

تحلیل خزش در دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته (GDQ)

حَدیث ژرفی*، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، ایران، zharfi@esfarayen.ac.ir

چکیده

در این مقاله تغییر شکل خزشی پایا در دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند Al-SiC توسط روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته تحلیل و بررسی شده است. خزش با استفاده از مدل شربی توصیف شده است. تمام پارامترهای این مدل به کسر حجمی توزیع ذرات آلومینیوم و کاربید سیلیسیم، دما و اندازه ذرات وابسته هستند. همچنین تمام مشخصه‌های مکانیکی و حرارتی هر نقطه از دیسک با استفاده از یک قانون ترکیب مناسب به صورت تابعی از کسر حجمی و مشخصات ذرات تشکیل‌دهنده تعریف شده است. با استفاده از معادلات تعادل، معادلات پیوستگی و نیز معادلات کرنش-جابجایی، معادلات خزش دیسک دوار بر پایه جابجایی‌ها بدست آمده و این معادلات با استفاده از یک الگوریتم حل جدید و توسط روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته حل شده است. توزیع تنش‌ها و کرنش‌های خزشی در دیسک با توزیعات مختلف ذرات تشکیل‌دهنده بدست آمده و تاثیر نحوه توزیع ذرات در رفتار خزشی دیسک دوار مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد دیسک با توزیع خطی ذرات دارای بیشترین نرخ‌های خزش و جابجایی می‌باشد بنابراین مناسب است از توزیعات توانی غیر یک برای مواد تشکیل‌دهنده استفاده شود.

واژه‌های کلیدی: خزش پایا، دیسک دوار، ماده FGM، روش GDQ، توزیع ذرات، نرخ خزش.

Creep analysis in FGM rotating disks using Generalized Differential Quadrature method (GDQ)

H. Zharfi

Department of Mechanical Engineering, Esfarayen University of Technology, Esfarayen, Iran

Abstract

In this paper steady state creep deformation of FGM rotating disk made of Al-SiC is analyzed using GDQ method. Creep is modeled using Sherby's model. All parameters in this model are dependent on the volume fraction of Aluminum and Silicon Carbide particles, temperature and particle size. Also all thermal and mechanical parameters of disk are defined as a function of volume fraction and the parameter of particle contents using an appropriate mixture rule. Using the equilibrium equations, constituent equations and strain-displacement equations, creep governing equation of rotating disk is derived based on displacements and then solved using a new solution algorithm and Generalized Differential Quadrature Method. Stress and creep strain variations in disk with the various distribution of particle content are achieved and the effect of the type of particle distribution on creep behavior of rotating disk is studied. Results illustrate that the disk with the linear distribution of particles has the highest value of creep and displacement rates therefore it is appropriate to use the non-linear distribution of particle contents.

Keywords: Steady state creep, Rotating disk, FGM, GDQ method, Particle distribution, creep rate.

کنترل تغییر شکل‌ها و تنش‌های ناخواسته می‌باشد [۱-۵].

در بسیاری از موارد کاربرد مواد مدرج تابعی تحت بارهای شدید حرارتی-مکانیکی قرار می‌گیرند. در چنین شرایطی بروز پدیده خزش غیرقابل اجتناب است. خزش یک تغییر شکل غیرالاستیک، پیشرونده و وابسته به زمان است که از دیدگاه نظری به سه مرحله‌ی جداگانه تقسیم می‌شود. خزش مرحله اول یا خزش اولیه^۲ بخشی از فرآیند خزشی ماده است که در آن نرخ خزش نسبت به زمان کاهش می‌یابد. خزش مرحله دوم یا خزش ثانویه^۳ که به خزش حالت پایا نیز موسوم است به این دلیل که در این مرحله نرخ خزش تقریباً ثابت است. خزش ثانویه نتیجه توازن در رقابت بین کرنش‌سختی^۴ و بازیابی^۵ می‌باشد. خزش مرحله سوم^۶ که در آن نرخ خزش نسبت به زمان افزایشی است.

۱- مقدمه

رشد روزافزون تکنولوژی امکان تولید موادی با تغییر خواص پیوسته را فراهم کرده است. این مواد مدرج تابعی (FGM^۱) یا مواد هدفمند نامگذاری می‌شوند. مواد مدرج تابعی در بسیاری از ساختارهای طبیعی مانند استخوان، سنگ و بامبو وجود دارد. خواص این مواد بطور کلی به صورت یک تابع نسبت به مکان تغییر می‌کند. مواد مدرج تابعی بدلیل قابلیت طراحی می‌توانند در مقابل بارهای شدید ترمومکانیکی به صورت هدفمند طراحی شوند. به این صورت که از سرامیک‌های مقاوم در برابر گرما در سمتی از ماده که تحت دماهای بالا قرار می‌گیرد و از فلزات با رسانایی گرمایی بالا در سمتی از ماده که دماهای پایین‌تری را تجربه می‌کند استفاده می‌شود. چنین ترکیبات هدفمندی از فلز و سرامیک کاربرد گسترده‌ای در بسیاری از صنایع پیدا کرده است و هدف از ایجاد و توسعه این مواد افزایش کارایی اجزای مختلف سازه و

² Primary creep

³ Secondary creep

⁴ Strain hardening

⁵ Recovery

⁶ Tertiary creep

¹ Functionally Graded Materials

این مرحله وقتی اتفاق می‌افتد که در اثر شکل‌گیری حفره‌های درونی یا گلوپی شدن، کاهش موثری در مقطع عرضی نمونه رخ می‌دهد. در این مرحله آهنگ کرنش به علت کاهش سطح موثر ماده افزایش می‌یابد و به سمت بی‌نهایت میل می‌کند که در نهایت منجر به شکست ماده می‌شود [۶]. نتایج تجربی نشان می‌دهند بخش بزرگی از عمر خزشی ماده مربوط به خزش حالت پایا است. خزش یک ماده به جنس و ریزساختار آن بستگی دارد بنابراین در یک ماده هدفمند با در نظر گرفتن یک قانون اختلاط مناسب، خزش تابعی از خواص مواد تشکیل‌دهنده در هر نقطه از ماده می‌باشد. علاوه بر این رفتار خزشی ماده به دمای حاکم، توزیع تنش، زمان، تاریخچه تنش، تاریخچه دما و تاریخچه بارگذاری بستگی دارد.

دیسک‌های دوار در ماشین‌آلات صنعتی مختلف نظیر توربین‌ها، کمپرسورها، پمپ‌ها، اتومبیل‌ها و فضاپیماها کاربرد دارند و عموماً در شرایط حاد ترمومکانیکی قرار می‌گیرند. استفاده از مواد گرادیانی هدفمند در این اجزا به دلیل مزایای ویژه از جمله مقاومت بالا در برابر گرما، استحکام زیاد، رسانایی بالا و وزن کم پیوسته در حال افزایش است. بنابراین بررسی پدیده خزش در دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد هدفمند از اهمیت بررسی بالایی برخوردار می‌باشد و محققین بسیاری به مطالعه‌ی این موضوع پرداخته‌اند.

اولین تحقیقات صورت گرفته در زمینه مطالعه خزش در دیسک‌های دوار به کار وال و همکارانش باز می‌گردد [۷]. آنها با در نظر گرفتن یک توزیع توانی برای کسر حجمی و همچنین قانون تسلیم ون-میزو و ترسکا، پاسخ خزشی دیسک دوار را بدست آوردند. نای [۸] نشان داد که ماده مرکب ساخته شده از زمینه آلومینیوم با رشته‌های کاربید سیلیسیم نسبت به آلومینیوم خالص مقاومت بهتری در مقابل خزش دارد. پاندی و همکارانش خزش حالت پایا را در ماده مرکب ساخته شده از Al-SiC تحت بار تک‌محوری بررسی کردند. در مطالعات آن‌ها دمای حاکم بر ماده بین ۶۲۳ تا ۷۲۳ متغیر در نظر گرفته شد و سایز ذرات نیز ۱/۷، ۱۴/۵، ۴۵/۹ میکرومتر انتخاب شد و با احتساب کسر حجمی‌های مختلف رفتار خزشی ماده بررسی گردید [۹]. در زمینه تخمین تاثیر تنش‌ها، دمای حاکم و نحوه توزیع ذرات تقویت‌کننده بر رفتار خزشی دیسک دوار مطالعات بسیاری انجام شده است [۱۰-۱۳]. گوپتا و همکارانش پاسخ خزشی دیسک دوار ساخته شده از ماده هدفمند را تحت گرادیان حرارتی در راستای شعاع دیسک بررسی کردند و دریافتند نرخ کرنش در دیسک با گرادیان دمایی نسبت به دیسک مشابه با توزیع دمای یکنواخت، کمتر است [۱۴]. ژرفی و همکارش خزش در دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند را تحت توزیع‌های مختلف ذرات تقویت‌کننده بررسی کردند و مشاهده نمودند دیسک با کاهش توزیع در راستای شعاعی پاسخ خزشی بهتری نسبت به توزیع یکنواخت یا توزیع افزایشی خواهد داشت [۱۵]. دقیق و همکارانش با استفاده از بسط تیلور و روش پرنده-راس به تحلیل خزش در دیسک فولادی فریتیک پرداختند و تاثیر سرعت دیسک دوار را در توزیع تنش‌ها و کرنش‌های خزشی بررسی نمودند [۱۶]. زمانی‌نژاد و همکارانش رفتار خزشی و نیز رفتار ترموالاستیک یک استوانه جدارضخیم ساخته شده از مواد گرادیانی هدفمند تحت شار حرارتی و تحت بارهای مکانیکی را تحلیل کردند و تاثیر توزیع خواص مواد را در توزیع تنش‌ها و کرنش‌ها مطالعه کردند [۱۷ و ۱۸]. لقمان و همکارش

با استفاده از یک روش تحلیلی-عددی جدید به بررسی رفتار خزشی ترمو-الکترو-مکانیکی یک دیسک هوشمند ساخته شده از پلیمر پیزوالکتریک پرداختند. آنها در این مطالعه شرایط مرزی مختلفی برای دیسک در نظر گرفتند و توزیع تنش‌ها، جابجایی‌ها و پتانسیل الکتریکی را بدست آوردند [۱۹]. ساین و همکارانش پاسخ خزشی یک دیسک ساخته شده از ماده مدرج Al-SiC را با توزیع نمایی ذرات سیلیکون کارباید بررسی کردند و نتایج را با دیسک با توزیع هایپربولیک و دیسک غیر مدرج که حجم یکسانی از ذرات تقویت‌کننده داشتند مقایسه نمودند [۲۰].

روش مربعات دیفرانسیل (DQ)^۱ توسط بلمن و همکارانش [۲۱] در سال ۱۹۷۲ به منظور رسیدن به حل عددی دقیق با استفاده از تعداد محدودی از نقاط شبکه ارائه گردید. این روش مشتقات جزئی تابع را در یک جهت به صورت مجموع وزنی خطی از مقادیر تابع در تمام نقاط شبکه در آن جهت بیان می‌کند. روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته (GDQ)^۲ توسط شو و همکارش [۲۲] بر مبنای روش بلمن گسترش یافت. مهمترین برتری روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته نسبت به روش بلمن سادگی محاسبه ضرایب وزنی بدون هرگونه محدودیتی در انتخاب نقاط شبکه است [۲۳]. روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته برای مسائلی مانند جریان سیال [۲۴] و تحلیل ارتعاشات سازه [۲۵] استفاده شده است. در این روش عددی ضرایب وزنی با استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا و تحلیل فضای برداری خطی بدست می‌آید [۲۶].

در این مقاله برای نخستین بار روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای بدست آوردن پاسخ عددی معادلات خزش حاکم بر دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند استفاده شده است. بدین منظور ابتدا معادلات ترموالاستیسیته خزش حاکم بر دیسک با استفاده از مکانیک محیط‌های پیوسته استخراج گردید و سپس با استفاده از یک الگوریتم حل جدید و روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته این معادلات حل شدند. در ادامه تاثیر توزیع غیرخطی ذرات تقویت‌کننده بر پاسخ خزشی دیسک هدفمند بررسی شد. از طرفی محدودیت‌های تولید مواد هدفمند باعث می‌شود در عمل ساخت مواد با توزیع لزوماً خطی غیرقابل دسترسی باشد و توزیعات مختلف مواد تشکیل‌دهنده محتمل گردد پس نیاز به مدل تحلیلی که بتوان توسط آن هر نوع ماده‌ای با هر ترکیبی از ذرات تشکیل‌دهنده را تحلیل کرد وجود دارد. قابلیت گسترده، دقت و سرعت روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته در حل معادلات خزشی نسبت به سایر روش‌های عددی این امکان را فراهم می‌آورد که دیسک‌های دوار با انواع توزیعات توانی، شرایط مرزی با شرایط مختلف بارگذاری به سهولت و با سرعت و دقت بالاتری تحلیل و بررسی گردند.

۲- فرمول‌بندی ریاضی

قبل از شروع به استخراج معادلات خزش حاکم بر دیسک دوار، فرضیات موجود تشریح می‌شوند. ماده دیسک ایزوتروپیک فرض شده است و از تنش معادل فون-مایزر استفاده شده است. ضخامت دیسک

¹ Differential Quadrature

² Generalized Differential Quadrature

نسبت پواسون، مدول یانگ و ضریب انبساط گرمایی به صورت تابعی از شعاع دیسک دوار تعریف می‌شوند.

$$A = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (6)$$

$$B = \frac{E}{r(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{dE}{dr} + \frac{2\nu E}{(1-\nu^2)^2} \frac{d\nu}{dr} + \frac{\nu E}{r(1-\nu^2)} \quad (7)$$

$$C = \frac{-E}{r^2(1+\nu)} + \frac{\nu}{r(1-\nu^2)} \frac{dE}{dr} + \frac{2E\nu^2}{r(1-\nu^2)^2} \frac{d\nu}{dr} + \frac{E}{r(1-\nu^2)} \frac{d\nu}{dr} + \frac{\nu E}{r^2(1-\nu^2)} \quad (8)$$

$$D = \frac{E}{r(1-\nu^2)} [(\nu - 1)\epsilon_{rc} + (1 - \nu)\epsilon_{\theta c}] + \frac{(1-\nu^2)dE/dr + 2\nu E d\nu/dr}{(1-\nu^2)^2} [-(1 + \nu)\alpha T - \epsilon_{rc} - \nu\epsilon_{\theta c}] + \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\frac{d\nu}{dr} \alpha T - (1 + \nu) \frac{d\alpha}{dr} T - (1 + \nu)\alpha \frac{dT}{dr} - \frac{d\epsilon_{rc}}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \epsilon_{\theta c} - \nu \frac{d\epsilon_{\theta c}}{dr} \right] + \rho r \omega^2 \quad (9)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (۵) نسبت به زمان، معادله (۱۰) بدست خواهد آمد که در واقع معادله خزش حاکم بر دیسک دوار بر اساس نرخ جابجایی دیسک می‌باشد.

$$A \frac{d^2 \dot{u}}{dr^2} + B \frac{d\dot{u}}{dr} + C\dot{u} = -\dot{D} \quad (10)$$

در رابطه فوق \dot{u} نرخ جابجایی شعاعی می‌باشد، A, B, C و D از روابط (۹-۶) بدست می‌آیند و تابع نرخ‌های خزش است که به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

$$\dot{D} = \frac{E}{r(1-\nu^2)} [(\nu - 1)\dot{\epsilon}_{rc} + (1 - \nu)\dot{\epsilon}_{\theta c}] + \frac{(1-\nu^2)dE/dr + 2\nu E d\nu/dr}{(1-\nu^2)^2} [-\dot{\epsilon}_{rc} - \nu\dot{\epsilon}_{\theta c}] + \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\frac{d\dot{\epsilon}_{rc}}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \dot{\epsilon}_{\theta c} - \nu \frac{d\dot{\epsilon}_{\theta c}}{dr} \right] \quad (11)$$

در رابطه فوق $\dot{\epsilon}_{rc}$ و $\dot{\epsilon}_{\theta c}$ به ترتیب نرخ خزش شعاعی و مماسی می‌باشند که با استفاده از قانون خزش شربی برای حالت پایا به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌گردند [۱۱].

$$\dot{\epsilon}_{rc} = \frac{[M(\bar{\sigma} - \sigma_0)]^n}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (12)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta c} = \frac{[M(\bar{\sigma} - \sigma_0)]^n}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_\theta - \sigma_r)$$

در رابطه فوق M, σ_0 پارامترهای خزش شربی هستند که با استفاده از نتایج آزمایشگاهی پاندی و همکاران [۹]، به صورت روابط (۱۳) تعریف می‌شوند. و n توان خزش است که در این مقاله مطابق با مرجع [۱۱] برابر ۸ در نظر گرفته شده است. σ_r و σ_θ به ترتیب مولفه‌های تنش شعاعی و تنش مماسی هستند. $\bar{\sigma}$ نیز تنش معادل وون-میزز است که از رابطه (۱۴) بدست می‌آید [۱۴].

$$M = \exp[-35.38 + 0.2077 \ln[P] + 4.98 \ln[T] - 0.622 \ln[v(r)]] \quad (13)$$

$$\sigma_0 = -0.03507P + 0.01057T + 1.00536v(r) - 2.11916$$

$$\bar{\sigma} = (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta)^{1/2} \quad (14)$$

در رابطه (۱۳)، P سایز ذرات است که در این مطالعه مطابق با مرجع [۱۱] برابر $1.7 \mu\text{m}$ در نظر گرفته شده است. T دمای حاکم بر دیسک و $v(r)$ کسر حجمی ذرات می‌باشد.

در مقایسه با سایر ابعاد آن ناچیز است و می‌توان دیسک را تنش صفحه‌ای در نظر گرفت.

کرنش دیسک دوار مطابق رابطه (۱) حاصل جمع کرنش‌های الاستیک، حرارتی و خزشی می‌باشد.

$$\epsilon_{total} = \epsilon_{elastic} + \epsilon_{thermal} + \epsilon_{creep} \quad (1)$$

برای بدست آوردن معادلات خزش اولیه و ثانویه، معادلات کرنش-جابجایی، معادلات پیوستگی و معادلات تعادل با رابطه (۱) ترکیب می‌گردند. با در نظر گرفتن مولفه‌های غیرصفر تنش و تغییرشکل، معادلات پیوستگی و کرنش جابجایی به صورت روابط (۲) بدست می‌آید.

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu\sigma_\theta] + \alpha T + \epsilon_{rc} \quad (2)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu\sigma_r] + \alpha T + \epsilon_{\theta c}$$

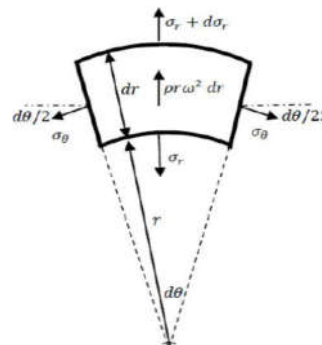
در معادلات فوق، ϵ_r و ϵ_θ مولفه‌های کرنش شعاعی و مماسی هستند. σ_r و σ_θ تنش‌های شعاعی و مماسی می‌باشند. u جابجایی شعاعی می‌باشد و E, α و T به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و دمای حاکم می‌باشند. ϵ_{rc} و $\epsilon_{\theta c}$ کرنش‌های خزشی شعاعی و مماسی هستند. مولفه‌های تنش از رابطه (۲) به صورت رابطه (۳) بدست می‌آیند.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1 + \nu)\alpha T - (\epsilon_{rc} + \nu\epsilon_{\theta c}) \right] \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - (1 + \nu)\alpha T - (\nu\epsilon_{rc} + \epsilon_{\theta c}) \right]$$

با توجه به شکل ۱ که یک المان از دیسک دوار می‌باشد، معادله تعادل به صورت رابطه (۴) بیان می‌گردد. در این معادله ρ و ω چگالی و سرعت زاویه‌ای دیسک دوار است.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0 \quad (4)$$



شکل ۱- یک المان از دیسک دوار

با جایگذاری تنش‌های شعاعی و مماسی روابط (۳) در رابطه تعادل (معادله (۴)) معادله خزشی حاکم به صورت کلی معادله (۵) بدست می‌آید.

$$A \frac{d^2 u}{dr^2} + B \frac{du}{dr} + Cu + D = 0 \quad (5)$$

ضرایب A, B, C و D در رابطه (۵) با استفاده از روابط (۹-۶) بیان می‌شوند. باید یادآوری شود که تمام پارامترهای دیسک FGM مانند

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} n \left(a_{ii}^{(n-1)} a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{ij}^{(n-1)}}{r_i - r_j} \right), & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik}^{(n)}, & i = j \end{cases} \quad (17)$$

for $i, j = 1, 2, \dots, N$, $n = 2, 3, \dots, N - 1$
در رابطه فوق $a_{ij}^{(1)}$ ضریب وزنی مرتبه اول است و بصورت رابطه (۱۸) محاسبه می‌گردد.

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{A^{(1)}(r_i)}{(r_i - r_j) A^{(1)}(r_j)}, & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik}^{(1)}, & i = j \end{cases} \quad (18)$$

for $i, j = 1, 2, \dots, N$
که $A^{(1)}(r_i)$ در رابطه (۱۸) از رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

$$A^{(1)}(r_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (r_i - r_j) \quad (19)$$

وقتی مختصات نقاط شبکه معلوم باشد، ضرایب وزنی و در نتیجه تمامی مشتقات گسسته‌سازی شده بدست می‌آیند. توزیعات مختلف نقاط شبکه توسط محققین مختلف بحث و بررسی شده است. در این مطالعه ریشه‌های چندجمله‌ای مرتبه اول چبیشف برای تولید نقاط شبکه بصورت رابطه (۲۰) استفاده شده است.

$$r_i = \frac{g_i - g_1}{g_N - g_1}, \quad g_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

که N تعداد نقاط شبکه می‌باشد. بدلیل سرعت، دقت و کارایی روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته با فرمولاسیون فوق برای حل معادلات خزش حاکم بر دیسک دوار FGM استفاده شده است.

۴- مطالعه موردی

در این بخش از معادلات خزش که در بخش ۲ استخراج گردید و الگوریتم حلی که در بخش ۳ ارائه شد استفاده می‌شود تا تغییرشکل‌های خزشی دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند آلومینیوم-سیلیکون کارباید با مشخصاتی که در شکل ۲ آورده شده است و در ادامه ذکر می‌گردد، بدست می‌آید. شرایط مرزی دیسک بصورت ثابت-آزاد انتخاب شده است. بنابراین خواهیم داشت:

$$u(r=a) = 0, \quad \sigma_r(r=b) = 0 \quad (21)$$

شعاع داخلی دیسک $a = 0.05m$ و شعاع خارجی دیسک $b = 0.2m$ در نظر گرفته شده است. دمای حاکم بر دیسک $T = 623K$ و سرعت دوران دیسک $\omega = 15000rpm$ است. کسر حجمی ذرات آلومینیوم و کارباید سیلیسیم بصورت رابطه (۲۲) تعریف شده است.

$$v_{Si}(r) = 0.4 - 0.3 \times \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^i \quad (22)$$

$$v_{Al}(r) = 0.6 + 0.3 \times \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^i$$

در روابط فوق، i شماره دیسک است و در این مطالعه $i = 1, 2, 3$ انتخاب شده است. $v_{Si}(r)$ رابطه توزیع ذرات سیلیکون کارباید در امتداد شعاع دیسک و $v_{Al}(r)$ کسر حجمی ذرات آلومینیوم در امتداد شعاع دیسک دوار می‌باشد.

با توجه به معادله خزش حاکم بر دیسک یعنی معادله (۱۰)، از آنجا که سمت راست این معادله تابع نرخ خزش است و نرخ خزش هم تابع تنش، زمان و دما می‌باشد، تنش‌ها هم تابع تغییرشکل‌ها و جابجایی‌ها می‌باشند بنابراین برای این معادله حل دقیق و حلقه بسته وجود ندارد. لذا برای حل معادله خزش حاکم باید از یک الگوریتم حل و یک روش عددی استفاده نمود. روش‌های عددی متنوعی برای حل معادلات حاکم وجود دارد. در این مقاله به دلیل سرعت، دقت و قدرت روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته از این روش عددی برای حل معادلات خزش استفاده شده است.

۳- الگوریتم حل

روش تحلیل خزش در دیسک ساخته شده از مواد هدفمند با حل عددی معادلات ترموالاستیسیته حاکم بر دیسک آغاز می‌گردد و در ابتدا نرخ‌های خزش کوچک و قابل صرفنظر کردن هستند. بعد از حل کامل الاستیسیته مساله، میدان جابجایی و کرنش‌ها قابل محاسبه می‌باشند. با در دست داشتن کرنش‌ها، میدان‌های تنش محاسبه می‌گردند و سپس با استفاده از روابط (۱۲) نرخ‌های کرنش بدست می‌آیند. سپس معادله خزش حاکم بر دیسک یعنی رابطه (۱۰) با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته حل می‌گردد و میدان جابجایی دیسک محاسبه می‌شود. با محاسبه جابجایی ایجاد شده در دیسک مجدداً تنش‌های شعاعی و مماسی دیسک بدست می‌آیند. سپس با احتساب یک بازه زمانی مناسب Δt و براساس رابطه (۱۵)، تنش‌های شعاعی و مماسی در زمان بعدی محاسبه می‌گردد. در این مطالعه بازه زمانی Δt برابر ۴ ساعت در نظر گرفته شده است.

$$\sigma_{t+1} = \dot{\sigma}_t \Delta t + \sigma_t, \quad \varepsilon_{t+1} = \dot{\varepsilon}_t \Delta t + \varepsilon_t \quad (15)$$

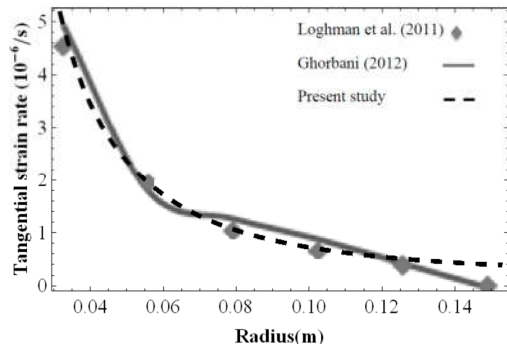
این پروسه تا جایی ادامه می‌یابد که توزیع تنش همگرا شود و یک رژیم تغییرشکل خزشی پایا در دیسک ایجاد گردد. همانطور که ذکر شد از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. بنابراین لازم است این روش حل عددی معادلات تشریح گردد.

روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته توسط شو و همکارانش [۲۲] از بسط روش مربعات دیفرانسیل ارائه شده توسط بلمن و همکارانش [۲۱] ارائه گردید. در روش مربعات دیفرانسیلی مشتق تابع با جمع جبری حاصلضرب مقادیر نقاط مختلف تابع در ضرایب وزنی تخمین زده می‌شود. ضرایب وزنی چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا هستند که در این مدل ریاضی گسسته‌سازی شده بکار می‌روند. مهمترین مزیت روش تعمیم‌یافته سهولت محاسبه ضرایب وزنی بدون محدودیتی در انتخاب توزیع نقاط شبکه می‌باشد. برای تابع دلخواه $f(r)$ ، روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته مشتق مرتبه n ام تابع را نسبت به r بصورت رابطه (۱۶) بیان می‌کند [۲۲].

$$f_r^{(n)}(r_i) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(n)} f(r_k), \quad n = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (16)$$

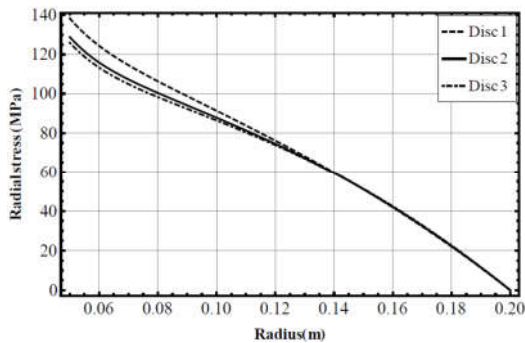
for $i = 1, 2, \dots, N$
در رابطه (۱۶)، N تعداد نقاط شبکه در راستای r است که در این مطالعه ۵۰ در نظر گرفته شده است. $a_{ik}^{(n)}$ ضریب وزنی برای مشتقات مرتبه n است که با استفاده از مشتقات مرتبه اول بصورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود.

این تفاوت که روش حل استفاده شده در این مقاله از دقت و سرعت به نسبت بیشتری برخوردار است.

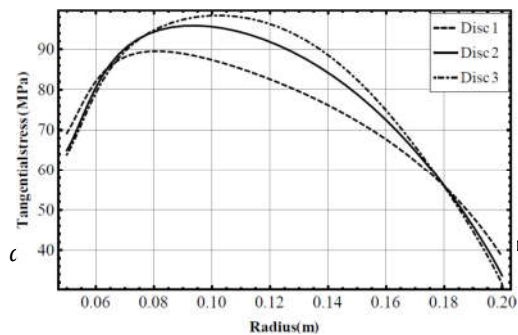


شکل ۴- اعتبارسنجی نتایج تحلیل

مقایسه نتایج در شکل فوق نشان می‌دهد که همگرایی مناسبی بین نتایج وجود دارد. توزیع تنش شعاعی در امتداد شعاع دیسک‌ها در شکل ۵ نشان داده شده است. مقدار تنش شعاعی در شعاع داخلی دیسک ماکزیمم است و به دلیل شرایط مرزی آزاد دیسک در شعاع بیرونی مقدار تنش شعاعی در شعاع خارجی صفر است. در میانه دیسک هم تنش شعاعی روندی کاهشی در امتداد شعاع دیسک دارد.

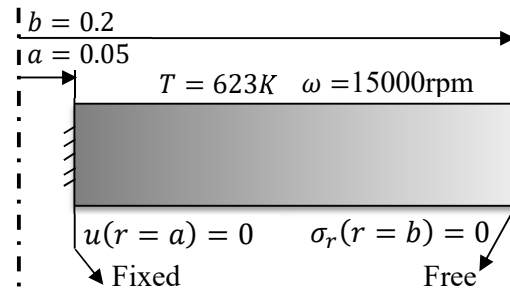


شکل ۵- توزیع تنش شعاعی دیسک‌ها



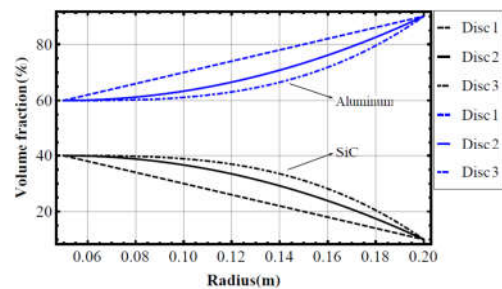
شکل ۶- توزیع تنش مماسی در امتداد شعاع دیسک

شکل ۶ توزیع تنش مماسی در امتداد شعاع دیسک را نشان می‌دهد. تنش مماسی روند کاهشی در دیسک دارد یعنی بیشینه مقدار آن در شعاع داخلی و مینیمم مقدار آن در شعاع خارجی رخ می‌دهد. دلیل



شکل ۲- نمای جانبی دیسک مورد مطالعه و مشخصات آن

توزیع کسر حجمی ذرات آلومینیوم و سیلیکون کاربرد در امتداد شعاع دیسک دوار در شکل ۳ ارائه شده است.



شکل ۳- کسر حجمی ذرات تشکیل‌دهنده

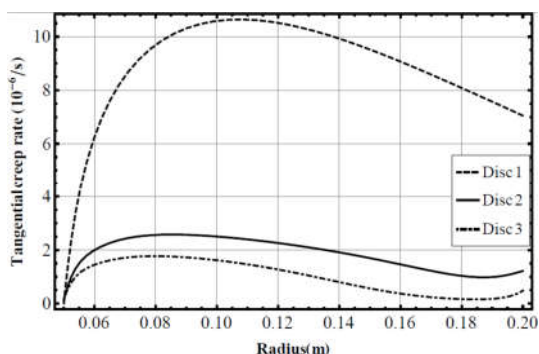
پارامترهای دیسک مانند چگالی، نسبت پواسون، ضریب انبساط گرمایی و مدول الاستیسیته با استفاده از قانون اختلاط مطابق با رابطه (۲۳) بر اساس مشخصات مواد تشکیل‌دهنده آن بدست آمده است.

$$P_i(r) = P_{Al} \times v_{a_i}(r) + P_{SiC} \times v_{s_i}(r) \quad (23)$$

در رابطه فوق $P_i(r)$ توزیع یک پارامتر دلخواه در امتداد شعاع دیسک i ام می‌باشد. P_{Al} مقدار همان پارامتر برای آلومینیوم و P_{SiC} مقدار آن در سیلیکون کاربرد می‌باشد. مقادیر زیر برای مشخصات مواد تشکیل‌دهنده در نظر گرفته شده است [۲۷].

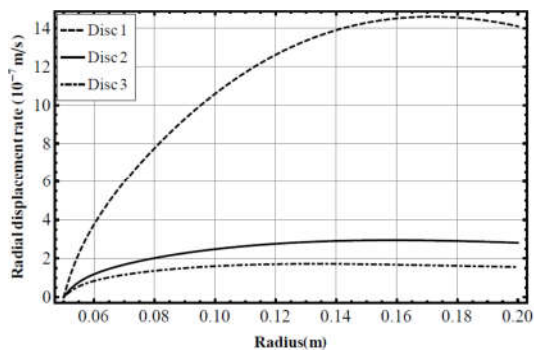
$$\begin{aligned} E_{Al} &= 69GPa, & E_{SiC} &= 410GPa \\ \rho_{Al} &= 2700 kg/m^3, & \rho_{SiC} &= 3200 kg/m^3 \\ \alpha_{Al} &= 23.1 \times 10^{-6} K^{-1}, & \alpha_{SiC} &= 4 \times 10^{-6} K^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

براساس الگوریتم تحلیل خزش و مقادیر فوق برای مشخصات مواد سازنده دیسک دوار FGM، یک کد کامپیوتری برای دستیابی به پاسخ خزشی دیسک دوار ایجاد گردید. به منظور اعتبارسنجی الگوریتم حل و کد نوشته شده، نرخ کرنش خزشی مماسی پایا در دیسکی مشابه مراجع [۲۷] و [۲۸] بدست آمد و با نتایج این مقالات مقایسه گردید. شکل ۴ مقایسه نتایج تحلیل موجود با مراجع فوق را نشان می‌دهد. همانطور که شکل نشان می‌دهد تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد. با



شکل ۸- تغییرات نرخ خزش مماسی دیسک‌ها

نرخ جابجایی شعاعی دیسک‌ها در شکل ۹ نشان داده شده است. دیسک‌ها در شعاع داخلی خود ثابت شده‌اند بنابراین جابجایی شعاعی در این نقطه صفر می‌باشد. در امتداد شعاع نرخ جابجایی شعاعی بتدریج افزایش می‌یابد و بیشترین مقدار خود را در شعاع خارجی کسب می‌کند. بیشترین جابجایی شعاعی در دیسک اول رخ می‌دهد. بنابراین توزیع توانی مرتبه دو یا سه برای کسر حجمی ذرات پاسخ خزشی بهتری ایجاد می‌کند. نرخ جابجایی شعاعی در دیسک‌های با توزیع غیرخطی مواد تشکیل‌دهنده مقدار محدودتری دارد.



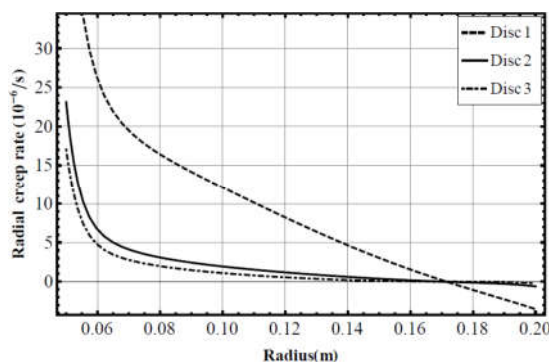
شکل ۹- نرخ جابجایی شعاعی دیسک‌ها

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته برای حل معادلات خزش حاکم بر دیسک دوار ساخته شده از ماده مدرج تابعی آلومینیوم-سیلیکون کارباید استفاده شده است. سه توزیع مختلف برای ذرات تشکیل‌دهنده دیسک در نظر گرفته شده و خواص دیسک در هر نقطه با استفاده از کسر حجمی ذرات تشکیل‌دهنده و خواص آنها و بر پایه یک قانون اختلاط مناسب بدست آمده است. مقایسه نتایج تحلیل بدست آمده با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته با نتایج دیگر روش‌های حل نشان‌دهنده دقت و کارایی و در عین حال سرعت این روش حل می‌باشد. نتایج نشان داد نحوه توزیع ذرات تشکیل‌دهنده تاثیر مهمی در رفتار خزشی دیسک دارد و دیسک با توزیع خطی ذرات دارای بیشترین نرخ‌های خزش می‌باشد همانطور که از گراف‌ها بر می‌آید نرخ‌های خزش شعاعی و مماسی و همچنین نرخ جابجایی شعاعی در دیسک با توزیع خطی ذرات آلومینیوم و سیلیکون کارباید چندین برابر نرخ‌های خزش در دیسک‌های با توزیع غیرخطی می‌باشند

این روند نیز حجم بالای ذرات سیلیکون کارباید در شعاع درونی دیسک است.

همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد دیسک سوم یعنی دیسکی با توان توزیع $i = 3$ در شعاع‌های میانی دیسک مقدار تنش مماسی بزرگتری را تجربه می‌کند. توزیع مولفه شعاعی کرنش خزشی در امتداد شعاع دیسک‌ها در شکل ۷ ارائه شده است. بیشترین مقدار نرخ خزشی شعاعی در شعاع داخلی دیسک اتفاق می‌افتد و بتدریج مقدار آن کاهش می‌یابد تا در شعاع بیرونی به کمترین مقدار خود می‌رسد. نرخ خزش شعاعی در دیسک اول یعنی دیسکی با توزیع خطی ذرات در امتداد شعاع دیسک دارای مقدار بیشینه است و در دیسک سوم کمترین مقدار را دارد. همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد نرخ خزش شعاعی در شعاع‌های داخلی دیسک شماره ۱ تقریباً چهار تا پنج برابر بزرگتر از نرخ خزش شعاعی در دیسک‌های شماره ۲ و ۳ می‌باشد.



شکل ۷- تغییرات نرخ خزش شعاعی دیسک‌ها

شکل ۸ توزیع نرخ خزش مماسی دیسک‌ها در امتداد شعاع دیسک را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود نرخ خزش مماسی در دیسک اول که توزیع خطی ذرات را دارد بسیار بزرگتر از دو دیسک دیگر است و در دو دیسک دیگر مقادیر نزدیک به هم دارد. نرخ خزش مماسی در امتداد شعاع دیسک بصورت افزایشی-کاهشی تغییر می‌کند. یعنی در شعاع داخلی کمترین مقدار را دارد و در میانه دیسک به مقدار بیشینه خود می‌رسد. بیشینه مقدار نرخ خزش مماسی در دیسک‌های با توزیع غیرخطی تقریباً برابر $2 \times 10^{-6} 1/s$ می‌باشد در صورتیکه این مقدار برای دیسک شماره ۱ که در آن ذرات تشکیل‌دهنده به صورت خطی توزیع شده‌اند برابر است با $1.1 \times 10^{-6} 1/s$. این نتایج مؤید انتخاب توزیع غیرخطی برای ذرات تشکیل‌دهنده ماده هدفمند می‌باشند.

International Journal of Engineering Science, Vol. 82, pp. 222-237, 2014.

[18] Jabbari M., Zamani Nejad M. and Ghannad M., Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 96, pp. 1-18, 2015.

[19] Loghman A. and Azami M., A novel analytical-numerical solution for nonlinear time-dependent electro-thermo-mechanical creep behavior of rotating disk made of piezoelectric polymer, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 40, pp. 4795-4811, 2016.

[20] Singh R., Saxena R. K., Khanna K. and Gupta V. K., Modelling creep response of a functionally graded rotating disc with exponential reinforcement gradient, *Materials today: Proceedings*, Vol. 18, pp. 3891-3899, 2019.

[21] Bellman R., Kashef B. G. and Casti J., Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, pp. 45-52, 1972.

[22] Shu C. and Richards B. E., Applications of Generalized Differential Quadrature to Solve Two Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 791-798, 1992.

[23] Zharfi H. and Ekhteraei Toussi H., Numerical Creep Analysis of FGM Rotating Disc with GDQ Method, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 55, No.1, pp. 331-341, 2017.

[24] Shu C., Chew Y. T. and Richards B. E., Generalized Differential Integral Quadrature and Their Application to Solve Boundary Layer Equations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 21, pp. 723-733, 1995.

[25] Shu C., Free Vibration Analysis of Composite Laminated Conical Shells by Generalized Differential Quadrature, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, pp. 578-604, 1996.

[26] Zharfi H. and Ekhteraei Toussi, Non-Steady Creep Analysis of FGM Rotating Disc using GDQ Method, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 11, No.1, pp. 1-15, 2019.

[27] Loghman A., Gorbanpour Arani A., Shajari A. R. and Amir S., Time Dependent Thermoelastic Creep Analysis of Rotating Disc made of Al-SiC Composite, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 1853-1864, 2011.

[28] Ghorbani M. T., A Semi-Analytical Solution for Time-Variant Thermoelastic Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Disks with Variable Thickness and Properties, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 5, No.2, pp. 41-50, 2012.

بنابراین مناسب است از توزیعات توانی غیر یک برای مواد تشکیل دهنده استفاده شود.

۶- مراجع

[1] Hirai T., Functionally Gradient Materials. *Material Science and Technology*, R. W. Chan, P. Hassen and E. J. Cramer, VCH, Weinheim, Germany, 17B, pp. 293-341, 1996.

[2] Koizumi M., FGM Activities in Japan, *Composites Part B*, Vol. 28, No.1, pp.1-4, 1997.

[3] Zhu J., Lai Z., Jeon J. and Lee S., Fabrication of ZrO₂-NiCr Functionally Graded Materials by Powder Metallurgy, *Mater. Chem. Phys.*, Vol. 68, No.1-3, pp. 130-135, 2001.

[4] Pattnayak D. K., Bapat V. P., and Rama Mohan, T. R., Techniques for the Synthesis of Functionally Graded Materials, *National Seminar on Functionally Graded Materials*, Amernath, India, pp. 86-93, 2001.

[5] Bayat M., Sleem M., Sahari B. B., Hamouda A. M. S. and Mahdi E., Analysis of Functionally Graded Rotating Discs with Variable Thickness, *Mechanics Research Communications*, Vol. 35, pp. 283-309, 2008.

[6] زرفی ح. و اختراعی طوسی ح.، تحلیل خزشی دیسک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با پروفیل غیریکنواخت، علوم و فناوری کامپوزیت، د ۱، ش ۲، ص ۲۹-۳۶، ۱۳۹۳.

[7] Whal A. M., Sankey G. O., Manjoine M. J. and Shoemaker E., Creep Test of Rotating Discs at Elevated Temperature and Comparisons with Theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 21, pp. 225-235, 1954.

[8] Nieh T. G., Creep Rupture of a Silicon Carbide Reinforced Aluminum Composite, *Metall. Trans. A.*, Vol. 15, No.1, pp. 139-145, 1984.

[9] Pandey A. B., Mishra R. S. and Mahajan Y. R., Steady State Creep Behavior of Silicon Carbide Particulate Reinforced Aluminum Composites, *Acta Metallurgica et Materiala*, Vol. 40, pp.2045-2082, 1992.

[10] Singh S. B., and Ray S., Newly Proposed Yield Criteria for Residual Stress and Steady State Creep in an Anisotropic Rotating Composite Disc, *Journal of Materials Processing Technique*, Vol. 143, pp. 623-628, 2003.

[11] Gupta V. K., Singh S.B., Chandrawat H. N., and Ray S., Creep Behavior of a Rotating Functionally Graded Composite Disc Operating Under Thermal Gradients, *Journal of Metallurgical Material Transactions*, Vol. 35, pp. 1381-1391, 2004.

[12] Singh S. B., and Ray S., Steady State Creep Behavior in an Isotropic Functionally Graded Material Rotating Disc of Al-SiC Composite, *Journal of Metallurgical Material Transactions*, Vol. 32, pp.1679-1685, 2001.

[13] Singh S. B., and Ray S., Creep Analysis in an Isotropic FGM Rotating Disc of Al-SiC Composite, *Journal of Materials Processing Techniques*, Vol. 143, pp. 616-622, 2003.

[14] Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N. and Ray S., Modeling of Creep behavior of a Rotating Disc in the Presence of Both Composition and Thermal Gradient, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 127, pp. 97-105, 2005.

[15] زرفی ح. و اختراعی طوسی ح.، تاثیر دما و نحوه توزیع ذرات بر رفتار خزشی دیسک‌های دوار مدرج تابعی، مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د ۴۶، ش ۲، ص ۵۱-۵۹، ۱۳۹۵.

[16] Daghigh V., Daghigh H., Loghman A. and Simoneau A., Time dependent creep analysis of rotating ferritic steel disk using Taylor series and Prandtl-Reuss relation, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 77, pp. 40-46, 2013.

[17] Zamani Nejad M. and Davoudi Kashkoli M., Time dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux,