

حل تشابهی انتروپی تولیدی جریان نانو سیال سیلیکا- آلومینیوم هیبرید برای نقطه سکون همرفت مخلوط (ترکیبی) روی یک صفحه متخلخل در حضور میدان مغناطیسی: یک مدل ساده جهت خنک کاری سطوح

اسماعیل لکزیان*
 دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران، e.lakzian@hsu.ac.ir

مازیار حکمت شعار
 دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران، maziyar.hekmatshoar@gmail.com

چکیده

در این تحقیق، انتروپی تولیدی توسط یک نانو سیال در جریان لایه مرزی دو بعدی و دائمی، روی صفحه تخت متخلخل عمودی، به همراه میدان مغناطیسی بررسی شد. معادلات حاکم به روش تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی تبدیل و با روش رانج کوتا حل گردید. در این تحقیق به بررسی تأثیر متغیرهای شناوری، مغناطیس، درصد حجمی نانو سیال، به صورت مجزا بر روی سرعت، دما و انتروپی تولیدی بی بعد پرداخته شد. نتایج نشان داد که در انتروپی تولیدی، با افزایش متغیر تشابهی، پروفیل دمایی و قدر مطلق گرادیان دمایی کاهش پیدا می کند، در نتیجه انتروپی گرمایی تولیدی بی بعد کاهش یافته و به سمت صفر میل می کند و بعد از مقدار مشخصی لایه مرزی گرمایی ناپدید شده و فقط انتروپی ناشی از اتلافات اصطکاک و مغناطیس تولید می شود. بررسی ها نشان داد با افزایش غلظت نانو ذرات، سرعت سیال در حدود ۳۰ درصد کاهش می یابد و باعث افزایش حدوداً ۴۰ درصدی در پروفیل دمایی سیال می شود و همچنین با افزایش میزان مغناطیس، سرعت نانو سیال حدود ۱۵ درصد کاهش و پروفیل دمایی سیال حدود ۱۰ درصد کاهش می یابد.

واژه های کلیدی: حل تشابهی، صفحه متخلخل، تحلیل آنتروپی، بلازیوس، نانوسیال، نقطه سکون.

A Similarity Solution on Entropy Generation for the mixed convective stagnation-point flow of silica-alumina hybrid nanofluid on a porous surface in presence of magnetic field: A Simple Model for Surface Cooling

E. Lakzian

Department of Mechanical Engineering , Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

M. Hekmatshoar

Department of Mechanical Engineering , Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

Abstract

In this research, the entropy generation by steady two-dimensional boundary layer flow of a hybrid nanofluid on a porous vertical flat plate with the magnetic field is studied. The governing equations by using of similarity solution transformed to nonlinear ordinary differential equations and also effect of buoyancy, magnetic, the volume fraction of nanofluid are investigated particularly on speed, temperature, and dimensionless entropy generation. The results showed that in entropy generation with an increase of similarity parameter, the thermal profile and absolute value of thermal gradient are decreased and therefore dimensional thermal entropy generation is decreased and trends to zero and after a certain amount thermal boundary layer is disappeared and just the entropy of fraction loss and magnetic field are produced. Also, the investigation shows with increasing density of nano particles, the speed of nanofluid decreases by about 30 percent and increases the thermal profile about 40 percent. The results also show with increase the magnetics, the speed of nanofluid decreases about 15 percent and decreases thermal profile about 10 percent.

Keywords: Similarity solution, Porous plate, Entropy analysis, Blasius, Nanofluid, Stagnation point.

هیبرید یا نانو کامپوزیت نامیده می شوند در سیال به وجود می آید که به آن هیبرید یا سیال نانو کامپوزیت می گویند. یک نانوذره هیبرید، ذره ای است که مخلوطی از خواص فیزیکی و شیمیایی نانوذره های مختلف می باشد و خواص را در یک فاز همگن فراهم می کنند [۲]. این نانو ذرات از نظر منطقی، دسته جدیدی از نانو سیالات می باشند که کاربردهای بی شماری در زمینه های انتقال گرما و تولیدات، پزشکی، صنایع دفاعی، سازه های دریایی و غیره دارند [۳]. روش های مختلفی برای افزایش ظرفیت گرمایی سیالات با استفاده از ذرات نانو در مایع

۱- مقدمه

دامنه وسیع مطالعات انجام شده در زمینه نانو سیالات، بیانگر قابلیت بالا بردن رسانندگی گرمایی بالای سیال از طریق استفاده از ذرات نانو درون سیال می باشد. نانو سیال ها نسبت به سیال های پایه، قابلیت رسانایی گرمایی بالاتری را دارند و دارای ضرایب انتقال گرما تک فاز نسبت به سیالات پایه خودشان می باشند [۱]. یک نوع جدید از نانو سیال که از طریق حل شدن دو نوع متفاوت از نانو ذرات که ذرات

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: e.lakzian@hsu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۱۰/۱۵

تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۶/۲۴

مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از کاربردهایی که نانو سیال‌ها می‌توانند در آنجا به کار گرفته شوند، راکتورهای هسته‌ای می‌باشند. در راکتورهای هسته‌ای به دلیل انجام فرایند شکافت هسته‌ای، میزان گرمای درون راکتور به مقدار بسیار زیادی افزایش می‌یابد و این میزان گرمای تولید شده باید با سرعت و نرخ بالایی توسط سیال خنک کننده خارج می‌شود. رایج‌ترین سیالی که خنک کاری راکتور را به عهده دارد آب می‌باشد. این سیال دارای ضریب انتقال گرما پایینی بوده و جهت خنک کاری سریع‌تر راکتور باید سرعت جریان در چرخه افزایش یابد که نیازمند به‌کارگیری پمپ‌های بزرگ‌تر و صرف هزینه‌های بیشتر می‌باشد؛ از این رو در پژوهشی هو و بونگیورنو [۴] بررسی‌هایی برای جایگزینی سیال خنک کننده راکتور هسته‌ای با نانو سیالات انجام دادند. نتایج آن‌ها نشان داد، با استفاده از نانو سیال‌ها دمای خروجی از راکتور هسته‌ای تا بیست درصد در مقایسه با آب بیشتر می‌شود، به همین جهت سیدیک و همکاران [۵] و همچنین سارکار و همکارانش [۶] تحقیقاتی را اخیراً انجام دادند و فرایندها و روش‌های مربوط به آماده‌سازی نانو ذرات هیبریدی، خواص ترموفیزیکی و دیگر کاربردهای نانو ذرات هیبرید را مورد بررسی قرار دادند. توسعه نانو ذرات با بهترین پایداری و رسانایی گرمایی خوب بسیار ضروری می‌باشد و می‌تواند منجر به بهینه سازی و پایداری به دلیل افزایش کارایی سیستم گرمایی شود. ایستمن و همکاران [۷] و همچنین ژوان و لین [۸] به مطالعه تجربی تأثیر نانو ذرات بر انتقال گرما پرداختند و نشان دادند که وجود کسر حجمی کوچکی از نانو ذرات (کمتر از ۵ درصد) انتقال گرما را نسبت به سیال پایه در حدود ۱۰ تا ۲۰ درصد افزایش می‌دهد. ترکیب جریان همرفت آزاد و همرفت اجباری، همرفت مخلوط نامیده می‌شود. در پدیده جریان همرفت مخلوط در نزدیک نقطه سکون، به علت کاربردهای فراوانی که در بسیاری از دستگاه‌های صنعتی مانند مبادله‌کن‌های گرمایی، گردآورهای خورشیدی، راکتورهای هسته‌ای و تجهیزات الکتریکی دارد، نظر محققان بسیاری را به خود جلب نموده است [۹-۱۳]. جریان‌های هم جهت و خلاف جهت در یک جریان لایه مرزی همرفت مخلوط، بر روی یک صفحه عمودی دما ثابت برای بررسی خواص فیزیکی و جریان آزاد یکنواخت توسط سانتی و همکارانش [۱۴] مورد بررسی قرار گرفت. جریان لایه مرزی پایدار همرفت مخلوط بر روی یک سطح عمودی شناور، در یک جریان میکروپولار تراکم ناپذیر توسط ایشاک و همکارانش [۱۵] مورد بررسی قرار گرفت. سیه‌اشینی و همکارانش [۱۶] نیز جریان همرفت مخلوط از نانو سیال را بر روی یک صفحه عمودی در حال حرکت مورد بررسی قرار داد. در این تحقیق، جریان خارجی و سرعت کششی ثابت فرض شد. همچنین صفحه عمودی در جهت‌های مخالف یا موافق به سمت جریان آزاد حرکت می‌کند. جریان لایه مرزی مخلوط همرفت نانو سیال بر روی سیلندر چرخان با دمای سطح تعریف شده توسط دیناروند و همکاران [۱۷] بررسی شد. فردوس و الزهرانی [۱۸] به بررسی جریان نانو سیال جریان همرفت اجباری با انتقال گرما و یک صفحه متخلخل در حال حرکت پرداختند. در این تحقیق صفحه‌ای که سیال از روی آن عبور می‌کرد متحرک فرض شد و حل عددی بر روی آن مسئله صورت گرفت. عماد و همکاران [۱۹] نیز به حل عددی نانو سیال گرافین و آب بر روی یک صفحه در حل کشیده شدن و کوچک شدن به همراه مکش و دهش و با چاه و چشمه گرمایی پرداختند و به بررسی پروفیل‌های

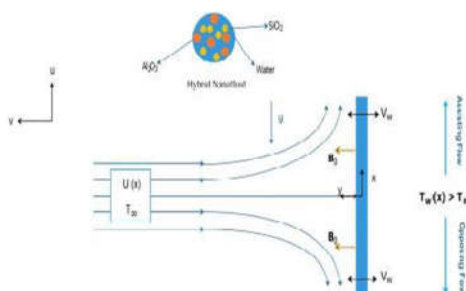
دمایی و جریان و سرعت سیال تحت شرایط مسئله پرداختند. لاند و همکاران [۲۰] به مطالعه جریان مغناطیسی نانو سیال میکروپولار تحت اثر نیروی شناوری پرداختند، در این تحقیق صفحه‌ای که سیال از روی آن عبور می‌کرد عمودی و در حال کوچک شدن فرض شد. با مطالعه تحقیقات ذکر شده در بالا و نتیجه‌گیری از آن‌ها، نانو ذرات سیلیکون دی اکسید و آلومینیوم اکسید به علت داشتن رسانش گرمایی بهتر در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفتند.

وجود میدان مغناطیسی، سبب کنترل سرعت و مومنوم جریان لایه مرزی می‌شود و بررسی اثرات میدان مغناطیسی بر لایه مرزی، از گونه مواردی بوده است که مورد توجه محققان بوده است [۲۱-۲۵]. مطالعه روی میدان مغناطیسی هیدرودینامیکی اولین بار توسط بنسال [۲۱] انجام گرفت. کماران و همکاران [۲۲] میدان مغناطیسی به همراه تولید گرما را مورد مطالعه قرار دادند. میبود و همکاران [۲۳] میدان مغناطیسی را به‌همراه انتقال گرمای نانو سیال روی صفحه در حال کشش غیرخطی مورد بررسی قرار دادند. ویشنگان‌ش و همکاران [۲۴] تأثیر میدان مغناطیسی در جریان نانو سیال روی صفحه تخت کششی به‌همراه انتقال گرمای تابشی را به‌صورت عددی و تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. تأثیر تابش گرمایی بر میدان مغناطیسی هیدرودینامیکی در جریان سیال ماکسولی روی صفحات در حال کشش توسط علی اکبر و همکاران [۲۵] مورد مطالعه قرار گرفت.

با توجه به مطالعات صورت گرفته در بالا، استفاده از نانو سیال هیبریدی به‌عنوان سیالی برای انتقال گرما و بررسی انتروپی تولیدی در آن، برای مسئله‌ای که دارای شرایط حاضر است تا به امروزه صورت نگرفته است. مدل تحلیلی ارائه شده برای نانو سیال هیبریدی، یک مدل جدید و تازه از مدل‌های موجود مبتنی بر یک نانوذره می‌باشد. مهم‌ترین نکته‌ای که باید توجه داشت این است که این مدل توسعه‌یافته می‌تواند مطمئناً برای مطالعه بر روی خود جریان نانو سیال هیبریدی و انتقال گرما در آن مورد استفاده قرار گیرد. از آنجایی که این تحقیق اولین مورد برای بررسی انتروپی تولیدی در نانو سیالات هیبریدی می‌باشد بنابراین نتایج به دست آمده کاملاً جدید و بدیع می‌باشد.

۱-۱- شرح مسئله و معادلات

در این تحقیق جریان پایدار، دو بعدی، لزج، تراکم ناپذیر و نانو سیال هیبرید رسانای الکتریسیته در نزدیک نقطه سکون روی یک صفحه نفوذ پذیر عمودی صاف مانند شکل ۱ می‌باشد.



شکل ۱- نمایی از هندسه جریان [۲۶]

جریان را نشان می‌دهد. جریان مخالف ($b \leq 0$) اگر بخش بالای صفحه سرد باشد در حالی که بخش پایین گرم باشد رخ می‌دهد. با توجه به این فرضیات و دنبال کردن مدل تیواری و داس معادلات پیوستگی و مومنوم و انرژی برای جریان تراکم ناپذیر لایه‌ای برای نانو سیال هیبریدی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود [۳۰، ۱۱]:

جدول ۳- خواص فیزیکی سیال پایه [۳۰]

خواص ترموفیزیکی	فاز سیال (آب)	سیلیکا	آلومینا
c_p (J/kgK)	۴۱۷۹	۷۴۵	۷۶۵
ρ (kg/m ³)	۹۹۷٫۱	۲۲۰۰	۳۹۷۰
k (W/mK)	۰٫۶۱۳	۱/۴	۴۰
$\alpha \times 10^7$ (m ² /s)	۱/۴۷	۸/۵۴۱۷	۱۳۱/۷
$\beta \times 10^5$ (1/K)	۲۱	۴۲/۷	۰/۸۵
سایز ذره (nm)	-	۱۵	۲۰-۴۰

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{hnf}}{\rho_{hnf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_{hnf}} \frac{dp}{dx} - \frac{\sigma B_o^2}{\rho_{hnf}} u + \frac{[(1-\phi_2)\{(1-\phi_1)\rho_f\beta_f + \phi_1\rho_s1\beta_s1\}] + \phi_2\rho_s2\beta_s2}{\rho_{hnf}} g(T-T_\infty) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{hnf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

با اعمال شرایط مرزی زیر:

$$\begin{aligned} u=0, v=V_w, T=T_w(x) & \text{ در } y=0 \\ u=U(x), T \rightarrow T_\infty & \text{ در } y=\infty \end{aligned} \quad (4)$$

با استفاده از معادله برنولی در جریان آزاد، معادله (۲) تبدیل می‌شود به:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho_{hnf}} \frac{dp}{dx} - \frac{\sigma B_o^2}{\rho_{hnf}} U \quad (5)$$

با جایگذاری معادله (۵) در معادله (۲) داریم:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mu_{hnf}}{\rho_{hnf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ U \frac{dU}{dx} + \frac{\sigma B_o^2}{\rho_{hnf}} (U-u) & \\ + \frac{[(1-\phi_2)\{(1-\phi_1)\rho_f\beta_f + \phi_1\rho_s1\beta_s1\}] + \phi_2\rho_s2\beta_s1}{\rho_{hnf}} \times & \\ g(T-T_\infty) & \end{aligned} \quad (6)$$

که در اینجا، مؤلفه‌های u و v مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y به ترتیب می‌باشند. T دمای نانو سیال هیبریدی است، B_o میدان مغناطیسی یکنواخت است، σ نیز رسانایی الکتریکی است، $\beta_{s2}, \beta_{s1}, \beta_f$ نیز ضرایب انبساط گرمایی سیال پایه، سیلیکا و آلومینا به ترتیب می‌باشند. V_w دبی جرمی سطح یکنواخت می‌باشد، در صورتی که $V_w < 0$ باشد مانند مکش می‌باشد و در صورتی که $V_w > 0$ مانند دهش می‌باشد. در روابط بالا μ_{hnf} لزجت نانو سیال هیبریدی می‌باشد، α_{hnf} پخش دمایی نانو سیال هیبریدی است و ρ_{hnf} نیز چگالی نانو سیال هیبریدی می‌باشد. با توجه به روش حل تشابهی با تعریف متغیر تشابهی داریم:

$$\eta = \left(\frac{U}{v_{fx}}\right)^{1/2} y, \psi = (Uv_{fx})^{1/2} f(\eta), \theta(\eta) = \frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} \quad (7)$$

در این تحقیق، سیلیکا (سیلیکون دی اکسید) و آلومینا (آلومینوم اکسید) ذراتی با اندازه نانو با یک سیال پایه مانند آب در نظر گرفته می‌شوند. در جدول ۱ و ۲ خواص فیزیکی نانو سیال و هیبرید نانو سیال را نمایش داده شده است. در این جدول ϕ_1, ϕ_2 ضریب حجمی سیلیکا و آلومینا به ترتیب می‌باشد. ρ_f چگالی سیال پایه می‌باشد و همچنین ρ_{s1} و ρ_{s2} نیز چگالی نانو ذرات سیلیکا و آلومینا به ترتیب می‌باشند. μ_f لزجت سیال پایه است، k_{s1}, k_f و k_{s2} به ترتیب ضریب رسانندگی گرمایی سیال پایه، نانو ذرات سیلیکا و آلومینا می‌باشند. k_{hnf} نیز رسانندگی گرمایی مؤثر نانو سیال هیبرید تقریب زده شده توسط مدل ماکسول-گارتن می‌باشد. در جدول ۳ خواص سیال پایه در دمای ۲۵ درجه نمایش داده شد، همچنین در این تحقیق فرض شد که نانو ذرات در تعادل دمایی هستند و هیچ لغزشی بین آن‌ها صورت نمی‌گیرد [۲۶-۲۲].

جدول ۱- خواص فیزیکی نانو سیال [۳۱-۲۷]

خاصیت	نانو سیال
لزجت	$\frac{\mu_f}{(1-\phi_1)^{2.5}}$
چگالی	$(1-\phi_1)\rho_f + \phi_1\rho_{s1}$
ظرفیت گرمایی	$(1-\phi_1)(\rho c_p)_f + \phi_1(\rho c_p)_{s1}$
رسانایی گرمایی	$\frac{k_{s1} + 2k_f - 2\phi_1(k_f - k_{s1})}{k_{s1} + 2k_f - \phi_1(k_f - k_{s1})} \times (k_f)$
ضریب پخش	$\frac{k_{hnf}}{(\rho c_p)_{hnf}}$

جدول ۲- خواص فیزیکی نانو سیال هیبریدی [۳۱-۲۷]

خاصیت	نانو سیال هیبریدی
لزجت	$\frac{\mu_f}{(1-\phi_1)^{2.5} (1-\phi_2)^{2.5}}$
چگالی	$[(1-\phi_2)\{(1-\phi_1)\rho_f + \phi_1\rho_{s1}\}] + \phi_2\rho_{s2}$
ظرفیت گرمایی	$[(1-\phi_2)\{(1-\phi_1)(\rho c_p)_f + \phi_1(\rho c_p)_{s1}\}] + \phi_2(\rho c_p)_{s2}$
رسانایی گرمایی	$\frac{k_{s2} + 2k_{nf} - 2\phi_2(k_{nf} - k_{s2})}{k_{s2} + 2k_{nf} + \phi_2(k_{nf} - k_{s2})} \times \frac{k_{s1} + 2k_f - 2\phi_1(k_f - k_{s1})}{k_{s1} + 2k_f + \phi_1(k_f - k_{s1})} \times (k_f)$
ضریب پخش	$\frac{k_{hnf}}{(\rho c_p)_{hnf}}$

سیستم مختصات مسئله به صورتی انتخاب شده است که محور X در راستای صفحه و محور Y عمود بر آن می‌باشد. همچنین فرض شد که مؤلفه X سرعت جریان خارجی به سمت لایه مرزی است و دمای $T_w(x)$ مربوط به صفحه متناسب بافاصله از نقطه سکون است. $T_w(x) = T_{inf} + bx$ و $U(x) = ax$ می‌باشد که در آن a و b ثابت می‌باشند و a مثبت است. در صورتی b مثبت می‌باشد که نیمه بالایی صفحه گرم شود، در حالی که نیمه پایینی صفحه سرد شود. در این تحقیق با در نظر گرفتن نیروی شناوری، جریان نزدیک صفحه گرما دیده تمایل به حرکت به سمت بالا دارد و جریان نزدیک بخش سرد صفحه تمایل به حرکت به سمت پایین را دارد، بنابراین این رفتار دامنه اصلی حرکت

$$S = \frac{\theta^2}{Pr Ec Re^2 (\theta + \theta_\infty)^2} + \frac{\theta^2}{Pr Ec Re (\theta + \theta_\infty)^2} + \frac{1}{(\theta + \theta_\infty) Re} (F'^2 + M^2 F'^2) \quad (21)$$

محاسبات در $Re=1000$ و $Pr=6.2$ و $\theta_\infty=6.46$ بوده و همچنین در معادله (۲۲) θ دمای بی‌بعد، Ec عدد اکرت و Re عدد رینولدز می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (22)$$

$$Ec = \frac{U_\infty^2}{c_p (T_w - T_\infty)} \quad (23)$$

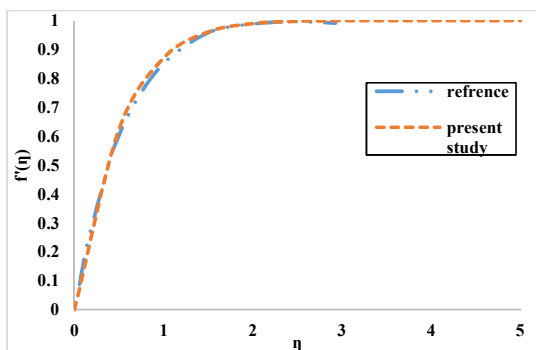
$$Re = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (24)$$

عدد بیژن آهنگ انتقال گرما برگشت ناپذیر را به‌کل بازگشت ناپذیری ناشی از انتقال گرما، اصطکاک و میدان مغناطیسی، برای جریان لایه مرزی لایه‌ای بیان می‌کند. بازه عدد بیژن از ۰ تا ۱ است. در $Be=1$ بازگشت ناپذیری فقط ناشی از انتقال گرماسست و در $Be=0$ انترویی تولیدی فقط ناشی از ترکیب تأثیر اصطکاک سیال و میدان مغناطیسی است.

$$Be = S_T''' / (S_T''' + S_F''' + S_M''') \quad (25)$$

۳- حل عددی و اعتبار سنجی

معادلات غیرخطی به دست آمده از روابط بقای مومنتوم و انرژی به‌صورت هم‌زمان و با استفاده از شرایط مرزی داده شده، توسط مسئله با کمک روش رانج کوتای مرتبه چهارم برای مقادیر مختلف از پارامترهای η و M و f_0 و λ حل شد. به‌منظور اعتبار سنجی، نتایج به دست آمده با نتایج مرجع [۲۶] مقایسه شد. برای همین منظور در شکل ۲ و جدول ۴ به مقایسه و انطباق نتایج به دست آمده و نتایج مرجع پرداخته شد. در شکل ۲ مقادیر $f(\eta)$ بر حسب η و در جدول ۴ به مقایسه مقادیر $F''(0)$ و $\theta'(0)$ برای مقادیر ثابت و معلوم η و M و f_0 و λ پرداخته شد. با مقایسه اشکال و داده‌های جدول می‌توان به انطباق خوب نتایج به دست آمده و معتبر بودن نتایج پی برد.



شکل ۲- منحنی $f'(\eta)$ بر حسب η مقاله مرجع و پژوهش حاضر

که در این معادلات ψ تابع جریان می‌باشد و به‌صورت $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ و

$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ تعریف می‌شود و ν_f لزجت سینماتیکی سیال می‌باشد. با

جایگذاری معادله (۶) در (۳) و (۵) معادلات مرتبه اول دیفرانسیلی زیر را به دست می‌آوریم:

$$f'''' + A_1 [ff'' - f'^2 + 1 + A_2 M(1 - f')] + A_3 \lambda \theta = 0 \quad (8)$$

$$\theta'' + A_4 Pr \left[\frac{f}{f'} \theta' - \theta \right] = 0 \quad (9)$$

که در معادلات بالا، ضرایب A_1, A_2, A_3, A_4 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = (1 - \phi_1)^{2.5} (1 - \phi_2)^{2.5} \{ [(1 - \phi_2) \{ (1 - \phi_1) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \}] + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \} \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{1}{\{ [(1 - \phi_2) \{ (1 - \phi_1) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \}] + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \}} \quad (11)$$

$$A_3 = \frac{[(1 - \phi_2) \{ (1 - \phi_1) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \}] + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \frac{\beta_{s2}}{\beta_f}}{\{ [(1 - \phi_2) \{ (1 - \phi_1) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \}] + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \}} \quad (12)$$

$$A_4 = \frac{k_f}{k_{hmf}} \{ [(1 - \phi_2) \{ (1 - \phi_1) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \}] + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \} + \phi_1 \frac{(\rho c_p)_{s1}}{(\rho c_p)_f} + \phi_2 \frac{(\rho c_p)_{s2}}{(\rho c_p)_f} \quad (13)$$

شرایط مرزی ما به این صورت است:

$$f(0) = f_0, f'(0) = 0, \theta(0) = 1 \quad (14)$$

$$f'(\infty) \rightarrow 1, \theta(\infty) \rightarrow 0 \quad (15)$$

با توجه به معادلات بالا، λ شناوری یا پارامتر همرفت مخلوط است،

عدد پراتل می‌باشد، پارامترهای مغناطیسی و همرفت مخلوط نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M = \frac{\sigma B_0^2}{\rho_f a} \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{Gr_x}{Re_x^2} = g \beta_f \frac{b}{a^2} \quad (17)$$

$$Gr_x = g \beta_f (T_w - T_\infty) \frac{x^3}{\nu_f^2} \quad (18)$$

$$Re_x = \frac{U_x}{\nu_f} \quad (19)$$

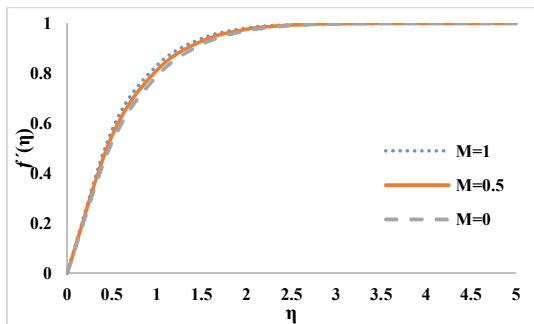
۲-۱- آنالیز تولید انترویی:

طبق بیژن [۳۲] و با در نظر گرفتن تقریبات لایه مرزی، آهنگ تولید انترویی به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

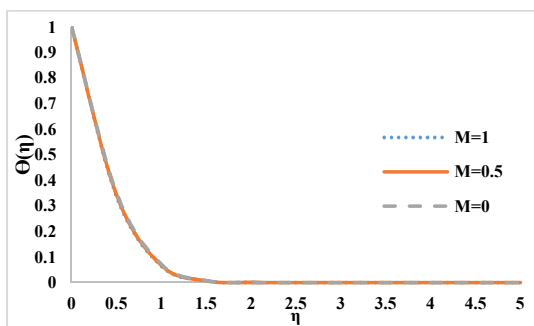
$$s_g''' = \frac{k}{T^2} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\mu}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma \beta_0^2}{T} U^2 \quad (20)$$

پس از بی‌بعد سازی معادله انترویی بالا، معادله (۲۰) به‌صورت زیر به دست می‌آید:

پروفیل بی‌بعد دمایی کم می‌باشد و به این دلیل است که به‌صورت مستقیم در معادله تشابهی انرژی ظاهر نمی‌شود.

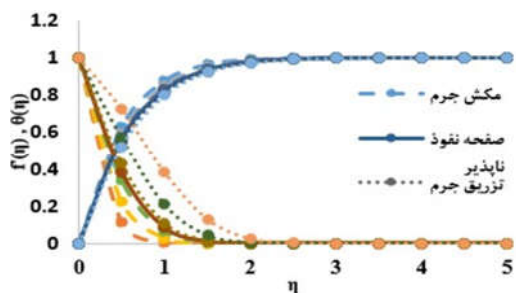


شکل ۵- تغییرات پارامتر M بر روی پروفیل سرعت نانو سیال



شکل ۶- تغییرات پارامتر M بر روی پروفیل دما نانو سیال هیبریدی

در شکل ۷ به بررسی تأثیر متغیر نفوذ پذیری f_0 بر پروفیل سرعت و دما برای مقادیر ثابت $Pr=6.2$ و $M=1$ و $\lambda=1$ پرداخته شد. همان‌طور که از نتایج ترسیم شده مشاهده می‌شود، ضخامت لایه مرزی دمایی با افزایش نفوذ پذیری کاهش می‌یابد، بنابراین نوسلت محلی با توجه به اثر نفوذپذیری بهتر می‌شود. علاوه بر این به‌صورت واضح می‌توان نتیجه گرفت که مکش جرم در صفحه تخت ضخامت لایه مرزی پایین‌تری نسبت به صفحه نفوذناپذیر دارد.



شکل ۷- پروفیل دما و سرعت برای مقادیر مختلف f_0 بر حسب η

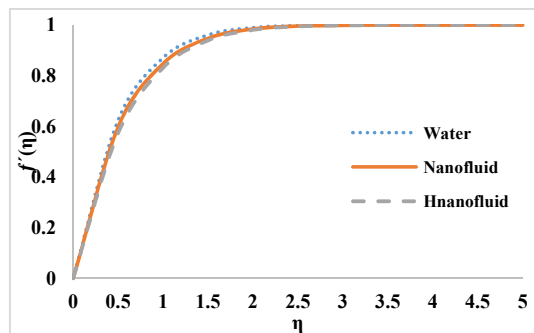
شکل ۸ پروفیل‌های f'' و f''' و θ' و θ'' بر حسب η به ازای $Pr=6.2$ و $M=1$ و $\lambda=1$ و $f_0=0.1$ ترسیم گشته است. با مشاهده شکل می‌توان دریافت که با افزایش η لایه مرزی گرمایی از بین رفته و $\theta(\eta)$ و قدر مطلق $\theta'(\eta)$ و کاهش یافته تا به صفر برسند. پس از آن $f'(\eta)$ و $f''(\eta)$ باقی می‌مانند.

جدول ۴- نتایج $f''(0)$ و $\theta'(0)$ جهت اعتبار سنجی

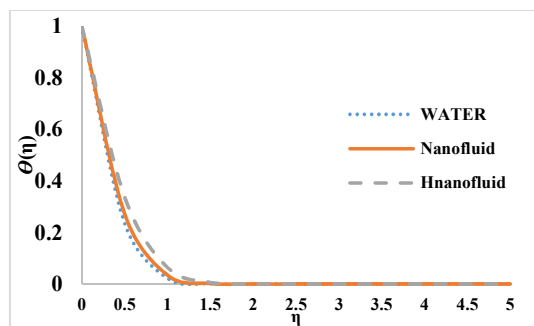
Pr	$f''(0)$		$\theta'(0)$	
	مطالعه حاضر	دیناروند و همکاران [17]	مطالعه حاضر	دیناروند و همکاران [17]
۰/۷	۱/۷۰۶۳۱	۱/۷۰۶۳۲	۰/۷۶۴۰۶	۰/۷۶۴۰۶
۱	۱/۶۴۵۴۳	۱/۶۷۵۴۳	۰/۸۷۰۷	۰/۸۷۰۸
۷	۱/۵۱۷۹	۱/۵۱۷۹	۱/۷۲۲۳	۱/۷۲۲۴

۴- تحلیل نمودارها

در شکل ۳ و ۴ به بررسی تأثیر پارامتر میزان ذرات نانو موجود در سیال پایه، بر روی پروفیل سرعت و دما برای مقادیر $Pr=6.2$ و $M=1$ و $\lambda=1$ و $f_0=0.1$ پرداخته شد. واضح است که پروفیل سرعت لایه مرزی با افزایش میزان غلظت نانو ذرات سیلیکون دی اکسید و ذرات دی آلومینیوم تری اکسید کاهش می‌یابد و پروفیل دما بالعکس با افزایش میزان غلظت افزایش می‌یابد.



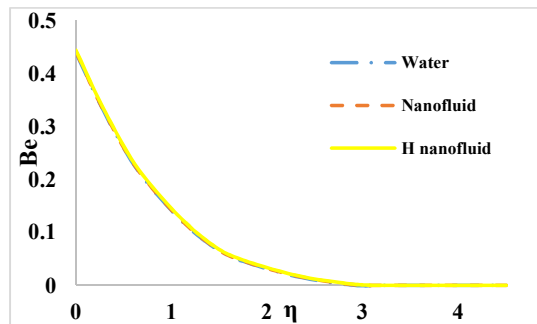
شکل ۳- تغییرات غلظت نانو ذرات بر روی پروفیل سرعت ۳ سیال مختلف



شکل ۴- تغییرات غلظت نانو ذرات بر روی پروفیل دمای ۳ سیال مختلف

در شکل ۵ و ۶ به بررسی تأثیر پارامتر مغناطیس بر روی پروفیل سرعت و دما برای مقادیر $Pr=6.2$ و $\phi_1, \phi_2=0.1$ و $\lambda=1$ و $f_0=0.1$ پرداخته شد. واضح است که هردو ضخامت لایه مرزی دمایی و سرعت با افزایش M کاهش می‌یابد، در نتیجه با تأثیر پارامتر مغناطیسی، ضریب اصطکاک پوسته و عدد نوسلت محلی زیاد می‌شود که به این دلیل است که گرادیان سرعت و همچنین گرادیان دمایی تقویت می‌شوند. علاوه بر این، با مقایسه شکل ۵ و ۶ اثر پارامتر M نسبتاً در

شکل ۱۱ اثر غلظت نانو ذرات بر روی عدد Be را نشان می‌دهد. با افزایش غلظت، ضخامت لایه مرزی گرمایی افزایش می‌یابد. $\theta(\eta)$ و قدر مطلق $\theta'(\eta)$ افزایش اندکی نشان می‌دهند، در نتیجه آنتروپی گرمایی تولیدی بی‌بعد نیز افزایش اندکی نشان می‌دهد. از طرفی با افزایش $\theta(\eta)$ کاهش بسیار اندکی در آنتروپی مغناطیسی و اصطکاکی رخ می‌دهد، بنابراین عدد Be افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱- نمودار تغییرات عدد بیژن با تغییرات غلظت نانو ذرات

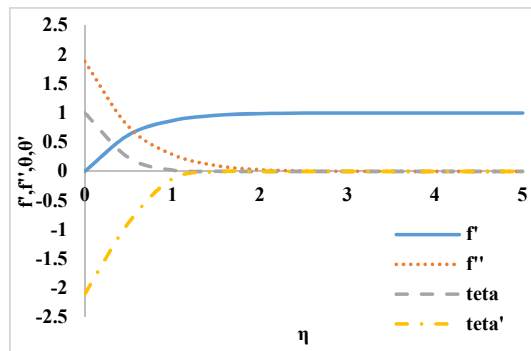
۵- نتیجه گیری

جریان لایه مرزی مخلوط همرفت، از یک نانو سیال هیبریدی نزدیک نقطه سکون بر روی یک صفحه تخت عمودی ب وجود جریان خارجی و دمای سطح به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفت. نانو سیال هیبریدی از معلق بودن ۲ نانوذره (دی آلومینیوم تری اکسید و سیلیکون دی اکسید) در آب خالص تشکیل می‌شود. یک روش حل تشابهی جهت تحلیل و بررسی معادله مومنوم، انرژی و معادله آنتروپی و تبدیل معادلات حاکم از معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیلی معمولی غیرخطی تبدیل شد و معادلات دیفرانسیلی معمولی غیرخطی، با روش رانج کوتاه مرتبه چهارم حل شده و تأثیر پارامترهایی مانند غلظت نانو ذرات، نفوذ پذیری سطح دیواره و پارامتر مغناطیسی بر روی پروفیل‌های دمایی و پروفیل سرعت مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مهم مطالعه حاضر شامل موارد زیر می‌باشد:

جریان نانو سیال هیبریدی، سرعت پایین‌تر و ضخامت لایه مرزی کمتری نسبت به سیال بدون نانو ذرات دارند. نانو سیال‌های هیبریدی می‌توانند به عنوان سیالاتی که دارای خواص ترموفیزیکی و انتقال گرما بهتری نسبت به سیالات دیگر می‌باشند استفاده گردند. افزایش میدان مغناطیسی، سبب نازک‌تر شدن لایه مرزی سرعتی و ضخیم‌تر شدن لایه مرزی گرمایی شده و نتیجتاً باعث کاهش نرخ کیفی انتقال گرما در نزدیکی دیواره می‌شود. همچنین افزایش درصد حجمی نانو ذرات و متغیر مغناطیسی به ترتیب، باعث افزایش و کاهش عدد بیژن می‌گردند که در نتیجه سبب افزایش و کاهش نرخ کیفی انتقال گرما در نزدیکی دیواره به ترتیب می‌گردند.

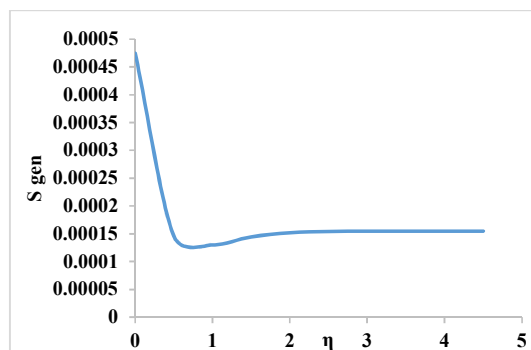
۶- نمادها

c_p	گرمای ویژه در فشار ثابت $(\frac{1}{kg K})$
a	ثابت $(\frac{1}{s})$
k	رسانایی گرمایی $(\frac{W}{mK})$



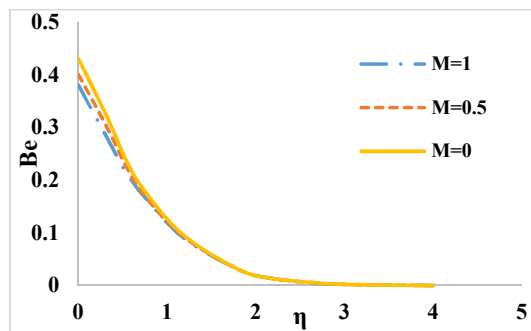
شکل ۸- پروفیل‌های f' و f'' و θ و θ' بر حسب η

شکل ۹ نشان دهنده نمودار آنتروپی تولیدی می‌باشد. همان‌طور که از شکل مشخص است، به مرور زمان آنتروپی گرمایی تولیدی بی‌بعد کاهش یافته و به سبب کاهش آن، مجموع آنتروپی تولید شده ناشی از اصطکاک و مغناطیس افزایش اندکی پیدا می‌کند.



شکل ۹- آنتروپی تولیدی بر حسب η

شکل ۱۰ تأثیر پارامتر مغناطیسی بر روی عدد بیژن را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نیز نمایان است با افزایش M گرمایش اصطکاکی افزایش یافته و در نتیجه سبب افزایش ضخامت لایه مرزی گرمایی می‌گردد. پروفیل دمایی و قدر مطلق گرادیان دمایی و آنتروپی گرمایی تولیدی بی‌بعد افزایش بسیار اندکی نشان می‌دهد، ولی تغییرات گرادیان سرعت بیشتر بوده و نقش مؤثرتری در اختلاف آنتروپی تولیدی بی‌بعد را دارند، بنابراین افزایش آنتروپی گرمایی در مقایسه با افزایش آنتروپی مغناطیسی و اصطکاکی بسیار اندک است و Be کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰- نمودار تغییرات عدد بیژن برای مقادیر مختلف مغناطیسی

- [6] Sarkar J., Ghosh P., Adil A., A review on hybrid nanofluids: Recent research, development and applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 43, pp. 164–177, 2015.
- [7] Eastman J. A., Choi S. U. S., Li S., Yu W., and Thompson L. J., Anomalous increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles. *Applied physics letters*, Vol. 78, No.6, pp. 718–720, 2001.
- [8] Xuan Y. and Lin Q., Investigation on convective heat transfer and flow features of nanofluids. *J. Heat Transfer*, Vol.125, No.1, pp. 151–155, 2003.
- [9] Jamaludin A., Nazar R., Pop I., Three-dimensional mixed convection stagnation-point flow over a permeable vertical stretching/shrinking surface with a velocity slip. *Chinese Journal of Physics*, Vol. 55, No.5, pp. 1865–1882, 2017.
- [10] Devi C.D.S., Takhar H.S., Nath G., Unsteady mixed convection flow in stagnation region adjacent to a vertical surface. *HeatMass Transfer*, Vol. 26, No.2, pp. 71–79, 1991.
- [11] Lok Y.Y., Amin N., Campean D., Pop I., Steady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation-point on a vertical surface, *Int. J. Numerical Methods Heat Fluid Flow*, Vol. 15, pp. 654–670, 2005.
- [12] Ishak A., Nazar R., Bachok N., Pop I., MHD mixed convection flow near the stagnation-point on a vertical permeable surface. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 389, No.1, pp. 40–46, 2010.
- [13] Nasir N.A.A.M., Ishak A., Pop I., Stagnation-point flow and heat transfer past a permeable quadratically stretching/shrinking sheet, *Chinese Journal of Physics*, Vol. 55, No.5, pp. 2081–2091, 2017.
- [14] Santhi G., Rao C.N.B., Murthy A.S.N., Dual solutions in mixed convection with variable physical properties. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, Vol. 1, No.2, pp. 1-5, 2011.
- [15] Ishak A., Nazar Roslinda, Pop I., Dual solutions in mixed convection boundary layer flow of micropolar fluids. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No.4, pp. 1324–1333, 2009.
- [16] Subhashini S.V., Sumathi R., Dual solutions of a mixed convection flow of nanofluids over a moving vertical plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 71, pp. 117–124, 2014.
- [17] Dinarvand S., Hosseini R., Pop I., Abbassi A., Homotopy analysis method for mixed convective boundary layer flow of a nanofluid over a vertical circular cylinder with prescribed surface temperature, *Thermal Science*, Vol. 19, No.2, pp. 549–561, 2015.
- [18] Ferdows M. and Alzahrani F., Dual solutions of nanaofluid forced convective flow with heat transfer and porous media past a moving surface. *PhysicaA: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 389, No.1, pp. 81–97, 2020.
- [19] Emad A.H., Dual exact solutions of graphene–water nanofluid flow over stretching/ shrinking sheet with suction/injection and heat source/sink: Critical values and regions with stability. *Powder Technology*, Vol. 342, pp. 528–544, 2019
- [20] Lund A., Omar Z., Khan I., Mathematical analysis of magneto hydrodynamic (MHD) flow of micropolar nanofluid under buoyancy effects past a vertical shrinking surface: dual solutions. *Heliyon*, Vol. 5, No.5, pp. 24–32, 2019.
- [21] Bansal J.L., Magneto fluid dynamics of viscous fluids. Jaipur Publishing House, pp.361–373, 1994.
- [22] Kumaran V., Kumar A. V., and Pop I., Transition of MHD boundary layer flow past a stretching sheet, *J. Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No.2, pp. 300–311, 2010.
- [23] Mabood F., Khan W. A., and Ismail A. I. M., MHD boundary layer flow and heat transfer of nanofluids over a nonlinear stretching sheet: A numerical study. *J. Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 374, pp. 569–576, 2015.
- [24] Vishnu-Ganesh N., Abdul-Hakeem A.K., Jayaprakash R., and Ganga B., Analytical and numerical studies on hydro magnetic flow of water based metal nanofluids over a stretching sheet with thermal radiation effect. *J. Nanofluids*, Vol. 3, No.2, pp. 154–161, 2014.

عدد رینولدز	Re
فشار ($\frac{kg}{ms^2}$)	P
شتاب گرانشی ($\frac{m}{s^2}$)	g
دمای سطح (K)	T_w
عدد پرنتل	Pr
دمای محیط (K)	T_∞
متغیر مغناطیسی	M
ثابت ($\frac{K}{m}$)	b
عدد اکرت	Ec
دما (K)	T
دامنه مغناطیسی یکنواخت (T)	Bo
تابع بی بعد جریان آزاد	F(η)
مؤلفه های سرعت ($\frac{m}{s}$)	u,v
متغیر نفوذپذیری	f_0
عدد گرافش	Gr
انترویپی	S
سرعت جریان آزاد ($\frac{m}{s}$)	U(x)

علائم یونانی

چگالی ($\frac{kg}{m^3}$)	ρ
تابع جریان بی بعد ($\frac{m^2}{s}$)	ψ
متغیر تشابهی	η
درصد حجمی	ϕ
لزجت ($\frac{kg}{ms}$)	μ
پخشندگی گرمایی ($\frac{1}{K}$)	β
ضریب پخش دمایی ($\frac{m^2}{s}$)	α
متغیر شناوری	λ
رسانایی الکتریکی ($\frac{m^3A^2}{kg}$)	σ
لزجت سینماتیکی ($\frac{m^2}{s}$)	ν
توزیع دمای بی بعد	$\Theta(\eta)$

۷-مراجع

- [1] Dinarvand S., Hosseini R., Abulhasansari M., Pop I., Buongiorno's model for double-diffusive mixed convective stagnation-pointflow of a nanofluid considering diffusiophoresis effect of binary base fluid. *Advanced Powder Technology*, Vol. 26, No.5, pp. 1423–1434, 2015.
- [2] Dhinesh Kumar D., Valan Arasu A., A comprehensive review of preparation, characterization, properties and stability of hybrid nanofluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 81, pp. 1669–1689, 2018.
- [3] Hayat T., Nadeem S., Heat transfer enhancement with Ag – CuO/water hybrid nanofluid. *Results in Physics*, Vol. 7, pp. 2317–2324, 2017.
- [4] Buongiorno J., Hu L-W., Kim S. J., Hannink R., Truon B. g, Forrest E., Nanofluids for enhanced economics and safety of nuclear reactors: an evaluation of the potential features, issues, and research gaps. *Nuclear Technology*, Vol. 162, No. 1, pp. 80–91, 2008.
- [5] Sidik N.A.C., Jamil M.M., Aziz Japar W.M.A., Adamu I.M., A review on preparation methods, stability and applications of hybrid nanofluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 80, pp. 1112–1122, 2017.

- [25] Aliakbar V., Alizadeh -Pahlavan A., and Sadeghy K., The influence of thermal radiation on MHD flow of Maxwellian fluids above stretching sheets, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No.3, pp. 779 – 794, 2009.
- [26] Rostami M., Dinarvand S., Pop I., Dual solutions for mixed convective stagnation-point flow of aqueous silica-alumina hybrid nano fluid. *Chinese journal of physics*, Vol. 56, No.5, pp. 2465-2478, 2018.
- [27] Ingham D.B., Singular and non-unique solutions of the boundary-layer equations for the flow due to free convection near a continuously moving vertical plate. *J. Appl. Math. Phys*, Vol. 37. No.4, pp. 559–572, 1986.
- [28] Ridha A., Aiding flows non-unique similarity solutions of mixed-convection boundary-layer equations, *J. Appl. Math. Phys*, Vol. 47, No.3, pp. 341–352, 1996.
- [29] Fracasso F., Influence of quench rate on the hardness obtained after artificial ageing of an Al-Si-Mg alloy, MSc. Thesis, University of Padova, 2010.
- [30] Blasius H., Grenzschichten in Fl. flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z Math. Phys*, Vol. 56, No.1, 1907.
- [31] Tamim H., Dinarvand S., Hosseini R., Pop I., MHD mixed convection stagnation-point flow of a nanofluid over a vertical permeable surface: a comprehensive report of dual solutions. *Heat Mass Transfer*, Vol. 50, No.5, pp. 639–650, 2014.
- [32] Bejan A., Second-law analysis in heat transfer and thermal design, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 15, pp. 1–58, 1982.