نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۹۷، جلد ۵۱، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰، صفحه ۵۰۷-۵۱۶ – پژوهشی کامل – DOI: 10.22034/jmeut.2022.12570

بررسی ارتعاشات آزاد ورق مشبک با استفاده از تحلیل هم هندسی

عبداله ویسی‌آرا دانشجوی دکتری، گروه مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران، abdveisiara@gmail.com

حمید محمدصدیقی* استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
گروه مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران، h.msedighi@scu.ac.ir

آرش رضا استادیار، گروه مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران، arashreza@gmail.com

چکیده

این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مشبک با حفره‌های داخلی با شکل‌های متفاوت، الگوهای مستطیلی و مثلثی با شرایط مرزی ساده و گیردار به کمک روش هم‌هندسی می‌پردازد. با در نظر گرفتن ورق میندلین- ریسنر با نظریه مرتبه اول برشی، روابط حاکم بر رفتار ورق و روابط کرنش جابجایی استخراج گردیده است. با استفاده از اصل همیلتون و فرم ضعیف معادلات حرکت، ماتریس‌های سختی و جرم محلی و کلی تشکیل شده و تبدیل به مسئله مقدار ویژه ارتعاشی شده است. از حل مسئله مقدار ویژه دستگاه معادلات خطی حاصل شده، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر تعیین شده است. مرتبه توابع پایه و تعداد نقاط کنترلی انتخابی برای تشکیل هندسه دقیق شکل بررسی شده و متناسب با هندسه ورق مشبک مورد اصلاح قرار گرفته است. پس از آن اثر قطرهای متفات سوراخ دایره‌ای و شکل حفره‌ها بر روی رفتار ارتعاشی ورق مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج حاصل شده با برخی منابع و حل نرم‌افزاری مقایسه گردیده است. در انتها رفتار ورق مشبک نیز بررسی شده است که نتایج نشان از دقت بالای روش هم هندسی در تحلیل ارتعاشات ورق مشبک است.

واژه‌های کلیدی: ورق مشبک، تحلیل هم‌هندسی، توابع پایه، نقاط کنترل، ارتعاشات آزاد، الگوی سوراخ.

Free vibration analysis of perforated plate using isogeometric analysis

A. Veisi Ara Department of Mechanical Engineering, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran

H. Mohammad Sedighi Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran
Department of Mechanical Engineering, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran

A. Reza Department of Mechanical Engineering, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran

Abstract

In this paper, Isogeometric analysis (IGA) based on nonuniform rational B-splines (NURBS) is developed to study the free vibration analysis of the perforated plates with different open hole shapes and hole patterns. In this way, the governing equilibrium equations of perforated plate and strain-displacement relations are obtained using the first-order shear-deformable plate theory. The optimal number of control points and the order of the NURBS basis functions are determined to perform physical geometry related to perforated plate geometry. The eigenvalue equations with linear stiffness are established using the weak form of motion equations, energy method and Hamilton principle. The vibrational frequencies and corresponding mode shapes of the perforated plate is derived from governing eigenvalue equations. The results of linear vibrations of plate with central hole are validated considering the previously reported data and finite element analysis, which showed a good agreement. Thereafter, the influence of hole size and shape are explored on the linear vibrations of the plate with hole in same hole area ratio. Further, the effect of the triangular and rectangular pattern under the fully clamped and simply boundary conditions is presented.

Keywords: Perforated plate, Isogeometric analysis, Bassis function, Control points, Free vibration, holes pattern.

۱- مقدمه

ورق‌ها با توجه به نسبت مقاومت به وزن مناسبی که دارند به طورگسترده‌ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. اما با توجه به شرایط طراحی و محل نصب ورق‌ها در سازه‌ها، اغلب سوراخ و یا برش در مرز و لبه‌های آنها ایجاد می‌شود. امروزه باتوجه به استفاده روزافزون از سازه‌های مشبک در زمینه‌های مختلف صنایع مانند معماری و عمران (صفحات جاذب صدا)، صنایع غذایی(فرایند غربال-گری مواد غذایی)، صنایع فولاد(غربال‌گری گندله) و صنایع شیمیایی(فیلترها، پمپ‌های سانترفیوژ و تصفیه کننده‌های گازها) بررسی رفتار ورق‌های مشبک از لحاظ مشخصه‌های ارتعاشی، امری ضروری است [۱]. یکی از روش‌های عددی قدرتمند در حل این گونه مسائل مهندسی، روش اجزای محدود است که در آن هندسه جسم به المان‌های کوچک تقسیم می‌شود. از آنجا که شبکه‌بندی المان محدود تنها یک تقریب از هندسه است می‌تواند باعث شود که جواب‌های با دقت کمتر بدست آید [۲]. هیوز و همکاران [۲] برای حل مشکل بیان شده، تحلیل هم‌هندسی[1] را در سال ۲۰۰۵ معرفی کردند. در روش هم-هندسی ابتدا هندسه دقیق به وسیله سطوح NURBS[2] ایجاد شده و از همان متغیرهای مدل‌سازی هندسه مسئله برای تقریب متغیرهای تابع میدان مجهول استفاده می‌شود. فروغی و همکاران [۳] از روش هم‌هندسی برای یافتن خیز و ارتعاشات تیر کامپوزیتی استفاده شده است. ویگر و همکاران [۴] با استفاده از روش هم هندسی مدل‌سازی و شبیه‌سازی دقیق برای تیر سه بعدی غیرخطی با سطح مقطع متغیر و ساخته شده از مواد مختلف را انجام داده است. شجاعی و همکاران [۵]، ارتعاشات آزاد ورق بر پایه تحلیل هم‌هندسی را با استفاده از نظریه کلاسیک بررسی کرده‌اند. آنها فرکانس‌های ورق مربعی ، دایروی و L-شکل همسانگرد با شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده را به روش هم‌هندسی با انتخاب تابع مرتبه سه بدست آوردند. وجود سوراخ در

[1] Isogeometric analysis
[2] NonUniform Rational B-Splines

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: h.msedighi@scu.ac.ir

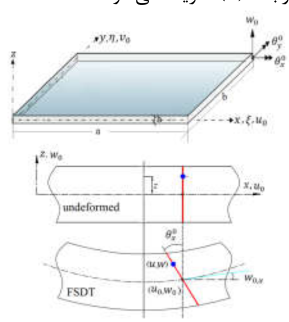
تاریخ دریافت: ۹۹/۰۷/۱۲
تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۲/۰۴

ورق‌ها، به خصوص سوراخ‌های خارج از مرکز باعث تغییرات قابل ملاحظه‌ای بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سازه‌ها می‌شود [۶]. گراسی [۷] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی با سوراخ دایره‌ای را با در نظر گرفتن دوران صفحه میانی، با استفاد از روش تحلیلی بهینه سازی شده ریلی ریتز برای شرایط مرزی مختلف بررسی نموده است. کلیتا و هلدر [۸] با استفاده از المان نه گرهی هم‌پارامتری یک ورق مربعی با سوراخ مربعی را با شرایط مرزی متفاوت بررسی نموده است. رائول و همکاران [۹] با ثابت نگه داشتن نسبت اضلاع و نسبت مساحت سوراخ‌ها در یک ورق مرکب، تغییرات رفتار ارتعاشی ورق با شکل سوراخ‌های متفاوت را برای تعیین بهترین محل سوراخ‌ها در ورق، با استفاده از نرم‌افزار ANSYS را مورد بررسی قرار دادند. ژانگ و همکاران[۱۴] با استفاده از ترکیب روش هم هندسی و روش بدون المان به بررسی ارتعاشات و تغییر شکل ورق با نظریه کیرشهوف[1] پرداختند. بری و تنبور [۱۵] ارتعاشات ورق مشبک با حفره‌های مستطیل شکل و الگوی مستطیلی با شرایط تکیه گاهی ساده را با استفاده از خواص معادل مواد حاصل از نظریه الاسیسته تحلیل نموده و در ادامه فرکانس‌های طبیعی حاصل با حل نرم‌افزاری مقایسه نمودند. در این روش چگالی و ضریب الاسیسته معادل محاسبه شده ولی از تغییرات ضریب پواسون صرف نظر شده است. کنیچنی و همکاران [۱۶] تنش‌های ورق دایره‌ای متقارن همسان‌گرد[2] و مشبک شده با سوراخ‌های دایره‌ای شکل را با اعمال بار متمرکز در مرکز ورق به کمک نرم‌افزار ABAQUS تحلیل کردند و نتایج را با روش تجربی مقایسه نمودند. برای تعیین مختصات نواحی تمرکز تنش از روش اجزاء محدود استفاده شد. اما اختلاف نتایج بین روش تجربی و حل نرم‌افزاری تا ۳۶ درصد بوده است. در تحقیقی دیگر سلیمانی و همکاران [۱۷] با استفاده از یک مدل ریاضی، ارتعاشات آزاد یک ورق مشبک از جنس مواد مرکب با تکیه‌گاه ساده را تحت بار ناشی از کمانش حرارتی و القاء حرارتی تحلیل نموده و با مقالات دیگر مقایسه نمودند. سفتی و چگالی به کمک توابع توزیع هوی ساید به صورت محلی تعریف شده است.

با توجه به اهمیت و کاربردهای متنوع ورق‌های با حفره‌های داخلی و ضرورت تحلیل رفتار ارتعاشی این نوع ورق‌ها، روشهای متفاوت تحلیلی، تجربی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته است که نشان می‌دهد حل تحلیلی ورق مشبک با حفره‌های با اشکال متفاوت پیچیده و زمانبر است. برای حل عددی این‌گونه مسائل، یکی از روش‌های عددی قدرتمند، روش اجزا محدود است که تقریب هندسه در این روش ممکن است در تحلیل شکل‌های پیچیده باعث به دست آمدن جواب‌های با دقت کمتر شده و زمان زیادی نیز صرف شبکه‌بندی آن شود. از آنجایی که روش هم‌هندسی با استفاده از توابع NURBS، مدل-سازی دقیق هندسه ورق و حفره‌ها با اشکال متفاوت و پیچیده را به راحتی انجام می‌دهد و از طرفی امکان افزایش یا کاهش درجه پیوستگی و تعداد نقاط کنترل به طور همزمان در آن وجود دارد، در این مقاله سعی شده است تا برای اولین بار با استفاده از تحلیل هم‌هندسی رفتار ارتعاشی ورق‌های سوراخ‌دار با قطر و تعداد سوراخ‌های متفاوت، سوراخ هم‌مرکز و خارج از مرکز، سوراخ با اشکال متفاوت و ورق مشبک با الگوی سوراخ‌های مستطیلی و مثلثی تحلیل شود. به این منظور روابط حاکم بر رفتار ورق با استفاده از نظریه میندلین و روابط کرنش جابجایی استخراج گردیده است و با انتخاب مرتبه توابع NURBS و تعداد نقاط کنترل بهینه متناسب با فیزیک مساله، هندسه شکل به صورت دقیق تشکیل شده است و پس از آن پاسخ ارتعاشی ورق سوراخ دار استخراج شده است و در انتها، با تعمیم این روش ورق مشبک نیز با دقت خوبی تحلیل شده است.

۲- معادلات حرکت

با در نظر گرفتن یک المان ورق مستطیلی از مواد همسان‌گرد به ابعاد $a \times b$ و به ضخامت h معادلات حرکت استخراج شده است و مشابه روش هم‌پارامتری در روش اجزای محدود المان مستطیلی به المان با شکل مورد نظر جهت تشکیل ورق مشبک نگاشت شده است. دامنه صفحه به صورت $\hat{V} = \Omega \times (-h/2, h/2)$ تعریف شده است که در آن $\Omega \in R^2$ است. با استفاده از نظریه میندلین تغییر شکل برشی در معادلات در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). برای هر نقطه از ورق میدان جابجایی به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود [۲۰-۱۸]:



شکل ۱- المان ورق میندلین

$$u(x,y,z,t) = u_1(x,y,t) + z u_2(x,y,t) + f(z) u_3(x,y,t) \qquad (۱)$$

تابع $f(z)$ با توجه به فرض نظریه برشی مرتبه اول $f(z) = z$ و:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix},\ u_1 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix},\ u_2 = -\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \end{Bmatrix},\ u_3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

u_0, v_0 و w به ترتیب جابجایی‌ها در راستای محورهای x y و z سطح میانی ورق است و θ_x و θ_y به ترتیب دوران‌های نقاط نسبت به قبل از تغییر شکل، حول محورهای x و y هستند. بنابراین جابجایی و کرنش‌ها عبارت است از:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\theta_x(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \qquad (۳)$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z = 0 \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \qquad (۴)$$

با فرض کوچک بودن جابجایی‌ها نسبت به ضخامت روابط کرنش-جابجایی در ورق به صورت زیر تعریف می‌شود:

[1] Kirchhoff
[2] Isotropic

$$\varepsilon=\varepsilon^{m}+z\,\varepsilon^{b}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x}-\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_y+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ -\theta_x+\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{۵}$$

بالانویس‌های b, m و s، به ترتیب نماینده کرنش‌های غشایی، خمشی و برشی است. بر اساس قانون هوک برای مواد همسان‌گرد داریم که:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\ C_{12}&C_{11}&C_{13}&0&0&0\\ C_{13}&C_{13}&C_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&C_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&C_{55}&0\\ 0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[C]\{\varepsilon\} \tag{۶}$$

با فرض تنش صفحه‌ای رابطه (۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$\{\sigma\}=[\hat{C}]\{\varepsilon\},\ [\hat{C}]=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0&0&0\\ C_{12}&C_{11}&0&0&0\\ 0&0&C_{66}&0&0\\ 0&0&0&C_{44}&0\\ 0&0&0&0&C_{55}\end{bmatrix} \tag{۷}$$

نیروهای ناشی از تنش‌های درون صفحه‌ای N، گشتاورها M و نیروی Q ناشی از تنش برشی وارد بر المان ورق در واحد طول عبارتند از:

$$\{N_x\,,N_y\,,N_{xy}\}=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\}\,dz$$

$$\{M_x\,,M_y\,,M_{xy}\}=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\}z\,dz \tag{۸}$$

$$\{Q_x,Q_y\}=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{\tau_{xz},\tau_{yz}\}\,dz$$

با جاگذاری روابط (۵) و (۷) در رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[A]&[B]\\ [B]&[D]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^{m}\\ \varepsilon^{b}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{55}&C_{54}\\ C_{45}&C_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{zx}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=[D^{s}]\{\gamma\} \tag{۹}$$

بنابراین نیروهای کششی، گشتاورها و نیروهای برشی عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}\\ A_{12}&A_{22}&A_{26}\\ A_{16}&A_{26}&A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x}-\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۱۰}$$

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x}-\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۱۱}$$

$$\begin{bmatrix}Q_x\\ Q_y\end{bmatrix}=\kappa\begin{bmatrix}A_{44}&A_{45}\\ A_{45}&A_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_y+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ -\theta_x+\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

به دلیل تقارن ضخامت نسبت به سطح میانتار [B] برابر صفر است و از رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$[A]=\frac{Eh}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1&\upsilon&0\\ \upsilon&1&0\\ 0&0&\dfrac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}\ ,$$

$$[D]=\frac{h^2}{12}[A]\quad,\qquad [D^{s}]=\frac{E\kappa h}{2(1+\upsilon)}\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

در رابطه فوق، E مدول یانگ، υ نسبت پواسون و $\kappa=\frac{5}{6}$ ضریب تصحیح برشی است. از طرف دیگر انرژی کرنشی ذخیره شده در المان حاصل جمع انرژی ناشی از تغییر شکل‌های خمشی و برشی است که در فرم ضعیف بدین صورت بیان می‌شود:

$$U=\frac{1}{2}\int_V\{\epsilon\}^{T}\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\ C_{12}&C_{22}&0\\ 0&0&C_{66}\end{bmatrix}\{\epsilon\}dV+\frac{1}{2}\int_V\{\tau\}^{T}\begin{bmatrix}C_{44}&0\\ 0&C_{55}\end{bmatrix}\{\gamma\}dV \tag{۱۴}$$

و انرژی جنبشی صفحه نیز عبارت است از:

$$T=\frac{1}{2}\int_V\rho(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)dV \tag{۱۵}$$

با اسفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم ارتعاشات آزاد ورق به فرم ضعیف استخراج شده است:

$$-\int_0^{t}(\delta\Pi_S-\Pi_K+\Pi_I)dt=0 \tag{۱۶}$$

جایی که Π_K,Π_S و Π_I انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل هستند و تغییرات آنها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta\Pi_S=\int_V\big(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}\big)dV \tag{۱۷}$$

با جاگذاری روابط (۷) ،(۵) و (۱۴) در رابطه (۱۸) خواهیم داشت:

$$\delta\Pi_S=\int_V\left((\delta\varepsilon^{b})^{T}\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\ C_{12}&C_{22}&0\\ 0&0&C_{66}\end{bmatrix}\varepsilon^{b}+(\delta\gamma)^{T}\begin{bmatrix}C_{44}&0\\ 0&C_{55}\end{bmatrix}\gamma\right)dV=\delta\Pi_1+\delta\Pi_2 \tag{۱۸}$$

$$\Pi_1=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_\Omega\left((\varepsilon^{b})^{T}\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\ C_{12}&C_{22}&0\\ 0&0&C_{66}\end{bmatrix}\delta\varepsilon^{b}d\Omega\right)(z^2)dz=\int_\Omega((\varepsilon^{b})^{T}[D]\delta\varepsilon^{b})d\Omega$$

$$\Pi_2=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_\Omega\left((\gamma)^{T}\begin{bmatrix}C_{44}&0\\ 0&C_{55}\end{bmatrix}\delta\gamma d\Omega\right)(1)dz=\int_\Omega((\gamma)^{T}[D^{s}]\delta\gamma^{b})d\Omega \tag{۱۹}$$

و تغییر انرژی جنبشی سیستم جرم نیز عبارت است از:

$$\delta\Pi_K=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_\Omega\rho\big(\delta u^{T}I\ddot{u}d\Omega\big)dz=\int_\Omega(\delta u^{T}m\ddot{u})d\Omega \tag{۲۰}$$

به طوری ρ جرم حجمی و ماتریس جرم برابر است با:

$$m=\rho*I\quad,\qquad I=\begin{bmatrix}I_1&I_2&I_4\\ I_2&I_3&I_5\\ I_4&I_5&I_6\end{bmatrix}$$

$$(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6)=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}(1,z,z^2,0,0,z^2)dz \tag{۲۱}$$

انرژی پتاسیل ناشی از تنش اولیه برابر است با:

$$\delta\Pi_I=\int_\Omega\delta\begin{Bmatrix}w_{,x}\\ w_{,y}\end{Bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}N_{xx}&N_{xy}\\ N_{xy}&N_{yy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{,x}\\ w_{,y}\end{Bmatrix}d\Omega \tag{۲۲}$$

با جاگذاری معادلات (۱۸) تا (۲۳) در معادله (۱۷) فرم ضعیف تحلیل دینامیکی سیستم نامیرا به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\int_{\Omega}((\delta\varepsilon^{b})^{T}D\varepsilon^{b})d\Omega + \int_{\Omega}((\gamma)^{T}[D^{s}]\delta\gamma^{b})d\Omega + \int_{\Omega}(\delta u^{T}m\ddot{u})d\Omega = 0 \qquad (۲۳)$$

تا این مرحله، روابط برای المان ورق مستطیلی بدون سوراخ استخراج شده است. در ادامه کار با تعریف تحلیل هم هندسی، ضرایب تصحیح در حل روابط استخراج شده در اثر نگاشت المان مستطیل شکل به المان تغییر شکل یافته در اثر ایجاد سوراخ در شبکه‌بندی ورق سوراخ دار و نگاشت حاصل از حل عددی این معادلات در فضای انتخابی تعیین شده است.

۳- تحلیل هم هندسی

در یک دامنه پارامتری یک بعدی، توابع پایه Bspline با استفاده از مجموعه‌ای از مختصات غیرکاهشی $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_{n+p+1}\}$ به نام بردار گرهی تشکیل می‌شود در این بردار، گره‌ها $\xi_i \in R$، p مرتبه چندجمله‌ای Bspline و n تعداد نقاط کنترلی یا توابع پایه است. در یک بردار گرهی باز، تعداد گره‌های ابتدا و انتها p+1 بار تکرار شده و در انتهای فواصل پارامتری، درونیاب هستند و همچنین در مرز دارای پیوستگی C^{-1} یا گسستگی است. معمولاً مقادیر گرهی با $\xi_1 = 0$ و $\xi_{n+p+1} = 1$ نرمالیزه می‌شوند. تابع پایه دارای پیوستگی C^{∞} درون یک بازه گرهی و پیوستگی C^{p-k} با k بار تکرار گره است. هر بردارگرهی شامل n-p بازه گرهی بوده که در صورت تکرار مقادیر، صفر خواهند شد. با داشتن بردار گرهی و درجه توابع پایه، می‌توان توابع پایه را با استفاده از رابطه بازگشتی Cox de Boor به‌صورت زیر تعریف نمود [۲۱]:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1} \\ 0, & \text{others} \end{cases}, \quad P = 0$$
$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1} + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}, \quad P > 1 \qquad (۲۴)$$

با استفاده از رابطه (۲۵) منحنی Bspline $C(\xi)$ با درجه p در قالب رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)P_i \quad , \quad 0 \le \xi \le 1 \qquad (۲۵)$$

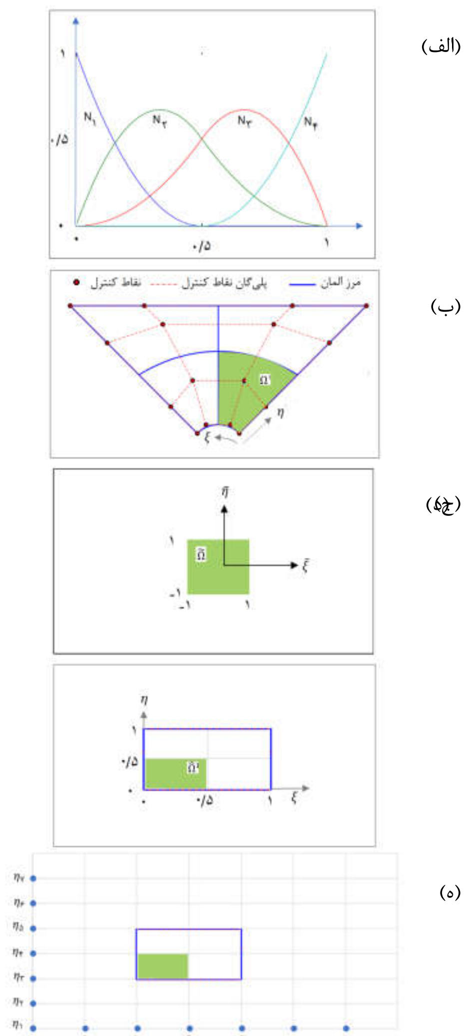
منحنی فوق، یک چندجمله‌ای قطعه‌ای[1] است، که در آن P_iها نقاط کنترل در مختصات فیزیکی هستند. از آن‌جا که منحنی‌های Bspline چند جمله‌ای هستند، نمی‌توانند در منحنی‌های ساده کسری، به عنوان مثال دایره‌ها و بیضی‌ها مفید باشند. برای رفع این مشکل، Bsplineها به توابع Bspline غیریکنواخت نسبتی(NURBS) یا منحنی‌های کسری نسبتی تعمیم داده شده طبق رابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^{n} N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}}$$
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_i^p(\xi)P_i \quad , \quad W(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)w_i \qquad (۲۶)$$

که در آن $W(\xi)$ تابع وزن می‌باشد. همچنین سطح NURBS از رابطه (۲۸) به دست می‌آید:

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)P_{i,j}$$
$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^{n}\sum_{\hat{j}=1}^{m} N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \qquad (۲۷)$$

در عبارت فوق، $p_{i,j}$ شبکه‌ای از m× n نقاط کنترل است. همچنین، $w_{i,j}$ وزن‌های مربوط به هر نقطه کنترل و $N_{i,p}(\xi)$ و $M_{i,q}(\eta)$ توابع پایه Bspline هستند که به صورت رابطه (۲۵) بر روی بردارهای گره‌ای تعریف شده است [۲۳- ۲۱]. درجه و بردار گرهی با توجه به شکل و شرایط مسئله مانند اجزای محدود به انتخاب تحلیل‌گر است. یک ربع صفحه مربعی با سوراخ مرکزی از ضرب تانسوری بردارهای گرهی $H= \Xi =\{0,0,0,0.5,1,1,1\}$ و توابع پایه درجه دوم در جهات ξ و η با یک شبکه ۲ × ۲ از المان‌های ورق در فضای فیزیکی در شکل ۲-الف و ۲-ب به عنوان یک وصله[2] با ۱۶ نقطه کنترل نمایش داده شده است.



شکل ۲- نمایش نحوه مدل فیزیکی با استفاده از توابع NURBS (الف) تابع پایه درجه۲ با گره اضافی (ب) مدل فیزیکی (ج) المان مادر (د) فضای پارامتری (ه) فضای اندیسی

[1] Piecewise

[2] patch

برای تشکیل هندسه کامل یک سازه ممکن است چندین وصله نیاز باشد و با توجه به شرایط مساله تعداد نقاط کنترل و المان‌های هر وصله افزایش می‌یابد. برای تشکیل یک ورق سوراخ‌دار از ۴ وصله استفاده شده است (شکل ۳). به منظور حل انتگرالی عددی از روش گوس مربعی استفاده شده است. انتگرال‌گیری در فضای فیزیکی با انتقال به فضای پارامتری و فضای مادر انجام شده است (شکل۲). نگاشت از فضای مادر به فضای پارامتری با تابع انتقال $\tilde{\phi}: \tilde{\Omega} \to \hat{\Omega}$ و از فضای پارامتری به فضای فیزیکی با تابع انتقال $S: \hat{\Omega} \to \Omega$ صورت پذیرفته است. بنابراین انتقال از فضای مادر به فضای فیزیکی به صورت ترکیبی $X = S \circ \tilde{\phi}$ است. در فضای دو بعدی فواصل پارامتری یا گرهی غیر صفر هر المان سطح $\hat{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \otimes [\eta_i, \eta_{i+1}]$ ، نگاشت $\tilde{\phi}: \tilde{\Omega} \to \hat{\Omega}$ به صورت رابطه (۲۹) و جاکوبی مربوطه به صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌شود به طوری که $\otimes$ در تعریف سطح المان، ضرب کرونکر است. همچنین ماتریس جاکوبی انتقال نگاشت $S: \hat{\Omega} \to \Omega$ نیز به صورت رابطه (۳۰) نوشته می‌شود. ماتریس جاکوبی این انتقال نیز به صورت روابط (۳۱، ۳۲) بیان می‌گردد

$$\tilde{\phi}^e \begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\xi_{i+1}-\xi_i)\xi + \frac{1}{2}(\xi_{i+1}-\xi_i) \\ \frac{1}{2}(\eta_{j+1}-\eta_j)\xi + \frac{1}{2}(\eta_{j+1}+\eta_j)\end{Bmatrix} \tag{۲۸}$$

$$|\tilde{J}| = \frac{1}{4}(\xi_{i+1}-\xi_i)(\eta_{j+1}-\eta_j) \tag{۲۹}$$

$$|\hat{J}| = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

$$|\hat{J}| = \begin{bmatrix} \sum_{a=1}^{n_e} \frac{\partial R_a}{\partial \xi} x_a & \sum_{a=1}^{n_e} \frac{\partial R_a}{\partial \eta} x_a \\ \sum_{a=1}^{n_e} \frac{\partial R_a}{\partial \xi} y_a & \sum_{a=1}^{n_e} \frac{\partial R_a}{\partial \eta} y_a \end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

به طوری که n_e تعداد توابع پایه هر المان می‌باشد. بنابراین جاکوبی مربوط به نگاشت ترکیبی $X = S \circ \tilde{\phi}$ به صورت رابطه (۳۳) است:

$$|J| = |\tilde{J}|.|\hat{J}| \tag{۳۲}$$

با تعیین نگاشت ترکیبی و جاکوبی مربوطه، امکان انتگرال‌گیری عددی با استفاده از روش گوس مربعی در فضای فیزیکی از المان مادر با رابطه انتقال به صورت رابطه (۳۴) صورت می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \int f(x,y)dxdy &= \sum_e^{N_{el}} \int\int_{\Omega^e} f(x,y)dxdy \\ &= \sum_e^{N_{el}} \int\int_{\hat{\Omega}^e} f(\xi,\eta)|\hat{J}|d\xi d\eta \\ &= \sum_e^{N_{el}} \int\int_{\tilde{\Omega}^e} f(\xi,\eta)|\hat{J}|.|\tilde{J}|d\tilde{\xi}d\tilde{\eta} \\ &= \sum_e^{N_{el}} \int\int_{\tilde{\Omega}^e} f(\xi,\eta)|J|d\tilde{\xi}d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

e line

)

به طوری که N_{el} تعداد المان‌ها است. همانطور که مشخص است مقادیر انتگرال با روابط انتقال بدست آمده است.

۴- تحلیل ارتعاشی

برای به دست آوردن روابط ارتعاشی به کمک روش هم هندسی نیاز است که ابتدا معادلات جابجایی ورق در دستگاه تعمیم یافته استخراج شود. ابتدا روابط المان صفحه خمشی ضخیم استخراج شده است. با توجه به مجهولات و درجات آزادی اصلی گره‌ها در راستای u, v, w, θ_x و θ_y ابتدا معادلات تعمیم یافته به صورت رابطه (۳۵) تعریف شده و سپس با صرف نظر از روابط اینرسی درون صفحه‌ای درجات آزادی هر گره المان به سه درجه w، θ_x و θ_y کاهش می‌یابد. توابع NURBS در جهات ξ و η تعریف شده است[۲۳, ۲۰]:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_y^0 \\ \theta_x^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{R^u\}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{R^u\}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{R^w\}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{R^{\theta_y}\}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{R^{\theta_x}\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_{\theta_y} \\ q_{\theta_x} \end{Bmatrix} \tag{۳۴}$$

جایی که $\{q_u\},\{q_v\}$ و $\{q_w\}$ بردارهای تعمیم یافته داخل و خارج از صفحه جابجایی و $\{q_{\theta_y}\}$ و $\{q_{\theta_x}\}$ بردارهای تعمیم یافته دوران‌ها هستند. توابع NURBS $[R]$ بردارهای سطری یک بعدی درون و برون صفحه‌ای و دورانی مرتبط با جابجایی‌های تعریف شده می‌باشند که به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\{R^u\}^T = \{g_1(\xi)g_1(\eta), g_1(\xi)g_2(\eta), \cdots, g_{pi}(\xi)g_{pi}(\eta)\} \\ &\{R^w\}^T = \{f_1(\xi)f_1(\eta), f_1(\xi)f_2(\eta), \cdots, f_{po}(\xi)f_{po}(\eta)\} \\ &\{R^{\theta_y}\}^T \\ &= \left\{\theta_{y_1}(\xi)\theta_{y_1}(\eta), \theta_{y_1}(\xi)\theta_{y_2}(\eta), \cdots, \theta_{y_{p\theta_y}}(\xi)\theta_{y_{p\theta_y}}(\eta)\right\} \\ &\{R^{\theta_x}\}^T \\ &= \left\{\theta_{x_1}(\xi)\theta_{x_1}(\eta), \theta_{x_1}(\xi)\theta_{x_2}(\eta), \cdots, \theta_{x_{p\theta_x}}(\xi)\theta_{x_{p\theta_x}}(\eta)\right\} \end{aligned} \tag{۳۵}$$

در رابطه فوق $\{g\},\{f\},\{\theta_y\}$ و $\{\theta_x\}$ بردارهای درون صفحه‌ای، عرضی و دورانی توابع شکل جابجایی یک بعدی است. همچنین $po, pi, p\theta_y$ و $p\theta_x$ به ترتیب تعداد توابع شکل جابجایی عرضی، صفحه میانی در جهت x و y و دوران حول محورهای x و y بوده و ξ و η مختصات محلی می‌باشند. با جاگذاری توابع شکل از رابطه (۳۶) در روابط کرنش‌ها رابطه (۳۷، ۳۸) قابل محاسبه است

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{bmatrix} \{R^u_{,x}\}^T & 0 \\ 0 & \{R^u_{,y}\}^T \\ \{R^u_{,y}\}^T & \{R^u_{,x}\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_y \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon^b\} = \begin{bmatrix} -\{R^{\theta_y}_{,x}\}^T & 0 \\ 0 & \{R^{\theta_x}_{,y}\}^T \\ -\{R^{\theta_y}_{,y}\}^T & \{R^{\theta_x}_{,x}\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{\theta_y} \\ q_{\theta_x} \end{Bmatrix} = \tag{۳۶}$$

$$\{\varepsilon^s\} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{R^w_{,x}\}^T & \{R^{\theta_y}\}^T & 0 \\ \{R^w_{,x}\}^T & 0 & -\{R^{\theta_x}\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_w \\ q_{\theta_y} \\ q_{\theta_x} \end{Bmatrix} \tag{۳۷}$$

حسب روابط (۹)، (۱۲) و (۱۳) در استخراج ارتعاشات عرضی، استقلال نیروهای برشی و خمشی درون صحفه‌ای حاصل می‌شود و از آنجا که جابجایی‌های دورن صفحه‌ای صفحه میانتار بسیار کوچکتر از جابجایی‌های عرضی است چشم‌پوشی از اینرسی دورن صفحه‌ای معقول بوده و می‌توان معادلات حرکت را فشرده‌تر کرد و از روابط کششی $\{\varepsilon^m\}$ صرف نظر نمود. بنابر این درجات آزادی هر گره از المان به سه درجه کاهش می‌یابد. با توجه به کاهش درجات آزادی، با جاگذاری توابع شکل و روابط (۳۷) و (۳۸) در رابطه (۲۴) معادله حرکت می‌توان نوشت:

$$[\mathrm{K_1}^b] = \int_\Omega \begin{bmatrix} -\{R^{\theta_y}_{,x}\} & 0 & -\{R^{\theta_y}_{,y}\} \\ 0 & \{R^{\theta_x}_{,y}\} & \{R^{\theta_x}_{,x}\} \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} -\{R^{\theta_y}_{,x}\}^T & 0 \\ 0 & \{R^{\theta_x}_{,y}\}^T \\ -\{R^{\theta_y}_{,y}\}^T & \{R^{\theta_x}_{,x}\}^T \end{bmatrix} \mathrm{d}\Omega \qquad (۳۸)$$

$$[K_1^\gamma] = \kappa \int_\Omega \begin{bmatrix} \{R^w_{,x}\} & \{R^w_{,x}\} \\ \{R^{\theta_y}\} & 0 \\ 0 & -\{R^{\theta_x}\} \end{bmatrix} [D^s] \begin{bmatrix} \{R^w_{,x}\}^T & \{R^{\theta_y}\}^T & 0 \\ \{R^w_{,x}\}^T & 0 & -\{R^{\theta_x}\}^T \end{bmatrix} \mathrm{d}\Omega \qquad \mathrm{e}$$

$[\mathrm{K_1}^b]$ماتریس سفتی خمشی و $[\mathrm{K}_1^\gamma]$ ماتریس سفتی برشی است.

همچنین ماتریس جرم نیز به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} [M_b] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{R\theta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{R\theta_y}] \end{bmatrix} = \kappa \int_\Omega \begin{bmatrix} \{R^w\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{R^{\theta_y}\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{R^{\theta_x}\}^T \end{bmatrix} [m] \begin{bmatrix} \{R^w\} & 0 & 0 \\ 0 & \{R^{\theta_y}\} & 0 \\ 0 & 0 & \{R^{\theta_x}\} \end{bmatrix} \mathrm{d}\Omega \qquad (۴۰)$$

بنابراین ارتعاشات آزاد و معادلات حرکت در دستگاه مختصات تعمیم یافته مطابق رابطه(۴۲) است و معادلات کاهش یافته حرکت به با رابطه (۴۳) بازنویسی می‌شوند. بدین ترتیب با در نظر گرفتن دو تغییر متغیر از فضای اندیسی و پارامتری به فضای انتگرال‌گیری گوس و سپس به فضای فیزیکی مطابق رابطه (۳۴)، مقادیر عددی سفتی و جرم هر المان مشخص شده و با توجه به ارتباط گرهی هر المان در وصله‌ها و وصله‌ها با یکدیگر، ماتریس کلی سفتی و جرم تعیین شده است.

$$\begin{bmatrix} [M_b] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{R\theta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{R\theta_x}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_w \\ \ddot{q}_{\theta_y} \\ \ddot{q}_{\theta_x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_1^{\gamma^{11}}] & [K_1^{\gamma^{12}}] & [K_1^{\gamma^{13}}] \\ [K_1^{\gamma^{12}}] & [K_1^{b^{11}}] + [K_1^{\gamma^{22}}] & [K_1^{b^{12}}] + [K_1^{\gamma^{23}}] \\ [K_1^{\gamma^{13}}] & [K_1^{b^{12}}] + [K_1^{\gamma^{23}}] & [K_1^{b^{22}}] + [K_1^{\gamma^{33}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_w \\ q_{\theta_y} \\ q_{\theta_x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۴۱)$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \qquad (۴۲)$$

و رابطه کلی ارتعاشی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$([K] - \omega^2[M])\{w\} = 0 \qquad (۴۳)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاهی برای همه لبه‌ها به صورت ساده و یا گیردار در نظر گرفته شده است. مرز با تکیه‌گاه ساده با حرف مخفف S بیان می‌شود. در این نوع تکیه‌گاه جابجایی عمودی و ممان خمشی هر دو صفر است. برای زمانی که همه تکیه گاهها ساده باشند:

بر روی لبه‌های y=0 و y=b $\quad u_0 = v_0 = w = \theta_x = 0$

بر روی لبه‌های x=0 و x=a $\quad u_0 = v_0 = w = \theta_y = 0$

و مرز با تکیه‌گاه گیردار با حرف مخفف C مشخص می‌شود. در این نوع تکیه‌گاه، جابجایی و شیب هر دو صفر هستند؛ برای تمام لبه‌های گیردار:

بر روی لبه‌های x=0, x=a, y=0 و y=b $\quad u_0 = v_0 = w = \theta_x = \theta_y = 0$

پس از اعمال شرایط مرزی و تشکیل ماتریس‌های سفتی و جرم اصلاح شده، با حل مسئله مقدار ویژه حاصل شده، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استخراج شده است.

۵- مدل‌سازی

برای مدل‌سازی ورق مشبک ابتدا با استفاده از توابع NURBS، ورق مربعی با حفره داخلی با شکل‌های متفاوت مدل شده است و پس از صحت‌سنجی روش و بهبود مرتبه توابع پایه NURB و تعداد نقاط کنترل، روش برای مدل‌سازی ورق مشبک تعمیم داده است. روشهای بهبود[1] مرتبه توابع p و تعداد نقاط کنترل h به صورت مجزا و یا به طور همزمان k با کنترل پیوستگی در مرجع [۲۱] آورده شده است.

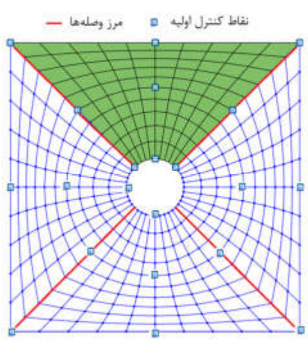
۵-۱- ورق با سوراخ دایره‌ای

ورقی مربعی با مشخصات جدول ۱ ابتدا مطابق شکل ۲-ب با توابع پایه درجه دوم شکل۲-الف مدل‌سازی شده است.

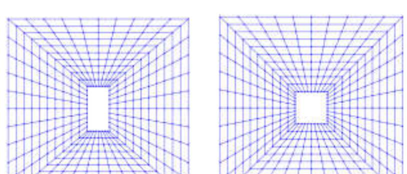
جدول ۱- مشخصات ورق با حفره داخلی

مشخصات	مقدار
ابعاد ورق $a \times b \times h$	۱×۱×۰/۰۱ متر
قطر سوراخ	۰/۱ متر
مدول الاسیسته E	۲۰۰ گیگاپاسکال
ضریب پواسون υ	۰/۳
چگالی	۷۸۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب

برای تابع درجه دوم انتخابی در فضای فیزیکی در هر جهت ξ و η فقط به سه نقطه کنترل نیاز است. بنابراین با تعیین ۹ نقطه وصله اول شکل مدل‌سازی شده است. با استفاده از ماتریس‌های دوران و انتقال امکان ساختن وصله‌های مشابه وجود دارد (شکل ۳). با بهینه سازی مدل و افزایش نقاط کنترل و مرتبه توابع تریز، تعداد المان‌های هر وصله و کل مدل افزایش داده شده است. شرایط مرزی تکیه ساده و گیردار اعمال شده است.

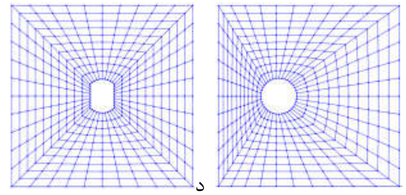


شکل ۳ - مدل‌سازی ورق با سوراخ دایره‌ای



الف ب ج

[1] p, h and k- refinements



شکل ۴- مدل‌سازی ورق با حفره‌های داخلی متفاوت الف)سوراخ مربعی ب) سوراخ مستطیلی ج)سوراخ خارج از مرکز د) محل خار

۵-۱-ورق با سوراخ‌های متفاوت

ورق مربعی با حفره داخلی خارج از مرکز دایره‌ای و با سوراخ‌های مربعی مستطیلی و بیضی با مساحتی برابر با مساحت سوراخ دایره‌ای مدل اولیه و با همان خواص مکانیکی و هندسی ورق قبل (جدول ۱) و تعداد نقاط کنترل مدل‌سازی شده است. از مدل با سوراخ خارج از مرکز (شکل ۴-ج) برای مدل‌سازی ورق مشبک با الگوی سوراخ‌های مثلثی استفاده شده است.

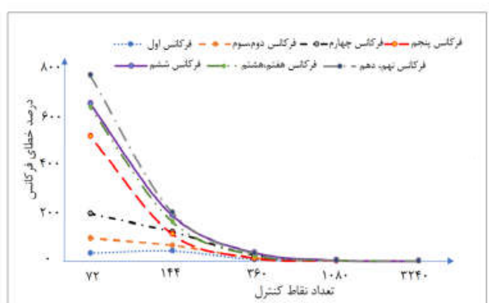
۵-۲- روش اجزاء محدود

ورق مسئله در محیط نرم‌افزار ANSYS با مشخصات معرفی شده با انتخاب ۱۰۰المان Shell281 مدل‌سازی شده است.

۶- نتایج

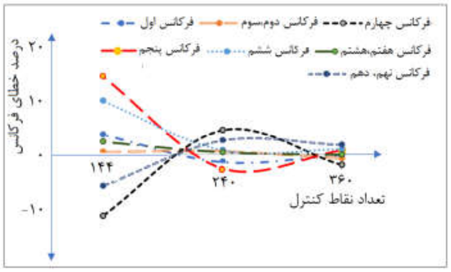
۶-۱- جدول‌ها و شکل‌ها

برای نشان دادن کارآیی روش تحلیل هم‌هندسی در بررسی ارتعاشات ورق‌های مشبک ابتدا یک ورق با سوراخ مرکزی با ۴ وصله و بردار گرهی درجه دوم با ۲۴ نقطه کنترل مطابق شکل ۳ مدل‌سازی شده است.



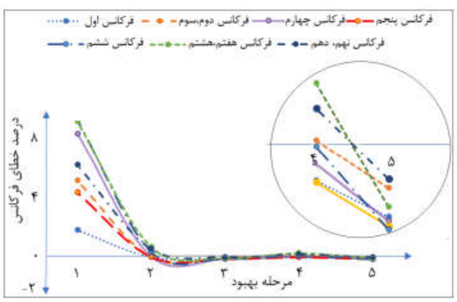
شکل ۵- همگرایی روش هم‌هندسی با افزایش نقاط کنترل

پس از مدل نمودن دقیق هندسه شکل با حداقل مرتبه توابع و تعداد نقاط کنترل مورد نیاز، به منظور انتخاب مرتبه توابع پایه و تعداد نقاط کنترل بهینه در راستای دستیابی به نتایج با دقت بالا و با حجم محاسبات کمتر بررسی لازم صورت پذیرفت.

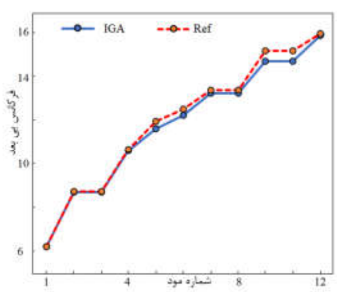


شکل ۶- همگرایی روش هم‌هندسی با افزایش مرتبه توابع NURBS

بدین منظور در این تحقیق برنامه نرم‌افزاری به زبان MATLAB تهیه شده به طوری که با افزایش نقاط کنترل و مرتبه توابع پایه به صورت منفرد و همزمان مطابق شکل‌های ۵ تا ۷ تحلیل شده و همگرایی روشهای h, p و k مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس‌های طبیعی بی بعد شده ورق با سوراخ مرکزی با نتایج مرجع [۱۱] مقایسه شده و مطابق شکل۸ ارائه شده است. هم چنین در راستای صحت‌سنجی روش حاضر نتایج ان با حل اجزائ محدود نیز مقایسه شده است.

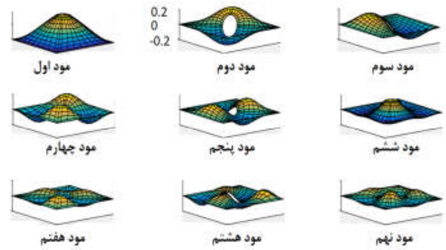


شکل ۷- همگرایی روش هم‌هندسی با افزایش نقاط کنترل و مرتبه توابع NURBS



شکل ۸- مطابقت فرکانس‌های بی‌بعد روش هم‌هندسی و مرجع [۱۱]

با انتخاب تعداد نقاط کنترل بهینه مطابق توضیحات ارائه شده قبل، نتایج به دست آمده با حل نرم‌افزای اجزائ محدود معرفی شده در بخش ۳-۵ مطابق جدول ۲ مقایسه گردیده است.

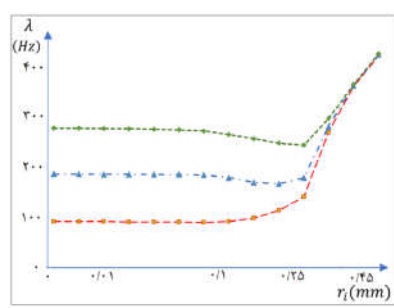


شکل ۹- شکل مودهای ۹ فرکانس اول

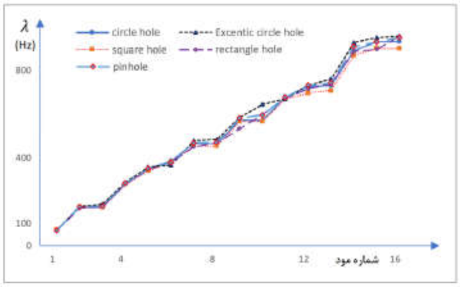
جدول ۲- ده فرکانس اول (هرتز) ورق با تکیه‌گاه گیردار

درصد اختلاف	نرم‌افزار ANSYS ۱۰۰ × ۱۰۰	روش هم‌هندسی ۷۶ × ۲۰
۰/۰۸	۸۸/۹۰	۸۸/۸۳
۰/۲۸	۱۷۴/۰۳	۱۷۳/۵۴
۰/۲۸	۱۷۴/۰۳	۱۷۳/۵۴
۰/۱۹	۲۵۶/۹۱	۲۵۶/۴۳
۰/۱۱	۳۱۰/۳۰	۳۰۹/۹۵
۰/۲۱	۳۳۷/۷۰	۳۳۶/۸۵
۰/۴۱	۳۹۴/۰۲	۳۹۲/۳۹
۰/۴۱	۳۹۴/۰۲	۳۹۲/۳۹
۰/۴۵	۴۹۰/۱۹	۴۸۸/۰۰
۰/۴۵	۴۹۰/۱۹	۴۸۸/۰۰

مساحت کل سوراخ‌های ورق مشبک با مساحت ورق سوراخ‌دار یکسان است. زمان پردازش با روش حاضر نسبت به نرم‌افزار اجزای محدود حدود ۳ برابر شده است و با افزایش تعدا نقاط کنترل افزایش می‌یابد. شکل مودهای متناظر با ۹ فرکانس طبیعی اول ورق سوراخ‌دار در شکل ۹ نشان داده شده است. در ادامه کار اثر افزایش قطر سوراخ بر روی رفتار ارتعاشی بررسی شده است و نتایج آن برای سه فرکانس اول در شکل ۱۰ قابل نمایش داده شده است. پس از آن اثر خارج از مرکز بودن سوراخ و شکل سوراخ‌های متفاوت شامل مربعی، مستطیلی و بیضی بر روی فرکانس‌های طبیعی با شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی شده است و تغییرات فرکانسی نسبت به سوراخ مرکزی استخراج شده است(شکل ۱۱).



شکل ۱۰- اثر افزایش قطر سوراخ بر روی ۳ فرکانس طبیعی اول

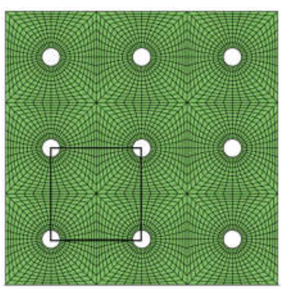


شکل ۱۱- تغییرات فرکانس با شکل سوراخ

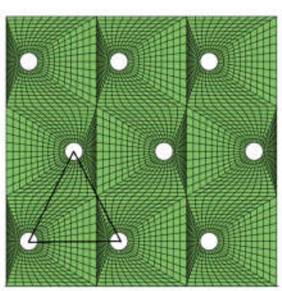
جدول ۳- درصد تغییرات فرکانس های ورق با تکیه‌گاه ساده با اشکال متفاوت سوراخ نسبت به سوراخ دایره‌ای مرکزی

خارج از مرکز	بیضی	مستطیل	مربع
۰/۲۳	-۰/۳۶	-۱/۷۰	-۱/۰۰
۰/۱۵	۰/۶۰	-۱/۷۵	-۰/۳۳
۱/۲۹	۰/۸۴	۰/۲۱	-۰/۳۳
۱/۵۹	۰/۷۶	-۰/۲۱	-۰/۲۲
۲/۶۸	۱/۷۵	۰/۹۰	۱/۳۶
۱/۳۶	-۱/۶۲	-۰/۷۶	۰/۱۲
۳/۰۴	۱/۶۵	-۰/۸۰	۱/۱۰
۳/۷۶	۲/۰۳	۱/۳۶	۱/۱۰
۱/۶۳	۱/۶۵	-۵/۴۲	۰/۱۳
۴/۸۶	۳/۲۸	۳/۷۸	۰/۱۳

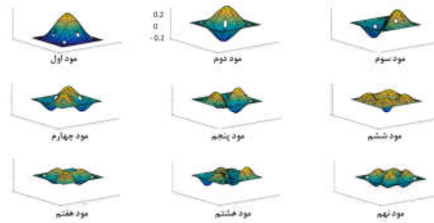
به دلیل مشابهت اثر شکل سوراخ‌ها بر روی فرکانس‌های طبیعی با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت در این بررسی صرفاً نتایج با تکیه گاه ساده در جدول ۳ ارائه شده است. پس از بررسی لازم جهت ورق با سوراخ‌های متفاوت یک ورق مشبک با الگوهای مستطیلی و مثلثی (شکل‌های ۱۲ و ۱۳) با شرایط مرزی گیردار و ساده بررسی شده است.



شکل ۱۲- ورق مشبک با الگوی مستطیلی



شکل ۱۳- ورق مشبک با الگوی مثلثی

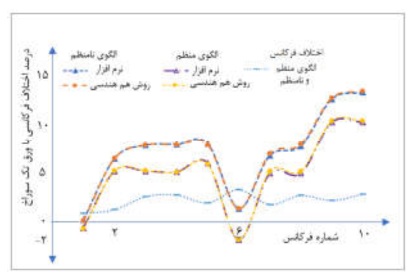


شکل ۱۴- شکل مودهای ورق مشبک

جدول ۴- فرکانس های ورق مشبک با الگوی سوراخ مستطیلی و مثلثی با تکیه‌گاه ساده و گیردار کامل

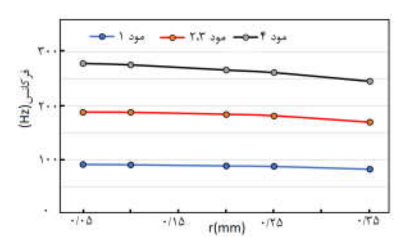
مود	الگوی مستطیلی		الگوی مثلثی		%تغییرات فرکانس	
	CCCC	SSSS	CCCC	SSS	CCCC	SSSS
۱	۸۸/۳۶	۴۵/۹۰	۸۹/۰۹	۴۶/۰۱	۰/۸۱	۰/۲۳
۲	۱۸۲/۹۰	۱۱۵/۴۸	۱۸۵/۱۱	۱۱۵/۷۵	۱/۱۹	۰/۲۳
۳	۱۸۲/۹۰	۱۱۵/۴۸	۱۸۷/۵۰	۱۱۶/۹۸	۲/۴۵	۱/۲۸
۴	۲۶۹/۸۴	۱۸۵/۸۵	۲۷۷/۰۸	۱۸۸/۸۰	۲/۶۱	۱/۵۶
۵	۳۲۸/۷۸	۲۳۳/۷۴	۳۳۴/۹۷	۲۳۶/۱۵	۱/۸۵	۱/۰۲
۶	۳۳۱/۴۹	۲۳۳/۷۴	۳۴۲/۱۸	۲۴۰/۰۱	۳/۱۲	۲/۶۱
۷	۴۱۳/۴۳	۳۱۰/۲۰	۴۲۰/۵۴	۳۱۹/۶۱	۱/۶۹	۲/۹۵
۸	۴۱۳/۴۳	۳۱۰/۲۰	۴۲۴/۳۴	۳۲۱/۸۷	۲/۵۷	۳/۶۳
۹	۵۳۹/۵۸	۴۰۵/۵۱	۵۵۱/۰۷	۴۱۲/۱۳	۲/۰۸	۱/۶۱
۱۰	۵۳۹/۵۸	۴۰۵/۵۱	۵۵۴/۵۲	۴۴۱/۳۸	۲/۶۹	۸/۱۳

شکل مودها متناظر با ده فرکانس اول در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. به منظور صحت سنجی و بررسی تغییرات فرکانس ها با الگوی مشبک، ورق با تکیه‌گاه گیردار کامل به کمک نرم افزار بررسی و با روش حاضر مقایسه شده است. نتایج بررسی الگوها و مقایسه ۱۰ فرکانس اول در شکل ۱۵ ارائه شده است.



شکل ۱۵- تغییرات فرکانس ورق مشبک با الگوهای مستطیلی و مثلثی

تغییرات ۴ فرکانس اول ورق مشبک با افزایش قطر بررسی شده و نتیجه در شکل ۱۶ نمایش داده شده است



شکل ۱۶- تغییرات فرکانس با افزایش قطر سوراخ‌های ورق مشبک

۷- نتیجه‌گیری

برای بررسی اثر قطر و شکل سوراخ بر روی رفتار ارتعاشی ورق‌های مشبک ابتدا با در نظر گرفتن ورق میندلین- ریسنر با نظریه مرتبه اول برشی، روابط حاکم بر رفتار ورق و روابط کرنش جابجایی استخراج گردیده و با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون با فرم ضعیف، معادلات حرکت استخراج گردید. سپس، به کمک تحلیل هم‌هندسی با استفاده از توابع NURB مناسب انتخابی مدل‌سازی شکل انجام شده و از همان توابع پایه برای تخمین معادلات جابجایی و تخمین مجهولات استفاده شد. با حل عددی انتگرال‌های سختی و جرم و تشکیل معادله مقدار ویژه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یا به عبارت ساده‌تر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر استخراج شده است. برای بررسی کارآیی روش از نظر دقت و حجم محاسبات، ابتدا یک ورق با سوراخ مرکزی مدل‌سازی و به کمک تحلیل هم‌هندسی فرکانس‌های طبیعی آن برای شرایط مرزی ساده و گیردار استخراج شده است. در ادامه کار با حل نرم‌افزاری و برخی مرجع مرتبط مقایسه گردیده است. با استفاده از نتایج حل نرم‌افزاری و مرجع ۱۱ توابع NURB بهینه شده انتخاب گردید به طوری که خطای سایر مودها با افزایش نقاط به سمت صفر میل کرده است. اما از آنجایی که توابع درجه دوم هندسه شکل را به صورت دقیق توصیف نموده است و این تابع برای پیش‌بینی میدان جابجایی نیز استفاده شده است بستگی به شکل مود و جابجایی نقاط مختلف ورق، این تابع دارای خطای پیش‌بینی و همگرایی متفاوت است. بنابراین افزایش مرتبه تابع تا جایی که مجموع خطای سایر شکل مودها حداقل شود به صورت بهینه انتخاب شده است. از نظر حجم محاسبات و دقت نتایج، برای هر شکل که شامل ۴ وصله است، توابع مرتبه ۳ با ۱۰۸۰ نقطه کنترل انتخاب شده است که بیشترین خطای آن نسبت حل اجزائ محدود کمتر از ۰/۴۵ درصد بوده است. سپس اثر افزایش قطر و شکل سوراخ بر روی رفتار ارتعاشی ورق مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد روش هم هندسی با تعداد نقاط کنترل کمتر نسبت به روش اجزاء محدود نتایج مشابهی دارد. با افزایش قطر سورخ ابتدا فرکانس‌های طبیعی مقداری کاهش و پس از آن شروع به افزایش می‌نماید و این افزایش قطر سوراخ تا نزدیک مرز خارجی باعث می‌شود فرکانس‌های اول، دوم و سوم به سمت یک فرکانس یکسان و بالاتر همگرا شوند. نزدیک شدن لبه سوراخ به مرز ورق و تغییر کلی شکل ورق (کاهش طول ورق از لبه آزاد سوراخ تا مرز تکیه‌گاه) در واقع باعث افزایش سختی ورق شده و افزایش فرکانس و حذف برخی از فرکانس های پایین‌تر در پی داشته است. همچنین خارج از مرکز شدن سوراخ باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی نسبت به سوراخ مرکزی می‌شود و این درصد افزایش برای فرکانس‌های بالاتر بیشتر اشت که این موضوع نیز به دلیل نزدیک شدن لبه سوراخ به عنوان لبه آزاد به تکیه‌گاه وافزایش سختی کلی می‌باشد. اما تغییر شکل سوراخ به مربعی با همان مساحت سوراخ قبلی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود که درصد کاهش فرکانس اول از فرکانس‌های دو تا چهارم بیشتر است و اثر شکل سوراخ بر روی رفتار ارتعاشی ورق قابل ملاحطه است. سوراخ مستطیلی نیز باعث بیشترین کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود که درصد کاهش فرکانس اول و دوم بیشتر از پنج فرکانس بعدی است. نتایج نشان می‌دهد که سوراخ بیضوی فرکانس اول را کاهش می‌دهد

اما فرکانس‌های بعدی را افزایش می‌دهد. بررسی ورق مشبک با الگوی مستطیلی و مثلثی مطابق شکل ۱۵ نشان می‌دهد که توزیع سوراخ در هر دو حالت نسبت به ورق با تک سوراخ دارای فرکانس‌های بالاتری می‌باشد و مطابق انتظار در حالت الگوی مثلثی این میزان بیشتر است. با توجه به شکل مود ششم سوراخ ورق در فرورفتگی مرکز ورق قرار گرفته است و رفتار ورق مشبک به ورق با سوراخ مرکزی نزدیکتر شده است و باعث شده است اختلاف فرکانس آنها به کمترین مقدار برسد. باید توجه داشت که این افزایش کمتر از ۱۵ درصد است و با روش خواص اصلاح شده جایگزین (مدول الاسیسیته، چگالی و ضریب پواسون) همانند مراجع ۱۲،۱۱،۱؛۱۵ و ۱۷ مطابقت دارد. بر خلاف ورق با سوراخ مرکزی افزایش قطر سوراخ در ورق مشبک که سوراخها در کل ورق به صورت یکنواخت و با همان سطح حفره ایجاد شده باشد باعث کاهش فرکانس‌ها می‌شود.

۸- نمادها

$[M],[K],[C]$	ماتریس جرم، ماتریس سختی و ضریب میرایی
$\{\ddot{q}\}\{\dot{q}\},\{q\}$	ماتریس‌های ستونی جابجایی، سرعت و شتاب
u, v, w	جابجایی در راستای محورهای x، y و z
θ_x,θ_y	دورانهای میانتار قبل از تغییر شکل حول محور x و y
U,T	انرژی کرنشی و انرژی جنبشی
$\{\varepsilon\},\{\varepsilon^m\},\{\varepsilon^b\},\{\varepsilon^s\}$	ماتریس‌های کرنش، کرنش های کششی،خمشی، برشی
$\{\chi\}$	ماتریس انحنا
$\{\sigma\}$	ماتریس تنش
$[D],[D^s]$	ماتریس‌های ثابت خمشی و ثابت پیچشی
$\{\tau\},\{\gamma\}$	ماتریس تنش برشی و کرنش برشی
G,κ	مدول برشی، ضریب برش
Ξ,H	بردار گرهی در جهات ξ و η
N, R	توابع پایه Bspline و NURBS
C	منحنی Bspline
$[B^f],[B^s]$	ماتریس‌های کرنش سختی و کرنش برشی
$[K_1{}^b],[K_1^\gamma]$	ماتریس‌های سفتی خمشی و برشی

۹- مراجع

[1] Jhung M.J and Jeong K. H., Free Vibration Analysis of Perforated Plate with Square Penetration Pattern using Equivalent Material Properties. Nuclear Engineering and Technology, Vol. 47, No.4, pp. 500-511, 2015.

[2] Hughes T. J., Cottrell J. A. and Bazilevs Y., Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 194, No. 39-41, pp. 4135-4195, 2005.

[3] Faroughi S., Shafei E. and Eriksson A., NURBS-Based Modeling of Laminated Composite Beams with Isogeometric Displacement-only Theory. Composites Part B: Engineering, Vol. 162, pp. 89-102, 2019.

[4] Weeger O., Yeung S. K. and Dunn M.L., Fully Isogeometric Modeling and Analysis of Nonlinear 3D Beams with Spatially varying Geometric and Material Parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 95-115, 2011

[5] Shojaee S., Valizadeh N., Izadpanah E. and VanVu T., Free Vibration and Buckling Analysis of Laminated Composite Plates using the NURBS-Based Isogeometric Finite Element Method. Vol. 94, pp.1677–1693, 2012.

[6] Thakare S., Free Vibration Analysis of Circular Plates with Holes and Cutouts. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, Vol. 8, pp. 46-54, 2013.

[7] Grossi R. O., Arenas B. D. V. and Laura P. A. A., Free Vibration of Rectangular Plates with Circular Openings. Ocean Engineering, Vol. 24, No.1, pp. 19-24. 1997.

[8] Kalita K. and Haldar S., Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Central Cutout. Cogent Engineering, Vol. 3, No.1, pp. 53-81, 2016.

[9] Rahul S. E. N., Kushwaha S. K. and Ahmad A. K., Dynamic Analysis of Laminated Composite Plate with Hole. Innovare Journal of Engineering and Amp; Technology, Vol. 3, No.1, pp. 146-154, 2015.

[10] Mohammed H., Hamza cherif S. M. and Houmat V., Free Vibration Analysis of Variable Stiffness Composite Laminate Plate with Circular Cutout. Australian Journal of Mechanical Engineering, pp. 1-17, 2017.

[11] Huang M. and Sakiyama T., Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Variously- Shaped Holes. Journal of Sound and Vibration, Vol. 226, No.4, pp. 769-786, 1999

[12] Kwak M. K. and Han S., Free Vibration Analysis of Rectangular Plate with a Hole by means of Independent Coordinate Coupling Method. Journal of Sound and Vibration, Vol. 306, No.1, pp. 12-30, 2007.

[13] AL- Araji M. S. H., Gafer A. S. and Saed V., Free Vibration Analysis of Perforated Laminated Composite Square Plates. Journal of University of Babylon, Vol. 26, No.10, pp. 335-345, 2018.

[14] Zhang H., Wang D. and Liu W., Isogeometric- Meshfree Coupled Analysis of Kirchhoff Plates. Advances in Structural Engineering, Vol. 17, No.8, pp. 1159-1176, 2014.

[15] Barry O.R. and Tanbour V., Resonant Frequencies of Perforated Plates with Rectangular Slots. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 232, No.7, pp. 1247-1254, 2016.

[16] Konieczny G. M. G. and Achtelik V., The FEA and Experimental Stress Analysis in Circular Perforated Plates Loaded with Concentrated Force. Frattura ed Integrità Strutturale, Vol. 14, No.51, pp. 164-173, 2019.

[17] Soleimanian S., Davar A., Eskandari Jam J., Zamani, M., Heydari Beni M., Thermal Buckling and Thermal Induced free Vibration Analysis of Perforated Composite Plates: a Mathematical Model. Mechanics of Advanced Composite Structures, Vol. 7, No.1, pp. 15-23, 2020.

[18] Thai C. H., Kulasegaram S., Tran L. V. and Nguyen-Xuan H., Generalized Shear Deformation Theory for Functionally Graded Isotropic and Sandwich Plates based on Isogeometric Approach. Computers & Structures, Vol. 141, pp. 94-112, 2014.

[19] Fung Y.C., Foundation of Solid Mechanics. Prentice Hall Internatinal, Inc., 1977.

[20] Pety M., Introduction to Finite Element Vibration Analysis., Cambridge [England]; New York: Cambridge University Press, 2010.

[21] Piegl L.,The NURBS Book. Second Edition. ed. Monographs in Visual Communication., Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[22] Cottrell J.A., Hughes T.J. and Bazilevs Y., Isogeometric Analysis: toward Integration of CAD and FEA., John Wiley & Son, 2009.

[۲۳] نیکویی س. و حسنی ب.، تحلیل ایزوژئومتریک پوسته‌های با شکل آزاد و محاسبه دقیق بردار جهتی آن با استفاده از نظریه‌های کیرشهف-لاو و رایزنر-میندلین .، *مجلهٔ مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۵۰، ش. ۴، ص ۲۰۹-۲۱۸، ۱۳۹۹.