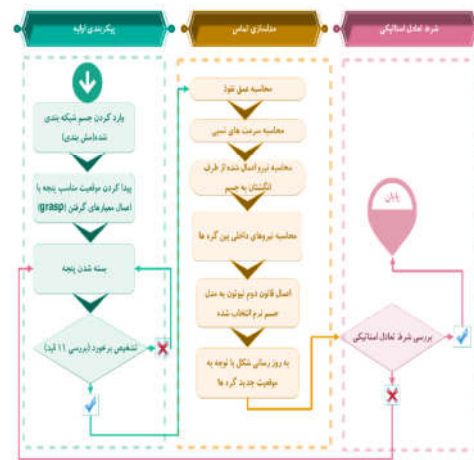
معادله نوک انگشت که کروی فرض شده است، در مختصات محلی به صورت ذیل می باشد.

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 = R^2 \quad (9)$$

با داشتن معادله نوک انگشت در مختصات محلی، و صفر قرار دادن

۳- استراتژی گرفتن جسم نرم

در این بخش از مقاله در مورد اتفاقات صورت گرفته هنگام برهمکنش و تعامل بین پنجه و جسم نرم سه بعدی با استفاده از اطلاعاتی مانند میزان عمق نفوذ و سرعت نسبی موجود بین انگشتان و سطح جسم و محاسبه نیروهای تماسی پرداخته می شود. اصلی ترین چالش موجود در رابطه با تعامل بین پنجه و جسم نرم، محاسبه تغییر شکل جسم نرم در ارتباط با انگشتان پنجه می باشد. الگوریتم مورد استفاده در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- الگوریتم استراتژی گرفتن جسم نرم

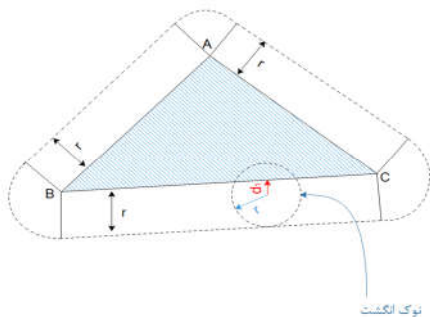
۳-۱- معیار گرفتن (grasp)

گرفتن یک جسم با پنجه رباتیکی چندانگشتی نیاز به مقیدسازی کامل حرکت آن دارد. مقیدسازی کامل یک جسم نیز می تواند با استفاده از تعادل نیرو توصیف شود. اگر هر نیروی خارجی وارد بر جسم بتواند با نیروی تماسی که توسط پنجه بر جسم وارد می شود، بالانس گردد، شاهد یک فرایند گرفتن ایمن خواهیم بود. گرفتن نیرو بسته این گونه می باشد [۱۸].

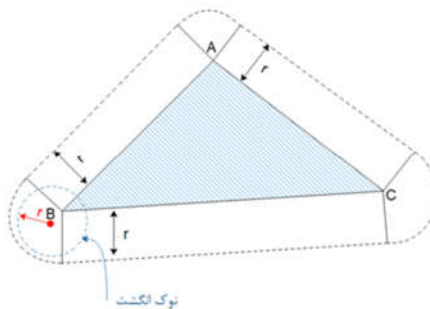
یک تابع اکتشافی، کیفیت گرفتن را با توجه به پنج شرط بررسی می کند. این پنج شرط عبارتند از [۱۹]:

S_1 آرایش راستای نیرو، S_2 آرایش نقاط گرفتن توسط پنجه، S_3 محل قرارگیری نقاط تماس نسبت به مرکز جرم چندضلعی، n_c تعداد رئوس محدب و n_e تعداد نقاط تماسی که در نزدیکی انتهای وجوه

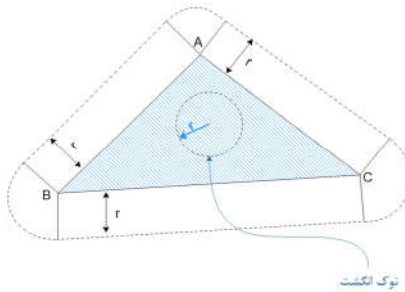
¹ Force-closure grasp



شکل ۵- المان سطحی و دایره تشکیل شده ناشی از تماس حالت دوم



شکل ۶- المان سطحی و دایره تشکیل شده ناشی از تماس حالت سوم



شکل ۷- المان سطحی و دایره تشکیل شده ناشی از تماس حالت چهارم

۳-۳- عمق نفوذ

محاسبه عمق نفوذ یکی از مهم‌ترین قسمت‌های مدل‌سازی تماس خواهد بود. زیرا به‌طور مستقیم در محاسبه نیروهای تماسی و به‌روزرسانی شکل جسم نرم نقش خواهد داشت. با مطالعه کارهای صورت گرفته اخیر، مشاهده می‌شود که محاسبه‌ی عمق نفوذ، فقط در حالت‌های خاص به درستی محاسبه می‌شود و در بسیاری از شرایط این فرایند با خطاهای فاحشی همراه بود که این قضیه باعث بروز مشکلات بزرگی می‌شد. در قدم اول باید به تعریف نقطه P_{pj} بپردازیم. همانطور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود نقطه P_{pj} تصویر نقطه P_{qj} (مرکز نیم کره انگشت) روی هر وجه از المان‌های جسم نرم می‌باشد.

پارامتر z' به معادله دایره ناشی از قطع نوک انگشت توسط صفحه مربوط به آن المان خواهیم رسید. پس داریم:

$$z' = 0 \Rightarrow (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 = R^2 - z'^2 \quad (10)$$

با توجه به رابطه بدست آمده، دو حالت برای آن بوجود خواهد آمد، حالت اول یعنی وقتی که $R^2 - z'^2$ منفی باشد، نشان دهنده عدم تماس کره و صفحه است یعنی در این حالت کره (نوک انگشت) با صفحه شامل المان برخورد نکرده است.

حالت دوم وقتی بوجود می‌آید که $R^2 - z'^2$ مثبت باشد. این حالت نشان‌دهنده تماس نوک انگشت و صفحه شامل المان خواهد بود (نه لزوماً خود المان) که در این صورت ما معادله دایره ناشی از برخورد را خواهد داد.

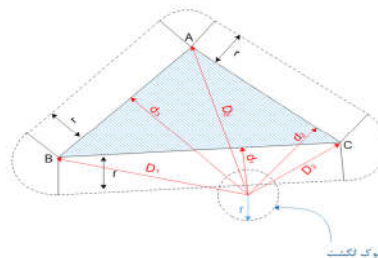
که این رابطه نشان دهنده دایره با مرکز (x'_0, y'_0) و شعاع $\sqrt{R^2 - z'^2}$ خواهد بود.

پس از حصول اطمینان از برخورد نوک انگشت با صفحه شامل المان، باید از برخورد انگشت با المان مربوطه نیز اطمینان حاصل شود. برای این موضوع حالت‌های مختلفی بوجود می‌آید که در ادامه، بررسی هر یک از حالات صورت گرفته است.

حالات مختلف برخورد انگشت با صفحه شامل المان

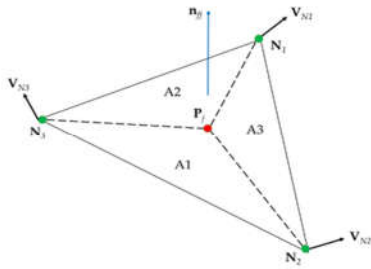
همانطور که در شکل ۴ مشخص شده‌است، تصویر نشان دهنده یک المان از سطح جسم می‌باشد که مرزی به فاصله r (شعاع دایره حاصل از تماس بین انگشت و صفحه شامل المان) از جانب آن مشخص شده است. این مرز به‌طور مستقیم برای تشخیص برخورد به کار می‌رود، به طوری که اگر مرکز دایره موجود، وارد مرز مشخص شده شود به معنی برقراری تماس بین انگشت و سطح جسم نرم خواهد بود.

همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، مرکز دایره وارد حریم مرزی مربوط به المان نشده‌است؛ پس تماسی صورت نگرفته است. برای اعمال این شرط، فاصله مرکز دایره از خطوط و رئوس مثلث محاسبه می‌شود و پرواضح است که اگر هر کدام از این فواصل کمتر از r شود به معنی برقراری تماس خواهد بود.



شکل ۴- المان سطحی و دایره تشکیل شده ناشی از تماس حالت اول

در ادامه تمامی حالات ممکن که باعث برقراری تماس می‌شود در شکل‌های (۶، ۷، ۵) مشاهده می‌شود.



شکل ۹- درون‌یابی سرعت گره‌های هر وجه

با استفاده از روش درون‌یابی المان محدود، سرعت نقطه تماس مربوط به وجه تماس با استفاده از سرعت گره‌های مربوط به صفحات محاسبه می‌شوند. مساحت‌ها و نقاط مختلف در شکل ۹ نشان داده شده است.

$$V_{P_{ij} \in \text{face} / R_o} = f(V_{N1}, V_{N2}, V_{N3}) \quad (12)$$

$$V_{P_{ij} \in \text{face} / R_o} = \frac{A_1}{A_G} V_{N1} + \frac{A_2}{A_G} V_{N2} + \frac{A_3}{A_G} V_{N3} \quad (13)$$

سرعت نسبی بین نوک انگشت و وجه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{ij} = V_{P_{ij} \in \text{finger} / R_o} - V_{P_{ij} \in \text{face} / R_o} \quad (14)$$

پس از آن، سرعت عمودی و مماسی بین انگشت و وجه اینگونه بدست می‌آید:

$$V_{nj} = (V_{ij} \cdot n_{jj}) n_{jj} \quad (15)$$

$$V_{tj} = V_{rj} - V_{nj} \quad (16)$$

$$A_G = \sum_{i=1}^3 A_i \quad (17)$$

۳-۵- محاسبه نیروی تماسی

مدل تماسی ما در برابر اصطکاک دارای نیروهای نرمال (عمودی) و مماسی می‌باشد؛ که نیروهای مماسی را می‌توان به دو دسته‌ی چسبنده و لغزنده تقسیم بندی کرد.

۳-۶- محاسبه نیروی عمودی (نرمال)

هانت و کراسلی [۲۱] یک مدل غیرخطی را برای محاسبه نیروی نرمال در اتصال بین کره و سطح ارائه دادند. نیروی نرمال غیرخطی اینگونه محاسبه می‌شود:

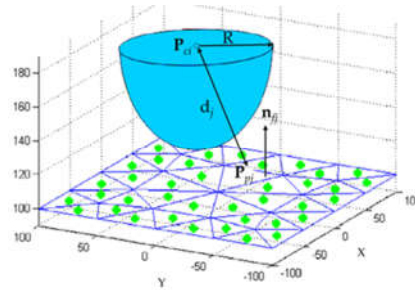
$$i = \begin{cases} 0, & \delta_j \leq 0 \\ \max(0, (K \delta_j^n + C \delta_j)) & \delta_j > 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$f_{nj} = f_{nj} n_{jj} \quad (19)$$

در حالی که K و C به ترتیب سختی تماس و میرایی تماس هستند، ثابت سختی تماس به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۲۳]:

$$K = 2\gamma_1 \Psi \sqrt{R} \quad (20)$$

درحالی که γ_1 ثابت و Ψ با توجه به خصوصیات مکانیکی دو جسم در تماس، به صورت زیر بدست می‌آید:



شکل ۸- مدل انگشت و سطح جسم نرم [۱۷]

در فرایند نزدیک شدن انگشت به جسم نرم، در هنگام برخورد انگشت به جسم نرم، نقطه P_{pj} روی هر دو سطح انگشت و سطح جسم نرم نقطه‌ای یکسان است. با ادامه روند نفوذ انگشت در جسم و قبل از بروزسانی مجدد جسم نرم در گام زمانی بعدی، این دو نقطه از هم فاصله گرفته و تبدیل به دو نقطه می‌گردند. یعنی دو نقطه P_{pj} خواهیم داشت که یکی از آن‌ها روی انگشت و دیگری روی وجه المان جسم نرم است که با توجه به اختلاف این دو نقطه، عمق نفوذ (δ_{max}) محاسبه می‌گردد و در ادامه نیروی‌های عکس‌العمل و تماسی بدست آمده و جسم نرم بروزسانی می‌شود. برای تفهیم پارامتر عمق نفوذ می‌توان به شکل ۳ رجوع کرد.

عمق نفوذ برابر است با اندازه خط واصل بین P_{pj} و وجه P_{pj} انگشت که این خط موازی با بردار نرمال المان سطحی می‌باشد. برای بدست آوردن P_{pj} وجه حالت‌های مختلفی رخ خواهد داد که این حالت‌ها را با بررسی امکان قرارگیری دایره ناشی از تماس روی هر قسمت از نواحی المان و مرز متصور شده برای آن بررسی و اصلاح می‌گردد.

در تماس حالت دوم (شکل ۵) نقطه P_{pj} ، تصویر مرکز دایره بر روی ضلع BC خواهد بود. در تماس حالت سوم (شکل ۶) این نقطه، رأس B و در تماس حالت چهارم (شکل ۷) نقطه P_{pj} ، همان مرکز دایره خواهد شد.

۳-۴- محاسبه سرعت نسبی بین انگشت و وجه

سرعت نقطه برخورد P_{pj} مربوط به انگشت نسبت به مرجع R_o توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود [۲۱]:

$$V_{P_{ij} \in \text{finger} / R_o} = V_{P_{ci} \in \text{finger} / R_o} + \Omega_{P_{ci} \in \text{finger} / R_o} \times P_{ci} P_{pj} \quad (11)$$

به طوریکه $\Omega_{P_{ci} \in \text{finger} / R_o}$ و $V_{P_{ci} \in \text{finger} / R_o}$ به ترتیب نشان‌دهنده سرعت انتقالی و دورانی بردار مکانی P_{ci} در فضا خواهند بود.

نیروهای اعمالی برابر با جمع نیروهای عکس‌العمل گره‌ای است (شکل ۱۱).

شرایط تعادل محلی را می‌توان این‌گونه نوشت:

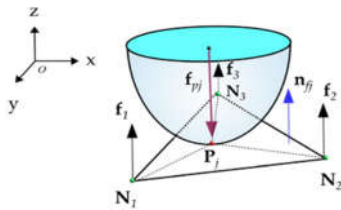
$$f_{pj} = \sum_{i=1}^3 f_i \quad (26)$$

برای محاسبه نیروهای گره‌ای از ماتریس تابع شکل H استفاده می‌کنیم که بر پایه مولفه مساحت‌های ایجاد شده توسط نقطه برخورد خواهد بود [۲۶].

$$H = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{A_G} & 0 & 0 & \frac{A_2}{A_G} & 0 & 0 & \frac{A_3}{A_G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{A_G} & 0 & 0 & \frac{A_2}{A_G} & 0 & 0 & \frac{A_3}{A_G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_1}{A_G} & 0 & 0 & \frac{A_2}{A_G} & 0 & 0 & \frac{A_3}{A_G} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$H^T f_H = f_i \quad (28)$$

$$= [f_{1x} \ f_{1y} \ f_{1z} \ f_{2x} \ f_{2y} \ f_{2z} \ f_{3x} \ f_{3y} \ f_{3z}]_{RO}^T \quad (29)$$



شکل ۱۱- نیروهای گره‌ای ناشی از نیروهای تماسی

۹-۳- بررسی تعادل استاتیکی

شرایط لازم برای بلند کردن جسم، توازن نیروهای عمودی وارد شده به جسم با نیروی وزن جسم می‌باشد. فرض کنید که نیروهای خارجی، با نام f_w فقط با نیروی وزن بررسی و مقایسه می‌شوند. معادله تعادل استاتیکی این‌گونه نوشته خواهد شد:

$$\sum_{j=1}^n (f_{nj}) + \sum_{j=1}^n (f_{ij}) + f_w = 0 \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^n (f_{nj} \times C_{j\theta}) + \sum_{j=1}^n (f_{ij} \times C_{j\theta}) + f_w \times C_{G\theta} = 0 \quad (31)$$

۱۰-۳- بهینه‌سازی پارامترها توسط الگوریتم PSO

از مشکلات عمده در مسائل فیزیکی عدم اطلاع از پارامترهای معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم می‌باشد [۲۷]. در شبیه‌سازی جسم نرم و شبیه‌سازی گرفتن آن، پارامترهای $b, c, k, n, \gamma_1, \gamma_2$ دارای مفاهیم انتزاعی هستند. بنابراین، مقادیرشان توسط الگوریتم بهینه‌سازی PSO تخمین زده می‌شود تا نتایج بدست آمده منطبق با واقعیت باشد [۲۸].

تابع هزینه باید به گونه‌ای معرفی گردد که مقدار آن با توجه به واقعیت، به یک مقدار تعیین شده از آزمایشات تجربی برسد. در مدل‌سازی جسم نرم و گرفتن آن، تابع هزینه برپایه سه قید اصلی بنا شده است. به طوری که پس از ارضای آن سه قید، پارامترهای بهینه برای مدل‌سازی جسم نرم بدست خواهند آمد.

شرط اول برای تعریف تابع هزینه، برابری نیروهای عمودی ایجاد

$$\Psi = \frac{1}{\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}} \quad (21)$$

که E_1 و E_2 مدول یانگ و v_1 و v_2 نسبت پواسن مربوط به انگشت و جسم هستند.

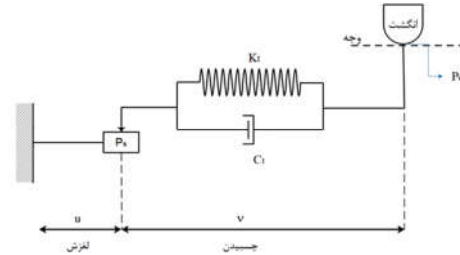
$$C = 4\pi R \gamma_2 \quad (22)$$

که در آن γ_2 ثابت است.

عمق نفوذ δ_f در طول راستای نرمال صفحه تماس n_{fj} محاسبه می‌شود که در بخش (۳-۳) بررسی گردید.

۷-۳- محاسبه نیروی لغزشی (اصطکاک)

در این مقاله، از قانون اصطکاک کلمب برای تخمین آستانه نیروی مماسی منتقل شده توسط نیروی تماسی استفاده می‌شود. این تخمین پایداری گرفتن را تضمین می‌کند؛ زیرا با دست کم گرفتن نیروهای لغزشی، نیروهای نرمال بزرگتری باید اعمال گردد [۲۴ و ۲۵]. مدل ارائه شده با هدف پیش‌بینی نیروی اصطکاک در طول فرایند گرفتن می‌باشد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰- مدل اصطکاک

نیروی اصطکاک لغزشی را می‌توان از نظر قانون کلمب، به صورت زیر شرح داد:

$$f_{slip} = \begin{cases} 0, & \|V_t\| = 0 \\ -\mu f_n \frac{V_t}{\|V_t\|}, & \end{cases} \quad (23)$$

با استفاده از این مدل، موقعیت نقطه تماس بصورت پویا در شرایط لغزشی تغییر می‌کند. اگر اندازه نیروی مماسی، از آستانه لغزشی کمتر باشد:

$$f_{stick} = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ -(k_t v - c_t \dot{v}) \frac{P_C P_S}{\|P_C P_S\|}, & v > 0 \end{cases} \quad (24)$$

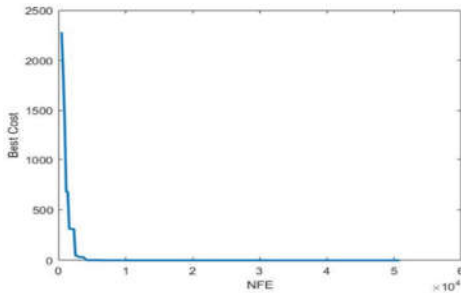
که در آن v ، جابه‌جایی مماسی روی وجه، P_C موقعیت نقطه تماس و P_S موقعیت نقطه تماس در رژیم چسبندگی است. پارامتر k_t و c_t به ترتیب سختی و میرایی مماسی هستند.

۸-۳- محاسبه نیروی گره‌ای

نیروهای وارد شده از انگشت به وجوه جسم، شامل نیروهای نرمال و مماسی خواهد بود.

$$f_{pj} = f_{nj} + f_{ij} \quad (25)$$

f_{pj} نشان‌دهنده نیروهای مشارکت‌کننده روی وجه z هستند



شکل ۱۲- تلاش الگوریتم PSO برای رساندن پارامترها به حالت بهینه پارامترهای بهینه شده توسط این الگوریتم نیز از قرار زیر می-باشد:

جدول ۲- پارامترهای بهینه شده توسط الگوریتم PSO

عنوان پارامتر	اندازه پارامتر بهینه شده
λ_1	۰/۳۲۲۲۹۸۱
λ_2	۰/۸۳۷۶۶۹۱۳۹
n	۰/۴۸۷۰۸۸۲۷۶
b	۰/۴۵۸۸۵۵۸۷۶
k	۰/۳۲۲۲۴۵۲۹
c	۰/۸۲۰۵۳۸۹۳۸

با ثابت نگه داشتن این مقادیر و تغییر ضریب اصطکاک μ و جرم جسم نرم m به صورت آنچه که در ادامه گفته شده است عمل می‌شود. در قسمت بعدی نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی نشان داده شده است. همچنین خطای خروج از تعادل استاتیکی به این معنی است که مجموع نیروهای وارد شده به جسم در راستای Z باید برابر با نیروی وزن جسم باشد؛ به بیان دیگر باید تعادل استاتیکی بین نیروهای وارد شده در راستای عمود و وزن جسم بوجود آید و پس از ارضای این شرط، جسم توسط بازو برداشته شود. مقدار F_2 منفی مشاهده شده در ابتدای این نمودار نشان دهنده این است که تا قبل از ایجاد تماس بین جسم و انگشتان برآیند نیروهای وارد به جسم، منفی و برابر با وزن جسم که به سمت پایین است، خواهد بود. این دو نمودار برای حالت‌های مختلف ترسیم می‌شود و ابتدا جرم جسم ثابت نگه داشته و برای سه ضریب اصطکاک مختلف نتایج زیر حاصل می‌شود (شکل ۱۳-۱۵).

شده در هنگام تماس پنجه و جسم، و نیروی وزن جسم خواهد بود. به بیان دیگر جمع نیروهای بوجود آمده در راستای Z باید برابر با نیروی وزن جسم باشد تا بتواند بر نیروی وزن غلبه کند. پس با ارضای این شرط، پارامترهای جسم نرم و مدل گرفتن آن، به شکل مطلوب بدست خواهند آمد. خطای خروج از این قید با e_1 نشان داده می‌شود.

$$e_1 = \sum_{j=1}^n (f_{ij}^z) + \sum_{j=1}^n (f_{ij}^z) - f_w \quad (32)$$

شرط دوم، محدود کردن عمق نفوذ است. در این مرحله، عمق نفوذ به نحوی مقید می‌شود که انگشتان پنجه بیشتر از مقدار بحرانی بدست آمده از داده‌های تجربی، در جسم نفوذ نکنند و خطای خروج از این قید با e_2 نشان داده می‌شود.

$$e_2 = \left(\sum_{j=1}^n \delta_j \right) - \delta_c \quad \text{if } e_2 \leq 0 \Rightarrow e_2 = 0 \quad (33)$$

و اما شرط سوم تابع هزینه اینگونه تعریف می‌شود که مقدار جابه-جایی گره‌های جسم نرم بیشتر از نصف شعاع جسم نشود. زیرا به صورت شهودی هر وقت این اتفاق بیافتد، به منزله متلاشی شدن جسم خواهد بود و خطای خروج از این قید با e_3 نشان داده می‌شود.

$$e_3 = (x_i - x_0) - \frac{r_{soft \ body}}{2} \quad \text{if } e_3 \leq 0 \Rightarrow e_3 = 0 \quad (34)$$

حال این الگوریتم به کمینه‌سازی رابطه زیر خواهد پرداخت:

$$E = \frac{1}{2} \sum (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (35)$$

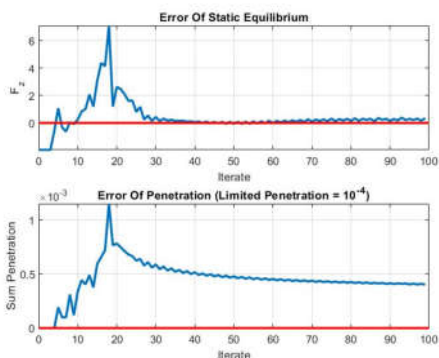
۴- نتایج شبیه‌سازی

جدول ۱- مقادیر ثابت و اطلاعات مورد نیاز جهت شبیه‌سازی

عنوان پارامتر	اندازه پارامتر
تعداد گره‌های شبکه	۳۵۶
زمان Run آنالیز گرفتن	۱/۸s
شعاع جسم نرم	۵ cm
شعاع انگشت	۵ mm
مدول یانگ انگشت	۰/۰۸۹۳ MPa
مدول یانگ جسم نرم	۰/۱۴ MPa
ضریب پواسون انگشت	۰/۵
ضریب پواسون جسم نرم	۰/۴۵

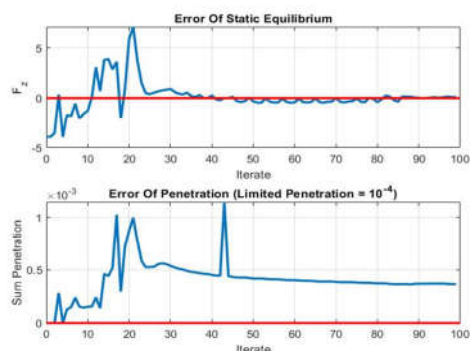
جدول بالا ثوابت مورد استفاده در شبیه‌سازی، تعداد گره و زمان اجراء را نشان می‌دهد. در قدم بعدی پنجه سه‌انگشتی جهت لمس و اجرای عمل گرفتن و برداشتن جسم طراحی می‌شود. این پنجه دارای سه انگشت و ۹ مفصل دورانی می‌باشد. در ادامه نمودار تلاش الگوریتم PSO برای کمینه کردن تابع هزینه نمایش داده می‌شود (شکل ۱۲).

- حالت چهارم $\mu = 0.1$, $m = 0.2 kg$



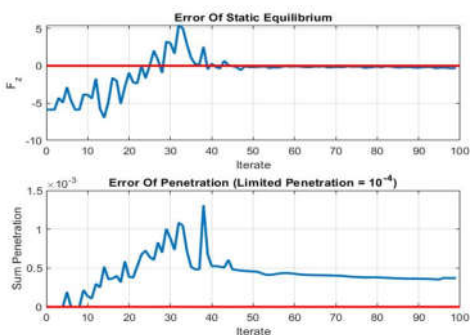
شکل ۱۶- نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی در حالت چهارم

- حالت پنجم $\mu = 0.1$, $m = 0.4 kg$



شکل ۱۷- نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی در حالت پنجم

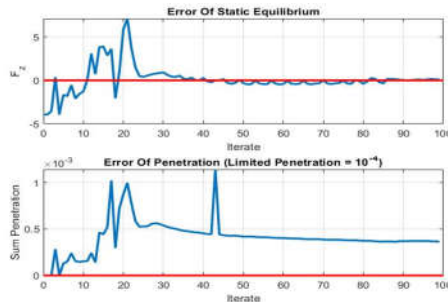
- حالت ششم $\mu = 0.1$, $m = 0.6 kg$



شکل ۱۸- نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی در حالت ششم

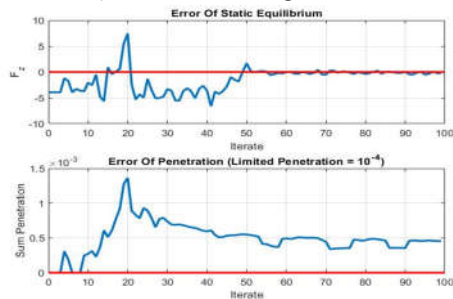
نتایج بدست آمده نشان دهنده مدل مطلوبی است که خطای تعادل استاتیکی و خطای مجموع تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی آن به صفر میل می کند. در مرحله بعد به بررسی نیروهای وارد شده توسط انگشتان پرداخته می شود (شکل ۱۹-۲۴). انتظار می رود برای داشتن یک گرفتن مناسب و پایداری آن، نیروهای وارد شده به جسم نوسان نداشته و حالتی یکنواخت داشته باشد و مقدار دقیق نیروی لازم برای سر هر

- حالت اول $\mu = 0.1$, $m = 0.4 kg$



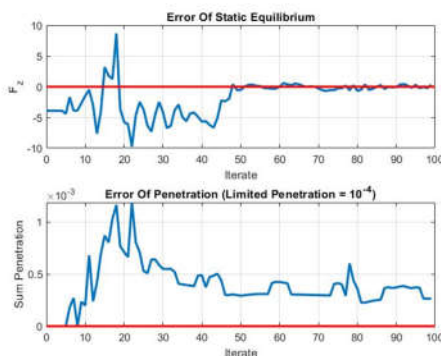
شکل ۱۳- نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی در حالت اول

- حالت دوم $\mu = 0.3$, $m = 0.4 kg$



شکل ۱۴- نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی در حالت دوم

- حالت سوم $\mu = 0.5$, $m = 0.4 kg$

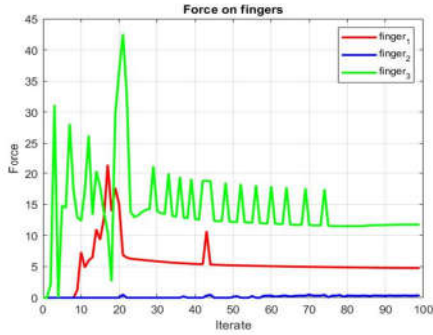


شکل ۱۵- نمودار مربوط به تجاوز از مقدار نفوذ بحرانی و نمودار خطای خروج از تعادل استاتیکی در حالت سوم

سپس ضریب اصطکاک ثابت نگه داشته و برای سه جرم مختلف نتایج زیر حاصل می شود (شکل ۱۶-۱۸).

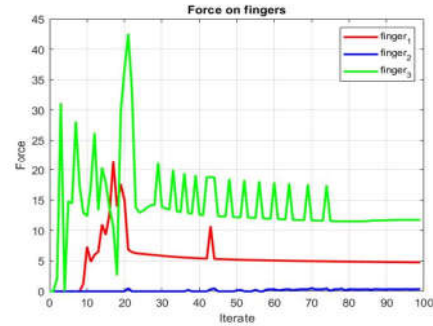
انگشت را شناسایی کند.

• حالت پنجم $\mu = 0.1$, $m = 0.4 kg$



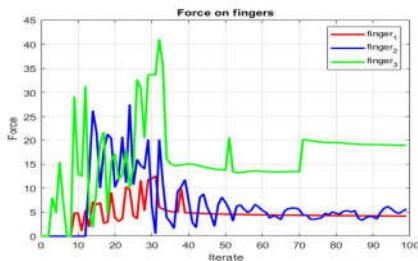
شکل ۲۳- نیروهای وارد شده از طرف هر انگشت به جسم در حالت

• حالت اول $\mu = 0.1$, $m = 0.4 kg$



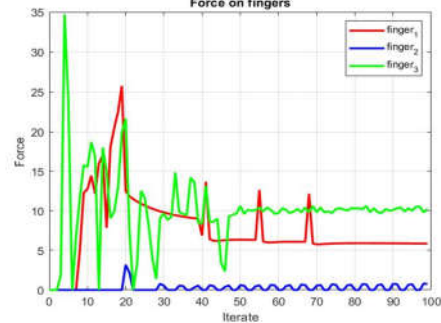
شکل ۱۹- نیروهای وارد شده از طرف هر انگشت به جسم در حالت اول

• حالت ششم $\mu = 0.1$, $m = 0.6 kg$



شکل ۲۴- نیروهای وارد شده از طرف هر انگشت به جسم در حالت ششم

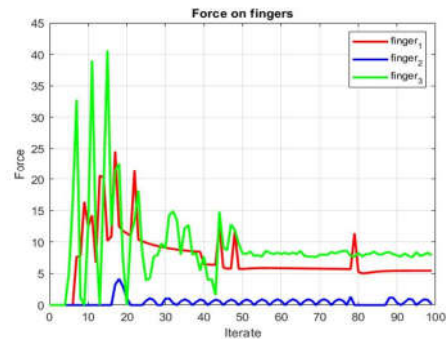
• حالت دوم $\mu = 0.3$, $m = 0.4 kg$



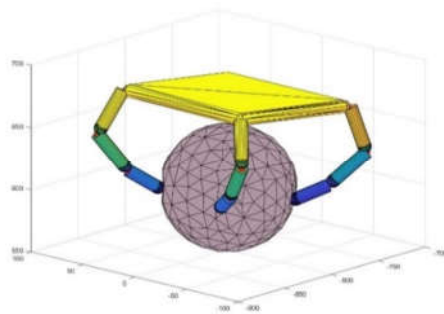
شکل ۲۰- نیروهای وارد شده از طرف هر انگشت به جسم در حالت دوم

نتایج بدست آمده ثبات نیروهای وارده را نشان می‌دهد که خود پایداری گرفتن را تضمین می‌کند. در ادامه تصویری از محیط شبیه‌سازی جسم نرم و پنجه رباتیکی نشان داده می‌شود (شکل ۲۵).

• حالت سوم $\mu = 0.5$, $m = 0.4 kg$



شکل ۲۱- نیروهای وارد شده از طرف هر انگشت به جسم در حالت

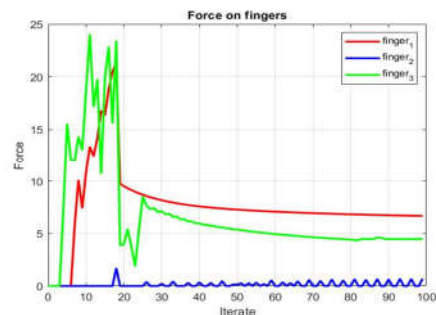


شکل ۲۵- نمای بسته از جسم نرم تسخیر شده توسط پنجه

۵- نتیجه‌گیری

موضوعات مطرح شده در این مقاله بر روی مدل‌سازی اجسام نرم و مرتفع کردن مشکلات پیش آمده در این حوزه می‌باشد. در بحث مدل‌سازی به کمک روش MSD، مدلی طراحی شد که از خصوصیات بارز این روش، بار محاسباتی کم و دقت قابل قبول است که باعث محبوبیت این نوع مدل در مباحث زمان واقعی شده است. همچنین، از این مدل شبیه‌سازی می‌شود برای هر نوع جسم با اشکال نامنظم و منظمی استفاده کرد و هیچ‌گونه محدودیتی از این بابت وجود ندارد. مشکل مربوط به تشخیص برخورد بین انگشتان پنجه و جسم نرم با ارائه روشی ابتکاری برطرف گردید و خطاهای کارهای سابق برطرف

• حالت چهارم $\mu = 0.1$, $m = 0.2 kg$



شکل ۲۲- نیروهای وارد شده از طرف هر انگشت به جسم در حالت

- [8] Müller M., et al., Position based dynamics. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Vol. 18, No.2, pp. 109-118, 2007.
- [9] Cai J., F. Lin. and Seah H.S., *Graphical Simulation of Deformable Models*. Springer, 2016.
- [10] Kelager M., S. Niebe. and K. Erleben., A Triangle Bending Constraint Model for Position-Based Dynamics. *VRIPHYS*, Vol. 10, No.1, pp. 31-37, 2010.
- [11] Güller P., et al., Estimating the deformability of elastic materials using optical flow and position-based dynamics. In *15th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, IEEE, 2015.
- [12] Dziol R., J. Bender. and D. Bayer., Robust real-time deformation of incompressible surface meshes. in *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/eurographics symposium on computer animation*, IEEE, 2011.
- [13] Jordt A., et al., *High-resolution object deformation reconstruction with active range camera*. in *Joint Pattern Recognition Symposium*. Springer, 2010.
- [14] Bartels R.H. and J.C. Beatty., *A technique for the direct manipulation of spline curves*. Graphics Interface, 1989.
- [15] Nabil E., B. Belhassen-Chedli. and G. Grigore., Soft material modeling for robotic task formulation and control in the muscle separation process. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 32, pp. 37-53, 2015.
- [16] Basafa E. and F. Farahmand., Real-time simulation of the nonlinear visco-elastic deformations of soft tissues. *International journal of computer assisted radiology and surgery*, Vol. 6, No.3, pp. 297-307, 2011.
- [17] Campbell S.L., The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods (Ernst Hairer, Christian Lubich, and Michel Roche). *SIAM Review*, Vol. 33, No.3, pp. 504-506, 1991.
- [18] Mirtich B. and J. Canny., Easily computable optimum grasps in 2-D and 3-D. in *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 1994.
- [19] Park Y.C. and G.P. Starr., Grasp synthesis of polygonal objects using a three-fingered robot hand. *The International journal of robotics research*, Vol. 11, No.3, pp. 163-184, 1992.
- [20] Zaidi L., et al., Interaction modeling in the grasping and manipulation of 3D deformable objects. in *International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*. IEEE, 2015.
- [21] Zaidi L., et al., Model-based strategy for grasping 3D deformable objects using a multi-fingered robotic hand. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 95, pp. 196-206, 2017.
- [22] Hunt K.H. and F.R.E. Crossley., *Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact*. 1975.
- [23] Johnson K.L. and K.L. Johnson., *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987.
- [24] Watanabe T. and Y. Fujihira., Experimental investigation of effect of fingertip stiffness on friction while grasping an object. in *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2014.
- [25] Dopico D., et al., Dealing with multiple contacts in a human-in-the-loop application. *Multibody System Dynamics*, Vol. 25, No.2, pp. 167-183, 2011.
- [26] Ahmadian H. and S. Farughi., Shape functions of superconvergent finite element models. *Thin-walled structures*, Vol. 49, No.9, pp. 1178-1183, 2011.
- [27] جهان‌اندیش ر. و خسروی‌فردا. و وطن‌خواه ر. و چراغی و.، شناسایی پارامتر معادلات دینامیک و کنترل مود لغزشی گیمبال دو محوره. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۵۰، ش. ۴، ص ۵۱-۶۰، ۱۳۹۹.
- [28] Zhou C., et al., Particle Swarm Optimization (PSO) Algorithm [J]. *Application Research of Computers*, pp. 7-11, 2003.

شد. موضوع محاسبه دقیق مقدار نفوذ پنجه در جسم نیز موضوعی بود که با ارائه الگوریتمی مناسب، این پارامتر با دقت زیاد محاسبه شد. در آخر، برای بهینه‌سازی پارامترهای مدل جسم نرم از الگوریتم بهینه‌سازی PSO استفاده شد. به بیان دیگر با تعریف تابع هزینه مناسب، که منطبق با هدف و مدل ایده‌آل بود، به کمینه کردن این تابع هزینه پرداخته شد؛ که نتیجه آن محاسبه پارامترهای بهینه برای کم شدن خروجی تابع هزینه بود. علاوه بر نمودار و نتایج تفسیری، شبیه‌سازی گرافیکی صورت گرفته در این مقاله کمک شایانی به ملموس شدن نتایج حاصل شده می‌کند که در قالب یک ویدئو قابل نمایش می‌باشد.

در انتها باید خاطر نشان کرد که این حوزه از علم رباتیک در ابتدای مسیر توسعه قرار دارد و چشم انداز وسیعی برای پیشرفت خود می‌بیند. این حوزه را می‌توان در آینده با شبکه‌های عصبی و الگوریتم‌های یادگیری تلفیق کرده تا وارد دنیایی بزرگتر و گسترده‌تر شویم که رسیدن به این هدف مستلزم عبور از مسیری است که طی شد.

۶- نمادها

m	جرم (kg)
b	ثابت میرایی سیال فرضی
k	ضریب کشسانی فنر
c	ثابت میرایی بین فنرها
P_{ci}	مرکز نیم کره انگشت
P_{pj}	تصویر نقطه P_{ci} روی هر وجه از المان‌های سطح
A_G	مساحت کل هر المان (m^2)
A_i	قسمتی از مساحت کل هر المان (شکل 9)
V_{Ni}	سرعت گره‌های هر المان (m/s)
n_{fj}	بردار نرمال هر المان روی سطح
δ_j	عمق نفوذ (m)
δ_c	عمق نفوذ بحرانی (m)
T_{soft_body}	شعاع جسم نرم (m)
μ	ضریب اصطکاک لغزشی

۷- مراجع

- [1] Nadon F., A.J. Valencia. and P. Payeur., Multi-modal sensing and robotic manipulation of non-rigid objects: A survey. *Robotics*, Vol. 7, No.4, pp. 74, 2018.
- [2] Sanchez J., et al., Robotic manipulation and sensing of deformable objects in domestic and industrial applications: a survey. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 37, No.7, pp. 688-716, 2018.
- [3] Barr A., Global and local deformations of solid primitives. *Comput Graph*, Vol. 18, No.3, 1984.
- [4] Sederberg T.W. and S.R. Parry., Free-form deformation of solid geometric models. *ACM SIGGRAPH computer graphics*, Vol. 20, No.4, pp. 151-160, 1986.
- [5] Kass M., A. Witkin. and D. Terzopoulos., Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, Vol. 1, No.4, pp. 321-331, 1988.
- [6] Terzopoulos D., et al., Elastically deformable models. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, Vol. 21, No.4, pp. 205-214, 1987.
- [7] جباری س. و مدبری‌فر م. و قدسی م.، یک گریپر قابل برنامه‌ریزی حساس به سفتی برای جایجایی اشیاء در سیستم‌های هپتیک و رباتیک. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۴۷، ش. ۳، ص ۶۹-۷۵، ۱۳۹۶.