

تحلیل عدم قطعیت مربوط به توزیع دما در بدنه یک پره حرارتی با استفاده از مفهوم مشتق فازی

معصومه زینالی^{*} استادیار، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، masome.zeinali@gmail.com
 قیام اسلامی^{*} استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد اهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اهر، ایران، gh.eslami@iau-ahar.ac.ir

چکیده

در کار حاضر با استفاده از مفهوم مشتق فازی، یک روش موثر جهت تحلیل عدم قطعیت توزیع دما در بدنه یک پره حرارتی مستقیم ارائه می‌شود. در مطالعه حاضر همه منابع عدم قطعیت دخیل در مسئله، به وسیله اعداد فازی مثلثی به طور همزمان در نظر گرفته شده است. روش ارائه شده دارای این برتری است که تجربیات و نظر شخص خبره درباره پارامترهای ورودی را از طریق مفهوم درجه عضویت وارد تحلیل می‌کند. به عنوان یکی از نتایج اصلی، نشان داده شده است که استفاده از مشتق هوکوهاری قویاً تعمیم یافته به جواب‌های نامعتبر منجر می‌شود، در حالی که مشتق گرینولار به عنوان یک مشتق فازی نوظهور، نتایج قابل قبول و منطبق بر فیزیک مسئله ارائه می‌دهد. از نتایج دیگر کار حاضر می‌توان به رابطه‌ای اشاره کرد که آثار تمام پارامترهای غیر قطعی روی توزیع دمای بدنه پره حرارتی را به طور صریح بیان می‌کند. اثر طول پره با جزئیات مطالعه گردیده است. نتایج کار حاضر با نتایج روش کلاسیک مونت کارلو مورد مقایسه قرار گرفته است که حاکی از توافق خوب بین آنهاست.

واژه‌های کلیدی: عدم قطعیت، انتقال گرما، پره حرارتی، مشتق هوکوهاری قویاً تعمیم یافته، مشتق گرینولار.

Uncertainty analysis of temperature distribution in a thermal fin using the concept of fuzzy derivative

M. Zeinali
 Gh. Eslami

Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran
 Department of Mechanical Engineering, Ahar Branch, Islamic Azad University, Ahar, Iran

Abstract

In the present work, by using the concept of fuzzy derivative, an effective method is presented for analyzing the uncertainty of temperature distribution in a straight thermal fin. In the present study, all sources of uncertainty are considered simultaneously by triangular fuzzy numbers. The proposed method has the advantage of involving the experiences and opinions of the expert about the input parameters through the concept of membership degree. As one of the main results, it has been shown that the use of strongly generalized Hukuhara derivative leads to invalid solutions, while the granular derivative, as a newfound fuzzy derivative, provides reasonable results that are consistent with the physics of the problem. Another result of the present work is a relation that explicitly states the effects of all uncertain parameters on the temperature distribution along the thermal fin. The effect of fin length has been studied in detail. The results of the present work have been compared with the results of the classical Monte Carlo method showing good agreement.

Keywords: Uncertainty, Heat Transfer, Thermal fin, Strongly generalized Hukuhara derivative, Granular derivative.

نیاز یک ساختمان بیان شده است. یکی از روش‌های جامع برای تحلیل عدم قطعیت، روش شبیه‌سازی مونت کارلو^۱ می‌باشد ولی اغلب با مشکل زمانبر بودن مواجه است [۴]. از رایج‌ترین روش‌های تحلیل عدم قطعیت می‌توان، آنالیز حساسیت [۵] و تحلیل بازه‌ای را نام برد که هیچ‌کدام مفهوم درجه عضویت را دربر نمی‌گیرند. به عبارت دیگر نظر شخص خبره [۶]، درباره مقادیر عددی ورودی قابل اعمال نیست. این نقیصه در روش فازی برطرف می‌شود به طوری که مدل کردن عدم قطعیت ذیل ریاضیات فازی این برتری را دارد که امکان‌پذیری رخداد حالت‌ها بر مبنای تجربیات و نظر شخص خبره قابل درجه‌بندی است.

کارهای متعددی در ارتباط با مسائل رسانش گرما مشتمل بر پارامترهای غیر قطعی با رویکرد فازی در ادبیات مربوطه قابل ذکر است. ونگ و کیو [۷] روش تفاضل محدود فازی را برای تحلیل رسانش گرما به ازای پارامترهای نادقیق ارائه کردند. ونگ و همکاران [۸] انتشار عدم قطعیت فازی در مسئله رسانش گرما را با استفاده از روش عددی

۱- مقدمه

دستگاه‌های پیشرفته، ابزارهای پیچیده، لوازم خانگی هوشمند، وسایل نقلیه فوق سریع و موتورهای هوایی قرن بیست و یکم برای عملکرد کارآمد، نیازمند حذف و انتقال بهتر گرما هستند. پره‌های حرارتی یکی از اجزای اصلی مدیریت گرما در چنین سیستم‌هایی به شمار می‌روند و از این منظر، کاربردهای فراوانی در صنعت دارند. [۱] طراحی و تولید محصولات صنعتی، همواره با عدم قطعیت همراه است. این عدم قطعیت می‌تواند ناشی از نقص دانش بشری، نادقیقی حاصل از وسیله اندازه‌گیری و یا نادقیقی ذاتی مربوط به برخی از داده‌ها باشد [۲]. بنابراین جهت حصول نتایج واقع‌بینانه، در نظر گرفتن عدم قطعیت ضروری است. در واقع مدل‌های دقیق، برای پارامترهای ورودی، دقتی را در نظر می‌گیرند که در عمل دور از دسترس است. از این روست که مقایسه نتایج تجربی و نظری با در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای ورودی معنی پیدا می‌کند [۳]. در مرجع [۴] انواع عدم قطعیت و روش‌های مختلف بررسی آن با تکیه بر تخمین انرژی مورد

¹ Monte Carlo Simulation Method (MCSM)

^{*} نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: gh.eslami@iau-ahar.ac.ir

هم‌محملی مطالعه کرده و به وسیله مثال‌های عددی کارایی روش خود را نشان داده‌اند. یانگ و یو [۹] بر مبنای مفاهیم فیزیکی حاکم بر پدیده رسانش گرما، نشان دادند که بررسی انتشار عدم قطعیت در مسائل رسانش گرمایی به وسیله معادله رسانش گرمای تصادفی با اصول فیزیکی سازگار نیست. الله ورنلو و همکاران [۱۰] درباره وجود جواب معادله انتقال گرمای فازی وابسته به زمان، تحت GH-مشتق‌پذیری تحقیق کردند و بعداً گوینده و همکاران [۱۱] با معرفی تبدیل فوریه فازی، یک جواب تحلیلی برای معادله انتقال گرما تحت GH-مشتق ارائه کردند. مسئله انتقال گرمای خطی و غیرخطی فازی [۱۲] با استفاده از روش اجزاء محدود فازی حل گردید. گاسلیوف و همکاران [۱۳] مفهوم دسته‌های فازی را برای حل کردن معادله گرمای فازی با شرایط دیریکله، به کار گرفتند.

وقتی بررسی انتشار عدم قطعیت در یک سیستم به روش فازی مد نظر باشد معمولاً به معادلات دیفرانسیل فازی برخورد می‌کنیم. اصطلاح معادله دیفرانسیل فازی به یک معادله دیفرانسیل اشاره دارد که شامل ضرایب، پارامترها و شرایط اولیه یا مرزی فازی (نادقیق) است [۱۴]. به دنبال عدم موفقیت رویکرد اصل تعمیم زاده، روش‌های متعددی بر پایه مفهوم مشتق فازی برای حل چنین معادله‌هایی شکل گرفت [۱۵]. از رایج‌ترین مشتق‌های فازی می‌توان مشتق قویاً تعمیم یافته هوکوها را [۱۶] (به اختصار، GH-مشتق) را نام برد که اغلب معادلات دیفرانسیل فازی بر مبنای آن، مورد بررسی قرار می‌گیرند [۱۷]. GH-مشتق علی‌رغم عملکرد بهتر نسبت به سایر موارد، همچنان مشکلات زیادی دارد [۱۹]. در سال ۲۰۱۶، مازندرانی و همکاران [۱۹] با استفاده از مفهوم تابع عضویت افقی، مشتق گرینولار (به اختصار، gr-مشتق) را معرفی کردند. gr-مشتق اغلب نقاط ضعف GH-مشتق را برطرف می‌سازد و مورد استقبال پژوهشگران قرار گرفته است.

همانطور که بیان شد کارهای متعددی با استفاده از ریاضیات فازی روی مسئله رسانش گرما انجام یافته است اما هیچکدام از آنها شامل پره‌های حرارتی نمی‌باشد و تا آنجا که نویسندگان مطلع هستند، عدم قطعیت توزیع دما در پره‌های حرارتی تاکنون به روش فازی مورد مطالعه قرار نگرفته است. به طور کلی، استفاده از مشتق فازی گرینولار^۱ برای بررسی عدم قطعیت یک مسئله برای اولین بار در این مقاله انجام می‌پذیرد. نظر به اهمیت موضوع، در کار حاضر ابتدا معادله دیفرانسیل فازی حاکم بر مسئله بر مبنای GH-مشتق به عنوان رایج‌ترین مشتق فازی و gr-مشتق به عنوان یک مشتق فازی نوظهور حل گردیده سپس عدم قطعیت مربوط به توزیع دما در بدنه پره حرارتی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در برخی موارد، نتایج کار حاضر با نتایج روش شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه می‌شوند.

۲- معرفی مفاهیم مرتبط با ریاضیات فازی

در این قسمت، چند تعریف اولیه و ضروری در ارتباط با ریاضیات فازی بیان می‌شود. برای درک مطلب لازم است خواننده آشنایی کافی با مباحث مشتق فازی و حل معادلات دیفرانسیل فازی [۶] داشته باشد.

۲-۱- عدد فازی مثلثی

یک عدد فازی مثلثی با سه تایی مرتب $u = (a, b, c)$ نشان داده

می‌شود و تابع عضویت آن برابر است با

$$\mu_u(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b < x < c \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases} \quad (1)$$

۲-۲- عدم قطعیت یک عدد فازی مثلثی

عدم قطعیت عدد فازی $u = (a, b, c)$ را با Un_u نشان می‌دهیم که برابر است با اندازه طول محمل آن، یعنی:

$$Un_u = c - a \quad (2)$$

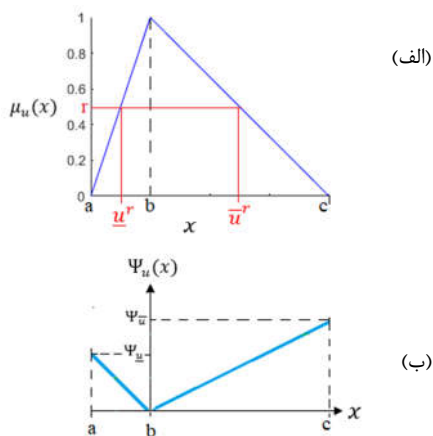
روشن است که عدم قطعیت تعریف شده با رابطه (۲) یک کمیت مطلق و با بعد (دارای واحد) می‌باشد. ما در این مقاله پارامتری بی‌بعد تحت عنوان ابهام نسبی تعریف کرده و بر مبنای آن یک نمایش جدید و ملموس‌تر برای یک عدد فازی مثلثی ارائه می‌دهیم.

۲-۳- ابهام نسبی^۲ یک عدد فازی مثلثی

ابهام نسبی عدد فازی مثلثی $u = (a, b, c)$ را بر مبنای نزدیک و یا دور بودن از مرکز (مقدار قطعی) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Psi_u(x) = \begin{cases} 100\% \times |b-x|/b & a < x < c \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases} \quad (3)$$

اندیس u دلالت بر این دارد که این ابهام مربوط به عدد فازی u است. بر مبنای این تعریف، عدد فازی مثلثی $u = (a, b, c)$ را می‌توان به صورت $(\Psi_{\underline{u}}; b; \Psi_{\overline{u}})$ نشان داد که در آن $\Psi_{\underline{u}} = (b-a)/b$ و $\Psi_{\overline{u}} = (c-b)/b$ به ترتیب، ابهام نسبی پایین‌دست و بالادست نامیده می‌شوند. چنانکه خواهیم دید، تفسیر نتایج مسائل فنی بر مبنای ابهام نسبی مفیدتر واقع می‌شود. در شکل ۱ هر دو سبک، نمایش داده شده است.



شکل ۱- طرحواره عدد فازی مثلثی u در دو حالت. (الف) بر مبنای تابع عضویت، (ب) بر مبنای ابهام نسبی

۲-۴- برش

مهمترین مفهوم مرتبط با یک عدد فازی، r -برش است. این مفهوم یک ابزار کلیدی برای محاسبات با اعداد فازی به شمار می‌رود.

² Relative fuzziness

¹ Granular

معادله کلاسیک حاکم بر مسئله است [۲۰] اما در واقع، تفاوت بنیادین با آن دارد. چرا که اکنون پارامترهای m و U و در نتیجه، $\theta(x)$ فازی هستند.

۴- حل مسئله با رویکرد مشتق هوکوهارای قویاً

تعمیم یافته (GH-مشتق)

در رویکرد GH-مشتق، باید پیش از حل معادله دیفرانسیل، r -برش آن تعیین شود. r -برش معادله (۷) عبارت است از:

$$(\theta')^r(x) = (m^r)^2 \theta^r(x) \quad (۹)$$

که بالانویس r نشان دهنده r -برش پارامتر مورد نظر است. برای تعیین m^r لازم است به این سوال پاسخ دهیم که اگر پارامترهای ورودی شامل دمای ریشه، قطر و رسانش گرمایی پره و ضریب انتقال گرمایی جابجایی هر کدام به مقدار معینی نادقیق باشند، آنگاه میزان نادقیقی در پارامتر m را چگونه می‌توان برآورد کرد؟ در رویکرد GH-مشتق اینکار به وسیله اصل تعمیم زاده انجام می‌پذیرد.

۴-۱- برآورد m فازی بر مبنای اصل تعمیم زاده

برای محاسبه عدم قطعیت انتشار یافته به m ، لازم است از حسابان فازی مبتنی بر اصل تعمیم [۶] استفاده شود. اینکار به وسیله r -برش هر کدام از عوامل نادقیق به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\begin{aligned} d^r &= [d^r, \bar{d}^r] = [d_1 + (d_2 - d_1)r, d_3 + (d_2 - d_3)r] \\ h^r &= [h^r, \bar{h}^r] = [h_1 + (h_2 - h_1)r, h_3 + (h_2 - h_3)r] \\ k^r &= [k^r, \bar{k}^r] = [k_1 + (k_2 - k_1)r, k_3 + (k_2 - k_3)r]. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با اعمال اصل تعمیم برای رابطه (۸) و توجه به این نکته که همه عوامل موجود در رابطه (۱۰) بزرگتر از صفر هستند، می‌توان m فازی را به صورت زیر به دست آورد

$$m^r = \sqrt{\frac{h^r \pi d^r}{k^r (\pi/4) (d^r)^2}} = [\underline{m}^r, \bar{m}^r]. \quad (۱۱-الف)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \underline{m}^r &= \text{Min} \left\{ 2 \sqrt{\frac{hd_1}{k(d_2)^2}} \mid \text{heh}^r, \text{kek}^r, d_1 \& d_2 \epsilon d^r \right\} \\ &= 2 \sqrt{\frac{h^r d^r}{k^r (d^r)^2}} \end{aligned} \quad (۱۱-ب)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}^r &= \text{Max} \left\{ 2 \sqrt{\frac{hd_1}{k(d_2)^2}} \mid \text{heh}^r, \text{kek}^r, d_1 \& d_2 \epsilon d^r \right\} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\bar{h}^r \bar{d}^r}{\bar{k}^r (\bar{d}^r)^2}} \end{aligned} \quad (۱۱-ج)$$

توجه کنید که به خاطر فازی بودن d ، تساوی $d/d^2 = 1/d$ برقرار نیست.

۴-۲- GH-مشتق

در این قسمت، ابتدا GH-مشتق را به صورت ساده و بدون ورود به جزئیات ریاضی، معرفی کرده و سپس با استفاده از آن به حل مسئله مورد نظر می‌پردازیم. r -برش‌های GH-مشتق نوع (i) و (ii) تابع فازی

عدد فازی u علاوه بر تابع عضویت با r -برش نیز نشان داده می‌شود که برابر با اعضای از مجموعه مرجع P است که درجه عضویت آنها حداقل برابر r باشد و با u^r نشان داده می‌شود. r -برش یک عدد فازی همواره یک بازه بسته و کراندار است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$u^r = \{x \in P : \mu_u(x) \geq r\} = [\underline{u}^r, \bar{u}^r]. \quad (۴)$$

مطابق رابطه (۴)، r -برش عدد فازی مثلثی $u = (a, b, c)$ برابر است با $u^r = [\underline{u}^r, \bar{u}^r]$ به طوری که:

$$\underline{u}^r = a + (b - a)r \quad \text{و} \quad \bar{u}^r = c + (b - c)r \quad (۵)$$

۲-۵- شرایط لازم و کافی برای r -برش یک عدد فازی

در مسائل و معادلات شامل پارامترهای فازی، گاهی اوقات پس از حل مسئله و به دست آوردن جواب، شاهد این هستیم که جواب حاصل یک عدد فازی نیست (جواب نامعتبر). بنابراین پس از حل معادلات، باید فازی بودن جواب بررسی شود. بررسی فازی بودن از روی r -برش بر مبنای قضیه زیر انجام می‌گیرد:

u یک عدد فازی است اگر و تنها اگر (الف) \underline{u}^r و \bar{u}^r هر دو نسبت به r در بازه $[0, 1]$ پیوسته چپ و در $r = 0$ پیوسته راست باشند. (ب) \underline{u}^r نسبت به r صعودی باشد. (ج) \bar{u}^r نسبت به r نزولی باشد و (د) به ازای هر $r \in [0, 1]$ ، $\underline{u}^r \leq \bar{u}^r$ باشد.

۳- بیان مسئله

یک پره حرارتی مستقیم به طول L با سطح مقطع دایره‌ای به قطر "تقریباً" d_2 را در نظر بگیرید که از ماده‌ای با رسانش گرمایی "در حدود" k_2 ساخته شده است. این پره در محیطی با دمای T_∞ به کار گذاشته شده است. اطلاع دقیقی از شرایط جریان سیال در اطراف پره در دست نیست. به همین جهت ضریب انتقال گرما جابجایی بین پره و محیط "در حدود" h_2 فرض می‌شود. دمای ریشه پره نیز به طور دقیق مشخص نیست و "مقدار تقریبی" T_{b2} را می‌توان برای آن در نظر گرفت. با این توصیف، توزیع دما در طول پره را چگونه می‌توان برآورد کرد؟

برای پاسخ دادن به این سوال از مدل‌سازی عدم قطعیت ذیل ریاضیات فازی بهره می‌بریم. بدین منظور پارامترهای ورودی با اعداد فازی مثلثی زیر مدل می‌شوند

$$\begin{aligned} d &= (d_1, d_2, d_3), \\ k &= (k_1, k_2, k_3), \\ h &= (h_1, h_2, h_3), \\ T_b &= (T_{b1}, T_{b2}, T_{b3}). \end{aligned} \quad (۶)$$

جهت بررسی انتشار عدم قطعیت ناشی از این پارامترهای نادقیق، لازم است معادله دیفرانسیل فازی زیر حل شود

$$\begin{cases} \theta''(x) = m^2 \theta(x) & x \in [0, L] \\ \theta'(0) = 0 \\ \theta(L) = U \end{cases} \quad (۷)$$

که $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ ، $U = T_b - T_\infty$ و m برای پره حرارتی با سطح مقطع ثابت عبارت است از:

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \quad (۸)$$

شایان توجه است که معادله (۷) به لحاظ ظاهری دقیقاً همان

$f(x)$ به صورت زیر معرفی می‌شوند.

فرض کنید $f^r(x) = [f^r(x), \bar{f}^r(x)]$ نشان دهنده یک r -برش دلخواه از $f(x)$ باشد، در این صورت

اگر $f(x)$ مشتق‌پذیر نوع (i) باشد، آنگاه r -برش مشتق آن به صورت زیر خواهد بود:

$$(f^r)^r(x) = \left[\frac{d}{dx} f^r(x), \frac{d}{dx} \bar{f}^r(x) \right]. \quad (12)$$

اگر $f(x)$ مشتق‌پذیر نوع (ii) باشد، r -برش مشتق آن عبارت است از:

$$(f^r)^r(x) = \left[\frac{d}{dx} \bar{f}^r(x), \frac{d}{dx} f^r(x) \right]. \quad (13)$$

چند نکته مهم و کاربردی در ارتباط با GH-مشتق به صورت زیر قابل ذکر است [۶]:

۱. تابع فازی $f(x)$ نمی‌تواند همزمان هم مشتق‌پذیر نوع (i) و

هم مشتق‌پذیر نوع (ii) باشد.

۲. یک تابع فازی لزوماً GH-مشتق‌پذیر نیست. یعنی ممکن

است هیچکدام از مشتق‌های نوع (i) یا (ii) را نداشته باشد.

۳. اگر تابع مفروض $f(x)$ ، $f(x)$ -GH-مشتق‌پذیر باشد، عدم

قطعیت آن با افزایش x افزایش می‌یابد و اگر $f(x)$ -GH-

مشتق‌پذیر باشد، عدم قطعیت آن با افزایش x کاهش

می‌یابد.

به خاطر اینکه بیشترین مرتبه مشتق در معادله (۷) برابر با دو

است، بسته به نوع GH-مشتق برای θ' و θ'' ، چهار حالت (i)-(i)، (i)-(ii)،

(ii)-(ii) و (ii)-(i) بایستی در نظر گرفته شود. اما چون در معادله

(۷)، عبارت θ' وجود ندارد و θ'' موجود در شرایط مرزی هم دارای

مقدار فازی نیست، لذا دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل از مفروضات

(i)-(i) و (ii)-(ii)، یکسان خواهد بود و در نتیجه جواب‌های متناظر با

هر کدام از آنها نیز ظاهر یکسانی خواهند داشت. نظر به اینکه این دو

حالت همزمان نمی‌توانند برقرار باشند، لذا پس از حصول جواب بایستی

نوع مشتق‌پذیری آن بررسی شود. همین استدلال در مورد جوابهای

(i)-(ii) و (ii)-(i) نیز عیناً برقرار است. بنابراین برای مسئله حاضر تنها

دو حالت متمایز زیر وجود دارد.

۴-۳- جواب (i)-(i)

با فرض اینکه θ' و θ'' از نوع (i) باشند، با توجه به روابط (۱۲) و

(۱۳) می‌توان نوشت:

$$(\theta'')^r(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} \theta^r(x), \frac{d^2}{dx^2} \bar{\theta}^r(x) \right] \quad (14)$$

با جایگذاری m^r از رابطه (۱۱-الف) و $\theta''(x)$ از رابطه (۱۴) در معادله

(۹)، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\left[\frac{d^2 \theta^r(x)}{dx^2}, \frac{d^2 \bar{\theta}^r(x)}{dx^2} \right] = [m^r, \bar{m}^r]^2 [\theta^r(x), \bar{\theta}^r(x)] \quad (15)$$

چون $[m^r, \bar{m}^r]^2$ و $[\theta^r(x), \bar{\theta}^r(x)]$ بازه‌های مثبتی هستند از حساب

بازه‌ها داریم:

$$[m^r, \bar{m}^r]^2 [\theta^r(x), \bar{\theta}^r(x)] = [(m^r)^2 \theta^r(x), (\bar{m}^r)^2 \bar{\theta}^r(x)] \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) و پس از لحاظ کردن شرایط مرزی،

معادلات زیر منتج می‌شوند

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \theta^r(x) = (m^r)^2 \theta^r(x), \\ \theta^r(L) = \underline{U}^r, \quad \frac{d}{dx} \theta^r(0) = 0 \end{cases} \quad (17-الف)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \bar{\theta}^r(x) = (\bar{m}^r)^2 \bar{\theta}^r(x), \\ \bar{\theta}^r(L) = \bar{U}^r, \quad \frac{d}{dx} \bar{\theta}^r(0) = 0. \end{cases} \quad (17-ب)$$

توجه کنید اگر فرض می‌کردیم مشتق‌های θ' و θ'' از نوع (ii) هستند، باز دقیقاً همین معادلات حاصل می‌شدند. در معادلات (۱۷-الف و ب)، \underline{U}^r و \bar{U}^r به ترتیب r -برش‌های پایین و بالای U هستند و مطابق رابطه زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned} \underline{U}^r &= U_1 + (U_2 - U_1)r \\ \bar{U}^r &= U_3 + (U_2 - U_3)r \end{aligned} \quad (17-ج)$$

با حل معادلات (۱۷-الف و ب) به جواب‌های زیر می‌رسیم

$$\theta^r(x) = \underline{U}^r \frac{\cosh(\frac{m^r x}{L})}{\cosh(\frac{m^r L}{L})} \quad (18-الف)$$

$$\bar{\theta}^r(x) = \bar{U}^r \frac{\cosh(\frac{\bar{m}^r x}{L})}{\cosh(\frac{\bar{m}^r L}{L})} \quad (18-ب)$$

که جملات \underline{m}^r و \bar{m}^r از روابط (۱۱-ب و ج) قابل محاسبه هستند. در قسمت "نتایج و بحث" اعتبار این جواب بررسی خواهد شد.

۴-۴- جواب (i)-(ii)

اگر θ' از نوع (i) و θ'' از نوع (ii) باشند، با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$(\theta'')^r(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} \bar{\theta}^r(x), \frac{d^2}{dx^2} \theta^r(x) \right] \quad (19)$$

با جایگذاری m^r از روابط (۱۱-الف، ب و ج) و $\theta''(x)$ از رابطه (۱۹) در معادله (۹) و پس از اعمال شرایط مرزی به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \bar{\theta}^r(x) = (m^r)^2 \bar{\theta}^r(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} \theta^r(x) = (\bar{m}^r)^2 \theta^r(x), \\ \theta^r(L) = \underline{U}^r, \quad \frac{d}{dx} \theta^r(0) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

توجه کنید که اگر فرض می‌کردیم θ' از نوع (ii) و θ'' از نوع (i) هستند، باز دقیقاً به همین دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌رسیدیم. با حل دستگاه معادلات (۲۰) جواب‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$\theta^r(x) = \frac{\bar{m}^r \underline{U}^r + \underline{m}^r \bar{U}^r \cosh\left(\sqrt{\frac{m^r \bar{m}^r x}{L}}\right)}{2\bar{m}^r \cosh\left(\sqrt{\frac{m^r \bar{m}^r L}{L}}\right)} - \frac{\bar{m}^r \bar{U}^r - \underline{m}^r \underline{U}^r \cos\left(\sqrt{\frac{m^r \bar{m}^r x}{L}}\right)}{2\bar{m}^r \cos\left(\sqrt{\frac{m^r \bar{m}^r L}{L}}\right)} \quad (21-الف)$$

اگر $f^{gr}(x, r, \alpha_f)$ نسبت به x مشتق پذیر باشد و علاوه $[df/dx]^r = \mathcal{H}^{-1}(df^{gr}(x, r, \alpha_f)/dx)$ با در نظر گرفتن gr -مشتق، m و U گرنیولار، مسئله (۷) به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{d\theta^{gr}(x, r, \alpha_\theta)}{dx} = (m^{gr}(r, \alpha_m))^2 \theta(x, r, \alpha_\theta) & x \in [0, L] \\ \frac{d\theta^{gr}(0, r, \alpha_\theta)}{dx} = 0 \\ \theta^{gr}(L, r, \alpha_\theta) = U^{gr} \end{cases}$$

جواب معادله فوق عبارت است از:

$$\theta^{gr}(x, r, \alpha_\theta) = U^{gr}(r, \alpha_U) \frac{\cosh(m^{gr}(r, \alpha_m)x)}{\cosh(m^{gr}(r, \alpha_m)L)} \quad (25)$$

که در آن $\alpha_\theta = (\alpha_h, \alpha_k, \alpha_d, \alpha_U)$.

اکنون با به کار بردن \mathcal{H}^{-1} برش تابع عضویت عمودی θ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \theta^r(x) &= \mathcal{H}^{-1}(\theta^{gr}(x, r, \alpha)) \\ &= \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{\alpha} \theta^{gr}(x, \beta, \alpha), \sup_{\beta \geq r} \max_{\alpha} \theta^{gr}(x, \beta, \alpha) \right] \end{aligned}$$

از آنجایی که θ^{gr} در رابطه (۲۵) نسبت به $\alpha_U, \alpha_k, \alpha_d$ صعودی و نسبت به α_h نزولی است. در نتیجه کمینه خود را در $\alpha_k = \alpha_h = \alpha_d = 1, \alpha_U = 0$ و بیشینه خود را در $\alpha_h = 0, \alpha_k = \alpha_U = \alpha_d = 1$ می‌کند، یعنی

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \theta^{gr}(x, \beta, \alpha) &= \underline{U}^\beta \cosh\left(2x \sqrt{\frac{h^\beta}{k^\beta d^\beta}}\right) / \cosh\left(2L \sqrt{\frac{h^\beta}{k^\beta d^\beta}}\right) \quad (26\text{-الف}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \theta^{gr}(x, \beta, \alpha) &= \bar{U}^\beta \cosh\left(2x \sqrt{\frac{h^\beta}{k^\beta d^\beta}}\right) / \cosh\left(2L \sqrt{\frac{h^\beta}{k^\beta d^\beta}}\right) \quad (26\text{-ب}) \end{aligned}$$

از طرفی رابطه (۲۶-الف) نسبت به β صعودی است، پس اینفیمم خود را در ابتدای بازه یعنی در $\beta = r$ اختیار می‌کند. به همین ترتیب چون معادله (۲۶-ب) نسبت به β نزولی است پس سوپریمم آن در ابتدای بازه یعنی در $\beta = r$ رخ می‌دهد. در نتیجه، ابتدا و انتهای r -برش جواب حاصل از رویکرد gr -مشتق برابر است با:

$$\theta^r = \underline{U}^r \frac{\cosh\left(2x \sqrt{\frac{h^r}{k^r d^r}}\right)}{\cosh\left(2L \sqrt{\frac{h^r}{k^r d^r}}\right)}, \quad (27\text{-الف})$$

$$\bar{\theta}^r = \bar{U}^r \frac{\cosh\left(2x \sqrt{\frac{h^r}{k^r d^r}}\right)}{\cosh\left(2L \sqrt{\frac{h^r}{k^r d^r}}\right)}. \quad (27\text{-ب})$$

بحث بیشتر در قسمت "نتایج و بحث" انجام خواهد گرفت.

۶- نتایج و بحث

در این قسمت، ابتدا اعتبار جواب‌های حاصل را بررسی کرده، سپس عدم قطعیت توزیع دما در بدنه پره حرارتی را تشریح می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^r(x) &= \frac{\bar{m}^r \bar{U}^r + \underline{m}^r \underline{U}^r}{2\bar{m}^r} \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{\bar{m}^r \bar{m}^r}{x}}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\bar{m}^r \bar{m}^r}{L}}\right)} \\ &+ \frac{\bar{m}^r \bar{U}^r - \underline{m}^r \underline{U}^r}{2\bar{m}^r} \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\bar{m}^r \bar{m}^r}{x}}\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{\bar{m}^r \bar{m}^r}{L}}\right)} \end{aligned} \quad (21\text{-ب})$$

اعتبار جواب (۲۱-الف و ب) در قسمت "نتایج و بحث" مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۵- حل مسئله با رویکرد مشتق گرنیولار gr -

مشتق

اخیراً، پیگات و همکاران [۲۲، ۲۱] تابع عضویت افقی را معرفی و از آن برای انجام محاسبات فازی تحت عنوان "محاسبات گرنیولار" استفاده کرده‌اند. محاسبات گرنیولار در مقایسه با محاسبات بر پایه اصل تعمیم، برتریهای قابل توجهی دارند.

تعریف: اگر $u(x)$ یک عدد فازی باشد و r بیانگر درجه عضویت x به $u(x)$ باشد، تابع عضویت افقی $u(x)$ با $u^{gr}(r, \alpha_U)$ یا $\mathcal{H}(u)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\mathcal{H}(u) \triangleq u^{gr}(r, \alpha_U) = \underline{u}^r + \alpha_U(\bar{u}^r - \underline{u}^r). \quad (22)$$

r -برش تابع عضویت معمول نیز با استفاده از فرمول زیر از روی تابع عضویت افقی قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} u^r &= \mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(r, \alpha_U)) \\ &= \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{\alpha_U} u^{gr}(\beta, \alpha_U), \sup_{\beta \geq r} \max_{\alpha_U} u^{gr}(\beta, \alpha_U) \right] \end{aligned}$$

۵-۱- محاسبات گرنیولار

اگر u و v دو عدد فازی با توابع عضویت افقی $u^{gr}(\mu, \alpha_U)$ و $v^{gr}(\mu, \alpha_V)$ باشند و عمل \odot یکی از چهار عمل اصلی باشد، در اینصورت

$$[u \odot v]^r = \mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(r, \alpha_U) \odot v^{gr}(r, \alpha_V)).$$

جزئیات بیشتر در [۲۲، ۲۱] بیان شده است.

۵-۲- محاسبه m و U گرنیولار

با استفاده از محاسبات گرنیولار داریم:

$$m^{gr}(r, \alpha_m) = \sqrt{\frac{h^{gr} \pi d^{gr}}{k^{gr} (\pi/4) (d^{gr})^2}} = 2 \sqrt{\frac{h^{gr}}{k^{gr} d^{gr}}}$$

با جایگذاری h^{gr}, k^{gr} و d^{gr} از رابطه (۲۲) در رابطه فوق، m و U گرنیولار به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$m^{gr}(r, \alpha_m) = 2 \sqrt{\frac{h^r + \alpha_h(\bar{h}^r - \underline{h}^r)}{(k^r + \alpha_k(\bar{k}^r - \underline{k}^r))(d^r + \alpha_d(\bar{d}^r - \underline{d}^r))}} \quad (23)$$

$$U^{gr}(r, \alpha_U) = \underline{U}^r + \alpha_U(\bar{U}^r - \underline{U}^r) \quad (24)$$

که در آن $\alpha_m = (\alpha_h, \alpha_k, \alpha_d)$ r -برش‌های موجود در رابطه (۲۳) در رابطه (۱۰) داده شده‌اند.

در رویکرد گرنیولار، تابع فازی $f(x)$ gr -مشتق پذیر است اگر و تنها

۶-۱- اعتبار سنجی جواب‌های حاصل از رویکردهای

مختلف

اولین قدم برای اعتبارسنجی جواب‌های فازی، آزمایش کردن این نکته است که هرگاه عدم قطعیت پارامترهای ورودی از بین برود و آنها به پارامترهای قطعی تبدیل شوند، آنگاه جواب فازی نیز باید بر جواب قطعی منطبق شود. در مسئله حاضر مشاهده می‌شود که اگر $d = d_2$, $U = U_2$ و $h = h_2$, $k = k_2$ (۲۱-الف و ب) و (۲۷-الف و ب) به جواب قطعی مسئله تحت بررسی (رجوع کنید به [۲۰]) یعنی $\theta(x) = U \cosh(mx) / \cosh(mL)$ تبدیل می‌شوند. لذا از این بابت هیچکدام مشکلی ندارند.

علاوه بر مورد عمومی بالا، برای معتبر بودن جوابی که از روش GH-مشتق حاصل شده است، ضرورت دارد اولاً، جواب مورد نظر به ازای هر x ، یک عدد فازی باشد. ثانیاً، نوع مشتق‌های جواب با فرض‌هایی که در این خصوص در مرحله حل معادله اخذ شده است، سازگار باشند.

الف) بررسی جواب (i)-(i)

با دو مثال زیر نشان می‌دهیم که در حالت کلی جواب معرفی شده در روابط (۱۸-الف و ب) جدا از بحث سازگاری نوع مشتق جواب، به دلیل عدم تشکیل عدد فازی فاقد اعتبار است، چون شرایط لازم برای تشکیل r -برش یک عدد فازی را دارا نیست (بخش ۲-۵ را ببینید).

مثال ۱. پارامترهای ورودی برای مثال ۱ عبارتند از:

$$k = (10\%; 380 \text{ W/mK}; 23\%) \quad h = (30\%; 20 \text{ W/m}^2\text{K}; 12\%)$$

$$U = (24\%; 50\text{K}; 13\%) \quad d = (29\%; 5\text{mm}; 9\%)$$

مثال ۲. پارامترهای ورودی برای مثال ۲ عبارتند از:

$$k = (10\%; 380 \text{ W/mK}; 23\%) \quad h = (30\%; 20 \text{ W/m}^2\text{K}; 12\%)$$

$$U = (0\%; 50\text{K}; 0\%)$$

$$d = (29\%; 5\text{mm}; 9\%)$$

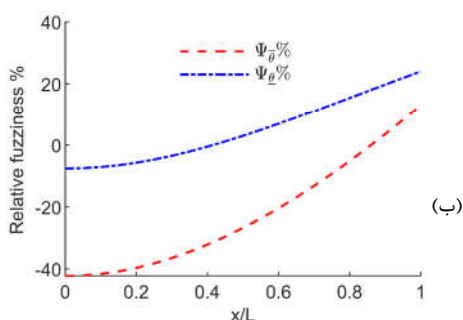
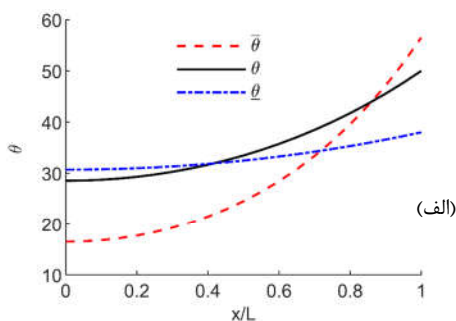
توزیع دما، $\theta(x)$ ، مطابق روابط (۱۸-الف و ب) و توزیع ابهام نسبی مطابق رابطه (۳) برای مثال‌های ۱ و ۲ محاسبه شده و به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده است. دمای متناظر با هر x بایستی یک مقدار فازی باشد که r -برش آن به صورت $[\theta^r(x), \bar{\theta}^r(x)]$ قابل نمایش است. در رابطه با رسم نمودار توزیع دما، شایان دقت است که چون به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ ، دو منحنی وجود دارد و نمی‌توان همه منحنی‌ها را رسم کرد، معمولاً جواب، به وسیله منحنی‌های متناظر با 0 -برش پایین، 0 -برش بالا و 1 -برش نمایش داده می‌شود. این سه منحنی را به ترتیب منحنی حد پایین، منحنی حد بالا و منحنی جواب قطعی می‌نامند. همانطور که در شکل ۲-الف مشاهده می‌شود، تابع توزیع دما در بازه $0 \leq x/L \leq 0.87$ دارای خروجی فازی نیست (چون نمودار حد بالا پایین‌تر از نمودار جواب قطعی است). در مثال ۲، وضعیت بدتر است و تابع توزیع دما در هیچ نقطه‌ای خروجی فازی ندارد (شکل ۳-الف). همین مشکل باعث شده است در هر دو مثال مطابق شکل‌های ۲-ب و ۳-ب برای ابهام نسبی، مقادیر منفی تولید شود که مسلماً قابل قبول نیستند. برای مواردی مانند مثال ۲ که در آن دمای ریشه پره حرارتی فازی نیست (یعنی $U = U_2$)، به طور ریاضی هم می‌توان نشان داد که روابط (۱۸-الف و ب)، r -برش عدد فازی را تشکیل نمی‌دهند زیرا

$\cosh(mx) / \cosh(mL)$ تابعی نزولی نسبت به m است و چون

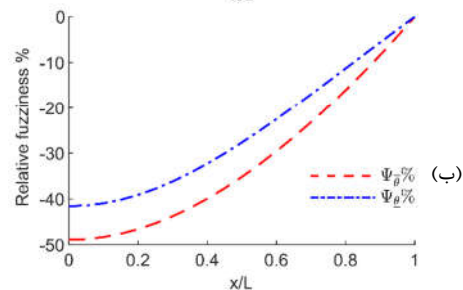
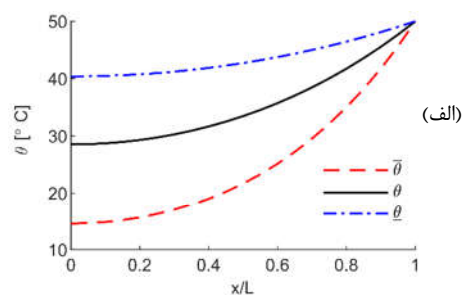
$$\bar{m}^r \leq \bar{m}^f \text{ در نتیجه:}$$

$$U_2 \cosh(\bar{m}^r x) / \cosh(\bar{m}^r L) \leq U_2 \cosh(\bar{m}^f x) / \cosh(\bar{m}^f L)$$

یعنی $\theta^r(x) < \bar{\theta}^r(x)$. بنابراین $[\theta^r(x), \bar{\theta}^r(x)]$ r -برش یک عدد فازی نیست و لذا این جواب فاقد اعتبار است.



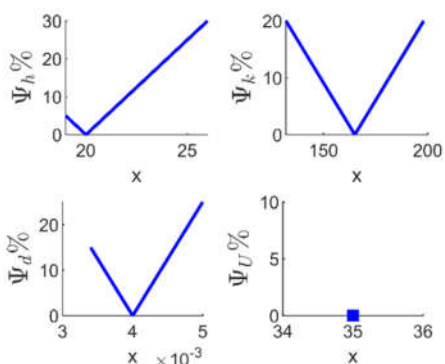
شکل ۲- نتایج رویکرد GH-مشتق نوع (i)-(i) برای مثال ۱: (الف) توزیع دمای قطعی (خط توپر سیاه) به همراه حد بالای دما (خط چین قرمز) و حد پایین دما (خط-نقطه آبی). (ب) ابهام نسبی بالادست (خط چین قرمز) و پایین‌دست (خط-نقطه آبی)



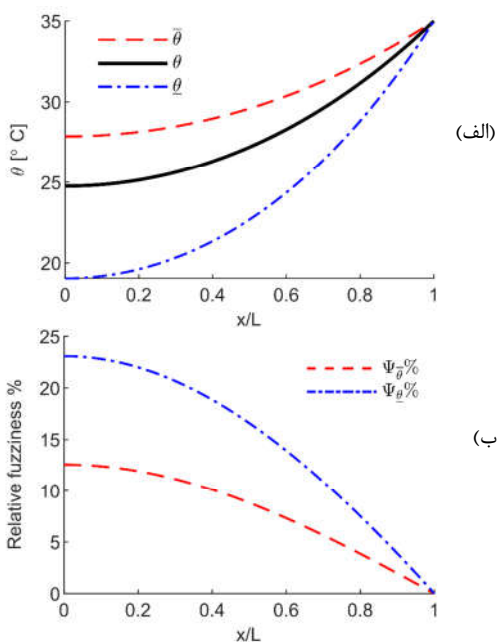
شکل ۳- نتایج رویکرد GH-مشتق نوع (i)-(i) برای مثال ۲: (الف) توزیع دمای قطعی (خط توپر سیاه) به همراه حد بالای دما (خط چین قرمز) و حد پایین دما (خط-نقطه آبی). (ب) ابهام نسبی بالادست (خط چین قرمز) و پایین‌دست (خط-نقطه آبی)

جدول ۱- پارامترهای ورودی برای مثال ۳ با دو بیان مختلف.

پارامترها با بیان رایج	پارامترها با بیان ابهام نسبی
$h = (19,20,26) \text{ W/m}^2\text{K}$	$h = (5\%; 20 \text{ W/m}^2\text{K}; 30\%)$
$k = (132,165,198) \text{ W/mK}$	$k = (20\%; 165 \text{ W/mK}; 20\%)$
$d = (3.4,4,5) \text{ mm}$	$d = (15\%; 4 \text{ mm}; 25\%)$
$U = (35,35,35)^\circ\text{C}$	$U = (0\%; 35^\circ\text{C}; 0\%)$



شکل ۳- نمایش پارامترهای مثال ۳ به روش ابهام نسبی



شکل ۵- نتایج رویکرد گرینولار برای مثال ۳: (الف) توزیع دمای قطعی (خط توپر سیاه) به همراه منحنی‌های حد بالای دما (خط چین قرمز) و حد پایین دما (خط-نقطه آبی). (ب) ابهام نسبی بالادست (خط چین قرمز) و پایین‌دست (خط-نقطه آبی).

اما توزیع دما نشان می‌دهد که عملاً ابهام نسبی پایین‌دست غالب می‌باشد. به عنوان مثال، برای نوک پره، ابهام نسبی پایین‌دست و بالادست به ترتیب ۲۳/۱٪ و ۱۲/۵٪ می‌باشند.

ب) بررسی جواب (i)-(ii)

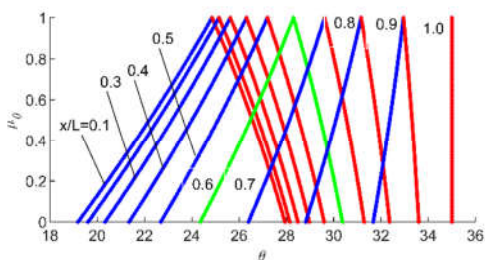
جواب (i)-(ii) که در روابط (۲۱-الف و ب) ارائه شده است نیز مانند جواب (i)-(i) در حالت کلی دارای اعتبار نیست. چون شرایط لازم برای فازی بودن را به ازای ورودی‌های دلخواه دارا نیست (جهت پرهیز از طولانی شدن مطلب از ارائه مثال نقض صرف نظر می‌شود). علاوه بر آن، وجود جمله کسینوسی در این روابط باعث نوسانی شدن توزیع دما و عدم قطعیت آن در طول پره حرارتی می‌شود. این رفتار نوسانی فاقد هر گونه توجیه فیزیکی است. شایان توجه است که برای بعضی از داده‌های ورودی ممکن است جواب‌های حاصل از رویکرد GH-مشتق قابل قبول باشند. مثلاً زمانی که عدم قطعیت فقط از دمای ریشه (U) ناشی شود و هیچ عدم قطعیتی در سایر پارامترها و در نتیجه در m نباشد، به سادگی می‌توان ثابت کرد که جواب (i)-(i) معرفی شده در روابط (۱۸-الف و ب)، همه شرایط مربوط به عدد فازی بودن (مندرج در بخش ۲-۵) را دارد. اما همان طور که به وسیله مثال‌های ۱ و ۲ نشان دادیم، در حالت کلی صحت و سقم جواب‌های حاصل از رویکرد مبتنی بر GH-مشتق، به مقادیر عددی پارامترهای ورودی بستگی دارد و لذا عموماً قابل اعتماد نیستند. این یافته با نتایج یکی از کارهای مشهور بده [۲۳] که در آن نشان داده است GH-مشتق برای حل طیف وسیعی از مسائل مقدار مرزی به شکست می‌انجامد، مطابقت دارد.

ج) بررسی جواب حاصل از رویکرد gr-مشتق

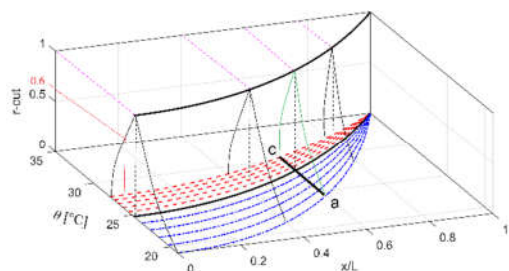
ثابت شده است که جواب یک معادله دیفرانسیل فازی با رویکرد gr-مشتق، همواره یک تابع فازی است [۱۹]. نوع مشتق نیز بر خلاف GH-مشتق، از تعدد برخوردار نیست. در واقع، gr-مشتق هیچکدام از چالش‌های پیچیده GH-مشتق را ندارد [۱۹]. بنابراین نیازی به اعتبارسنجی ریاضی جواب حاصل از gr-مشتق به مفهومی که برای GH-مشتق انجام شد، نداریم. اگرچه gr-مشتق نیز مشکلات خاص خود را دارد. مثلاً ممکن است محاسبه $\min_{\beta \geq r}$ و $\max_{\beta \geq r}$ بسته به نوع مسئله پیچیده و سخت باشد.

مثال ۳. اکنون تحت عنوان مثال ۳، جواب حاصل از رویکرد مبتنی بر gr-مشتق، برای یک پره حرارتی کوتاه به طول $L = 8 \text{ cm}$ را به ازای پارامترهای ورودی مندرج در جدول ۱ بررسی می‌کنیم.

در شکل ۴، داده‌های این مثال با استفاده از مفهوم ابهام نسبی نشان داده شده است. این نوع نمایش به خاطر اینکه میزان عدم قطعیت کمیت مورد نظر را نسبت به مقدار قطعی آن کمیت به صورت صریح بیان می‌کند، دید بهتری در مقایسه با نمایش رایج یک عدد فازی به خواننده می‌دهد. این موضوع در سبک نوشتاری مندرج در جدول ۱ نیز مشهود است. برای مثال ۳، در شکل ۵-الف منحنی‌های توزیع دمای حد بالا و حد پایین و جواب قطعی و در شکل ۵-ب، ابهام نسبی بالادست و پایین‌دست دیده می‌شوند. ملاحظه می‌شود که به خاطر عدم قطعیت در پارامترهای ورودی، گستره دما و به طبع آن ابهام نسبی از مقدار صفر در ریشه پره شروع شده و به سمت نوک پره پیوسته افزایش می‌یابد. عدم کاهش ابهام نسبی در انتهای پره نشان‌دهنده آن است که طول پره کوتاه است و دمای نوک آن اختلاف محسوسی با دمای محیط دارد. علی‌رغم اینکه در پارامترهای ورودی، عموماً ابهام نسبی در بالادست بیشتر است،



شکل ۷- توزیع دمای فازي در طول پره حرارتي با نمايش صريح درجه عضویت برای مثال ۳ در برخی نقاط



شکل ۸- طرحواره سه بعدی توزیع دمای فازي گرنيولار برای مثال ۳

۲-۶- مقایسه کار حاضر با روش شبیه سازی مونت کارلو

اگر بخواهیم نتایج کار حاضر را با نتایج حاصل از روش شبیه سازی مونت کارلو مقایسه کنیم، می توانیم درجه عضویت را کنار گذاشته و صرفاً محدوده توزیع دما را در نظر بگیریم (یعنی فقط منحنی های حد پایین و حد بالای دما مد نظر باشند). چنین مقایسه ای طی مثال ۴ انجام می گیرد

مثال ۴. پارامترهای ورودی برای مثال ۴ عبارتند از:

$$k = (10\%; 385 \text{ W/mK}; 20\%) \quad h = (5\%; 20 \text{ W/m}^2\text{K}; 0\%)$$

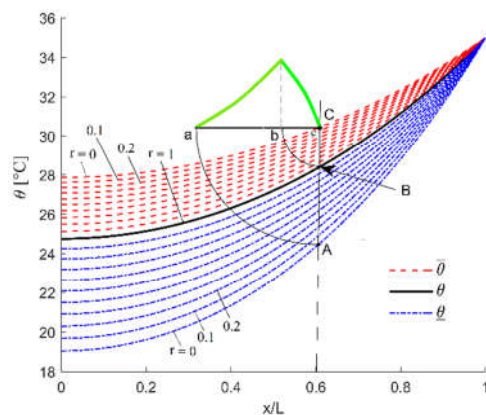
$$U = (50\%; 35 \text{ }^\circ\text{C}; 40\%) \quad d = (5\%; 4\text{mm}; 10\%)$$

در شکل ۹-الف مشاهده می شود که منحنی های حد پایین و حد بالای حاصل از رویکرد مشتق گرانیولار، تطابق بسیار خوبی با نتایج روش شبیه سازی مونت کارلو دارند، در حالی که خروجی های مشتق هوکوهارا هیچ تطابقی با این دو روش ندارند. شایسته توجه است که برای ایجاد نتایج مونت کارلو، از ده هزار داده تصادفی برای هر کدام از پارامترهای ورودی (با توزیع یکنواخت در محدوده مشخص) استفاده شده است.

به خاطر تطابق بسیار خوب مشتق گرانیولار و روش مونت کارلو در تولید منحنی های حد پایین و حد بالای دما که در شکل ۹-الف رویت شد، بالطبع تطابق بالایی در عدم قطعیت توزیع دما نیز مورد انتظار است. در شکل ۹-ب، عدم قطعیت مربوط به توزیع دما منعکس گردیده است که داده های مندرج در آن موید این مطلب می باشند.

جهت ایجاد ذهنیت روشن نسبت به پاسخ فازي برای دما، در شکل ۶ هر کدام از روابط (۲۷-الف و ب) را به ازای r -برش های مختلف ترسیم کرده ایم. همچنین در این شکل نشان داده ایم که چگونه دمای نقطه ای مانند $x/L = 0.6$ ، یک عدد فازي تشکیل می دهد. حد پایین، مقدار قطعی و حد بالای آن به ترتیب برابر با a ، b و c می باشد. توجه کنید که علی رغم ظاهر آن، عدد مذکور یک عدد فازي مثلثی نیست و لذا به صورت (a, b, c) قابل نمایش نمی باشد. در واقع شکل دقیق آن توسط روابط (۲۷-الف و ب) تعیین می شود. برای مشاهده شکل دمای فازي در هر نقطه دلخواه از طول پره حرارتي، باید x مربوط به آن نقطه را ثابت نگه داشته و روابط مربوط به جواب را به ازای r های مختلف رسم کرد. این کار برای مثال ۳ انجام یافته و در شکل ۷ برای ده نقطه مجزا با مختصات $x/L = 0.1, 0.2, \dots, 1$ نشان داده شده است. ملاحظه می شود هر چه از سمت نوک پره به سمت ریشه آن حرکت می کنیم، عدم قطعیت دمای فازي کوچکتر شده و در ریشه به صفر می رسد که گویای کاهش عدم قطعیت در راستای x می باشد. در این نمودار، دمای فازي مربوط به $x/L = 0.6$ به رنگ سبز دیده می شود. شایان توجه است که اطلاعات موجود در شکل ۷ بسی بیشتر از عدم قطعیت دما است. چرا که بیان دمای یک نقطه به صورت فازي علاوه بر عدم قطعیت آن، تابع عضویت را نیز به همراه دارد که بیانگر تاثیر نظر و تجربیات شخص خبره درباره پارامترهای ورودی، بر روی خروجی مسئله است.

در حالت کلی، نمایش سه بعدی جواب یک معادله دیفرانسیل فازي که شامل r -برش ها می باشد، چالش برانگیز است و ممکن است عملی نباشد. ما در شکل ۸ یک نمای سه بعدی از توزیع دمای فازي را برای مثال ۳ ارائه می دهیم. در این شکل فصل مشترک هر دو صفحه دلخواه $x/L = X_1$ و $r = r_1$ یک بازه از دما را معرفی می کند. این بازه نشان دهنده $\theta^{r_1}(X_1) = [\theta^{r_1}, \bar{\theta}^{r_1}]$ است.



شکل ۹- r -برش های θ به ازای $r = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ خط چین های قرمز حد بالای r -برش ها و خط-نقطه های آبی حد پایین r -برش ها هستند. $r = 1$ متناظر با جواب قطعی و خط توپر است. برای نمونه در نقطه (A, B, C) دمای فازي برای $x/L = 0.6$ حاصل رسم شده است.

اکنون برای سوم می‌خواهیم این افراد نقطه ای بسیار نزدیک به ریشه میله را لمس کنند. چون نقطه لمس بسیار نزدیک به ریشه می‌باشد و دمای ریشه همه میله‌ها دارای دمای یکسان است، لذا دوباره اظهار نظر افراد به همدیگر نزدیک خواهد بود یعنی عدم قطعیت در دما کمتر خواهد بود. از این آزمایش به این نتیجه می‌رسیم که عدم قطعیت در دما از یک مقدار کمینه در انتهای پره شروع شده و به تدریج افزایش می‌یابد و پس از نقطه خاصی دوباره کاهش یافته و در ریشه پره حرارتی از بین می‌رود. البته این روند زمانی رخ می‌دهد که طول پره حرارتی به اندازه کافی بلند باشد. اگر طول پره کوتاه باشد ممکن است تنها بخشی از این روند در آن رخ دهد. مثلاً برای یک پره کوتاه با دمای ریشه قطعی، عدم قطعیت در توزیع دما می‌تواند از صفر در ریشه شروع شده و تا انتهای پره، پیوسته افزایش یابد.

۴-۶- توزیع عدم قطعیت

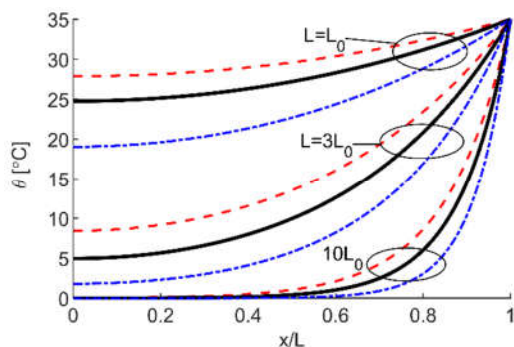
روابط (۲۷-الف و ب) توزیع دمای فازي بر مبنای gr -مشتق را ارائه می‌دهند که حاوی اطلاعات بسیار کاملتر و جامعتر از عدم قطعیت صرف می‌باشند. لکن مادام که هدف، صرفاً تعیین عدم قطعیت مربوط به توزیع دما در بدنه پره حرارتی باشد، می‌توان بر مبنای رابطه (۲) و با جایگذاری T -برش‌های موجود در روابط (۲۷-الف و ب) از روابط (۱۰) و (۱۷-ج)، فرمول زیر را برای محاسبه عدم قطعیت ارائه کرد

$$Un = U_3 \frac{\cosh\left(2x \sqrt{\frac{h_1}{k_3 d_3}}\right)}{\cosh\left(2L \sqrt{\frac{h_1}{k_3 d_3}}\right)} - U_1 \frac{\cosh\left(2x \sqrt{\frac{h_3}{k_1 d_1}}\right)}{\cosh\left(2L \sqrt{\frac{h_3}{k_1 d_1}}\right)} \quad (28)$$

با استفاده از رابطه (۲۸)، می‌توان به سوالات متعدد درباره عدم قطعیت توزیع دما از جمله اثر پارامترهای ورودی و محل و مقدار عدم قطعیت پیشینه پاسخ داد. اینجا جهت کاهش حجم و رعایت قالب مجله، تنها به تشریح اثر طول پره روی عدم قطعیت توزیع دما بسنده می‌کنیم.

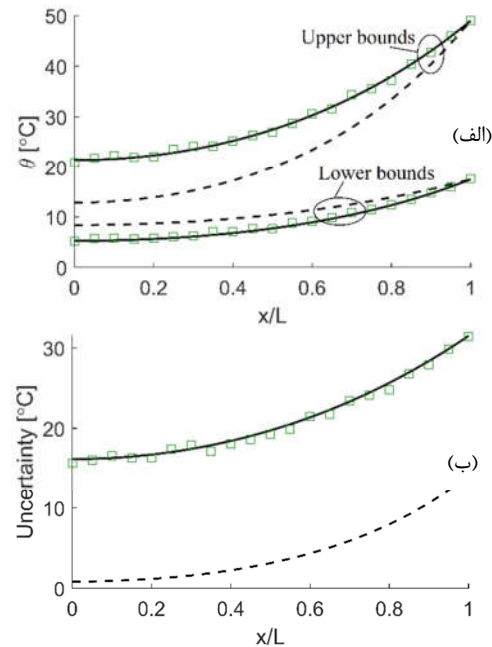
۵-۶- اثر طول پره

توزیع دما و عدم قطعیت آن مطابق رویکرد گرنیولار برای پارامترهای مثال ۳ به ازای سه مقدار مختلف برای طول پره $L = L_0 = 8\text{cm}$ ، $L = 3L_0$ و $L = 10L_0$ به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰- توزیع دما با استفاده از رویکرد گرنیولار برای مثال ۳ به ازای طول‌های مختلف پره حرارتی

شکل ۱۱ حاکی از آن است که توزیع عدم قطعیت برای پره بلند $L = 10L_0$ کاملاً با آزمایش مجازی که در بالا تشریح شد، منطبق

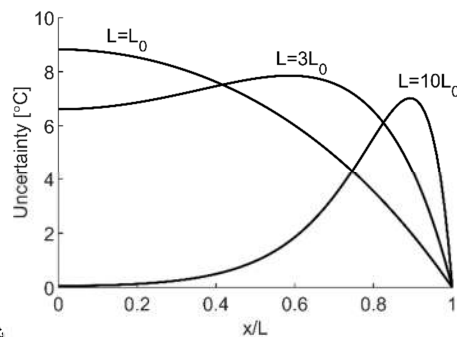


شکل ۹- مقایسه نتایج کار حاضر با روش شبیه سازی مونت کارلو: (الف) حد پایین و حد بالای توزیع دما (ب) عدم قطعیت توزیع دما. خط چین، خط توپر و علامت مربع به ترتیب نتایج حاصل از مشتق هوکوهارا، مشتق گرنیولار و روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشند.

۳-۶- تشخیص رفتار عدم قطعیت بر پایه فیزیک مسئله

در مسئله حاضر، عدم قطعیت از دو محل نشأت می‌گیرد. یکی دمای ریشه پره است که از طریق U اعمال می‌گردد و دیگری عدم قطعیتی است که حین انتشار دما در طول پره ایجاد می‌گردد. عامل این بخش از عدم قطعیت، پارامتر m است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، ابتدا فرض کنید که دمای ریشه به صورت قطعی مشخص است و عامل عدم قطعیت فقط پارامتر m است. عدم قطعیت مربوط به m می‌تواند از هر یک از پارامترهای k ، h و d ناشی شود. جهت سادگی فرض کنید این عدم قطعیت صرفاً ناشی از پارامتر k یعنی جنس پره حرارتی باشد. به عبارت دیگر فرض کنید که اطلاع کافی در مورد جنس پره حرارتی نداریم. حالا می‌خواهیم ببینیم این ناآگاهی چگونه موجب عدم قطعیت در توزیع دما در طول پره خواهد بود. بدین منظور چند میله به اندازه کافی بلند با جنس‌های مختلف (عدم قطعیت در جنس) را در نظر بگیرید. سطح مقطع ابتدایی این میله‌ها (ریشه) در دمای ثابت (مثلاً 100°C) نگه داشته شده است. حالا از چند نفر می‌خواهیم که هر کدام به صورت تصادفی انتهای یکی از میله‌ها را لمس کرده و در مورد دمای آن اظهار نظر کنند. مسلماً اظهار نظر این افراد صرف نظر از اینکه کدام میله را لمس کرده اند، به همدیگر خیلی نزدیک خواهد بود. چون دمای نقاط انتهایی آن صرف نظر از جنس میله، به دمای محیط نزدیک خواهد بود. در مرحله بعد، از همان افراد می‌خواهیم دوباره همانند مرحله قبلی میله‌ها را لمس کنند ولی این بار نقطه مورد نظر به جای انتها، به ابتدای میله نزدیک باشد. در این صورت اظهار نظر آنها در مورد دمای آن نقطه می‌تواند خیلی متفاوت باشد. چون اگر یکی از آنها به عنوان مثال میله مسی و دیگری میله چوبی را لمس کرده باشند، تفاوت قابل توجهی در دما را احساس خواهند کرد.

است. همچنین مشاهده می‌کنیم که برای پره‌های کوتاهتر، متناسب با طول آنها، تنها قسمتی از روند مربوط به یک پره بلند رخ می‌دهد که این نیز با فیزیک مسئله سازگاری کامل دارد.



شکل ۱۱-

توزیع عدم قطعیت مربوط به دما با استفاده از رویکرد گرینولار برای مثال ۳ به ازای طول‌های مختلف پره حرارتی

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، اثر عدم قطعیت در ابعاد هندسی، خواص فیزیکی و دمای ریشه پره حرارتی و ضریب انتقال حرارت جابجایی روی توزیع دما در بدنه پره حرارتی مطالعه شد. بدین منظور، معادله دیفرانسیل فازی حاکم بر مسئله با استفاده از مفهوم مشتق فازی حل گردید. نتایج نهایی به طور خلاصه عبارتند از:

- استفاده از مشتق هوکوهاری قویاً تعمیم یافته، برای مسئله تحت بررسی به جواب‌های نامعتبر منجر می‌شود.
- استفاده از مشتق گرینولار به عنوان یک مشتق فازی نوظهور، در عین سادگی جوابهای معتبر و موافق با فیزیک مسئله برای توزیع دمای فازی و عدم قطعیت ارائه می‌دهد.
- نتایج حاصل از رویکرد مشتق گرینولار و شبیه‌سازی مونت کارلو تطابق بسیار خوبی با همدیگر دارند.
- با ارائه یک آزمایش مجازی نشان داده شد که روند و رفتار کلی پیش‌بینی شده برای عدم قطعیت توزیع دما در بدنه پره حرارتی مستقیم به وسیله رویکرد مشتق گرینولار با فیزیک حاکم بر مسئله انتقال حرارت در پره‌های حرارتی، سازگارند.

۸- مراجع

- [۵] مهربانی گوهری، ا.، مهدوی ه.، و قائد شرف م.، مقایسه عملکرد و حساسیت پارامترهای تاثیرگذار در دو پیشران آب اکسیژنه و نیتروز اکسید با استفاده از آنالیز عدم قطعیت. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۵۰، ش. ۳، ص ۲۳۳-۲۳۷، ۱۳۹۹.
- [6] Bede, B., *Studies in fuzziness and soft computing, in Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer, 2013.
- [7] Wang, C. and Qiu Z. P., Fuzzy finite difference method for heat conduction analysis with uncertain parameters. *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 30, No.3, pp. 383-390, 2014.
- [8] Wang, C., Qiu Z., and Xu M., Collocation methods for fuzzy uncertainty propagation in heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 107, pp. 631-639, 2017.
- [9] Yang, X. and Yao K., Uncertain partial differential equation with application to heat conduction. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 16, No.3, pp. 379-403, 2017.
- [10] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A. and Hasanoglu, A., On fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 265, pp. 1-23, 2015.
- [11] Gouyandeh, Z., Allahviranloo, T., Abbasbandy, S. and Armand, A., A fuzzy solution of heat equation under generalized Hukuhara differentiability by fuzzy Fourier transform. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 309, pp. 81-97, 2017.
- [12] Nicolai, B.M., Egea, J.A., Scheerlinck, N., Banga, J.R. and Datta, A.K., Fuzzy finite element analysis of heat conduction problems with uncertain parameters. *Journal of Food Engineering*, Vol. 103, No.1, pp. 38-46, 2011.
- [13] Gasilov, N., Amrahov Ş.E., and Fatullayev A., On a solution of the fuzzy Dirichlet problem for the heat equation. *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 103, pp. 67-76, 2016.
- [14] Zeinali, M., Shahmorad S., and Mirnia K., Fuzzy integro-differential equations: discrete solution and error estimation. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 10, No.1, pp. 107-122, 2013.
- [۱۵] زینالی م.، معادلات دیفرانسیل فازی با رویکردهای مختلف، انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ۱۳۹۷.
- [16] Bede, B. and Gal S.G., Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, Vol. 151, No.3, pp. 581-599, 2005.
- [17] Zeinali, M., The existence result of a fuzzy implicit integro-differential equation in semilinear Banach space. *Computational Methods for Differential Equations*, Vol. 5, No.3, pp. 232-245, 2017.
- [18] Zeinali, M. and Shahmorad S., An equivalence lemma for a class of fuzzy implicit integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 327, pp. 388-399, 2018.
- [19] Mazandarani, M., Pariz N., and Kamyad A.V., Granular differentiability of fuzzy-number-valued functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 26, No.1, pp. 310-323, 2017.
- [20] Bergman, T. L., Incropera, F. P., DeWitt, D. P. and Lavine, A. S., *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [21] Piegat, A. and Landowski M., Horizontal membership function and examples of its applications. *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 17, No.1, pp. 22-30, 2015.
- [22] Piegat A., and Pluciński M., *Fuzzy number addition with the application of horizontal membership functions*. The Scientific World Journal, 2015.
- [23] Bede, B., A note on "two-point boundary value problems associated with non-linear fuzzy differential equations". *Fuzzy sets and Systems*, Vol. 157, No.7, pp. 986-989, 2006.
- [1] Deshamukhya, T., Bhanja, D. and Nath, S., Heat transfer enhancement through porous fins: A comprehensive review of recent developments and innovations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 235, No.5, pp. 946-960, 2021.
- [2] Isukapalli S. S., *Uncertainty analysis of transport-transformation models*. Rutgers The State University of New Jersey-New Brunswick, 1999.
- [۳] طلعتی ف. و طاهری ع.ا.، بررسی عدم قطعیت در گرمایش القایی به وسیله میکرو و نانوذرات مغناطیسی در هایپرترمیا. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د ۴۸، ش. ۴، ص ۲۰۱-۱۹۵، ۱۳۹۷.
- [4] Tian, W., Heo, Y., De Wilde, P., Li, Z., Yan, D., Park, C.S., Feng, X. and Augenbroe, G., A review of uncertainty analysis in building energy assessment. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 93, pp. 285-301, 2018.