

تحلیل ارتعاشات ازاد ورق کامپوزیتی حلقوی تقویت شده با گرافن با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته

حسین بیشه
اکبرعلی بیگلر

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، رفتار ارتعاشی ورق‌های کامپوزیتی دایروی/حلقوی تقویت شده با گرافن در شرایط مرزی مختلف با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته مورد بررسی قرار گرفته است. گرافن به دلیل خواص مکانیکی فوق العاده، گزینه بسیار مناسبی برای تقویت ورق‌های کامپوزیتی می‌باشد. کسر وزنی گرافن در راستای ضخامت با استفاده از الگوهای توزیع مختلف گرافن به صورت پیوسته در حال تغییر است. با استفاده از مدل هالپین تسای، مدول الاستیسیته موثر نانوکامپوزیت برای ورق دایروی/حلقوی محاسبه شده است. پنج توزیع مختلف برای توزیع صفحات گرافن در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته شده است. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل فضای حالت با به کارگیری معادلات حرکت و با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته صورت گرفته است. در این مطالعه، تاثیر الگوهای مختلف توزیع گرافن، نسبت شعاع خارجی به ضخامت، کسر وزنی گرافن و شرایط مرزی مختلف در رفتار ارتعاشی ورق‌های کامپوزیتی دایروی و حلقوی تقویت شده با گرافن مطالعه شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از صفحات گرافنی به عنوان تقویت کننده، سختی و مقاومت کامپوزیت را در برابر رفتار ارتعاشی به شدت افزایش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ورق دایروی/حلقوی، گرافن، نظریه سه بعدی الاستیسیته، ارتعاشات آزاد، روش مربعات تفاضلی.

Free vibrational analysis of graphene reinforced annular composite plate using three-dimensional elasticity theory

H. Bisheh
A. Alibeigloo

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

Abstract

This paper is carried out the free vibrational behavior of functionally graded polymer composite annular and circular plates reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs) using three-dimensional elasticity theory. The weight fraction differs gradually across the thickness direction. Effective elasticity modulus of the nanocomposite has been estimated by the modified Halpin-Tsai model. Five different GPLs distribution patterns within the polymer matrix are considered. State space first order differential equation by employing the equation of motion and constitutive relation within the framework of three-dimensional elasticity theory across the thickness direction is derived. Present approach is validated by comparing the numerical results with those reported in the literature. Influence of outer radius to thickness ratio, different GPL distribution patterns, GPLs loading and edge boundary conditions on the vibrational behavior of GPLs reinforced composite (GPLRC) circular/annular plates are studied. The results implied that GPLs with a low content can have an excellent influence on the natural frequencies of the circular and annular plate.

Keywords: Circular/annular plate, graphene, three-dimensional elasticity theory, Vibrational behavior.

گرافن را بهبود بخشید. تحرک پذیری و قابلیت سیار بودن گرافن که در وسایل ارتباطی، پارامتری دارای اهمیت بسیار موثری می‌باشد، بالا بوده و پتانسیل این ماده را برای کاربردهایی با فرکانس بالای الکتریکی نشان می‌دهد [۱، ۲].

مطالعات زیادی برای به دست آوردن خواص مکانیکی گرافن انجام شده است. کیتی پورنجای و همکاران [۳] با استفاده از یک مدل پیوسته، به گزارش آنالیز ارتعاشی صفحات گرافن چند لایه پرداخته‌اند. آنها نشان دادند که کوچکترین فرکانس طبیعی مربوط به این مدل، مستقل از تماس بین صفحات گرافن می‌باشد و همچنین با بررسی مودهای ارتعاشی مربوط به فرکانس طبیعی برای مدل دو الی ده لایه ای به این نتیجه رسیدند که شکل مودهای همه صفحات دارای جهت و اندازه یکسان می‌باشد، در حالی که در مورد مودهای ارتعاشی مربوط به تشدید، این نتایج کاملاً متفاوت می‌باشد. ژای و همکاران [۴] نشان دادند که پلیمرهای تقویت شده با گرافن در برابر گرما، مقاومتی بسیار

۱- مقدمه

گرافن یک لایه دوبعدی از کربن می‌باشد که به تازگی به دلیل خواص مکانیکی و گرمایی فوق العاده مورد توجه محققان قرار گرفته است. گرافن یکی از سخت‌ترین مواد موجود در طبیعت می‌باشد که گزینه مناسبی برای تقویت کامپوزیت‌ها شناخته شده است. مطالعات قبلی نشان می‌دهد که با افزودن مقدار کمی از گرافن به کامپوزیت، خواص مکانیکی و گرمایی نانوکامپوزیت به صورت قابل توجه افزایش خواهد یافت. همچنین گرافن سطحی بزرگتر در مقایسه با نانولوله کربنی ایجاد می‌کند. گرافن ویژگی‌های زیادی دارد که این ماده را تبدیل به گزینه بسیار مناسبی برای تقویت ورق‌های کامپوزیتی کرده است. گرافن بسیار نازک می‌باشد و از لحاظ مکانیکی، بسیار محکم بوده و ماده‌ای شفاف و یک رسانای انعطاف پذیر است. در یک محدوده وسیع، چه با تغلیظ شیمیایی و چه با به کارگیری یک میدان الکتریکی، می‌توان رسانایی-

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: abeigloo@modares.ac.ir

مناسب دارند. یانگ و همکاران [۵] آنالیز ترموالاستیک ورق کامپوزیتی مستطیلی تقویت شده به صفحات گرافن با چیدمان تابع مکان را در الاستیسیته سه بعدی بررسی نموده اند. در این پژوهش، نسبت وزنی صفحات گرافن به صورت پیوسته و ملایم در راستای ضخامت تغییر می‌کند و بارگذاری به صورت بارعرضی یکنواخت و تغییرات دمایی می‌باشد. سه حالت مختلف قرارگیری صفحات گرافن همراه با بررسی تاثیر تغییرات پارامترهایی مانند نسبت وزنی، هندسه و سایز صفحات، شرایط دمایی و مرزی مختلف بر روی میدان‌های تنش و تغییر شکل صفحه نانوکامپوزیتی مذکور مورد بحث قرار گرفته است که بیانگر این نتیجه است که افزودن صفحات گرافن موجب بهبود عملکرد ترموالاستیک ورق مستطیلی می‌گردد. لین و همکاران [۶] خواص کمانشی ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با گرافن را با در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک در راستای ضخامت مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها گزارش دادند که الگوی غیرخطی توزیع گرافن، سختی ورق را به صورت قابل-ملاحظه افزایش می‌دهد. فنگ و همکاران [۷] به بررسی تاثیر افزودن صفحات گرافن به صورت نایکنواخت به تیر نانوکامپوزیت پلیمری در خمش غیر خطی آن پرداختند. نتایج مربوط به این پژوهش نشان داد که افزودن مقداری بسیار اندکی از صفحات گرافن به عنوان تقویت کننده، سبب بهبود چشمگیر در عملکرد خمش تیر می‌گردد. همچنین حضور کمتر تک صفحه های گرافن در سطوح نزدیک به پایین و بالایی تیر همراه با پراکندگی بیشتر صفحات گرافن مربعی شکل در سطوح میانی، موثرترین راه برای کاهش میزان تغییر شکل تیر در اثر خمش می‌باشد. میری و جشنانی [۸] تحلیل ارتعاشی ورق گرافنی تک‌لایه دایروی را با در نظر گرفتن اثر دما مورد بررسی قرار دادند. حل تحلیلی ورق مذکور با به‌کارگیری روش جداسازی متغیرها و نظریه انتقالی توابع بسل انجام شده است.

ورق‌های دایروی و حلقوی جزو ساختارهای مهم در صنعت محسوب می‌شوند که در زمینه‌های مختلفی از جمله مکانیک، عمران، هسته‌ای کاربرد دارد [۹]. مطالعات زیادی برای بررسی رفتار این نوع ورق‌ها انجام شده است. ردی و همکاران [۱۰] تحلیل خمشی ورق‌های دایروی و حلقوی مدرج تابعی در راستای ضخامت تحت شرایط مرزی مختلف و بارگذاری متفاوت ارائه داده‌اند. علی‌بیگلو [۱۱] آنالیز خمش ورق دایروی ساندویچی با لایه‌هسته‌ای هدفمند در معرض بارهای مکانیکی-گرمایی با استفاده از روش مربعات تفاضلی عمومی را مورد بررسی قرار دادند. از روش مربعات تفاضلی عمومی^۱، معادلات فضای حالت در راستای شعاعی و حل نیمه تحلیلی بدست آورده شده است. حل تحلیلی در راستای ضخامت با استفاده از روش فضای حالت و تقریب حل در راستای شعاعی با استفاده از روش مربعات تفاضلی انجام گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تغییر دمای سطح باعث افزایش تنش‌های عمودی در داخل صفحه و کاهش تنش‌های عمودی عرضی می‌شود. همچنین افزایش تغییرات دمای سطح، باعث افزایش جابه‌جایی شعاعی و کاهش جابه‌جایی عرضی خواهد شد. دونگ [۱۲] رفتار ارتعاشی ورق‌های حلقوی را در شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار داد. او با به

کارگیری روش چیبیشو-ریتز معادلات را برای ورق حلقوی به‌دست آورد. تاج‌الدینی [۱۳] رفتار ارتعاشی ورق‌های حلقوی و دایروی نازک با استفاده از نظریه کرنش کوچک را بررسی نمود. علی‌بیگلو و جعفریان [۱۴] رفتار استاتیکی و ارتعاشی پیوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با نانو لوله‌ی کربنی را با استفاده از نظریه سه‌بعدی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. حل تحلیلی با استفاده از روش فضای حالت در راستای شعاعی انجام شد. بیشه و علی‌بیگلو [۱۵] تحلیل استاتیکی ورق دایروی توپر تقویت شده با گرافن تحت شرط مرزی ساده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش مربعات تفاضلی جهت حل نیمه‌تحلیلی استفاده کردند. همچنین مدل هالپین-تسای جهت محاسبه مدول موثر نانوکامپوزیت گرافن استفاده شده است. یانگ و همکاران [۱۶] حل تحلیلی برای خمش الاستیک گرمایی بر روی ورق‌های دایروی و حلقوی نانو کامپوزیتی تقویت شده با گرافن در معرض بارهای ترکیبی مکانیکی و گرمایی با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته را ارائه نمودند. آنها با به‌کارگیری روش اسپنسر و ماین، حل عددی ورق‌های حلقوی و دایروی نانو کامپوزیت تحت توزیع غیریکنواخت بارعرضی و تحت یک میدان دمایی پایا را به‌دست آوردند. آنها به این نتیجه رسیدند که افزایش مقدار ورق‌های گرافنی، منجر به کاهش خیز و افزایش تنش نرمال و تنش برشی خواهد شد. از میان سه الگوی توزیع ورق‌های گرافنی، توزیع سهمی وار بهترین تاثیر تقویت را دارا می‌باشد. از این رو کاهش خیز را به دنبال دارد. بدرود و همکاران [۱۷] به مطالعه رفتار کمانشی متقارن و نامتقارن نانورق‌های حلقوی و دایروی با استفاده از نظریه غیرمحللی الاستیسیته پرداختند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که پارامتر غیرمحللی با تغییر شرایط تکیه‌گاهی، نسبت شعاع داخلی به خارجی ورق و همچنین شعاع خارجی ورق تغییر می‌کند. ملاعلی-پور [۱۸] به بررسی رفتار استاتیکی ورق‌های دایروی و حلقوی مدرج-تابعی با استفاده از حل دقیقی بر اساس نظریه برشی مرتبه اول پرداخت. ورق‌های مذکور به صورت ضخامت پله‌ای در نظر گرفته شده-اند که معادلات حاکم برای هر قسمت، به صورت جداگانه نوشته می-شود.

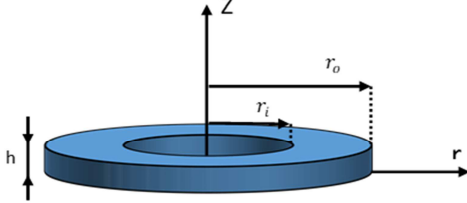
با توجه به مطالعات صورت گرفته، استفاده از صفحات گرافنی به عنوان تقویت‌کننده و همچنین به‌کارگیری توزیع‌های مختلف گرافن در راستای ضخامت در تحلیل ارتعاشی ورق‌های کامپوزیتی دایروی/حلقوی مورد بررسی قرار نگرفته است. در پژوهش حاضر، از نظریه سه‌بعدی الاستیسیته برای حل استفاده شده است. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل با به‌کارگیری معادلات حرکت و با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته صورت گرفته است. با به‌کارگیری روش مربعات تفاضلی در راستای شعاعی، حل نیمه تحلیلی حاصل می‌شود. از پنج الگوی متفاوت برای توزیع گرافن در راستای ضخامت استفاده شده است. در این پژوهش، تاثیر الگوهای مختلف توزیع گرافن، نسبت‌های ضخامت به شعاع، کسروزی گرافن و شرایط مرزی مختلف در رفتار ارتعاشی ورق‌های کامپوزیتی دایروی و حلقوی تقویت‌شده با گرافن مطالعه شده است.

¹ Differential quadrature method

کسرورزی گرافن در نانوکامپوزیت می‌باشند.

نظریه مساله

ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i ، شعاع خارجی r_o و ضخامت h طبق شکل ۱ در نظر بگیرید که توسط صفحات گرافنی تقویت شده است.



شکل ۱- طرحواره و محور مختصات ورق حلقوی

در غیاب نیروهای جسمی، معادلات حرکت برای حالت ارتعاشی ورق حلقوی مطابق رابطه زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_r}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

روابط تنش-تغییرمکان با استفاده از روابط تنش-کرنش و همچنین کرنش-تغییرمکان به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{r,r} + \frac{\nu}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) + \nu u_{z,z}] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu u_{r,r} + \frac{(1-\nu)}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) + \nu u_{z,z}] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu u_{r,r} + \frac{\nu}{r}(u_r + u_{\theta,\theta})] \\ \tau_{rz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} [u_{r,z} + u_{z,r}] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \\ \tau_{\theta z} &= \frac{E}{2(1+\nu)} [u_{\theta,z} + \frac{1}{r} u_{z,\theta}] \end{aligned} \quad (7)$$

متغیرهای فضای حالت شامل $\{\sigma_z, u_r, u_\theta, u_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}\}$ می‌باشند. که σ_z تنش نرمال در راستای ضخامت ورق، u_r, u_θ, u_z به ترتیب جابه‌جایی در راستای ضخامت، محیط و شعاع ورق هستند. همچنین $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ به ترتیب تنش برشی در صفحات $r-z, \theta-z$ می‌باشند. معادلات دیفرانسیل فضای حالت شامل متغیرهای مذکور با به کارگیری معادلات (۶) و (۷) به صورت معادله‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} \end{aligned}$$

۲- تشریح مساله

۲-۱ مدل نانوکامپوزیت تقویت شده با گرافن

بر اساس مدل هالپین تسای، مدول الاستیسیته نانوکامپوزیت تقویت شده با گرافن طبق معادله زیر محاسبه می‌شود [۱۹]:

$$E_C = \frac{3}{8} E_{||} + \frac{5}{8} E_{\perp} \quad (1)$$

به صورتی که

$$E_{||} = \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \times E_M, \quad E_{\perp} = \frac{1 + \xi_W \eta_W V_{GPL}}{1 - \eta_W V_{GPL}} \times E_M \quad (2)$$

که $E_C, E_M, \xi_L, \xi_W, V_{GPL}$ به ترتیب مدول موثر نانوکامپوزیت، ماتریس پلیمر، فاکتورهای هندسی گرافن و کسر حجمی گرافن می‌باشند که طبق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_L &= 2 \frac{L_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \xi_W = 2 \frac{W_{GPL}}{t_{GPL}} \\ V_{GPL} &= \frac{f_{GPL}}{f_{GPL} + \left(\frac{\rho_{GPL}}{\rho_M} \right) (1 - f_{GPL})} \\ \eta_L &= \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_M} \right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_M} \right) + \xi_L}, \quad \eta_W = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_M} \right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_M} \right) + \xi_W} \end{aligned} \quad (3)$$

که L_{GPL} به ترتیب چگالی وزنی گرافن، چگالی ماتریس پلیمر، کسر وزنی گرافن، ضخامت و طول نانو گرافن محسوب می‌شوند.

نسبت پواسون و چگالی ورق نانوکامپوزیتی حلقوی تقویت شده با گرافن طبق معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \rho_C &= \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_M (1 - V_{GPL}) \\ \nu_C &= \nu_{GPL} V_{GPL} + \nu_M (1 - V_{GPL}) \end{aligned} \quad (4)$$

همچنین ν_{GPL} و ν_M ضریب پواسون گرافن و ماتریس می‌باشد. روابط الگوهای مختلف توزیع گرافن در راستای ضخامت در ورق‌های کامپوزیتی حلقوی برای لایه‌ی n ام به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۲۰]:

$$\begin{aligned} \text{UD: } f_i &= f_{GPL} \\ \text{GPL-V: } f_i &= f_{\min} + (i-1) \frac{f_{\max} - f_{\min}}{N-1} \\ \text{GPL-A: } f_i &= f_{\max} - (i-1) \frac{f_{\max} - f_{\min}}{N-1}, \quad 1 \leq i \leq N \\ \text{GPL-X: } f_i &= \begin{cases} f_i = f_{\max} - (i-1) \frac{2(f_{\max} - f_{\min})}{N-2}, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2} \\ f_i = f_{\min} + \left(i - \frac{N}{2} - 1 \right) \frac{2(f_{\max} - f_{\min})}{N-2}, & \frac{N}{2} < i \leq N \end{cases} \\ \text{GPL-O: } f_i &= \begin{cases} f_i = f_{\min} + (i-1) \frac{2(f_{\max} - f_{\min})}{N-2}, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2} \\ f_i = f_{\max} - \left(i - \frac{N}{2} - 1 \right) \frac{2(f_{\max} - f_{\min})}{N-2}, & \frac{N}{2} < i \leq N \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

در معادلات فوق f_{\min} و f_{\max} به ترتیب کم‌ترین و بیش‌ترین

$$(\bar{U}_r \quad \bar{U}_\theta \quad \bar{U}_z) = \frac{1}{h} (\hat{u}_r \quad \hat{u}_\theta \quad \hat{u}_z) \quad (14)$$

$$\bar{Z} = \frac{Z}{h} \quad \bar{E} = \frac{E}{P_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}$$

با جایگزینی معادلات (۱۳) و (۱۴) در معادله (۹)، معادلات فضای حالت به فرم بی بعد زیر خواهد شد:

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{z}} = \bar{G}\bar{\delta} \quad (15)$$

به طوری که $\bar{\delta} = \{\bar{\sigma}_z \quad \bar{u}_r \quad \bar{u}_\theta \quad \bar{u}_z \quad \bar{\tau}_{rz} \quad \bar{\tau}_{\theta z}\}^T$ شامل متغیرهای فضای حالت می باشد و همچنین \bar{G} نیز در ضمیمه تعریف شده است.

روش حل

حل معادله (۱۳) به دلیل پیچیدگی، از روش تحلیلی امکان پذیر نمی باشد لذا از روش نیمه تحلیلی برای حل استفاده می شود. روش مربعات تفاضلی برای اولین بار توسط شو و ریچارد [۲۰] به کار گرفته شد. در این روش معادلات فضای حالت به متغیرهای z ، θ و مشتقات آنها وابسته نیستند، لذا با به کارگیری مربعات تفاضلی در راستای شعاعی، حل کامل خواهد شد. این روش براساس معادله (۱۶) محاسبه می شود:

$$\frac{\partial f^n(x_i, z)}{\partial x_i^n} = \sum_{j=1}^N g_{ij} f(x_j, z) \quad (16)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N \quad n = 1, \dots, N, N-1)$$

که N و (x_i, N) به ترتیب تعداد نقاط نمونه و مقدار تابع در نقطه نمونه x_i می باشد.

با جایگزینی معادله (۱۶) در (۱۵)، معادلات در هر نقطه نمونه \bar{r}_j به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{zi}}{\partial \bar{z}} = -\bar{\omega}^2 \bar{u}_{zi} - \frac{h}{r_0} \left(\sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{\tau}_{zj} + \frac{\bar{\tau}_{zi}}{\bar{r}} - \frac{P_m}{\bar{r}} \bar{\tau}_{z\theta} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial \bar{z}} = -\frac{h}{r_0} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{zj} + \frac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \bar{\tau}_{z\theta}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{zi}}{\partial \bar{z}} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\bar{E}(1-\nu)} \bar{\sigma}_{zi} - \frac{h}{r_0} \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} - \frac{\bar{P}_m}{\bar{r}} \bar{u}_{\theta i} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{zi}}{\partial \bar{z}} = -\bar{\omega}^2 \bar{u}_{ri} - \frac{h}{r_0} \frac{\nu}{(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{\sigma}_{zj}$$

$$+ \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left(-\sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} - \frac{1}{\bar{r}_i} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{1}{\bar{r}_i^2} \bar{u}_{ri} \right) + \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \frac{\bar{E} \bar{P}_m}{2\bar{r}_i(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{\theta j}$$

$$- \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \frac{3\bar{E} \bar{P}_m}{2\bar{r}_i^2(1+\nu)} \bar{u}_{\theta i}$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{\theta i}}{\partial \bar{z}} = -\bar{\omega}^2 \bar{u}_{\theta i} - \frac{\nu \bar{P}_m}{\bar{r}_i(1-\nu)} \bar{\sigma}_{zj} - \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \frac{\bar{E} \bar{P}_m}{2\bar{r}_i(1-\nu)} \left(\sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{2(2-\nu)}{\bar{r}_i(1+\nu)} \bar{u}_{ri} \right)$$

ماتریس های ضرایب با استفاده از روش مربعات تفاضلی در ضمیمه آورده شده است.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{z\theta} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_z - \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_r \right)$$

$$- \frac{E}{2r^2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{E}{2r(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{3E}{2r^2(1+\nu)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \theta} - \frac{E}{2r(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial r} - \frac{E(2-\nu)}{2r(1-\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) - \frac{E}{r^2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}$$

فرم ماتریسی معادله (۸) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{z}} = \bar{G}\bar{\delta} \quad (9)$$

که $\bar{\delta} = \{\sigma_z \quad u_r \quad u_\theta \quad u_z \quad \tau_{rz} \quad \tau_{\theta z}\}^T$ و \bar{G} به عنوان ماتریس ضرایب در ضمیمه معرفی شده است.

تنش های داخل صفحه طبق معادله (۱۰) محاسبه می شوند:

$$\sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right) \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

روابط مربوط به شرایط مرزی ساده (S)، گیردار (C) و آزاد (F) برای ورق حلقوی طبق معادله (۱۱) می باشد:

$$\begin{aligned} S: \sigma_r = u_z = u_\theta = 0 \\ C: u_z = u_r = u_\theta = 0 \\ F: \sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

همچنین شرط مرزی در مرکز ورق دایروی به صورت زیر می باشد:

$$u_r = \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad (12)$$

در تحلیل ارتعاشی برای ورق های دایروی و حلقوی، جابه جایی ها و تنش ها به فرم زیر تعریف خواهند شد.

$$u_r = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{u}_r \sin(p_m \theta) e^{i\omega t}, \quad u_\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{u}_\theta \cos(p_m \theta) e^{i\omega t}$$

$$u_z = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{u}_z \sin(p_m \theta) e^{i\omega t}$$

$$\sigma_r = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\sigma}_r \sin(p_m \theta) e^{i\omega t}, \quad \sigma_\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\sigma}_\theta \sin(p_m \theta) e^{i\omega t}, \quad (13)$$

$$\sigma_z = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\sigma}_z \sin(p_m \theta) e^{i\omega t}$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\tau}_{r\theta} \cos(p_m \theta) e^{i\omega t}, \quad \tau_{rz} = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\tau}_{rz} \sin(p_m \theta) e^{i\omega t}$$

$$\tau_{\theta z} = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\tau}_{\theta z} \cos(p_m \theta) e^{i\omega t}$$

برای ساده سازی روابط، از پارامترهای بی بعد زیر استفاده می شود:

$$(\bar{\sigma}_z \quad \bar{\sigma}_r \quad \bar{\sigma}_\theta \quad \bar{\tau}_{rz} \quad \bar{\tau}_{r\theta} \quad \bar{\tau}_{\theta z}) = \frac{1}{E_m} (\hat{\sigma}_z \quad \hat{\sigma}_r \quad \hat{\sigma}_\theta \quad \hat{\tau}_{rz} \quad \hat{\tau}_{r\theta} \quad \hat{\tau}_{\theta z})$$

$$x_i = \frac{(R_0 - R_i)}{2} \left(1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right) + R_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

برای نشان دادن دقت محاسبات در این بخش، نتایج عددی در قالب جدول و نمودار ارائه شده است و همچنین از مقادیر و مشخصات مواد زیر برای حل استفاده شده است [5]:

$$\begin{aligned} E_m &= 2.85 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0.38 \\ \rho_{\text{GPL}} &= 1.2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad E_{\text{GPL}} = 1.01 \text{ TPa} \\ \rho_m &= 1.06 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad l_{\text{GPL}} = 2.5 \mu\text{m} \\ w_{\text{GPL}} &= 1.5 \mu\text{m}, \quad \nu_{\text{GPL}} = 0.2 \\ h &= 0.2 \text{ m}, \quad r_0 = 1 \text{ m}, \quad r_f = 0.2 \text{ m} \\ P_0 &= 10^3 \text{ psi}, \quad t_{\text{GPL}} = 1.5 \text{ nm} \end{aligned} \quad (25)$$

همگرایی روش حل برای ورق حلقوی با تکیه‌گاه ساده در الگوی توزیع گرافن به صورت یکنواخت در جدول ۱ نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود همگرایی برای پنج فرکانس اول ورق حلقوی با روندی سریع ایجاد شده که از خصوصیات استفاده از روش مربعات تفاضلی، به عنوان روش نیمه‌تحلیلی می‌باشد. مطابق جدول با افزایش تعداد نقاط نمونه تا ۹ برای پنج فرکانس طبیعی اول، همگرایی خوبی ایجاد شده است.

جدول ۱ - همگرایی روش نیمه تحلیلی در پنج فرکانس طبیعی اول برای ورق حلقوی در تکیه‌گاه ساده - ساده.					
GPL - UD					
$\bar{\omega}_{55}$	$\bar{\omega}_{44}$	$\bar{\omega}_{33}$	$\bar{\omega}_{22}$	$\bar{\omega}_{11}$	N
۰/۹۸۸۳	۰/۶۹۱۰	۰/۵۱۶۲	۰/۳۶۵۰	۰/۰۶۷۳	۵
۰/۹۴۴۶	۰/۶۹۰۰	۰/۵۴۶۱	۰/۲۶۴۲	۰/۰۶۷۳	۷
۰/۹۴۶۲	۰/۶۹۰۰	۰/۵۴۶۱	۰/۲۶۳۶	۰/۰۶۷۳	۹
۰/۹۴۷۳	۰/۶۹۰۰	۰/۵۴۶۱	۰/۲۶۳۶	۰/۰۶۷۳	۱۱
۰/۹۴۷۸	۰/۶۹۰۰	۰/۵۴۶۱	۰/۲۶۳۶	۰/۰۶۷۳	۱۳
۰/۹۴۷۸	۰/۶۹۰۰	۰/۵۴۶۱	۰/۲۶۳۶	۰/۰۶۷۳	۱۵

به منظور صحت‌گذاری روش حاضر، از شرایط مساله در مرجع [۲۱] استفاده شده است. در مرجع مذکور از روش تغییر شکل برشی مرتبه اول و همچنین حل دوبعدی مربعات تفاضلی برای تحلیل ارتعاشی ورق حلقوی مدرج تابعی استفاده شده است. بدین صورت که در جدول ۲ نشان داده شده است، همخوانی خوبی بین پاسخ‌ها ایجاد شده است که نشانگر درستی روش حاضر می‌باشد. برای صحت‌گذاری با توجه به شرایط مساله در مرجع [۲۱]، از پنج فرکانس طبیعی اول در شرایط مرزی مختلف ساده- ساده و گیردار- گیردار برای ورق حلقوی مدرج تابعی استفاده شده است.

جدول ۳ تاثیر الگوهای مختلف توزیع گرافن روی فرکانس‌های طبیعی در راستای ضخامت ورق دایروی برای تکیه‌گاه گیردار را نشان می‌دهد. طبق جدول که برای پنج فرکانس طبیعی اول بی‌بعد و با در نظر گرفتن درصد‌های مختلف گرافن (f_{GPL}) در نانوکامپوزیت محاسبه شده، الگوی $\text{GPL} - X$ و الگوی $\text{GPL} - O$ به ترتیب بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار فرکانس طبیعی را در ورق دایروی دارند. لذا از الگوی $\text{GPL} - X$ به عنوان الگوی مناسب در ادامه حل و برای محاسبه پارامترهای بعدی استفاده شده است.

تنش‌های صفحه‌ای نیز با اعمال روش مربعات تفاضلی طبق معادلات زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ri} &= \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{zi} + \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{h}{r_0} \left(\sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{\nu}{r_f} \bar{u}_{ri} \right) \\ \bar{\sigma}_{\theta i} &= \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{zi} + \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{h}{r_0} \left(\nu \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{1}{r_f} \bar{u}_{ri} \right) \\ \bar{\tau}_{r\theta i} &= \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \frac{h}{r_0} \left(\sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{\theta j} + \frac{\bar{P}_m \bar{u}_{\theta i}}{r_f} - \frac{\bar{u}_{\theta i}}{r_f} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ki} &= \sigma_k(r_i, \theta, z) \quad (k = r, \theta, z), \quad \tau_{rzi} = \tau_{rz}(r_i, \theta, z) \\ \tau_{\theta zi} &= \tau_{\theta z}(r_i, \theta, z), \quad u_{ki} = u_k(r_i, \theta, z) \end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله (۱۷) در شعاع داخلی و خارجی ورق حلقوی، فرم بی‌بعد زیر برای هریک از شرایط مرزی به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{\delta}_b}{\partial \bar{z}} = \bar{G}_b \bar{\delta}_b \quad (19)$$

با توجه به معادله بالا، زیر اندیس b نشان‌دهنده هر یک از شرایط مرزی می‌باشد و همچنین \bar{G}_b به عنوان ماتریس ضرایب در شرایط مرزی مختلف تعریف شده است.

با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل (۱۹) در راستای ضخامت ورق، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{\delta}_b(\bar{z}) = e^{\int \bar{G}_b d\bar{z}} \bar{\delta}_b(0), \quad 0 \leq \bar{z} \leq \bar{h} \quad (20)$$

که با ساده‌سازی معادله (۲۰)، حل تحلیل ورق در راستای ضخامت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\delta}_b(\bar{z}) = e^{G_b \bar{z}} \bar{\delta}_b(0), \quad 0 \leq \bar{z} \leq \bar{h} \quad (21)$$

برای حل ارتعاشی، شرایط سطوح در سطح بالا و پایین ورق به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \quad \text{at } z = 0, h \quad (22)$$

با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۱) پاسخ همگن زیر برای حل رفتار ارتعاشی حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \\ A_{62} & A_{63} & A_{64} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_\theta \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

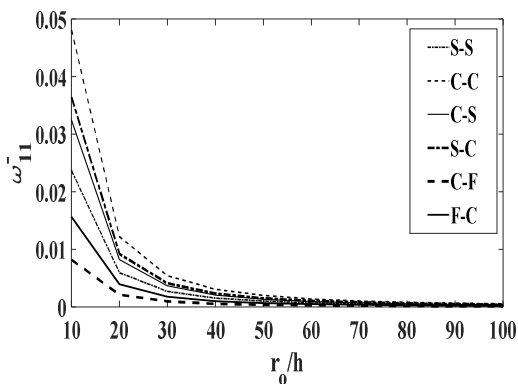
شرط عدم وجود جواب صفر در دستگاه معادلات همگن فوق، صفر بودن دترمینان ضرایب به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \\ A_{62} & A_{63} & A_{64} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

با حل معادله فوق، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی و حلقوی تعیین می‌شوند.

۳- نتایج عددی و بحث

برای حل نیمه تحلیلی، نقاط نمونه با استفاده از روش مربعات تفاضلی و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۰]:



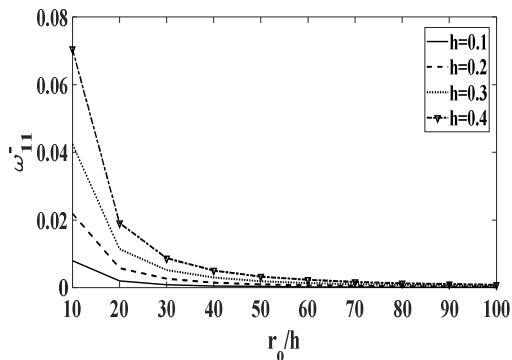
شکل ۲- تاثیر نسبت شعاع خارجی به ضخامت بر فرکانس پایه بی‌بعد برای ورق حلقوی در شرایط مرزی مختلف. GPL - X

شکل ۲ تاثیر نسبت شعاع خارجی به ضخامت بر فرکانس پایه بی‌بعد را در شرایط مرزی مختلف برای ورق حلقوی نشان می‌دهد. همچنین از فرکانس طبیعی اول بی‌بعد و الگوی توزیع GPL - X استفاده شده است. مطابق شکل ۲ شرایط مرزی گیردار-گیردار و آزاد به ترتیب بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار فرکانس پایه بی‌بعد را در ورق حلقوی دارند. شرط مرزی گیردار-گیردار به دلیل داشتن ممان خمشی در شعاع داخلی و خارجی ورق و همچنین مقاومت بیشتر در برابر تغییر شکل، در زمان معین دارای فرکانس طبیعی بیشتری نسبت به شرایط مرزی دیگر می‌باشد. به همین سبب از تکیه‌گاه گیردار به عنوان تکیه‌گاه مناسب در ادامه حل استفاده شده است.

جدول ۲ - نتایج پنج فرکانس طبیعی دوم برای ورق حلقوی در تکیه-گاه‌های گیردار-گیردار، ساده-ساده.					
$\rho_m = 7800 \frac{kg}{m^3}$, $E_m = 2/1e11$ pa, $v = v_m = 0/3$, $R_t = 0/5m$, $h = 0/1m$, $R_0 = 2m$					
مود	تکیه‌گاه ساده-ساده		تکیه‌گاه گیردار-گیردار		میان اختلاف
	میزان [۲۱]	میزان اختلاف	میزان [۲۱]	میزان اختلاف	
f_6	۲۳۱	۲۳۱/۷	۳۱۱	۳۱۱/۷	۳۳۵/۸۹
f_7	۲۳۱	۲۳۱/۷	۳۱۱	۳۱۱/۷	۳۳۵/۸۹
f_8	۳۳۱	۳۳۱/۴	۴۱۰	۴۱۰/۴	۴۲۷/۳۱
f_9	۳۴۱	۳۴۱/۱	۴۳۱	۴۳۱/۰۹	۴۲۷/۳۱
f_{10}	۴۵۱	۴۵۱/۰۴	۵۴۳	۵۴۳/۰۲	۵۴۲/۰۱

جدول ۳ - نتایج الگوهای مختلف توزیع گرافن برای ورق دایروی در پنج فرکانس طبیعی اول در تکیه‌گاه گیردار.						
n=1, m					GPL distribution	f_{GPL}
۵	۴	۳	۲	۱		
۰/۰۴۵۲	۰/۰۳۴۲	۰/۰۲۵۳	۰/۰۱۷۹	۰/۰۱۰۶	GPL-X	۰/۲۵% wt
۰/۰۳۲۶	۰/۰۲۴۷	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۳۷	۰/۰۰۹۰	GPL-O	
۰/۰۳۴۷	۰/۰۲۶۳	۰/۰۲۰۰	۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۹۰	GPL-A	
۰/۰۳۵۲	۰/۰۲۶۸	۰/۰۲۰۰	۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۹۰	GPL-V	
۰/۰۳۷۹	۰/۰۲۸۹	۰/۰۲۱۶	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۰۰	GPL-UD	
۰/۰۵۷۸	۰/۰۴۳۶	۰/۰۳۲۶	۰/۰۲۳۲	۰/۰۱۳۷	GPL-X	۰/۱۵% wt
۰/۰۳۹۴	۰/۰۳۰۰	۰/۰۲۲۶	۰/۰۱۶۹	۰/۰۱۰۶	GPL-O	
۰/۰۴۰۵	۰/۰۳۰۵	۰/۰۲۳۲	۰/۰۱۷۴	۰/۰۱۰۶	GPL-A	
۰/۰۴۲۶	۰/۰۳۲۶	۰/۰۲۴۷	۰/۰۱۷۹	۰/۰۱۱۶	GPL-V	
۰/۰۴۷۸	۰/۰۳۶۳	۰/۰۲۷۴	۰/۰۲۰۰	۰/۰۱۲۷	GPL-UD	

افزایش فرکانس طبیعی در نسبت شعاع به ضخامت کم تر قابل ملاحظه می باشد در حالی که در نسبت های بالاتر شعاع به ضخامت، افزایش فرکانس طبیعی در تمامی ضخامت ها به شدت کاهش می یابد.



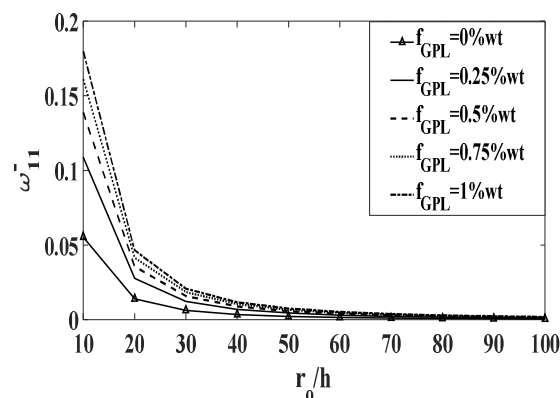
شکل ۵- تاثیر نسبت شعاع خارجی به ضخامت با افزایش ضخامت بر فرکانس طبیعی اول بی بعد برای ورق دایروی در تکیه گاه گیردار. GPL - X.

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش به مطالعه رفتار ارتعاشی ورق دایروی/حلقوی تقویت شده با گرافن در شرایط مرزی مختلف با به کارگیری نظریه الاستیسیته سه بعدی پرداخته شده است. همچنین روش مربعات تفاضلی به منظور حل نیمه تحلیلی در راستای شعاعی به کار گرفته شده است. از پنج الگوی مختلف برای توزیع گرافن در راستای ضخامت ورق حلقوی/دایروی استفاده شده است. مدل هالپین تسای نیز جهت تخمین مدول الاستیسیته نانو کامپوزیت در این پژوهش استفاده شده است. اعتبارسنجی نتایج با استفاده از مقالات معتبر انجام پذیرفته است. نتایج عددی حاصل از شبیه سازی به نتایج زیر انجامید:

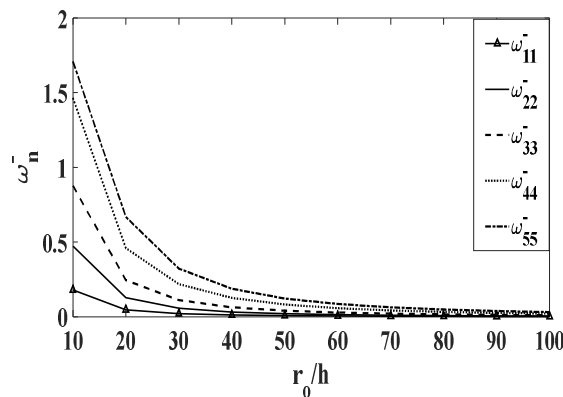
- از بین تمامی توزیع های مختلف گرافن در راستای ضخامت، الگوی GPL - X دارای بیشترین فرکانس طبیعی می باشد. لذا از این الگو برای محاسبه پارامترهای مختلف در این پژوهش استفاده شده است.
- تکیه گاه گیردار-گیردار و تکیه گاه گیردار-آزاد به ترتیب بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی در ورق حلقوی را دارند. همچنین تکیه گاه گیردار-گیردار به دلیل مقدار فرکانس طبیعی بیشتر نسبت به سایر تکیه گاه ها به عنوان تکیه گاه مناسب در این پژوهش انتخاب شده است.
- افزایش کسر وزنی صفحات گرافنی در نانوکامپوزیت، بهبود چشمگیری را در ورق حلقوی/دایروی در برابر رفتار ارتعاشی ایجاد می کند.
- استفاده از صفحات گرافنی در نسبت های پایین تر ضخامت به شعاع، تاثیر بسیار بهتری بر فرکانس پایه ورق حلقوی/دایروی ایجاد می کند.

شکل ۳ تاثیر کسر وزنی مختلف گرافن بر فرکانس پایه بی بعد برای ورق حلقوی در نسبت شعاع به ضخامت را نشان می دهد. همچنین از الگوی GPL - X برای توزیع گرافن در راستای ضخامت ورق استفاده شده است. از شکل ۳ نتیجه می شود که با افزایش کسر وزنی گرافن، فرکانس پایه بی بعد نیز افزایش می یابد. همچنین به طور وضوح دیده می شود که صفحات گرافنی در نسبت های پایین تر شعاع به ضخامت، اثر بهتر و محسوس تری بر فرکانس پایه بی بعد دارند.



شکل ۳- تاثیر کسر وزنی مختلف گرافن بر فرکانس پایه بی بعد برای ورق حلقوی با شرط مرزی گیردار. GPL - X.

تغییرات پنج فرکانس طبیعی اول بی بعد بر حسب نسبت شعاع خارجی به ضخامت طبق شکل ۴ نشان داده شده است. مشاهده می شود که تاثیر افزایش نسبت شعاع به ضخامت در فرکانس های طبیعی بالاتر نسبت به فرکانس های طبیعی پایین تر به منظور کاهش پارامتر فرکانس قابل ملاحظه تر می باشد.



شکل ۴- تاثیر نسبت شعاع خارجی به ضخامت بر پنج فرکانس طبیعی اول بی بعد برای ورق دایروی در تکیه گاه گیردار. GPL - X.

به منظور بررسی افزایش ضخامت بر روی فرکانس طبیعی بی بعد در شرط مرزی گیردار از شکل ۵ استفاده شده است. طبق شکل مورد نظر، افزایش ضخامت باعث افزایش فرکانس طبیعی بی بعد می شود.

۵- ضمیمه

$$\begin{aligned} \bar{a}_6 &= \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}(1-\nu)} \bar{g}_{ij} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{3\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}^2(1+\nu)} \\ \bar{a}_7 &= -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}(1-\nu)} \bar{g}_{ij} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}(2-\nu)}{\bar{r}^2(1-\nu^2)} \\ \bar{a}_8 &= -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \bar{g}_{ij}^{(2)} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2\bar{r}(1+\nu)} \bar{g}_{ij} + \\ &\quad \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m^2 \bar{E}}{\bar{r}^2(1-\nu^2)} + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)} - \bar{\omega}^2 \end{aligned}$$

ورق دایروی:

تکیه گاه ساده:

$$\bar{G}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\bar{\omega}^2 I_N & \bar{a}_1 & \frac{h}{R_o} \frac{\bar{p}_m}{\bar{r}} I_N \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{ij} & \frac{2(1+\nu)}{E} I_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p_m}{\bar{r}} \frac{h}{R_o} I_{N-1} & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} I_{N-1} \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{ij} & \bar{a}_5 + \bar{f}_i & \bar{a}_6 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\bar{p}_m \nu}{\bar{r}(1-\nu)} I_N & \bar{a}_7 & \bar{a}_8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_1 = -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{ij1} - \frac{h}{R_o} \frac{1}{\bar{r}} I_{N-1}, \bar{a}_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} I_{N-1}, \bar{a}_3 = -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} I_{N-1} - \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{ij2}$$

$$\bar{a}_4 = \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} \bar{p}_m I_{N-1}, \bar{a}_5 = -\bar{\omega}^2 I_N - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \bar{g}_{ij}^{(2)} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}(1-\nu^2)} \bar{g}_{ij} +$$

$$\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m^2 \bar{E}}{2\bar{r}^2(1+\nu)} I_N + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)} I_N, \bar{a}_6 = \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}(1-\nu)} \bar{g}_{ij} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{3\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}^2(1+\nu)} I_N$$

$$\bar{a}_7 = -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}(1-\nu)} \bar{g}_{ij} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}(2-\nu)}{\bar{r}^2(1-\nu^2)} I_N, \bar{a}_8 = -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \bar{g}_{ij}^{(2)} -$$

$$\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2\bar{r}(1+\nu)} \bar{g}_{ij} + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m^2 \bar{E}}{\bar{r}^2(1-\nu^2)} I_N + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)} I_N - \bar{\omega}^2 I_N$$

$$\bar{f}_i = \left\{ \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2(1-\nu^2)} (\bar{g}_{iN} \bar{g}_{Nj}) \right\} + \left\{ \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E} \nu}{\bar{r}(1-\nu^2)} (\bar{g}_{iN}) \right\} \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

تکیه گاه گیردار:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & a_1 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{r(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta} & a_7 & a_8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}, a_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}, a_3 = -\frac{\nu}{r(1-\nu)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$a_4 = -\frac{\nu}{r(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta}, a_5 = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{E}{r(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial r} -$$

$$\frac{E}{2r^2(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{E}{r^2(1+\nu)}, a_6 = -\frac{E}{2r(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{3E}{2r^2(1+\nu)}$$

$$a_7 = -\frac{E}{2r(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{E(2-\nu)}{r^2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$a_8 = -\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{E}{2r(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{E}{r^2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{E}{r^2(1+\nu)} + \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\bar{\omega}^2 & \bar{a}_1 & \frac{h}{R_o} \frac{\bar{p}_m}{\bar{r}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{ij} & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p_m}{\bar{r}} \frac{h}{R_o} & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{ij} & \bar{a}_5 & \bar{a}_6 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\bar{p}_m \nu}{\bar{r}(1-\nu)} & \bar{a}_7 & \bar{a}_8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_1 = -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{ij} - \frac{h}{R_o} \frac{1}{\bar{r}}, \bar{a}_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

$$\bar{a}_3 = -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} - \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{ij}$$

$$\bar{a}_4 = \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} \bar{p}_m$$

$$\bar{a}_5 = -\bar{\omega}^2 - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \bar{g}_{ij}^{(2)} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}(1-\nu^2)} \bar{g}_{ij} +$$

$$\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m^2 \bar{E}}{2\bar{r}^2(1+\nu)} + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)}$$

- GPLs eccentric annular plates embedded in piezoelectric layers using a transformed differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 79, No.05, pp. 340:451, 2018.
- [10] Reddy J, Wang C, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. Vol. 18, No.02, pp. 185-99, 1999.
- [11] Alibeigloo A. Thermo elasticity solution of sandwich circular plate with functionally graded core using generalized differential quadrature method. *Composite Structures*. Vol. 40, No.15, pp. 136:229, 2016.
- [12] Dong C. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the Chebyshev-Ritz method. *Materials & Design*. Vol. 29, No.8, pp. 1518-25, 2008.
- [13] Tajeddini V, Ohadi A, Sadighi M. Three-dimensional free vibration of variable thickness thick circular and annular isotropic and functionally graded plates on Pasternak foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 53, No.4, pp. 300-8, 2011.
- [14] Alibeigloo A, Jafarian H. Three-Dimensional Static and Free Vibration Analysis of Carbon Nano Tube Reinforced Composite Cylindrical Shell Using Differential Quadrature Method. *International Journal of Applied Mechanics*. Vol. 08, No.03, pp. 1650033, 2016.
- [15] Bisheh, H. and Alibeigloo, A., Static analysis of graphene reinforced composite circular plate. *The 27th Annual International Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers-ISME2019*. 30 April- 2 May, 2019.
- [16] Yang B, Kitipornchai S, Yang Y-F, Yang J. 3D thermo-mechanical bending solution of functionally graded graphene reinforced circular and annular plates. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 49, No.03, pp. 69-86, 2017.

[۱۷] بدرود م.، هاشمی ش. و ناظم‌زاده ر.، کمانش متقارن و نامتقارن نانورق‌های دایروی و حلقی در فضای غیرمحلی الاستیسیته. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۳، ش. ۵، ص ۱۴۴-۱۵۲، ۱۳۹۲.

[۱۸] ملاعلی پور م.، تحلیل خمشی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی مدرج تابعی با تغییرات پله‌ای ضخامت با استفاده از یک حل دقیق فرم بسته جدید. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۴۷، ش. ۲، ص ۲۹۵-۳۰۲، ۱۳۹۶.

- [19] Afddl JH, Kardos J., The Halpin-Tsai equations: a review. *Polymer Engineering & Science*. Vol. 16, No.05, pp. 344-52, 1976.
- [20] Feng, C., Kitipornchai, S. and Yang, J., Nonlinear free vibration of functionally graded polymer composite beams reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs). *Engineering Structures*, Vol.140, pp.110-119, 2017.
- [21] Shu C, Richards BE. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. 15, No.07, pp. 791-8, 1992.
- [22] Tornabene, F., Viola, E. and Inman, D.J., 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 328, No.03, pp. 259-290, 2009.

$$\bar{G}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\bar{\omega}^2 I_N + \bar{f}_{1c} & \bar{a}_1 & \frac{h}{R_o} \frac{\bar{p}_m}{\bar{r}} I_N \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{\theta c 2} & \frac{2(1+\nu)}{\bar{E}} I_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p_m}{\bar{r}} \frac{h}{R_o} I_{N-1} & 0 & \frac{2(1+\nu)}{\bar{E}} I_{N-1} \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta c} & \bar{a}_3 + \bar{f}_{2c} & \bar{a}_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\bar{p}_m \nu}{\bar{r}(1-\nu)} I_N & \bar{a}_5 & \bar{a}_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_1 = -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{\theta c 1} - \frac{h}{R_o} \frac{1}{\bar{r}} I_{N-1}, \bar{a}_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\bar{E}(1-\nu)} I_{N-1}, \bar{a}_3 = -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} I_{N-1} - \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{\theta c 2}$$

$$\bar{a}_4 = \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} \bar{p}_m I_{N-1}, \bar{a}_5 = -\bar{\omega}^2 I_N - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \bar{g}_{\theta c}^{(2)} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}(1-\nu^2)} \bar{g}_{\theta c} +$$

$$\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m^2 \bar{E}}{2\bar{r}^2(1+\nu)} I_N + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)} I_N, \bar{a}_6 = \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}(1-\nu)} \bar{g}_{\theta c} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{3\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}^2(1+\nu)} I_N$$

$$\bar{a}_7 = -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}}{2\bar{r}(1-\nu)} \bar{g}_{\theta c} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m \bar{E}(2-\nu)}{\bar{r}^2(1-\nu^2)} I_N, \bar{a}_8 = -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \bar{g}_{\theta c}^{(2)} -$$

$$\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2\bar{r}(1+\nu)} \bar{g}_{\theta c} + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{p}_m^2 \bar{E}}{\bar{r}^2(1-\nu^2)} I_N + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)} I_N - \bar{\omega}^2 I_N$$

$$\bar{f}_{1c} = \left\{ -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} (\bar{g}_{\theta c} \bar{g}_{\theta c}) \right\} \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, N)$$

$$\bar{f}_{2c} = \left\{ -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\nu^2 \bar{E}}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} (\bar{g}_{\theta c} \bar{g}_{\theta c}) \right\} \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, N)$$

۶- مراجع

- [1] Potts JR, Dreyer DR, Bielawski CW, Ruoff RS., Graphene-based polymer nanocomposites. *Polymer*, Vol. 52, No.1, pp. 5-25, 2011.
- [2] Rafiee MA, Rafiee J, Wang Z, Song H, Yu Z-Z, Koratkar N., Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content. *ACS nano*. Vol. 3, No.12, pp. 3884-90, 2009.
- [3] Kitipornchai S, He X, Liew K. Continuum model for the vibration of multilayered graphene sheets. *Physical Review B*. Vol. 72, No.7, pp. 075443, 2005.
- [4] Xie S, Liu Y, Li J., Comparison of the effective conductivity between composites reinforced by graphene nanosheets and carbon nanotubes. *Applied Physics Letters*. Vol. 92, No.24, pp. 243121, 2008.
- [5] Yang B, Yang J, Kitipornchai S. Thermoelastic analysis of functionally graded graphene reinforced rectangular plates based on 3D elasticity. *Meccanica*. Vol. 52, No.10, pp. 2275-92, 2017.
- [6] Lin HG, Cao DQ, Xu YQ. Vibration, Buckling and Aeroelastic Analyses of Functionally Graded Multilayer Graphene-Nanoplatelets-Reinforced Composite Plates Embedded in Piezoelectric Layers. *International Journal of Applied Mechanics*. Vol. 10, No.03, pp. 1850023, 2018.
- [7] Feng C, Kitipornchai S, Yang J. Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (GPLs). *Composites Part B: Engineering*. Vol. 40, No.03, pp. 110:132, 2017.

[۸] میری م.، وجشنانی ح.، تحلیل ارتعاشات نانو ورق گرافنی تک لایه دایروی تحت اثر اختلاف دما در محیط حرارتی. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۸، ش. ۵، ص ۶۷-۷۵، ۱۳۹۷.

- [9] Malekzadeh P, Setoodeh A, Shojaei M. Vibration of FG-