

# مدلسازی و کنترل سیستم دینامیکی در حضور عملگر و حسگر بر اساس رویکرد سیستم‌های اختلال تکین

سیده مهناز حسینی<sup>\*</sup> کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران، ma.hosseini@sutech.ac.ir  
 طاهره بینازاده<sup>\*</sup> دانشیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران، binazadeh@sutech.ac.ir

## چکیده

در این مقاله، عملکرد یک سیستم حلقه بسته با حضور اجزا مختلفی نظیر کنترل کننده، عملگر و حسگر بررسی می‌گردد. معمولاً در تحلیل‌ها، دینامیک حسگر و عملگر ایده‌آل فرض می‌گردد و از آن صرف‌نظر می‌شود، در صورتی که این اجزا نیز در عمل دارای دینامیک هستند. از آنجایی که سرعت عملکرد حسگر و عملگر باید سریعتر از سرعت عملکرد سیستم دینامیکی باشد، لذا منطقی است که معادلات سیستم حلقه بسته را در حضور عملگر و حسگر به معادلات کند (معادلات سیستم دینامیکی) و معادلات تند (معادلات عملگر و حسگر) تفکیک نمود. در این مقاله به بررسی این موضوع و مدلسازی سیستم حلقه بسته در قالب سیستم‌های اختلال تکین با تفکیک مدهای عملکردی تند و کند پرداخته می‌شود همچنین قضایایی در حوزه تحلیل پایداری و پایدار سازی سیستم حلقه بسته ارائه شده است. در انتها نیز شبیه‌سازی‌هایی برای یک مثال مکانیکی انجام گردیده و نشان داده شده است که دینامیک عملگر و حسگر باید به اندازه کافی از سیستم دینامیکی سریعتر باشد تا نتایج مطلوب حاصل گردد.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم اختلال تکین، عملگر، حسگر، کنترل کننده، تحلیل پایداری.

## Modeling and Control of Dynamical Systems in Presence of Actuator and Sensor Based on Singular Perturbations Systems Approach

S. M. Hosseini

Department of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

T. Binazadeh

Department of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

### Abstract

In this paper, the performance of a closed-loop dynamical system is investigated in the presence of controller, actuator and sensor. Usually, in analysis, the dynamics of sensor and actuator are assumed to be ideal and they are ignored however these components have dynamic practically. Since, the function speed of the sensor and the actuator must be more than the speed of dynamic system, it is reasonable to separate the equations of the closed-loop system, in the presence of the actuator and sensor, into slow equations (the dynamical system's equations) and fast equations (equations of actuator and sensor). This paper focuses on this issue and the modeling of the closed-loop system in the structure of singular perturbation systems with the breakdown of fast and slow operating modes. Some theorems in the area of stability analysis and stabilization of the closed-loop system are given. Finally, simulations have been carried out for a mechanical example and it has been shown that the dynamics of the actuator and sensor should be faster than the dynamic system to achieve the desired results.

**Keywords:** Singular perturbation system, Sensor, Actuator, controller, Stability analysis.

بهینه‌سازی دینامیک پرواز استفاده گردیده است [۴]. روش‌های کاربردی و مؤثر برای حل دقیق کنترل بهینه در سیستم‌های خطی اختلال تکین توسط محققان زیادی مورد بررسی قرار گرفت [۵-۷]. در مراجع [۸ و ۹] نیز یک روش کنترل تطبیقی بر اساس مدل اختلال تکین ارائه گردیده که با استفاده از نظریه لیاپانوف برای سیستم‌های اختلال تکین شرایط کافی برای ردیابی مسیر مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع [۱۰] از روش مدلسازی اختلال تکین در کنترل سرعت و جلوگیری از تشدید سیستم مفصل انعطاف پذیر به همراه فیلتر کالمن استفاده شد. در مرجع [۱۱] براساس نظریه اختلال تکین، یک کنترل کننده مقاوم برای پایدار سازی مفصل انعطاف پذیر طراحی شد، که در این کار یک ربات مرکب (با در نظر گرفتن عوامل ایجاد کننده عدم قطعیت)، مدلسازی گردید. در مرجع [۱۲] از کاربرد مدلسازی اختلال تکین در سیستم‌های

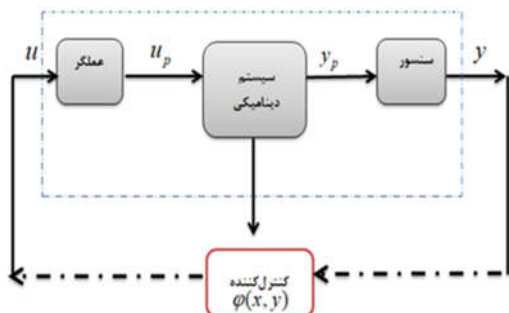
### ۱- مقدمه

از ابتدای قرن بیستم مدلسازی اختلال تکین به عنوان راه حل سنتی در مدلسازی دینامیک سیالات مطرح شده است و کاربرد آن به سرعت به دیگر زمینه‌های فیزیکی و مهندسی با الفاظ مشترک لایه‌های مرزی و لایه‌های داخلی انتشار یافت [۱]. مدل اختلال تکین سیستم‌های دینامیکی با بعد محدود توسط ریاضیدانان در مقالات و مکتوبات ریاضی مورد بررسی قرار گرفت [۲-۳]. در این روش متغیرهای حالت سیستم به دو دسته متغیرهای تند و کند تفکیک می‌شود. این تفکیک برای سیستم‌هایی که متغیرهای حالت با سرعت عملکردی متفاوت دارند، کاربردهای فراوانی دارد. از مهمترین ویژگی‌های سیستم‌های اختلال تکین خاصیت چند زمانه بودن آن‌ها می‌باشد که از این ویژگی در مسائل عملی متعدد نظیر

<sup>\*</sup> نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: binazadeh@sutech.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۹/۰۳/۳۱

تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۲/۲۵



شکل ۱- ساختار سیستم حلقه بسته

معادلات سیستم دینامیکی:

$$\begin{cases} \dot{x} = g_0(x, u_p) \\ y_p = C_p x \end{cases} \quad (1)$$

معادلات عملگر:

$$\begin{cases} \mu_s \dot{z} = A_s z + B_s u \\ u_p = C_s z \end{cases} \quad \mu_s > 0 \quad (2)$$

معادلات حسگر:

$$\begin{cases} \mu_s \dot{w} = A_s w + B_s y_p \\ y = C_s w \end{cases} \quad \mu_s > 0 \quad (3)$$

که  $x \in R^n$  به عنوان بردار حالت سیستم،  $u_p \in R^p$  بردار ورودی سیستم،  $y_p \in R^m$  بردار خروجی سیستم،  $z \in R^s$  بردار حالت عملگر،  $u \in R^p$  بردار ورودی عملگر،  $w \in R^s$  بردار حالت حسگر و  $y \in R^m$  بردار خروجی حسگر می‌باشند. ماتریس‌های  $A_s, B_s, C_s, A_p, B_p, C_p$  ماتریس‌های ثابت با ابعاد مناسب هستند.  $g_0(x, u_p): R^n \times R^p \rightarrow R^n$  است.

در رابطه (۲) و (۳) اسکالرهایی مثبت  $\mu_s$  و  $\mu_u$  اعداد کوچکی هستند که سرعت عملگر و حسگر را مشخص می‌کنند.

فرض‌هایی در اینجا در نظر گرفته می‌شود:

**فرض ۱)**  $g_0(0,0) = 0$  است. این فرض تضمین کننده این است که مبدأ، نقطه تعادل سیستم دینامیکی است.

**فرض ۲)** فرض می‌شود ماتریس‌های  $A_s, A_p$  هرویتز هستند به عبارت دیگر ثوابت  $k_s, k_a$  ثوابت مثبت وجود دارد به نحوی که

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda \{A_s\}) &\leq -k_a < 0 \\ \text{Re}(\lambda \{A_p\}) &\leq -k_s < 0 \end{aligned}$$

این فرض اشاره به این دارد که دینامیک حلقه باز حسگر و عملگر پایدار مجانبی است که در عمل نیز حسگر و عملگر دینامیک-های پایداری دارند.

**تذکر ۱)** در اکثر مقالات، از آنجایی که دینامیک عملگر و حسگر ایده‌آل فرض می‌شوند، لذا مستقیماً ورودی  $(u_p)$  برای سیستم دینامیکی بر مبنای متغیرهای حالت  $x \in R^n$  یا خروجی

الکترونیکی قدرت استفاده شد. همچنین کنترل کننده مد لغزشی مقاوم برای ردیابی سیستم‌های غیر خطی اختلال تکین در حضور خطای مدل و اغتشاش خارجی تحلیل و طراحی گردیده و بر روی یک کوادراتور پیاده سازی شده است [۱۳]. مدلسازی اختلال تکین برای یک سیستم همرفت حرارتی در مرجع [۱۴] ارائه گردیده و از کنترل کننده پس گام با تحلیل لیاپانوفی در پایداری آن بهره گرفته شد.

اگر چه عمده کارهای انجام شده در نظریه اختلال تکین در سیستم‌های پیوسته بوده است، در مرجع [۱۵]، کنترل بهینه سیستم‌های اختلال تکین بر اساس مدل گسسته-زمان مطالعه گردید. در مرجع [۱۶] یک کنترل کننده مبتنی بر لیاپانوف با استفاده از تئوری اختلال تکین مطرح گردید و از آن در کنترل پهپاد استفاده شد. کنترل کننده بهینه ای نیز برای یک طبقه جدید از سیستم‌های خطی اختلال تکین ارائه شد [۱۷]. در مرجع [۱۸] رویکرد تفکیک مدهای تند و کند و مدلسازی اختلال تکین برای سیستم چند عاملی استفاده گردید. ردیابی گشتاور در یک سیستم الکترو-هیدرولیک بر اساس مدلسازی اختلال تکین و تفکیک متغیرهای حالت به زیر سیستم های تند و کند در مرجع [۱۹] مورد بررسی قرار گرفت. در مقالات مورد بحث و در مرجع [۲۰]، معادلات سیستم دینامیکی دارای زیر سیستم‌های تند و کند می‌باشند.

مقاله حاضر، بحث مدلسازی اختلال تکین را در ساختاری جدید مورد مطالعه قرار داده است. در یک سیستم کنترلی حلقه بسته، به جز سیستم دینامیکی و کنترل کننده، اجزا دیگری نظیر عملگر و حسگر نیز وجود دارد. اکثر مقالاتی که به موضوع طراحی کنترل کننده برای سیستم های دینامیکی مختلف می پردازند، دینامیک عملگر و حسگر را ایده آل (با تابع تبدیل واحد) در نظر گرفته اند، در صورتی که دینامیک این اجزا در عمل ایده آل نیستند. از آنجاییکه سرعت عملکرد عملگر و حسگر باید سریعتر از سرعت عملکرد سیستم دینامیکی باشد، لذا در این مقاله نگرشی جدید ارائه شده است که با در نظر گرفتن معادلات حسگر و عملگر به عنوان معادلات سریع و معادلات سیستم دینامیکی اصلی به عنوان معادلات کند، مدلسازی ساختار اختلال تکین برای یک سیستم حلقه بسته عملی ارائه می‌گردد. این امر اساس تحلیل و طراحی این مقاله را شکل می‌دهد. در این راستا قضایایی مطرح گردیده و تحلیل پایداری انجام شده است. همچنین دستاوردهای نظری بر روی یک سیستم مکانیکی اعمال گردیده است و نتایج شبیه سازی ارائه شده است.

## ۲- مساله مطرح در این مقاله

یک سیستم دینامیکی را در نظر بگیرید که ورودی آن  $(u_p)$  خروجی عملگر بوده و خروجی آن  $(y_p)$  توسط حسگر اندازه‌گیری می‌شود. این ساختار در شکل ۱ نشان داده شده است. معادلات دینامیکی سیستم، عملگر و حسگر در روابط (۱) تا (۳) آمده است.

در قالبی جدید توسعه داده شده و مورد تحلیل قرار می‌گیرد. اگر  $\varepsilon=0$  باشد، آنگاه رابطه (۸) از حالت دینامیکی خارج و منجر به معادله جبری  $h(x, \omega)=0$  می‌شود و لذا معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$h(x, \omega)=0 \Rightarrow \begin{cases} f_2 = A_a z + B_a \phi(x, C_s w) = 0 \\ f_3 = A_s w + B_s C_p x = 0 \end{cases} \quad (9)$$

با حل دستگاه معادلات جبری بالا و به دلیل ناویژه بودن ماتریس‌های  $A_s, A_a$  (رجوع به فرض ۲) پاسخ‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_s w &= -B_s C_p x \Rightarrow w = -A_s^{-1} B_s C_p x \\ \Rightarrow A_a z + B_a \phi(x, C_s w) &= A_a z + B_a \phi(x, -C_s A_s^{-1} B_s C_p x) = 0 \\ \Rightarrow z &= -A_a^{-1} B_a \phi_0(x) \end{aligned}$$

دو پاسخ به دست آمده از حل معادلات فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(10) \quad \omega = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_a^{-1} B_a \phi_0(x) \\ -A_s^{-1} B_s C_p x \end{bmatrix} = g(x)$$

لذا  $\omega = g(x)$  پاسخ دستگاه معادلات جبری  $h(x, \omega)=0$  می‌باشد.

از آنجایی که در عمل  $\varepsilon \neq 0$  بوده و یک عدد کوچک است، لذا انحرافی بین مقدار اصلی  $\omega$  و مقدار  $g(x)$  وجود دارد. این انحراف را با تغییر متغیر  $y$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y = \omega - g(x) \Rightarrow \omega = y + g(x)$$

بر اساس این تعریف، معادلات دینامیکی (۹) و (۱۰) با توجه به متغیر  $y$  به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\dot{x} = f(x, y + g(x)) \quad (11)$$

$$\varepsilon \dot{y} = \varepsilon \dot{\omega} - \varepsilon \dot{g} \Rightarrow \quad (12)$$

$$\varepsilon \dot{y} = h(x, y + g(x)) - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} f(x, y + g(x))$$

فرض می‌شود که  $\|g(x)\| \leq \zeta (\|x\|)$  برای همه  $x \in D_x$  باشد که  $\zeta$  یک تابع کلاس  $K$  بوده و نگاشت  $y = \omega - g(x)$  پایداری را حفظ می‌کند. لذا مبدأ سیستم (۷) و (۸) پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم (۱۱) و (۱۲) پایدار مجانبی باشد.

### ۳-۱- تحلیل عملکرد سیستم به ازای زیر سیستم‌های

#### خطی

با فرض اینکه  $g_0(x, u_p) = A_p x + B_p u_p$  باشد آنگاه ساختار معادله (۱) به صورت زیر می‌شود:

$$\dot{x} = A_p x + B_p u_p \quad (13)$$

با توجه به رابطه (۲) و جایگذاری  $u_p = C_a z$  و همچنین رابطه (۳) و جایگذاری  $y_p = C_p x$  در معادلات (۳)، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$(y_p)$  خود سیستم دینامیکی طراحی می‌گردد. نکته در نظر گرفته شده در این مقاله که به پیچیدگی روال تحلیل و طراحی منجر می‌شود وجود دینامیک عملگر و حسگر است. در واقع، قانون کنترلی طراحی شده به عملگر اعمال می‌شود و اطلاعات ورودی قانون کنترلی که بر مبنای خروجی حسگر است باید بتواند رفتار مطلوب سیستم دینامیکی را با وجود واسطه‌های حسگر و عملگر تضمین کند. از طرفی چون سرعت عملکرد اجزاء در شکل ۱ با هم متفاوت است. این تفاوت در سرعت عملکرد، خود چالش‌هایی در تحلیل و طراحی به همراه دارد که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود.

### ۳- تحلیل پایداری سیستم در ساختار سیستم‌های اختلال تکین

فرض کنید قانون کنترلی پسخورد حالت  $u = \phi(x, y)$  به نحوی طراحی گردد که منجر به پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته زیر با در نظر گرفتن دینامیک حسگر و عملگر در قالب ساختار شکل ۱ گردد:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = g_0(x, C_a z) \\ \mu_a \dot{z} = A_a z + B_a \phi(x, y) \\ \mu_s \dot{w} = A_s w + B_s C_p x \\ y = C_s w \end{cases}$$

روابط (۴) بر اساس روابط (۱) تا (۳) و با در نظر گرفتن ارتباطات بین ورودی و خروجی هر بلوک در شکل ۱ قابل استخراج است.

در معادلات حلقه بسته (۴) بردار  $\bar{q} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ w \end{bmatrix} \in R^{n+t}$  بردار حالت کل سیستم حلقه بسته بوده و  $\phi(0,0)=0$  است.

در عمل دینامیک عملگر و حسگر باید عملکرد بسیار سریعی داشته باشند، لذا متغیرهای حالت در این دو سیستم باید تغییرات سریعتری نسبت به سیستم اصلی دارا باشند. بر این مبنا معادلات سیستم (۴) را می‌توان به صورت دو زیر سیستم کند و تند تفکیک نمود:

$$\dot{x} = g_0(x, C_a z) = f_1(x, z) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mu_a \dot{z} = A_a z + B_a \phi(x, C_s w) = f_2(z, x, w) \\ \mu_s \dot{w} = A_s w + B_s C_p x = f_3(w, x) \end{cases} \quad (6)$$

با تعریف بردار  $\omega = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$  و با فرض  $\mu_a = \mu_s = \varepsilon$ ، آنگاه معادلات (۵) و (۶) به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$\dot{x} = f(x, \omega) \quad (7)$$

$$\varepsilon \dot{\omega} = h(x, \omega) \quad (8)$$

که در آن با در نظر گرفتن معادلات (۵) و (۶)،  $f(x, \omega) = f_1(x, z)$  و  $h = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$  است. در ادامه مباحث مربوط به تحلیل سیستم‌های اختلال تکین، برای ساختار ارائه شده در شکل ۱

$$\eta = \omega - (-Lx) = \omega + Lx \quad (21)$$

حال معادلات سیستم (۱۶) را در دستگاه جدید بر حسب  $(x, \eta)$  به دست می‌آوریم:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}(\eta - Lx) = (A_{11} - A_{12}L)x + A_{12}\eta \quad (22)$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = (A_{22} + \varepsilon LA_{12})\eta \quad (23)$$

روابط (۲۲) و (۲۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}L) & A_{12} \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (24)$$

برای آنالیز پایداری سیستم (۲۴) باید مقادیر ویژه ماتریس سیستم  $A$  در رابطه فوق، سمت چپ صفحه  $s$  باشند. مقادیر ویژه از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta(A) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I - (A_{11} - A_{12}L) & -A_{12} \\ 0 & \lambda I - \frac{1}{\varepsilon}(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) \end{vmatrix} = 0$$

عبارت بالا به فرم بلوک قطری بوده لذا دترمینان آن به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Delta(A) = |\lambda I - (A_{11} - A_{12}L)| \times \left| \lambda I - \frac{1}{\varepsilon}(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) \right|$$

ریشه‌های معادله  $|\lambda I - (A_{11} - A_{12}L)| = 0$  مقادیر ویژه ماتریس  $(A_{11} - A_{12}L)$  را تشکیل می‌دهد که با توجه به ابعاد زیر سیستم کند،  $n$  مقدار ویژه دارد. همچنین ریشه‌های معادله  $|\lambda I - \frac{1}{\varepsilon}(A_{22} + \varepsilon LA_{12})| = 0$  مقادیر ویژه ماتریس  $(A_{22} + \varepsilon LA_{12})/\varepsilon$  را می‌دهد که با توجه به بعد، زیر سیستم تند  $s+l$  مقدار ویژه دارد. مقادیر ویژه کل ماتریس  $A$  به تعداد  $(n+s+l)$  مقدار ویژه شامل مقادیر ویژه ماتریس‌های  $\bar{A} = (A_{11} - A_{12}L)$  و  $\bar{A} = (A_{22} + \varepsilon LA_{12})$  می‌باشد. لذا شرط پایداری مجانبی منوط به آن است که تمامی مقادیر ویژه ماتریس‌های  $\bar{A}$  و  $\bar{A}$  سمت چپ صفحه  $S$  باشند. ■  
تذکره ۲: از آنجایی که در سیستم اصلی  $u \neq 0$  لذا شرایط عملکردی سیستم در حضور ورودی بررسی می‌گردد.

معادلات سیستم در حضور ورودی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}\omega = f(x, \omega) \\ \varepsilon \dot{\omega} = A_{21}x + A_{22}\omega + B_2u = h(x, \omega, u) \end{cases} \quad (25)$$

**نتیجه ۱:** اگر معادلات (۲۵) به ازای  $u \neq 0$  در نظر گرفته شود، آنگاه اگر قانون کنترلی  $u = -Ky$  که در آن  $K \in R^{p \times m}$  بوده که بر اساس رابطه (۳)،  $y = C_s w$ ، است، طراحی گردد به نحوی که شرایط قضیه ۱ برای سیستم حلقه بسته زیر محقق شود:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}\omega \\ \varepsilon \dot{\omega} &= A_{21}x + A_{22}\omega - B_2Ky = A_{21}x + A_{22}\omega - B_2KC_s w \end{aligned} \quad (26)$$

در معادله فوق 0 با ابعاد  $(s+l) \times s$  و ابعاد  $-B_2KC_s$ ،  $(s+l) \times l$  است. ماتریس \* یک ماتریس مربعی با ابعاد  $(s+l) \times (s+l)$  است که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{x} = \underbrace{A_p}_{A_{11}}x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_p C_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}}_{\omega} \quad (14)$$

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_s C_p \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} u$$

ابعاد ماتریس‌های فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} A_{11} &\in R^{n \times n}, \quad A_{12} \in R^{n \times (s+l)} \\ A_{21} &\in R^{(s+l) \times n}, \quad A_{22} \in R^{(s+l) \times (s+l)} \end{aligned}$$

با بازنویسی رابطه (۱۴) داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}\omega = f(x, \omega) \\ \varepsilon \dot{\omega} = A_{21}x + A_{22}\omega + B_2u = h(x, \omega, u) \end{cases} \quad (15)$$

که در آن  $u$  ورودی کنترلی است.

ابتدا فرض می‌کنیم ورودی کنترلی صفر بوده و شرط پایداری برای سیستم حلقه باز، بر اساس موقعیت مقادیر ویژه زیر سیستم-های تند و کند بررسی می‌گردد. پس از حصول شرایط پایداری، قانون کنترلی پایدار ساز در گام بعد طراحی می‌شود.

**قضیه ۱:** سیستم (۱۶) را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}\omega \\ \varepsilon \dot{\omega} = A_{21}x + A_{22}\omega \end{cases} \quad (16)$$

که در آن  $x$  متغیرهای حالت زیر سیستم کند (معادلات سیستم دینامیکی) و  $\omega = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$  متغیرهای حالت زیر سیستم تند (شامل معادلات حسگر و عملگر) است. شرط پایداری مجانبی سیستم فوق آن است که تمامی مقادیر ویژه ماتریس‌های  $(A_{11} - A_{12}L)$  و  $(A_{22} + \varepsilon LA_{12})$  سمت چپ صفحه  $S$  باشند که در آن  $L$  ماتریسی است که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$(A_{21} - A_{22}L) + \varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = 0$$

**اثبات:**

برای مقادیر کوچک  $\varepsilon$ ، فرض کنیم  $\omega = -Lx$  پاسخ زیر سیستم کند باشد. اگر  $H = -Lx$  فرض شود، پس داریم:

$$\omega = H \rightarrow \omega - H = 0 \quad (17)$$

با مشتق گیری از معادله (۱۷) و جایگذاری معادلات (۱۶)، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$[(A_{21} - A_{22}L) + \varepsilon L(A_{11} - A_{12}L)]x = 0 \quad (18)$$

لذا ماتریس  $L$  از حل معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$(A_{21} - A_{22}L) + \varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = 0 \quad (19)$$

که با توجه به رابطه (۱۹) داریم:

$$-\varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = A_{21} - A_{22}L \quad (20)$$

حال فرض می‌شود  $x$  و  $\omega$  دقیقاً بر روی منحنی  $\omega = -Lx$  قرار نداشته باشند. فاصله انحراف با این منحنی را با تعریف متغیر  $\eta$  به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\varepsilon \dot{\eta} = (A_{22} + \varepsilon L A_{12}) \eta + B_2 u(t) \quad (34)$$

همانطور که می‌دانیم در سیستم‌های خطی پایداری مجانبی منجر به پایداری BIBO می‌گردد لذا در معادله (۳۳) با هرویتز بودن ماتریس  $(A_{11} - A_{12}L)$  پایداری BIBO نیز حاصل می‌شود بنابراین به ازای ورودی  $u$  با دامنه محدود دامنه  $X$  نیز محدود خواهد بود. در رابطه (۳۴) اگر  $A_{22}$  یک ماتریس هرویتز باشد آنگاه  $(A_{22} + \varepsilon L A_{12})$  نیز به ازای  $\varepsilon$  های به اندازه کافی کوچک هرویتز خواهد بود، بنابراین با هرویتز بودن ماتریس  $A_{22}$  نیز مقدار  $\eta$  به ازای ورودی محدود  $u$ ، محدود می‌ماند. با توجه به رابطه خطی (۳۰) محدود ماندن  $X$  و  $\eta$  منجر به محدود ماندن  $X$  و  $\omega$  گشته و حکم قضیه ثابت می‌گردد. ■

#### ۴- مثال عملی

در این بخش، مباحث بیان شده در قالب یک مثال عملی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

معادلات آونگ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۵]:

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b \dot{\theta} + cT \quad (35)$$

که ضرایب آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a = g_0/l, \quad b = k/m, \quad c = 1/ml^2$$

پارامترهای آونگ در جدول ۱ تعریف شده‌اند.

جدول ۱- معرفی پارامترهای آونگ

$m$ : جرم میله	$l$ : طول میله
$g_0$ : ثابت گرانش	$k$ : ضریب اصطکاک

زاویه  $\theta = \pi$  وضعیت تعادل ناپایدار برای آونگ است و هدف از طراحی کنترل کننده، تبدیل آن به وضعیت تعادلی پایدار مجانبی، برای سیستم حلقه بسته است. بنابراین با تعریف متغیرهای حالت، ورودی کنترلی و خروجی به صورت زیر داریم:

$$x_1 = \theta - \pi \quad (36)$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$u_p = T$$

با توجه به روابط (۳۵) و (۳۶)، معادلات حالت زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (37)$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1 + \pi) - b x_2 + cu$$

پایداری مجانبی مبدا و همگرایی  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  معادل

همگرایی  $\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$  در معادلات پاندول است که منجر به

پایدارسازی نقطه تعادل ناپایدار شده به نحوی که همگرایی و قرار گرفتن پاندول کنترل شده در وضعیت وارون - علی رغم جابه جایی از این وضعیت- را نتیجه می‌دهد. معادلات (۳۷) را می‌توان با مدل خطی زیر حول مبدا تقریب زد:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{B}_1 \\ 0 & \bar{B}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) صفر بالا ابعاد  $S \times S$  و صفر پایین با ابعاد  $l \times s$  است.  $\bar{B}_1$  و  $\bar{B}_2$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$-B_2 K C_S = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

حال معادلات سیستم حلقه بسته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}\omega$$

$$\varepsilon \dot{\omega} = A_{21}x + \underbrace{\begin{bmatrix} A_a & \bar{B}_1 \\ 0 & A_3 + \bar{B}_2 \end{bmatrix}}_{A_{22}} \omega$$

کنترل کننده  $u = -Kv$  منجر به پایداری مجانبی ساختار شکل ۱ در حضور عملگر و حسگر می‌گردد به شرط آنکه ماتریس‌های  $(A_{11} - A_{12}L)$  و  $(\bar{A}_{22} + \varepsilon L A_{12})$  و  $(\bar{A}_{22} + \varepsilon L A_{12})$  هرویتز باشند. در حالت کلی به ازای  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک، ماتریس  $(\bar{A}_{22} + \varepsilon L A_{12})$  هرویتز بودن ماتریس  $\bar{A}_{22}$  را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۲: معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}\omega \\ \varepsilon \dot{\omega} = A_{21}x + A_{22}\omega + B_2 u(t) \end{cases} \quad (28)$$

که در آن  $x \in R^n$ ،  $\omega \in R^{s+l}$  و  $u \in R^p$  است. اگر ماتریس‌های  $(A_{11} - A_{12}L)$  و  $A_{22}$  هرویتز باشد و ورودی محدود به سیستم داده شود، آنگاه پاسخ‌های سیستم (۲۸) محدود می‌ماند.

اثبات:

ابتدا بردار  $X$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = x - \varepsilon H \eta \quad (29)$$

$$X = x - \varepsilon H(\omega + Lx) = (I - \varepsilon HL)x - \varepsilon H\omega$$

بر اساس رابطه  $\eta$  از معادله (۲۱) و رابطه  $X$  از معادله فوق می‌توان عبارت زیر را نوشت:

$$\begin{bmatrix} X \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \varepsilon HL & -\varepsilon H \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \quad (30)$$

رابطه (۲۳) با لحاظ کردن ورودی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon \dot{\eta} = (A_{22} + \varepsilon L A_{12}) \eta + B_2 u(t) \quad (31)$$

همچنین معادلات  $\dot{X}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x} - \varepsilon H \dot{\eta}, \quad x = X + \varepsilon H \eta \\ &= (A_{11} - A_{12}L)X + [\varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H \\ &\quad - H(A_{22} + \varepsilon L A_{12}) + A_{12}] \eta - H B_2 u(t) \end{aligned}$$

زمانی که  $H$  در معادله زیر صدق کند

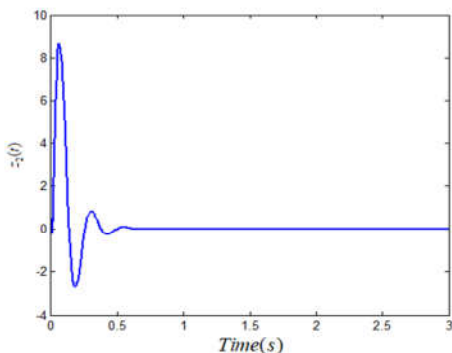
$$[\varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H - H(A_{22} + \varepsilon L A_{12}) + A_{12}] = 0$$

آنگاه

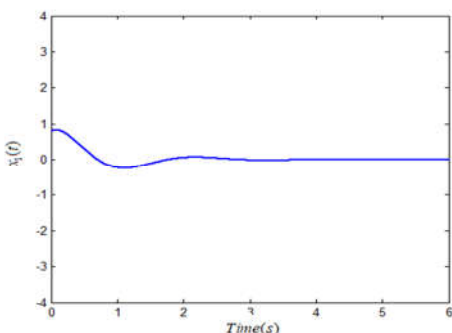
$$\dot{X} = (A_{11} - A_{12}L)X - H B_2 u(t) \quad (32)$$

بنابراین با بازنویسی معادلات (۳۱) و (۳۲) در دستگاه  $(X, \eta)$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

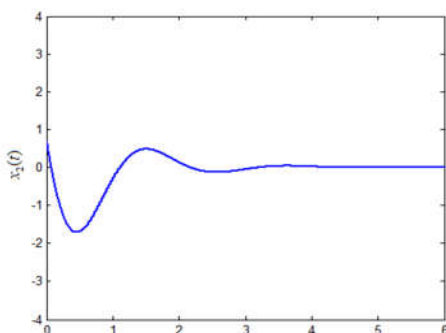
$$\dot{X} = (A_{11} - A_{12}L)X - H B_2 u(t) \quad (33)$$



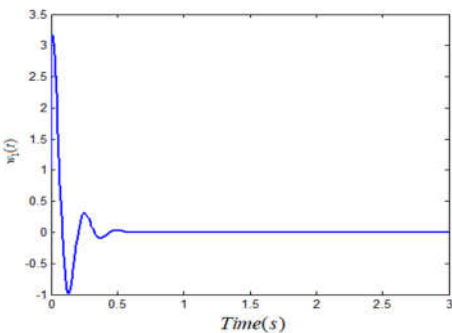
شکل ۳- پاسخ زمانی متغیر  $z_2(t)$  به ازای  $\varepsilon = 0.01$



شکل ۴- پاسخ زمانی متغیر  $x_1(t) = \theta(t) - \pi$  به ازای  $\varepsilon = 0.01$



شکل ۵- پاسخ زمانی متغیر  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  به ازای  $\varepsilon = 0.01$



شکل ۶- پاسخ زمانی متغیر  $w_1(t)$  به ازای  $\varepsilon = 0.01$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \pi & -b \end{bmatrix}}_{A_p} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}}_{B_p} u_p, \quad (38)$$

$$y_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_p} x$$

معادله عملگر و حسگر در ساختار معادلات (۲) و (۳) به ترتیب به صورت معادلات (۳۹) و (۴۰) لحاظ شده است:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_a} u \\ u_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_a} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A_s} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B_s} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y = C_s w = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_{C_s} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (40)$$

در شبیه سازی‌ها از داده‌های زیر استفاده می‌شود:

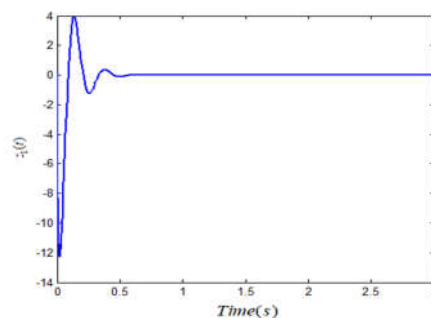
جدول ۲- مقدار داده آونگ

$l = 1$	$g_0 = 9.8$
$m = 0.2$	$k = 0.05$

با توجه به مثال عملی مطرح شده و بر اساس نتیجه ۱ ماتریس  $K$  به نحوی انتخاب گردیده است که شرایط نتیجه ۱ برای پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را احراز نماید. در شبیه سازی از قانون کنترلی  $u = -Ky = -KC_s w$  استفاده شده است و گین  $K$  به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$K = [2 \quad 5]$$

هدف اصلی این مقاله قرار دادن دو جز با سرعت‌های متفاوت در کنار یکدیگر است پس انتخاب ضریب معادلات سریع (عملگر و حسگر) نکته مهمی است که اگر به درستی انتخاب نگردد سیستم ناپایدار می‌شود که در شبیه سازی‌ها به ازای مقادیر مختلف  $\varepsilon$  بررسی و مقایسه شده است.



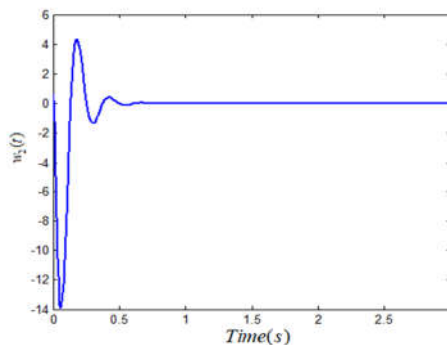
شکل ۷- پاسخ زمانی متغیر  $z_1(t)$  به ازای  $\varepsilon = 0.01$

## ۵- نتیجه گیری

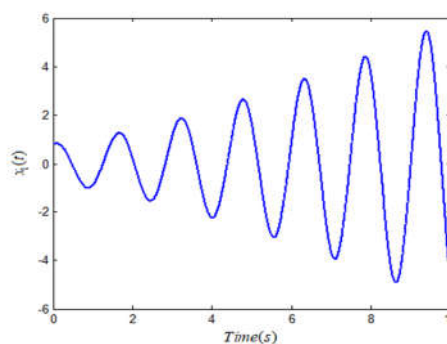
در این مقاله، پس از ارائه معادلات سیستم دینامیکی، عملگر، حسگر و کنترل کننده، سیستم حلقه بسته با توجه به سریع بودن متغیرهای عملگر و حسگر و کند بودن متغیرهای حالت سیستم دینامیکی در قالب مدل سازی سیستم اختلال تکین مدل سازی گردید. سپس قضایایی ارائه شد و در قالب آن قضایا، مباحثی مانند تحلیل پایداری حالت در غیاب ورودی و تحلیل پایداری ورودی به حالت در حضور ورودی بررسی شد. همچنین شرایط پایداری سیستم حلقه بسته با پس خورد استاتیک خروجی حسگر استخراج گردید. سپس یک مثال عملی در قالب ساختار مورد بحث در این مقاله در نظر گرفته شد. نتایج شبیه سازی ها مؤید دستاوردهای مقاله بوده اند.

## ۶- مراجع

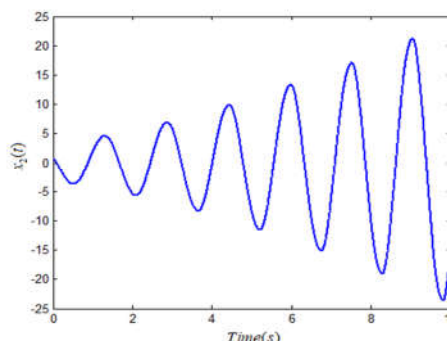
- [1] Kokotovic P., Khali H., and O'Reilly J., *Perturbation methods in control: analysis and design*. Singular Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [2] Tikhonov A., *Systems of Differential Equations Containing Small Parameters in the Derivatives*. *Matematicheskii sbornik*, Vol. 73, No. 3, pp. 575-586, 1952.
- [3] Vasil'eva A.B., *Asymptotic Behaviour of Solutions to Certain Problems Involving Non-Linear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives*. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 18, No. 3, pp. 13-18, 1963.
- [4] Kelley H.J., *Flight Path Optimization with Multiple Time Scales*. *Journal of Aircraft*, Vol. 8, No. 4, pp. 238-240, 1971.
- [5] Gajic Z., *Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications*. CRC Press, 2001.
- [6] Huaping L.I.U., Fuchun S.U.N., Kezhong H.E., and Zengqi S., *Survey of Singularly Perturbed Control Systems: Theory and Applications*. *Control Theory and Applications*, Vol. 20, No. 1, pp. 1-7, 2003.
- [7] Naidu D.S., and Calise A.J., *Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems*. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, No. 6, pp. 1057-1078, 2001.
- [8] Spong M.W., *Adaptive Control of Flexible Joint Manipulators*. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 13, No. 1, pp. 15-21, 1989.
- [9] Ghorbel F., and Spong M.W., *Stability analysis of adaptively controlled flexible joint manipulators*. *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2538-2544, 1990.
- [10] Ding Y., and Xiao X., *Speed control and resonance suppression of flexible joint system based on singular perturbation method and Kalman filter*. *Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 631-635, 2016.
- [11] Han M.C., and Chen Y. H., *Robust control design for uncertain flexible-joint manipulators*. *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 611-616, 1993.
- [12] Khan H., Bazaz M.A., and Nahvi S.A., *Singular Perturbation Based Model Reduction of Power Electronic Circuits*. *IET Circuits, Devices & System*, Vol. 13, No. 4, pp. 471-478, 2019.
- [13] Lim J., and Shi P., *Sliding Mode Control of Singularly Perturbed Systems and its Application in Quad-rotors*. *International Journal of Control*, Vol. 92, No. 6, pp. 1325-1334, 2019.



شکل ۷- پاسخ زمانی متغیر  $w_2(t)$  به ازای  $\epsilon = 0.01$



شکل ۸- پاسخ زمانی متغیر  $x_1$  به ازای  $\epsilon = 1$



شکل ۹- پاسخ زمانی متغیر  $x_2$  به ازای  $\epsilon = 1$

نمودارهای ۲، ۳، ۶ و ۷، پاسخ متغیرهای حالت عملگر و حسگر را به ازای  $\epsilon = 0.01$  نشان می دهند. همانطور که در شکل ها مشخص است عملگر و حسگر سریعاً به پایداری رسیده اند. شکل های ۴ و ۵ پاسخ متغیرهای حالت در مدل سازی سیستم آونگ وارون است که پایداری مجانبی معادلات سیستم کند را نشان می دهند. همچنین شبیه سازی های دیگری جهت بررسی تاثیر سرعت عملگر و حسگر صورت پذیرفته است که نتایج آن برای متغیرهای حالت  $x_1$  و  $x_2$  در شکل های ۸ و ۹ مشاهده می شود. با توجه به این نتایج مشخص است که اگر سرعت عملگر و حسگر کند باشد (معادل با اینکه پارامتر مثبت  $\epsilon$  به قدر کافی به صفر نزدیک نباشد)، شرایط قضیه ۱ برای سیستم حلقه بسته محقق نمی گردد و پاسخ ها سیستم دینامیکی آونگ به سمت ناپایداری می رود.

- [14] Vasquez R., and Krstic M., Thermal convection loop control by continuous backstepping and singular perturbations. *American Control Conference*, pp. 3882–3887, 2005.
- [15] Rajagopalan P.K., and Naidu D.S., Singular Perturbation Method for Discrete Models of Continuous Systems in Optimal Control. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, Vol. 128, No. 4, pp. 142–148, 1981.
- [16] Flores G., and Lozano R., Lyapunov-Based controller using singular perturbation theory: An application on a mini-UAV. *American Control Conference*, pp. 1596–1601, 2013.
- [17] Kodra K., and Gajic Z., Optimal Control for a New Class of Singularly Perturbed Linear Systems. *Automatica*, Vol. 81, No.5, pp. 203–208, 2017.
- [18] Long M., Su H., and Liu B., Second-Order Controllability of Two Time Scale Multi Agent Systems. *Applied Mathematics and Computation*, Vol.15, No.343, pp.299-313, 2019.
- [19] Jing C., Xu H., and Jiang J., Practical Torque Tracking Control of Electro-hydraulic Load Simulator Using Singular Perturbation Theory. *ISA transactions*, 2020.
- [20] Khalil H., *Nonlinear systems*, 3<sup>rd</sup> edition, Prentice Hall, 2002.