

# شبیه سازی هیدرودینامیکی بستر سیالی مایع - جامد با سیال غیر نیوتنی قانون توانی با استفاده از روش شبکه بولتزمن و نمایه هموار

**احسان مهربانی گوهری\***      استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، e.mehrabi@pnu.ac.ir  
**محمد سفید**      دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران، mhsefid@yahoo.com  
**علیرضا ملوزه**      کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران، ml\_alireza72@yahoo.com  
**محسن مظفرفی شمس**      استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه میبد، میبد، ایران، mehrai.ehsan@gmail.com

## چکیده

در این تحقیق به کمک روش ترکیبی شبکه بولتزمن و نمایه هموار بستر سیالی مایع-جامد با سیال غیرنیوتنی قانون توانی مدل سازی شده است. هندسه بستر کانال استوانه‌ای حاوی ذرات کروی با قطرهای یکسان می‌باشد. مدل هیدرودینامیکی سیال بر مبنای روش شبکه بولتزمن باتناگار-گروس-کروک بوده و جهت برقراری شرط عدم لغزش در فصل مشترک جامد - مایع از روش نمایه هموار استفاده شده است. جهت بررسی قابلیت روش مطرح شده در مدل سازی بسترهای سیالی غیرنیوتنی، یک نمونه بستر سیالی با ۴۱۶ ذره به صورت عددی مدل شده و نتایج مدل سازی برای یک سیال نیوتنی (آب) و دو سیال غیرنیوتنی قانون توانی به عنوان سیال عامل بستر بررسی و با نتایج تجربی ارائه شده توسط محققان مقایسه گردیده است. ارزیابی‌ها برای حداقل سرعت سیالیت سیالات غیرنیوتنی با رابطه تجربی یو انجام شده، همچنین برای تخلخل و ارتفاع بستر، نتایج مدل سازی سیال نیوتنی با رابطه تجربی ریچاردسون-زاکلی و سیالات غیرنیوتنی با رابطه میشاس و آلبرجیوا مقایسه شده است، که با توجه به میزان خطای میانگین روابط تجربی استفاده شده در هر مورد توافق خوبی میان نتایج عددی و تجربی مشاهده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** بستر سیالی مایع-جامد، شبکه بولتزمن، نمایه هموار، سیال غیرنیوتنی قانون توانی.

## Hydrodynamic Simulation of Liquid-Solid Fluidized bed with Non-Newtonian Power-law Fluids Using SPM-LBM Method

**E. Mehrabi Gohari**      Department of Mechanical Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran  
**M. Sefid**      Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran  
**A. R. Malooze**      Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran  
**M. Mozafari-Shamsi**      Department of Mechanical Engineering, Meybod University, Yazd, Iran

### Abstract

In the present study, a combined Lattice Boltzmann method-smoothed profile method is used for simulation of a liquid-solid fluidized bed with non-Newtonian Power-law fluids. The geometry is contained circular monodisperse particles in a cylindrical channel. The hydrodynamic model of the flow is based on the Bhatnagar-Gross-Krook Lattice Boltzmann method and the smoothed profile method is adopted to enforce the no-slip boundary condition at the liquid-solid interface. A numerical instance of a fluidized bed involving 416 particles is presented to demonstrate the capability of the combined scheme. The results for both Newtonian and non-Newtonian liquids have compared with the experimental results of other researchers. Porosity and bed height results of Newtonian fluid (water) compared with the Richardson-Zaki equation which was showed good correspondence. Non-Newtonian fluid results compared with the Yu equation for estimating minimum fluidization velocity and the Machač-Ulbrichová equation for porosity and bed height, yet by considering uncertainty in non-Newtonian equations results of comparisons are acceptable.

**Keywords:** Liquid-solid fluidized bed, Lattice Boltzmann method, Smoothed profile method, Non-Newtonian Power-law fluid

### ۱ - مقدمه

جایگزین در شبیه سازی جریان سیال با فیزیک و هندسه های پیچیده معطوف خود ساخته است. این روش برخلاف روش های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی از معادله بولتزمن گسسته شده برای حل میدان سرعت در جریان سیال بهره می گیرد [۳]. به عنوان نمونه، وانگ و همکارانش [۴] الگوریتمی برای تحلیل برخورد ذرات جامد و سیال به روش شبکه بولتزمن و روش مرز شناور ارائه نموده ودقت و کارایی این الگوریتم را با مقایسه با مراجع معتبر تایید کردند. جهت غلبه بر انجام محاسبات نسبتاً پیچیده برای نیروی حجمی در روش مرزهای شناور، روش دیگری بر مبنای همان روش مرزهای شناور در سال ۲۰۰۵ توسط ناکایاما و یاماموتو [۵]، موسوم به روش نمایه هموار پیشنهاد شد. این

سیال سازی عملی است که در آن ذرات جامد از طریق معلق شدن در یک گاز یا مایع به حالت شبه سیال در آورده می شوند امتیازهای چشمگیر و قابل توجه این پدیده که مهم ترین آنها بالا بودن آهنگ انتقال گرما و جرم می باشد، باعث برتری این فرآیند نسبت به فرآیندهای مشابه شده است [۱]. کاربردهای بستر های سیالی شده جامد-مایع در صنعت در زمینه هایی چون احیا و تصفیه پساب های صنعتی، پلیمریزاسیون، اکسیداسیون های بیولوژیکی و فرآیندهای تخمیر است، که سیال عموماً در این فرآیندها طبیعت غیرنیوتنی دارد [۲]. اخیراً، روش شبکه بولتزمن توجه زیادی را به عنوان یک روش

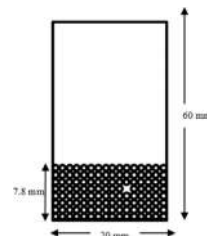
\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: e.mehrabi@pnu.ac.ir

روش از یک شبکه اویلری ثابت برای سیال میزبان استفاده می‌کند. مهرابی و همکاران [۱] برای اولین بار از ترکیب روش شبکه بولتزمن و نمایه هموار برای شبیه سازی بستر سیالی مایع-جامد با سیال نیوتنی استفاده نموده و نتایج قابل قبولی ارائه کردند.

در این مقاله، برای نخستین بار از روش ترکیبی شبکه بولتزمن و نمایه هموار<sup>۱</sup> برای شبیه سازی هیدرودینامیکی بسترهای سیالی مایع-جامد غیرنیوتنی قانون توانی استفاده شده است. روش مطالعه دوفازی اویلری-لاگرانژی با رژیم جریان لایه ای می باشد. که برای حل فاز جامد معادله حرکت نیوتن (لاگرانژی) و برای فاز سیال روش شبکه بولتزمن (اویلری) استفاده می شود، همچنین برای برقراری شرط عدم لغزش در سطح مشترک بین جامد و سیال از روش نمایه هموار استفاده شده است.

## ۲ - هندسه بستر و شرایط مرزی

هندسه مدل شده در این مطالعه بستری شامل ۴۱۶ ذره جامد کروی درون یک محفظه به ارتفاع ۶۰ میلیمتر و پهنا ۲۰ میلیمتر است (شکل ۱). سایر مشخصات در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است. در این تحقیق، شرط مرزی بین ذرات با سیال و شرط مرزی بین سیال و دیواره شرط عدم لغزش می‌باشد که به ترتیب با استفاده از روش نمایه هموار و شبکه بولتزمن مدل سازی می‌شود. همچنین برای ورودی و خروجی با توجه به صفر بودن گرادیان سرعت، از شرط مرزی زو-هی استفاده شده است.



شکل ۱- طرحواره هندسه بستر مدل شده

جدول ۱- مشخصات هندسه بستر مدل شده

ابعاد بستر (mm <sup>2</sup> )	تعداد ذرات جامد	قطر ذرات جامد (mm)	فاصله ذرات جامد از اطراف	ارتفاع اولیه بستر (mm)
۶۰×۲۰	۴۱۶	۰٫۰۶	D <sub>p</sub> /۱۲	۷٫۸

جدول ۲- مشخصات سیالات استفاده شده در این مطالعه

ویسکوزیته		چگالی سیال kg/m <sup>3</sup>	نام سیال
k(Pa.sn)	n		
۰/۰۰۱	۱	۱۰۰۰	آب
۰/۰۰۸	۰/۹۲	۱۰۲۰	محلول کریوکسی متیل سلولوز ۰.1%
۰/۰۰۸۹	۰/۸۱	۱۰۰۰	محلول پلی اکساید 301 0.35%

<sup>۱</sup> Smoothed profile method (SPM)

<sup>۲</sup> 0.1% carboxyl methyl cellulose water solution

<sup>۳</sup> 0.35% Polyox - 301 water solution

## ۳- روش حل عددی

در این مطالعه از روش شبکه بولتزمن با عملکرد برخورد باتناگار، گروس و کروک [۶] برای مدل سازی جریان سیال استفاده شده است. معادله شبکه بولتزمن مورد استفاده در رابطه (۱) ارائه شده است.

$$f_{\alpha}(X + c_{\alpha}\delta t, t + \delta t) = f_{\alpha}(X, t) - \frac{1}{\tau} [f_{\alpha}(X, t) - f_{\alpha}^{eq}(X, t)] \quad (1)$$

همچنین گسسته سازی معادله با استفاده از مدل D2Q9، که معروفترین مدل در محاسبات دوبعدی می‌باشد انجام گرفته است [۵]. علاوه بر این به منظور شبیه سازی نیروی هیدرودینامیکی بین ذرات در فواصل بسیار نزدیک و دیواره کانال از یک نیروی دافعه بین ذرات استفاده شده است [۱].

تفاوت اصلی معادلات شبکه بولتزمن برای سیال نیوتنی و غیرنیوتنی در ثابت نبودن زمان آرامش است. برای سیال غیرنیوتنی قانون توانی لزجت ظاهری با استفاده از نرخ برش سیال تعریف شده و متغیر با زمان است که از رابطه (۲) تبعیت می‌کند.

$$\eta = k(\gamma)^{n-1} \quad \text{و} \quad \gamma = 2\sqrt{I_2} \quad (2)$$

که در آن  $\eta$ ،  $k$ ،  $n$ ،  $\gamma$ ،  $I_2$  به ترتیب لزجت ظاهری، ضریب ثابت سیال غیرنیوتنی (ثابت پایداری)، نرخ برش، اندیس قاعده توانی و نامساوی دوم تانسور تغییر شکل است. در شبکه بولتزمن رابطه (۳) میان لزجت سینماتیکی ( $\nu$ ) و زمان آرامش بدون بعد برقرار است.

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \quad (3)$$

لذا زمان آرامش بدون بعد در شبکه بولتزمن برای مدل سازی سیال غیرنیوتنی قانون توانی به صورت محلی و تابع زمان است. در شبکه بولتزمن تانسور تنش برای سیالات غیرقابل تراکم با فشار  $P$  به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود [۷].

$$\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + 2\nu S_{\alpha\beta} \quad (4)$$

که در آن  $\delta_{\alpha\beta}$ ، دلتای کرونکر است و  $S_{\alpha\beta}$  به صورت رابطه (۵) است.

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\beta} u_{\alpha} + \nabla_{\alpha} u_{\beta}) \quad (5)$$

بوید [۷] نشان داد در شبکه بولتزمن دو رابطه (۶) و (۷) برای  $S_{\alpha\beta}$  و نامتغیر دوم تانسور نرخ برش برقرار است.

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{3}{2\tau} \sum_{i=0}^8 (f_i - f_i^{eq}) c_{i\alpha} c_{i\beta} \quad (6)$$

$$I_2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^1 S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \quad (7)$$

با محاسبه نرخ برش و جایگذاری آن در رابطه (۲) لزجت ظاهری سیال غیرنیوتنی محاسبه می‌شود و در نتیجه با استفاده از رابطه (۸) زمان آرامش در هر گره از شبکه در هر زمان بدست می‌آید.

$$\tau(x, t) = 0.5 + 3 \left( \frac{\eta(\gamma)}{\rho} \right) \quad (8)$$

با توجه به رابطه (۵) زمان آرامش بدون بعد تابعی از گرادیان سرعت است. در حل عددی لازم است که بعد از راه اندازی اولیه برنامه رایانه‌ای، در هر بار تکرار با محاسبه گرادیان سرعت، زمان آرامش جدید محاسبه شود. از این زمان آرامش جدید در گام زمانی بعد در معادله گسسته شده برای شبکه بولتزمن (رابطه (۱)) استفاده می‌شود.

روش نمایه هموار هر ذره را با یک منحنی موسوم به منحنی تابع موقعیت جسم جامد  $\phi(X)$ ، نشان می‌دهد که این منحنی در ناحیه

با انتگرال گیری از نیروی اعمالی بر یک گره قرار گرفته درون جسم (رابطه (۱۴)) روی کل حجم جسم و همچنین انتگرال گیری از گشتاور حاصل از این نیرو روی کل جسم، می توان نیرو ( $F_i^H$ ) و گشتاور ( $T_i^H$ ) هیدرودینامیکی کل که از طرف سیال بر هر ذره وارد می شود را به صورت روابط (۱۶) و (۱۷) بدست آورد [۸].

$$F_i^H = \int_{V_{pi}} \rho \phi(X,t) (u(X,t) - u_p(X,t)) dV_{pi} \quad (16)$$

$$T_i^H = \int (X - R_i) \rho \phi(X,t) (u(X,t) - u_p(X,t)) dV_{pi} \quad (17)$$

با استفاده از معادلات حرکت نیوتن-اویلر (روابط (۱۸) و (۱۹))

$$M_{pi} \frac{dU_{ci}}{dt} = F_i^H + F_{r,ij} + F_i^{ext} \quad (18)$$

$$I_{pi} \cdot \dot{\omega}_i = T_i^H + T_i^{ext} \quad (19)$$

و روش صریح اویلر سرعت خطی و سرعت زاویه ای ذرات به صورت دو رابطه (۲۰) و (۲۱) به روز رسانی می شوند.

$$U_{ci}^{n+1} = U_{ci}^n + M_{pi}^{-1} \int_t^{t+\delta t} (F_i^H + F_{r,ij} + F_i^{ext}) ds \quad (20)$$

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n + I_{pi}^{-1} \int_t^{t+\delta t} (T_i^H + T_i^{ext}) ds \quad (21)$$

در نهایت، بردار موقعیت جدید ذره با در نظر گرفتن  $U_{ci} = dR_i/dt$  و روش صریح اویلر به صورت رابطه (۲۲) محاسبه می شود.

$$R_i^{n+1} = R_i^n + \int_t^{t+\delta t} U_{ci} ds \quad (22)$$

فلوچارت روش حل عددی در شکل ۲ آورده شده است. برنامه به زبان برنامه نویسی فترن نوشته شده که با تعریف میدان جاذبه و ویژگی های فیزیکی سیال و ذرات جامد و سپس مقدار دهی اولیه مقادیر پارامترها از جمله زمان آرامش اولیه، وارد چرخه اصلی خود می شود.



شکل ۲- فلوچارت حل عددی

#### ۴- بررسی و ارزیابی قابلیت روش عددی

جهت ارزیابی قابلیت روش عددی آرایه شده، نتایج مدل سازی با سیال نیوتنی و غیرنیوتنی، با روابط تجربی مقایسه شده است.

جامد دارای مقدار یک، در ناحیه سیال دارای مقدار صفر و به طور هموار از مقدار یک به صفر در سطح مشترک جامد و سیال تغییر می کند [۵]. برای تعیین نواحی که در آنها ذرات جامد وجود دارند، تابع موقعیت به صورت رابطه (۹) است.

$$\phi(X,t) = \sum_{i=1}^{N_p} \phi_i(X,t) \quad (9)$$

در این رابطه،  $\phi_i(X,t)$  که مقداری بین صفر و یک دارد، تابع موقعیت ذره نام می باشد و  $N_p$  تعداد ذرات جامد است که در سرتاسر ناحیه حل قرار دارند. در این تحقیق از رابطه (۱۰) برای تعیین تابع موقعیت در روش نمایه هموار استفاده شده است [۵].

$$\phi_i(X,t) = s(R_i - |X - R_i(t)|) \quad (10-f)$$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x < \xi/2 \\ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{\xi} + 1\right) & |x| \leq \xi/2 \\ 1 & x > \xi/2 \end{cases} \quad (10-g)$$

در این رابطه  $R_i$  شعاع هر ذره و  $R_i$  و  $\xi$  به ترتیب بردار موقعیت مرکز ذره و ضخامت سطح مشترک ذره نام می باشند. سرعت گره های شبکه با بردار موقعیت  $X$  و قرار گرفته درون هر ذره با استفاده از سینماتیک اجسام صلب به صورت رابطه (۱۱) محاسبه می شود.

$$\phi(X,t) u_p(X,t) = \sum_{i=1}^{N_p} \phi_i(X,t) [u_{ci}(t) + \omega_i * \{X - R_i(t)\}] \quad (11)$$

که در آن  $u_c$  و  $\omega_i$  به ترتیب، سرعت خطی مرکز جرم و سرعت زاویه ای ذره نام می باشند، بر اساس آنچه که بیان شده، میدان سرعت کل ناحیه حل به شکل رابطه (۱۲) تعریف می شود.

$$u(X,t) = \phi(X,t) u_p(X,t) + (1 - \phi(X,t)) u_f(X,t) \quad (12)$$

با توجه به رابطه (۱۲) سرعت در ذرات برابر سرعت ذره و در ناحیه سیال برابر سرعت سیال است و در سطح مشترک بین ذرات جامد و سیال به صورت هموار از سرعت ذره به سرعت سیال تغییر می کند. در روش نمایه هموار گره های سیال پوشیده شده با جامد باید سرعتی برابر با ذره داشته باشند، برای این منظور در روش نمایه هموار نیروی حجمی به کل میدان سیال وارد می شود تا گره های سیال مجازی واقع در داخل ذرات را وادار به ارضا حرکت جسم صلب کند، این نیروی حجمی خارج از ناحیه جسم جامد صفر است و از رابطه (۱۳) بدست می آید [۸].

$$f_H(X,t) = \phi(X,t) f_p(X,t) \quad (13)$$

$$= \phi(X,t) (u_p(X,t) - u(X,t)) / \delta t$$

با استفاده از قانون سوم نیوتن می توان نیروی وارد بر واحد جرم روی گره های جامد قرار گرفته درون ذره را به صورت رابطه (۱۴) بدست آورد.

$$f'_H(X,t) = \phi(X,t) f_p(X,t) \quad (14)$$

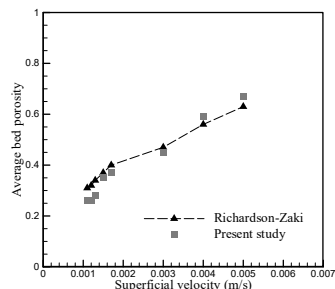
با اضافه کردن یک جمله به تابع برخورد به منظور اعمال نیروی حجمی به معادله شبکه بولتزمن [۸]، ترکیب نمایه هموار با روش شبکه بولتزمن برای سیال غیرنیوتنی به صورت رابطه (۱۵) در می آید.

$$f'_\alpha(X + c_\alpha \delta t, t + \delta t) = f_\alpha(X,t) - \frac{1}{\tau(X,t)} [f_\alpha(X,t) - f_\alpha^{eq}(X,t)] + \frac{\omega_\alpha \Delta t}{c_\alpha^2} (f_H \cdot c_\alpha) \quad (15)$$

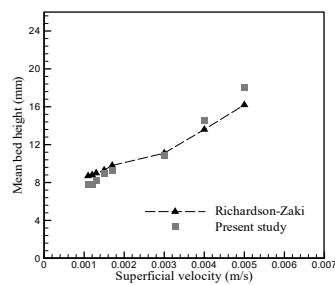
#### ۴-۱- سیال نیوتنی

##### ۴-۱-۱- تخلخل و ارتفاع بستر

جهت تخمین تخلخل و ارتفاع بسترهای سیالی شده دوفاز مایع-جامد رابطه تجربی ریچاردسون-زاکي [۹] به طور گسترده استفاده می-شود. در این تحقیق نیز برای بستر مورد مطالعه با آب به عنوان سیال عامل، مقادیر تخلخل و ارتفاع بستر با استفاده از رابطه ریچاردسون-زاکي در سرعت‌های ظاهری متفاوت محاسبه و نتایج با نتایج مدل‌سازی مقایسه شده است (شکل ۳ و ۴). با توجه به این شکل‌ها، نتایج مدل-سازی برای سرعت‌های نزدیک به حداقل سرعت سیالیت، ارتفاع و تخلخل بستر را کمتر از مقادیر تجربی نشان می‌دهند، با افزایش سرعت ظاهری، بستر منبسط شده، ارتفاع و تخلخل بستر افزایش می‌یابد و نتایج مدل‌سازی تخلخل و ارتفاع بستر را بیشتر از مقادیر تجربی نشان می‌دهند. در شکل ۳ و ۴ حداکثر خطا برای تخلخل و ارتفاع بستر کمتر ۱۰ درصد می‌باشد که توافق خوبی را نشان می‌دهد.



شکل ۳- تخلخل بستر بدست آمده از مدل‌سازی و رابطه ریچاردسون-زاکي به صورت تابعی از سرعت ظاهری سیال.



شکل ۴- ارتفاع میانگین بستر، بدست آمده از مدل‌سازی و رابطه ریچاردسون-زاکي به صورت تابعی از سرعت ظاهری

#### ۴-۲- سیال غیرنیوتنی

##### ۴-۲-۱- حداقل سرعت سیالیت

برای بسترهای سیالی مایع-جامد غیرنیوتنی روابط تجربی متعددی ارائه شده است چاهابرا [۱۰] مجموعه این روابط را جمع‌آوری کرده است. با توجه به ویژگی‌های دو سیال غیرنیوتنی مورد بررسی در این پژوهش، که در جدول ۲ آورده شده، از رابطه تجربی یو [۱۰] (رابطه (۲۳)) جهت تخمین حداقل سرعت سیالیت استفاده شده است. چاهابرا [۱۰] خطای میانگین این رابطه را ۲۰-۲۵ درصد گزارش کرده است.

$$Ar' = \frac{12.5 \left[ \frac{(9n+3)(1-\varepsilon_{mf})}{n} \right]^n}{\varepsilon_{mf}^{2n+1}} Re'_{mf}{}^{n/(2-n)} \quad (23)$$

که در آن  $n$ ، اندیس قاعده توانی در مدل سیال قانون توانی است،  $Re'_{mf}$  و  $Ar'$  رینولدز حداقل سیالیت تصحیح شده و عدد ارشمیدسی تصحیح شده برای سیال غیرنیوتنی هستند، که به صورت رابطه (۲۴) و (۲۵) تعریف می‌شوند.

$$Re'_{mf} = \frac{D_p^n U_{mf}^{2-n} \rho_f}{k} \quad (24)$$

$$Ar' = D_p^{\frac{2+n}{2-n}} \rho_f^{\frac{n}{2-n}} (\rho_p - \rho_f) g / k^{\frac{2}{2-n}} \quad (25)$$

برای دو سیال غیرنیوتنی در جدول ۲ و هندسه بستر معرفی شده، (جدول ۱) حداقل سرعت سیالیت از رابطه (۲۳) محاسبه و با نتایج مدل‌سازی در جدول ۳ مقایسه شده است، با توجه به درصد خطای میانگین برای رابطه یو توافق خوبی میان نتایج مدل‌سازی انجام شده و مقادیر حاصل از رابطه تجربی دیده می‌شود.

جدول ۳- نتایج مدل‌سازی و نتایج تجربی.

درصد خطا	حداقل سرعت سیالیت (m/s)		نام سیال
	یو [۱۰]	خروجی مدل	
۱۴/۵	۰/۰۰۰۹۶	۰/۰۰۱۱	محلول کربوکسی متیل سلولوز 0.1%
۱۸/۴	۰/۰۰۱۴۱	۰/۰۰۱۱۵	محلول پلی اکساید 301 0.35%

##### ۴-۲-۲- تخلخل و ارتفاع بستر

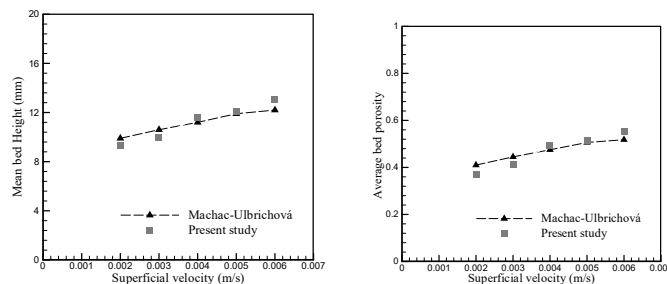
میشاس و آلبرچیا [۱۱] بر مبنای داده‌های آزمایشگاهی خود، روابط (۲۶) تا (۲۸) را برای پیش‌بینی انبساط بستر در جریان خزشی پیشنهاد کردند.

$$\frac{U}{U_T} = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}} \right)^z \quad (26)$$

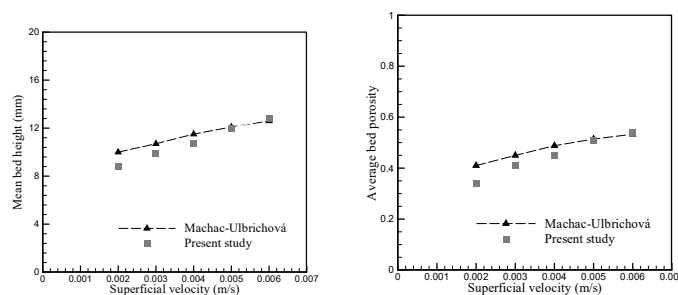
$$\varepsilon_{max} = \left\{ 1 + 0.73(1-n) - 0.79 \left( \frac{D_p}{D_b} \right) \right\}^{-1} \quad (27)$$

$$Z = 6.3 + 7(1-n) - 15.6(D_p/D_b) \quad (28)$$

برای دو سیال مورد بررسی در این مطالعه، عدد رینولدز ذرات از ۰/۶ تا ۰/۱ برای سرعت‌های ظاهری متفاوت تغییر می‌کند. لذا جریان در بخشی از محاسبات خزشی است، در نتیجه از رابطه میشاس و آلبرچیا [۱۱] (روابط (۲۶) تا (۲۸)) برای تخلخل و ارتفاع بستر استفاده شده است. شکل ۵ و ۶ تخلخل و ارتفاع بستر را به ترتیب برای محلول کربوکسی متیل سلولوز 0.1% و محلول پلی اکساید 301 0.35% نشان می‌دهند، مقادیر تخلخل و ارتفاع بستر از رابطه تجربی محاسبه و با نتایج مدل‌سازی جهت مقایسه به صورت تابعی از سرعت ظاهری سیال ارائه شده است. با توجه به شکل ۵ و ۶، نتایج مدل‌سازی در سرعت‌های نزدیک به حداقل سرعت سیالیت مقادیر تخلخل و ارتفاع بستر را کمتر از رابطه میشاس و آلبرچیا [۱۱] نشان می‌دهد، که با افزایش سرعت ظاهری سیال این اختلاف کمتر می‌شود. حداکثر خطا در نمودار کمتر از ۱۲ درصد است که با توجه به تقریب استفاده شده برای محاسبه سرعت ترمینال توافق خوبی میان نتایج مدل‌سازی و نتایج تجربی دیده می‌شود.



شکل ۵- ارتفاع میانگین بستر (سمت چپ) و تخلخل میانگین بستر (سمت راست) بدست آمده از مدل سازی و رابطه تجربی میشاس-آلبرچووا به صورت تابعی از سرعت ظاهری سیال برای بستر با محلول کربوکسی متیل سلولز 0.1% به عنوان سیال عامل.



شکل ۶- ارتفاع میانگین بستر (سمت چپ) و تخلخل میانگین بستر (سمت راست) بدست آمده از مدل سازی و رابطه تجربی میشاس-آلبرچووا به صورت تابعی از سرعت ظاهری سیال برای بستر با محلول پلی اکساید 301 0.35% به عنوان سیال عامل.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله از ترکیب روش شبکه بولتزمن و نمایه هموار برای نخستین بار، جهت مدل سازی هیدرودینامیکی بستر سیالی دوفاز مایع-جامد غیرنیوتنی قانون توانی، در یک هندسه دو بعدی استفاده شده است. نتایج مدل سازی نیوتنی در مقایسه با رابطه ریچادسون-زاک برای ارتفاع و تخلخل بستر توافق خوبی را نشان می دهند و در مجموع برای سیال نیوتنی خطای بستر در حال انبساط کمتر از ۱۰ درصد مشاهده شد. مقایسه برای بستر با سیال غیرنیوتنی، با رابطه یو برای حداقل سرعت سیالیت و برای تخلخل و ارتفاع بستر با رابطه میشاس و آلبرچووا انجام شده است. با توجه به تشابه کامل ویژگی های دو سیال مورد مطالعه با سیال های بررسی شده توسط یو نتایج مدل برای حداقل سرعت سیالیت خطای کمتری نسبت به خطای میانگین رابطه یو نشان می دهند. برای تخلخل و ارتفاع بستر با توجه به تقریب زده شده برای ضریب پسا حداکثر خطا تا ۱۲ درصد می باشد. بنابراین مدل عددی ارائه شده در این مقاله به خوبی توانسته رفتار هیدرودینامیکی بسترهای سیالی مایع-جامد غیرنیوتنی را مدل سازی و ویژگی های انبساطی آن را مطالعه نماید.

## ۶- فهرست علایم و نشانه ها

$Re'$	عدد رینولدز اصلاح شده برای سیال غیرنیوتنی
$k$	ثابت پایداری در مدل سیال قانون توانی (Pa.s <sup>n</sup> )
$n$	اندیس قاعده توانی سیال قانون توانی
$n'$	چگالی ذرات در فضای فازی
$\delta_{\alpha\beta}$	دلتای کروئکر

## ۷- مراجع

- [1] Mehrabi Gohari E., Sefid M., Jahanshahi Javaran E., Soltani Goharizi A., Hydrodynamic simulation of a liquid-solid fluidized bed using Lattice Boltzmann and smoothed profile methods, *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, Vol. 12, No. 2, pp. 196-211, 2017.
- [2] Lali A., Khare A., Joshi J., Nigam K., Behaviour of solid particles in viscous non-Newtonian solutions: settling velocity, wall effects and bed expansion in solid-liquid fluidized bed, *Powder Technology*, Vol. 57, No. 1, pp. 39-50, 1989.
- [3] Ladd A. J., Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 2. Numerical results, *Journal of fluid mechanics*, Vol. 271, pp. 311-339, 1994.
- [4] Wang M., Feng Y., Owen D., Qu T., A novel algorithm of immersed moving boundary scheme for fluid-particle interactions in DEM-LBM, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 346, pp. 109-125, 2019.
- [5] Nakayama Y., Yamamoto R., Simulation method to resolve hydrodynamic interactions in colloidal dispersions, *Physical Review E*, Vol. 71, No. 3, pp. 036707, 2005.
- [6] Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M., A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, *Physical review*, Vol. 94, No. 3, pp. 511, 1954.
- [7] Boyd J., Buick J., Green S., A second-order accurate lattice Boltzmann non-Newtonian flow model, *Journal of physics A: Mathematical and General*, Vol. 39, No. 46, pp. 14241, 2006.

- [8] Jafari S., Yamamoto R., Rahnama M., Lattice-Boltzmann method combined with smoothed-profile method for particulate suspensions, *Physical Review E*, Vol. 83, No. 2, pp. 026702, 2011.
- [9] Richardson J., Zaki W., This Week's Citation Classic, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, Vol. 32, pp. 35-53, 1954.
- [10] Chhabra R. P., Comiti J., Machač I., Flow of non-Newtonian fluids in fixed and fluidised beds, *Chemical Engineering Science*, Vol. 56, No. 1, pp.1-27,2001.
- [11] Machač I., Ulbrichová I., Elson T., Cheesman D., Fall of spherical particles through non-Newtonian suspensions, *Chemical Engineering Science*, Vol. 50, No. 20, pp. 3323-3327, 1995.