

حل ضمنی جریان تراکم ناپذیر غیردائم روی شبکه بی سازمان به روش جیمسون به همراه انتقال گرمای مرکب

مرضیه حسامی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران، marziehesami69@yahoo.com

میریوسف هاشمی*

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران، m.y.hashemi@azaruniv.ac.ir

چکیده

در این مقاله معادله حاکم بر جریان تراکم ناپذیر به همراه انتقال گرما بصورت عددی و روش تراکم پذیری مصنوعی حل شده است. جهت حل معادلات حاکم از روش حجم محدود بر روی شبکه بی سازمان مثلثی استفاده شده است و برای گسسته سازی مکانی از روش جیمسون استفاده شده و جهت پایدار سازی حل اختلافات دوم و چهارم معادلات گسسته سازی شده اضافه شده است. بمنظور انتگرال گیری زمانی از روش ضمنی با دقت مرتبه دو استفاده شده و جهت حل معادلات بدست آمده در هر گام زمانی از گام زمانی مجازی و حل صریح رانگ کوتا مرتبه ۴ بهره گرفته شده است. بمنظور اطمینان از دقت و صحت نتایج بدست آمده مطالعه استقلال نتایج از شبکه انجام شده و با نتایج مراجع معتبر مقایسه گردیده است. مقایسه نتایج نشان داد که روش بکار گرفته شده در حل عددی جریان تراکم ناپذیر از دقت مطلوبی برخوردار بوده و از فرآیند همگرایی با شیب مناسبی برخوردار است. **واژه های کلیدی:** جریان تراکم ناپذیر غیر دائم، انتقال گرما، حل ضمنی، شبکه بی سازمان، روش جیمسون.

Implicit numerical solution of unsteady incompressible flow with mixed heat transfer using Jameson method on unstructured grid

M. hesami
M.Y. Hashemi

Department of Mechanical Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran
Department of Mechanical Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Abstract

In this paper the governing equation for incompressible flow with heat transfer are solved numerically using artificial compressibility method. The finite volume method was used to solve the governing equation with Jameson's method on triangular unstructured grid. In order to stabilize the solution a blend of the second and fourth differences of conserved variable used in order to prevent the oscillations. An implicit method with second order accuracy was used to time integration. In order to solve the obtained equation at each time step an artificial time step and the forth order explicit runge-kutta has been used. In order to ensure the accuracy of obtained results independent of the grid size the obtained results has been compared with the standard test cases in the literature and indicated a good agreement. Comparison of results indicated that the method used in the numerical solution of incompressible flow has a desirable accuracy and convergence rate.

Keywords: Unsteady incompressible flow, implicit solution, unstructured grid, Jameson method.

۱- مقدمه

پیشرفت های اخیر در قدرت کامپیوترها این امکان را داده است که مسائل مختلف مهندسی خصوصاً مهندسی مکانیک در زمینه حرارت و سیالات به کمک دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) شبیه سازی و بررسی شوند. در این میان شبیه سازی عددی جریان تراکم ناپذیر به دلیل کاربردهای صنعتی زیاد از اهمیت ویژه ای برخوردار است. محدوده این کاربردها، از هیدرودینامیک و آیرودینامیک سرعت پایین تا انتقال گرما بصورت جابجایی طبیعی و اجباری در مبادله کن های گرما و وسایل خنک کننده الکتریکی و... می باشد.

معادلات ناور استوکس جریان تراکم ناپذیر معادلات حاکم بر طیف گسترده ای از مسائل مهندسی مانند: آئرو دینامیک، هیدرودینامیک، جریان های زیست پزشکی، مسائل مرتبط با حرکت باد و ... است. روشهای حل معادلات حاکم بر چنین پدیده هایی و شبیه سازی پدیده ها همواره مورد توجه محققان حرارت و سیالات بوده است. روش های متعددی برای حل این معادلات ارائه شده و همچنان

تلاش برای ایجاد روش های بهتر و دقیق تر ادامه دارد. برای حل عددی معادلات ناور-استوکس لازم است که معادلات و میدان گسسته سازی شده و برای میدان جریان مورد نظر معادلات حاکم تبدیل به معادلات جبری و توسط کامپیوتر بعنوان یک وسیله محاسباتی سریع حل شوند.

طرح های محاسباتی مختلفی برای گسسته سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار گرفته است. چورین یک طرح مرتبه دوم را پیشنهاد داد که این روش قابلیت ترکیب شدن با روش گسسته سازی اختلاف محدود مرکزی روی شبکه های هم مکان و جابجا شده را دارد [۱]. فارمر و همکاران روش میانگین گیری مرکزی با اضافه کردن لزجت مصنوعی بصورت اختلاف چهارم را برای جلوگیری از نوسانات و پایدار کردن حل در روی شبکه با سازمان به کار بردند [۲]. جیمسون معادلات اویلر تراکم پذیر را با روش صریح و گسسته سازی چند مرحله ای رانگ-کوتا و با تقریب میانگین گیری متغیرهای بقائی جریان برای محاسبه شارها و افزودن جملات اتلاف عددی مناسب برای

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m.y.hashemi@azaruniv.ac.ir

میرا کردن موج‌های خطا حل کرد. راجرز و کواک روش تراکم‌پذیری مصنوعی را برای جریان غیر دائم با استفاده از روش حل اختلاف محدود به کار بردند [۴ و ۳]. محققان زیادی همچون لی و همکاران روش‌هایی از نوع جداسازی اختلاف شار را برای معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار دادند [۵]. یوان، طرح محاسباتی جداسازی اختلاف شار با حلگر ریمان-رو را برای گسسته‌سازی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار داد [۶]. آقایی و حکیم زاده در پژوهشی به حل عددی جریان دو بعدی و سه بعدی به روش تراکم‌پذیری مصنوعی با رویکرد گام زمانی دوگانه پرداختند [۷]. بیلو روش گام زمانی دوگانه جیمسون را روی معادلات تراکم‌ناپذیر غیر دائم با گسسته‌سازی میدان بصورت باسازمان انجام داد [۸]. ادیبی و رضوی حل جریان تراکم‌ناپذیر به‌همراه انتقال گرما با بروش تراکم‌پذیری مصنوعی و بک‌مک روش مشخصه‌ها و روش میانگین جیمسون روی شبکه با سازمان انجام داده و به مقایسه نتایج پرداخته‌اند [۱۵]. سلیمفندیگیل و اوزتاپ جریان با جابجائی مرکب انتقال گرما درون حفره در اعداد رینولدز و گراش حل عددی و بررسی نمودند [۱۶].

گسسته‌سازی میدان بروشهای مختلفی صورت می‌گیرد و مهمترین آن شبکه (مش) بندی میدان است که به دو صورت باسازمان و بی سازمان امکان پذیر است. در دهه های اخیر، شبکه بی سازمان به دو دلیل متداول است. اول اینکه، در مقایسه با شبکه با سازمان بخصوص برای هندسه های پیچیده ساده تر تولید می شود. مزیت دیگر آن این است که در شبکه با سازمان هنگامی که تراکم مش در یک ناحیه اصلاح می شود، بر کل دامنه محاسباتی تاثیر می گذارد و نقاط شبکه غیر ضروری ایجاد می شود و در نتیجه بازده شبیه سازی خصوصا در بحث زمان کاهش می یابد. در مقابل، در شبکه بی سازمان اصلاح و به عبارتی سازگار سازی شبکه بصورت محلی برای هر ناحیه صورت می گیرد و روی دامنه محاسباتی تاثیری ناچیز دارد.

در این مقاله، روش جیمسون برای حل جریان تراکم‌پذیر در حل عددی جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا، به‌همراه انتقال گرما روی شبکه بی سازمان، بر پایه ی مرکزیت سلول، بصورت ضمنی بکار گرفته شده است. جهت مقایسه و بررسی نتایج این روش، حل عددی در رینولدز، گراش و ریچاردسون‌های مختلف انجام شده و نتایج بدست آمده برای جریان داخل حفره با نتایج موجود در مراجع معتبر مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم و گسسته سازی مکانی و زمانی

۲-۱- معادلات حاکم بر جریان تراکم‌ناپذیر به‌همراه انتقال

گرما

فرم بقای معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی برای جریان تراکم‌ناپذیر لایه‌ای دو بعدی به‌همراه انتقال گرما بصورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \alpha \Delta \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \theta) + \frac{\partial}{\partial y} (v \theta) = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

معادلات حاکم بر اساس مقادیر مرجع بی بعد و جمله تراکم‌پذیری مصنوعی اضافه شده و به شکل زیر در آمده است:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \theta) + \frac{\partial}{\partial y} (v \theta) = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

که در آن β ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی و Re عدد رینولدز و Pr عدد پراوتل و Gr عدد گراش می باشند که سه عدد بدون بعد بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Gr} = \frac{g \Delta T L^3}{\nu^2}$$

در نهایت معادلات دو بعدی به فرم بقایی و در شکل ماتریسی برای جریان تراکم‌ناپذیر نیوتونی برای روش تراکم‌پذیری مصنوعی به فرم زیر است:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} H \quad (9)$$

W بردار متغیرهای اولیه و F, G بردار شار جابجایی در راستای x, y و همچنین R, S بردارهای شار لزج در راستای x, y هستند.

$$W = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \\ u \theta \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \\ v \theta \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

۲-۲- گسسته سازی مکانی معادلات حاکم

اگر مساحت حجم کنترل S و مرز در برگرنده حجم کنترل C در نظر گرفته شود با انتگرال گیری از آخرین معادله برای حجم کنترل نتیجه زیر حاصل می‌شود [۱۰]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S W dx dy + \iint_C \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy \quad (10)$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \iint_C \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \right) dx dy + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \iint_S H dx dy$$

با اعمال فرضیه گرین روی جمله دوم سمت چپ معادله و جمله اول سمت راست و ثابت بودن خواص داخل حجم کنترل بدست می‌آید:

$$\frac{\partial (WA)}{\partial t} + Q_i(W) = 0 \quad (11)$$

$$Q_i(W) = \sum_{k=1}^n \left[\left(F - \frac{1}{\text{Re}} R \right) \Delta y_k - \left(G - \frac{1}{\text{Re}} S \right) \Delta x_k \right] - \frac{Gr}{\text{Re}^2} H_i A_i$$

که در آن A مساحت و i نشان دهنده ی وجه سلول و n تعداد وجه سلول است. از آنجا که مدل کردن شارهای عبوری روی وجوه انجام می‌گیرد و خواص در مرکز حجم کنترل ذخیره شده است باید متغیرها و یا شارهای روی وجوه به خواص در نقاط کنترلی مرتبط شود.

که k شماره وجه سلول و $d_k^{(4)}$ و $d_k^{(2)}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود [۱۰].

$$\begin{aligned} d_k^{(2)} &= \lambda_k \varepsilon_k^{(2)} (w_{IR} - w_{IL})_k \\ d_k^{(4)} &= \lambda_k \varepsilon_k^{(4)} (\nabla^2 w_{IR} - \nabla^2 w_{IL})_k \end{aligned} \quad (16)$$

این نوع استهلاک مصنوعی برای جریان‌های غیر لزج تراکم‌پذیر توسعه داده شده است، اما برای جریان‌های لزجی که جمله جابجایی غالب می‌باشد یا اعداد رینولدز بالایی دارد نیز به خوبی عمل می‌کند. همچنین λ وجه نام بر اساس حداکثر مقادیر ویژه ماتریس جاکوبی $\frac{\partial G}{\partial w}$ و $\frac{\partial F}{\partial w}$ محاسبه می‌شود که بصورت زیر است:

$$\lambda_i = \left| \bar{U}_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_{ij} - \bar{V}_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{ij} \right| + \bar{C} \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2} \quad (17)$$

که در این رابطه U_i و V_i بردار سرعت روی ضلع i و C سرعت صوت منطقه ای است بصورتی که $\bar{S}_{ij}$ بردار یک عمود بر وجه سلول می‌باشد:

$$\bar{C} = \sqrt{\left(\bar{V}_{i+\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij} \right)^2 + \beta^2} \quad (18)$$

۳-۲- گسسته سازی زمانی معادلات حاکم

در این پژوهش، حل عددی جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا به همراه انتقال گرمای جابجایی آزاد و اجباری به روش جیمسون انجام شده است. جهت حل ناپایای معادلات از روش ضمنی و برای حل دستگاه معادلات بدست آمده از روش تکرار در گام زمانی مجازی استفاده خواهد شد [۱۱]. لذا یک جمله مشتق زمانی مصنوعی جهت استفاده از روش تکرار در گام زمانی مجازی به معادلات اضافه شده است [۷].

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \beta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

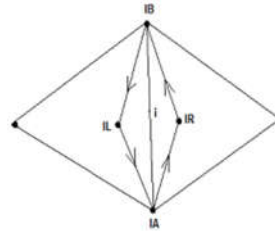
$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta \quad (21)$$

که در آن t زمان فیزیکی و τ زمان مجازی است. در هر گام زمانی فیزیکی، گسسته‌سازی به صورت ضمنی انجام شده که باعث گردیده، یک دستگاه معادله برای کل متغیرهای سلول‌های میدان ایجاد شود و با توجه به تعداد زیاد صفرهای این دستگاه معادله، روش تکرار بسیار بهتر از روش‌های مستقیم حل دستگاه معادلات می‌باشد. لذا جهت استفاده از روش تکرار از ایده حل صریح استفاده شده است و یک گام زمانی مجازی به حل اضافه می‌شود که در صورت همگرایی در گام زمانی مجازی، حل برای یک گام زمانی فیزیکی همگرا می‌شود. برای گسسته‌سازی در زمان مجازی، از روش رانگ-کوتا۴ چند مرحله ای با ضرایب بهینه استفاده شده است. به عبارتی روش فوق روش صریح یا پیشر در زمان مجازی می‌باشد و در این پژوهش، از روش چهار مرحله ای رانگ-کوتا استفاده شده است. همچنین برای گسسته‌سازی زمانی در زمان فیزیکی از روش ضمنی با دقت مرتبه ۲ استفاده می‌شود. در صورت گسسته‌سازی ضمنی معادله (۱۴) و با ثابت بودن شبکه در زمان حل رابطه زیر بدست می‌آید:

شارهای لزج به دلیل دارا بودن خاصیت پخشی می‌توانند بصورت مرکزی مدل شوند، یعنی مقدار شار در هر وجه را برابر متوسط شار لزج در نقاط کنترلی مجاور بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right)_i &= \frac{1}{A_s} \iint \frac{\partial \Gamma}{\partial x} ds = \frac{1}{A_s} \iint \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx dy = \frac{1}{A_s} \int \Gamma dy \\ &= \frac{1}{A_s} \left[\left(\frac{\Gamma_{IA} + \Gamma_{IB}}{2} \right) \times (Y_{IR} - Y_{IA}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Gamma_{IR} + \Gamma_{IB}}{2} \right) \times (Y_{IB} - Y_{IR}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Gamma_{IL} + \Gamma_{IB}}{2} \right) \times (Y_{IL} - Y_{IB}) + \left(\frac{\Gamma_{IA} + \Gamma_{IL}}{2} \right) \times (Y_{IA} - Y_{IL}) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن Γ می‌تواند هر یک از پارامترهای جریان باشد. A_s مساحت سلول حاصل از نقاط شماره IA , IB , IR , IL می‌باشد. IA شماره نقطه ابتدای ضلع i ام و IB شماره نقطه انتهای آن می‌باشد و IR , IL شماره سلول سمت چپ و راست وجه i ام است (شکل ۱).



شکل ۱: نمایش اصطلاحات بکار رفته

محاسبه شار غیر لزج یا جابجایی همواره مشکل ساز بوده، چون دارای خاصیت انتقالی است و ساده ترین روش، جداسازی مرکزی درجه دوم و به عبارتی روش میانگین است. در این روش متغیرهای بقایی بر روی وجوه با میانگین مقادیر همان متغیرها در نقاط کنترلی مجاور محاسبه می‌شوند [۹]. روش‌های مبتنی بر جداسازی مرکزی درجه دوم فاقد جمله اتلاف هستند. به همین دلیل زمانی که با جمله جابجایی به کار می‌روند نوساناتی نامیرا ایجاد می‌کنند. این نوسانات اثراتی نامطلوب بر روند همگرایی حل می‌گذارند. به همین خاطر جمله استهلاک غیر واقعی به معادلات حاکم اضافه می‌شوند تا نوسانات را حذف کنند [۱۰].

$$\frac{\partial (WA)_i}{\partial t} + Q_i(W) - D_i(W) = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (WA)_i}{\partial t} + QN_i(W) &= 0 \\ QN_i(W) &= Q_i(W) - D_i(W) \end{aligned} \quad (14)$$

در این پژوهش $D_i(W)$ بر اساس ترکیبی از دومین و چهارمین اختلاف متغیرهای W در نظر گرفته می‌شود. بخش اختلاف دوم جهت حذف نوسانات در اطراف نا پیوستگی‌ها و بخش اختلاف چهارم جهت حذف نوسانات داخل میدان است. در محدوده جریان جاهایی که حل هموار باشد (اختلاف مقادیر متغیرها زیاد نباشد) جمله اختلاف چهارم اثر می‌کند و در ناحیه‌های نزدیک گرادین‌های زیاد جمله اختلاف دوم اثر می‌کند. این خاموش و روشن شدن جملات بوسیله یک حسگر گرادین بطور مثال گرادین فشار انجام می‌شود [۴].

$$D_i(W) = \sum_{k=1}^{nedge} d_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{nedge} d_k^{(4)} \quad (15)$$

$$A_i \frac{\partial W_i}{\partial t} + QN_i (W^{n+1}) = 0 \quad (22)$$

که در آن n+1 نشان دهنده مرحله زمانی n+1 است. بنابراین مقادیر گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم و ترم استهلاکی اضافه شده با استفاده از خواص جریان در زمان جدید محاسبه می‌شوند. در این رابطه ترم مانده‌ها، متشکل از گسسته‌سازی مکانی معادلات و جمله استهلاک می‌باشد، که یک رابطه غیرخطی از متغیرهای جریان است و به همین سبب اگر معادله را برای تمام نقاط میدان بر حسب مقادیر متغیرها در زمان n+1 بنویسیم نهایتاً یک دستگاه معادلات غیر خطی به دست خواهد آمد. برای گسسته‌سازی زمانی از یک اختلاف پسر و مرتبه دوم به شکل زیر استفاده شده است:

$$A_i \left(\frac{3W_i^{n+1}}{2\Delta t_i} - \frac{4W_i^n}{2\Delta t_i} + \frac{W_i^{n-1}}{2\Delta t_i} \right) + QN_i (W^{n+1}) = 0 \quad (23)$$

بدلیل موجود نبودن مقداری برای W_i^{n+1} در گام زمانی اول، گسسته‌سازی با دقت مرتبه ۱ و از آن به بعد از دقت مرتبه ۲ انجام شده است. در این مرحله مانده غیردائم (Q_i^*) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_i^* = A_i \left(\frac{3W_i^{n+1}}{2\Delta t_i} - \frac{4W_i^n}{2\Delta t_i} + \frac{W_i^{n-1}}{2\Delta t_i} \right) + QN_i (W^{n+1}) \quad (24)$$

در هر گام زمانی هدف یافتن بردار متغیرهای بقای برای کل میدان است، به‌صورتی که برای هر نقطه از میدان $Q_i^*(W^{n+1})=0$ صادق باشد. برای حل دستگاه معادله فوق با روش تکرار، معادله دیفرانسیلی نسبت به زمان مجازی τ تعریف می‌شود که پاسخ حالت دائم آن جواب دستگاه معادله برای گام زمانی مربوطه می‌باشد.

$$A_i \frac{\partial W_i^{n+1}}{\partial \tau} + Q_i^* (W^{n+1}) = 0 \quad (25)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۵) در زمان مجازی τ می‌توان پاسخ حالت دائم آن را که در حقیقت جواب معادله (۲۳) در زمان حقیقی می‌باشد، به‌دست آورد. جهت حل این معادله از روش انتگرال‌گیری چند مرحله در زمان مجازی استفاده شده که معادله با دقت مرتبه ۱ در زمان مجازی گسسته‌سازی شده، زیرا که این گسسته‌سازی در جواب نهایی رابطه (۲۳) تاثیری ندارد.

$$A_i \frac{W_i^{n+1,m'+1} - W_i^{n+1,m'}}{\Delta \tau_i} + R_i^* (W^{n+1}) = 0 \quad (26)$$

برای حل این معادله از روش رانگ کوتای چهار مرحله ای استفاده شده است:

$$\begin{aligned} \bar{W}_i^0 &= W_i^{(n+1,m')} \\ \bar{W}_i^1 &= \bar{W}_i^0 - \frac{\alpha_1 \Delta \tau_i Q_i^* (\bar{W}_i^0)}{A_i^{n+1}}, \bar{W}_i^2 = \bar{W}_i^0 - \frac{\alpha_2 \Delta \tau_i Q_i^* (\bar{W}_i^1)}{A_i^{n+1}} \\ \bar{W}_i^3 &= \bar{W}_i^0 - \frac{\alpha_3 \Delta \tau_i Q_i^* (\bar{W}_i^2)}{A_i^{n+1}}, \bar{W}_i^4 = \bar{W}_i^0 - \frac{\alpha_4 \Delta \tau_i Q_i^* (\bar{W}_i^3)}{A_i^{n+1}} \\ \bar{W}_i^{(n+1,m'+1)} &= \bar{W}_i^4 \\ \alpha_1 &= 0.333, \alpha_2 = 0.2667, \alpha_3 = 0.555, \alpha_4 = 1.000 \end{aligned} \quad (27)$$

که m تعداد تکرارهای صریح داخلی با روش رانگ کوتا و α_1 تا α_4 ضرایب بهینه شده روش رانگ-کوتا هستند. در این صورت گام زمانی مجازی در هر نقطه از میدان با رابطه (۲۸) قابل محاسبه می‌باشد [۱۲].

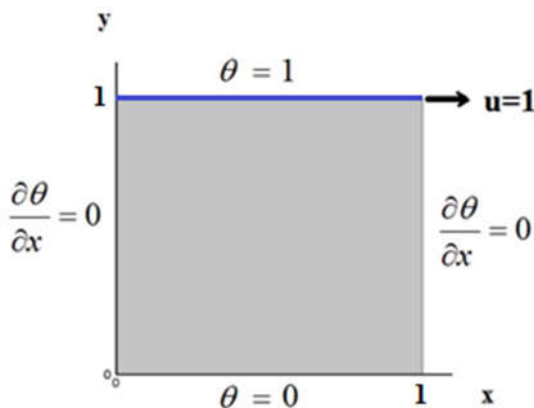
$$\Delta \tau_i = \min \left[\frac{CFL_{exp} A_i}{\sum_{k=1}^{N_{faces}} (|u \Delta S_x + v \Delta S_y + w \Delta S_z| + c \|\Delta S_k\|)}, \frac{2\Delta t_i}{3} \right] \quad (28)$$

که در این رابطه CFL_{exp} عدد کورانت مربوط به تکرارهای صریح داخلی می‌باشد. جهت بررسی همگرایی حل، معیار مانده مربوط به معادله پیوستگی در نظر گرفته شده و نرم خطا مطابق رابطه (۲۹) تعریف شده است:

$$Ave.Residual = Log \left(\sum_i^{ncell} |P_i^n - P_i^{n+1}| / \Delta t \right) \quad (29)$$

شرایط مرزی:

همانگونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود جریان داخل حفره با حرکت مرز بالایی ایجاد شده و باعث انتقال گرمای مرکب در مسئله شده است. دیوارهای سمت چپ و راست ساکن و عایق هستند. دیواره بالایی بیشترین دما را دارد و دیواره پایینی دارای کمترین دما و برابر دمای اولیه سیال داخل حفره می‌باشد.



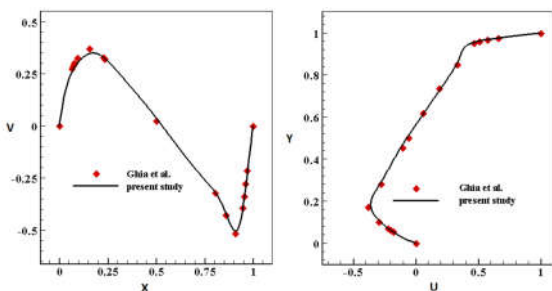
شکل ۲- نمایش شرایط مرزی حفره در این پژوهش

۳- نتایج

۳-۱- مطالعه استقلال نتایج از شبکه

جریان داخل حفره توسط حرکت صفحه بالایی و همچنین انتقال گرما بدلیل دمای بالای همین صفحه ایجاد می‌شود. ابتدا برای دستیابی به شبکه مناسب جهت حل عددی جریان در رینولدزهای مختلف مطالعه استقلال نتایج از شبکه صورت گرفته است. اطلاعات مربوط به شش شبکه مختلف که در این پژوهش استفاده شده‌اند، در جدول ۱ آمده است. نتایج برای یک جریان با رینولدز ۴۰۰ در شش شبکه مختلف بررسی شده است. نتایج بدست آمده از آنها برای مولفه افقی سرعت در خط میانی حفره در شکل ۳ نشان داده شده است، که نشانگر نزدیک بودن نتایج به هم در شبکه‌های ریز و به عبارتی مستقل بودن نتایج از اندازه شبکه است. با توجه به این موضوع در این پژوهش شبکه دوم برای حل جریان در عدد رینولدز ۴۰۰ انتخاب شد. بررسی

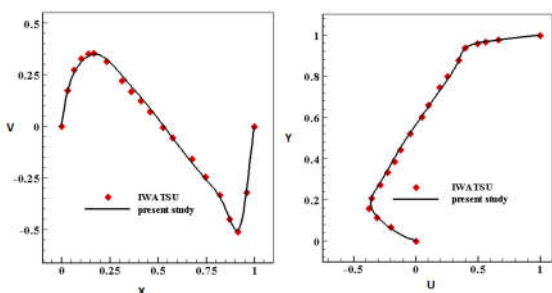
۵ باهم مقایسه شده است [۱۳]. همانطور که در شکل فوق مشهود است نتایج از همخوانی بسیار بالایی برخوردار هستند.



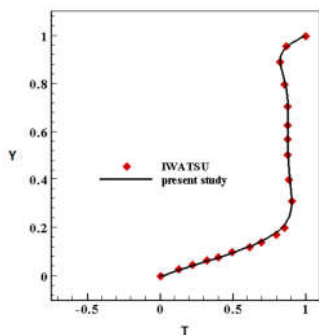
شکل ۵- نمودار سرعت U روی خط افقی میانی و نمودار سرعت V روی خط عمودی میانی در رینولدز ۱۰۰۰

۳-۲- بررسی نتایج

جهت بررسی نتایج بدست آمده از این روش عددی برای مدل سازی جریان همراه با انتقال گرما نتایج حاصل از برنامه کامپیوتری توسعه داده شده با نتایج Iwatsu مقایسه شده است [۱۴]. با توجه به شکل های ۶ و ۷ مشهود است که نتایج بدست آمده برای توزیع مولفه های سرعت و دما روی خطوط افقی و عمودی میانی حفره تطابق بسیار مطلوب و قابل قبولی با نتایج Iwatsu دارند. در شکل ۸ نیز میزان انتقال گرما در صفحه بالایی بصورت بی بعد با نتایج Iwatsu مقایسه شده و تطابق قابل قبولی نیز در تغییرات عدد ناسلت روی صفحه متحرک مشاهده می شود.

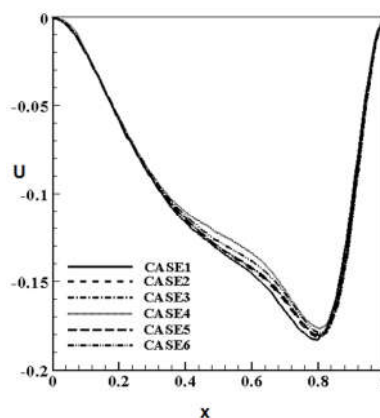


شکل ۶- نمودار سرعت U روی $y=0.5$ و نمودار سرعت V روی خط $x=0.5$ در رینولدز ۱۰۰۰ و گراش ۱۰۲



شکل ۷- نمودار دما روی خط $x=0.5$ مقایسه ای برای رینولدز ۴۰۰ و پرانتل ۰.۷۱ و گراش ۱۰۲

نتایج برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰ و ۳۰۰۰ نشان داد که نتایج شبکه های شماره ۵ و ۶ تفاوت قابل ملاحظه ای ندارند و شبکه پنجم برای رینولدزهای ۱۰۰۰ و ۳۰۰۰ انتخاب و حل جریان با رینولدزهای فوق روی شبکه پنجم انجام شد.

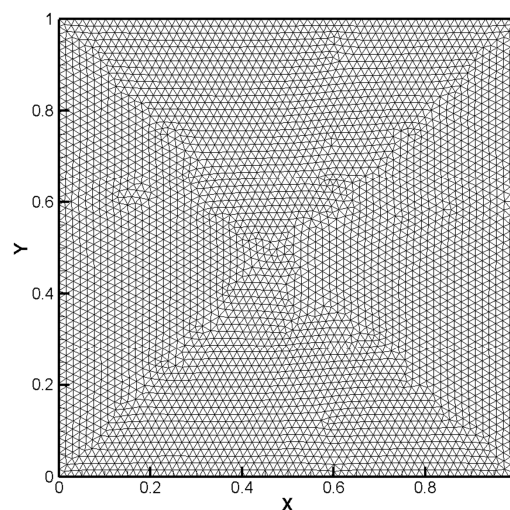


شکل ۳- نمودار مقایسه ای سرعت U روی خط افقی میانی برای رینولدز ۴۰۰ روی شبکه های مختلف

جدول ۱- مشخصات شبکه ها

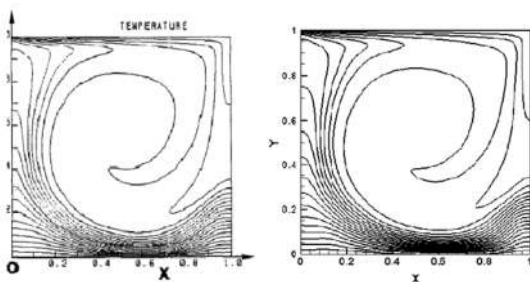
تعداد نقاط روی هر دیواره	تعداد نقاط روی دیواره ها	تعداد سلول ها	متوسط اندازه المان ها	شبکه بندی
۳۵	۱۴۰	۴۲۰۴	۰/۰۲۸۷	Case1
۶۰	۲۳۶	۱۱۸۵۴	۰/۰۱۶۹	Case2
۷۵	۳۰۰	۱۹۱۵۲	۰/۰۱۳۳	Case 3
۸۵	۳۴۰	۲۴۵۹۳	۰/۰۱۱۷	Case 4
۹۵	۳۸۰	۳۰۶۴۹	۰/۰۱۰۵	Case 5
۱۱۰	۴۴۰	۴۰۸۴۰	۰/۰۰۹۰	Case 6

شبکه محاسباتی شماره ۲ که برای جریان با عدد رینولدز ۴۰۰ انتخاب شد در شکل ۴ نشان داده شده است.

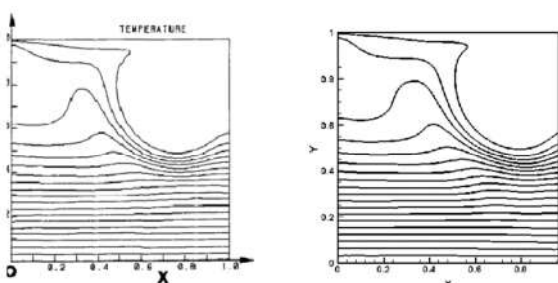


شکل ۴- الف: هندسه شبکه بندی شده ب: نمای نزدیک

نتایج جریان بدون انتقال گرما با نتایج Ghia و همکاران در شکل

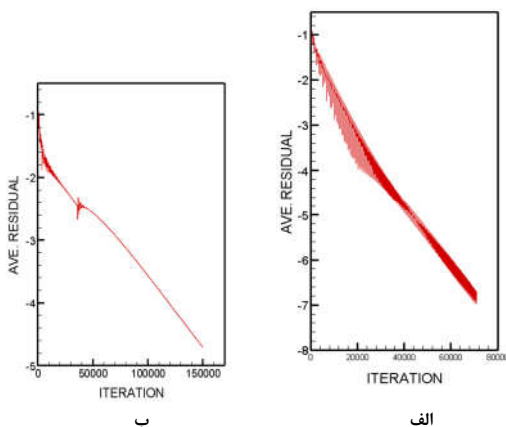


شکل ۱۱- کانتور دما رینولدز ۱۰۰۰، پرانتل ۰٫۷۱ و گراشف ۱۰^۲ (الف) پژوهش حاضر (ب) IWATSU

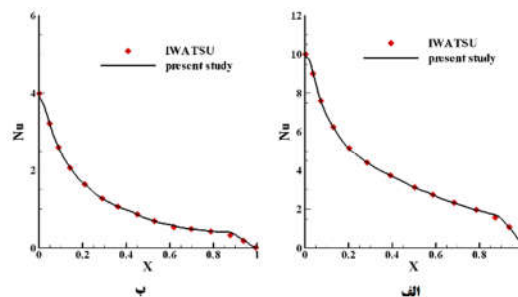


شکل ۱۲- کانتور دما رینولدز ۱۰۰۰، پرانتل ۰٫۷۱ و گراشف ۱۰^۶ (الف) پژوهش حاضر (ب) IWATSU

خطوط جریان و کانتور دما در شکل های ۹ تا ۱۲ الگوی جریان را برای اعداد رینولدز و گراشف مختلف نشان می دهد و با مقایسه نتایج می توان به نفوذ مومنوم در داخل جریان با افزایش عدد رینولدز پی برد. در جریان های انتقال گرمای آزاد عدد ریچاردسون بزرگتر از یک است. اما در جریان های انتقال گرمای اجباری یا مرکب عدد ریچاردسون کوچکتر یا مساوی یک است. در شکل ۱۳ نمودار همگرایی برای دو حالت گراشف ۱۰^۲ و ۱۰^۶ نشان داده شده است.

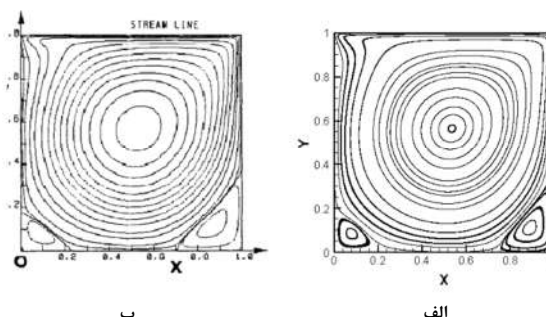


شکل ۱۳- نمودار همگرایی بر حسب تکرار در رینولدز ۴۰۰ و پرانتل ۰٫۷۱ و الف: گراشف ۱۰^۲ (انتقال گرمای اجباری) و ب: گراشف ۱۰^۶ (انتقال گرمای آزاد)

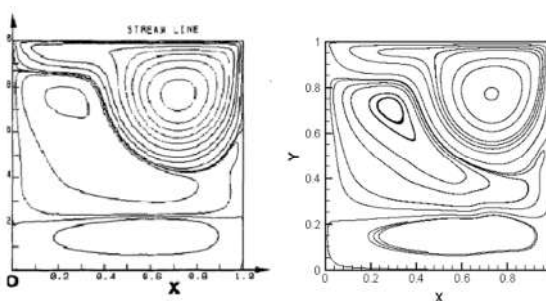


شکل ۸- تغییرات عدد ناسلت روی دیواره بالایی در رینولدز ۴۰۰ و الف) گراشف ۱۰^۲ و ب) گراشف ۱۰^۶

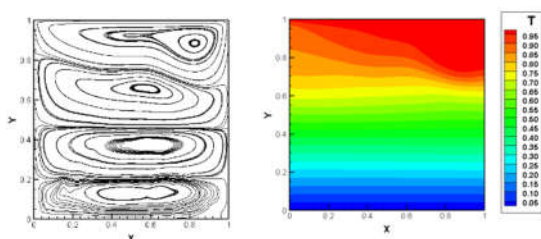
در شکلهای ۹ تا ۱۲ نتایج مربوط به کانتور دما و خطوط جریان با نتایج پژوهش Iwatsu مقایسه شده است و ملاحظه می گردد که تشابه بالایی در خطوط جریان و خطوط دما ثابت برقرار است.



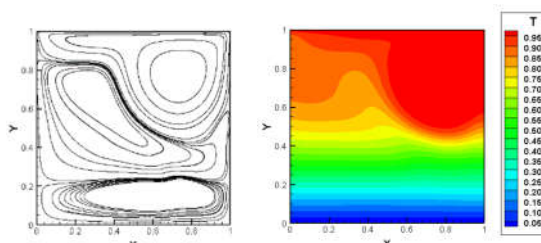
شکل ۹- خطوط جریان رینولدز ۱۰۰۰، پرانتل ۰٫۷۱ و گراشف ۱۰^۲ (الف) پژوهش حاضر (ب) IWATSU



شکل ۱۰- خطوط جریان رینولدز ۱۰۰۰، پرانتل ۰٫۷۱ و گراشف ۱۰^۶ (الف) پژوهش حاضر (ب) IWATSU

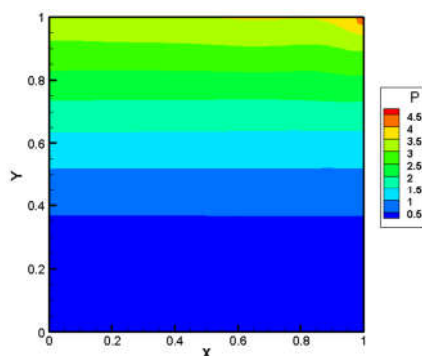


شکل ۱۶- کانتور دما و خطوط جریان در رینولدز ۴۰۰، پرانتل ۰.۷۱ و گراشف ۱۰^۶

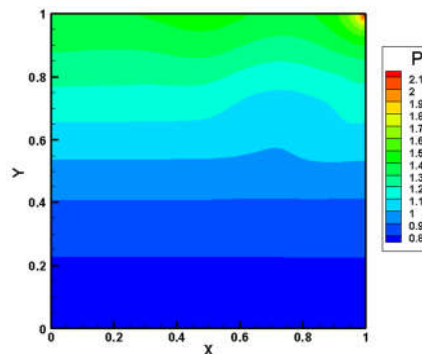


شکل ۱۷- کانتور دما و خطوط جریان در رینولدز ۱۰۰۰، پرانتل ۰.۷۱ و گراشف ۱۰^۶

در جریان جابجایی آزاد به دلیل غلبه نیروی شناوری، از پایین به بالا دما افزایش می‌یابد. همچنین سیال در تمام نقاط بجز در نزدیکی دیواره متحرک تقریباً ساکن است. لذا طبق موارد فوق این نتیجه حاصل می‌شود که فشار سیال در جریان جابجایی آزاد از پایین به بالا افزایش می‌یابد. در شکل‌های ۱۸ (جابجایی آزاد)، ۱۹ (جریان جابجایی مرکب) و ۲۰ (جابجایی اجباری)، این امر قابل مشاهده است.

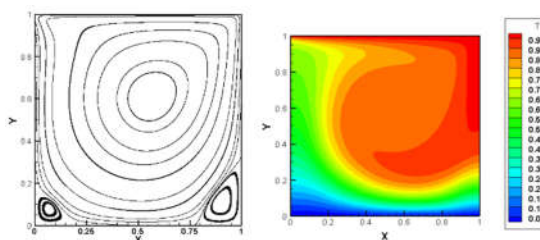


شکل ۱۸- کانتور فشار برای رینولدز ۴۰۰ و گراشف ۱۰^۶ و $Ri=6.25$

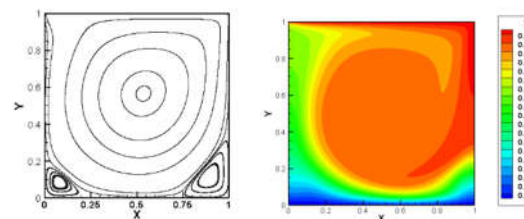


شکل ۱۹- کانتور فشار برای رینولدز ۱۰۰۰ و گراشف ۱۰^۶ و $Ri=1$

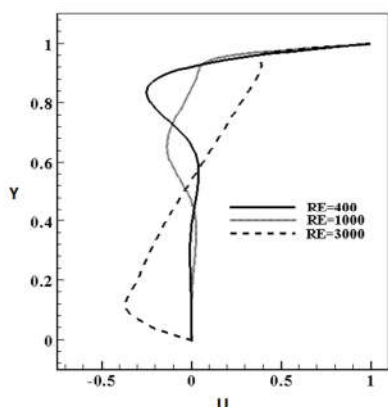
یکی دیگر از موارد مهم در جریان حفره می‌توان به اندازه‌ی گردابه‌ها در گوشه‌ها اشاره کرد. همانگونه که در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ ملاحظه می‌شود خطوط جریان نشان می‌دهد که در اثر افزایش عدد رینولدز، گردابه‌های موجود در گوشه‌های حفره تقویت شده و همچنین دامنه تحت پوشش این گردابه‌ها افزایش می‌یابد و از قدرت گردابه مرکزی کاسته می‌شود و روش عددی بکار رفته بخوبی توانسته پدیده‌های فوق را آشکار سازی نماید. از دیگر موارد مهم می‌توان به تغییر مکانیزم انتقال گرما اشاره کرد. با بررسی و مقایسه الگوی خطوط جریان در شکل‌های ۱۴ تا ۱۷ می‌توان نتیجه گرفت که در اعداد رینولدز ثابت، افزایش عدد گراشف سبب تغییر مکانیزم انتقال گرما از اجباری به آزاد می‌شود. همین امر سبب گستردگی گردابه‌های پایین حفره شده که در نهایت این گردابه‌ها به هم می‌پیوندند و نواحی جداگانه‌ای در بالا و پایین حفره ایجاد می‌کنند. همچنین با مقایسه‌ی شکل‌های مربوط به کانتور دما در رینولدزهای ۴۰۰ و ۱۰۰۰ نشان می‌دهند در اعداد رینولدز ثابت، افزایش عدد گراشف (به دلیل رابطه‌ی مستقیم با عدد ریچاردسون) نیروی گرانش افزایش می‌یابد و لایه‌های گرم سیال به دیواره بالایی نزدیک‌تر شده و سیال گرم در نزدیکی دیواره بالا متمرکز می‌شوند. با توجه به اینکه در شکل ۱۷ عدد ریچاردسون ۱ می‌شود، مکانیزم انتقال گرمای مرکب است. از یک طرف با افزایش عدد رینولدز خطوط جریان به ۳ ناحیه و بیشتر تغییر شکل داده است. همچنین با بررسی کانتور دما هم ملاحظه می‌شود که از فشردگی سیال گرم روی لایه‌ی بالایی کاسته می‌شود و در واقع حرکت دیواره بالایی اثر بیشتری از خود به جا می‌گذارد.



شکل ۱۴- کانتور دما و خطوط جریان در رینولدز ۴۰۰، پرانتل ۰.۷۱ و گراشف ۱۰^۲

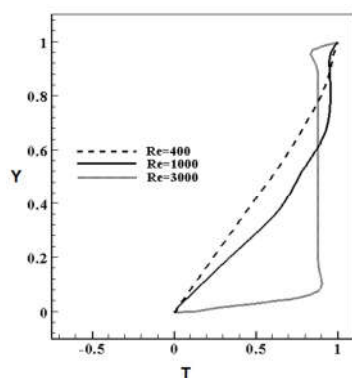


شکل ۱۵- کانتور دما و خطوط جریان در رینولدز ۱۰۰۰، پرانتل ۰.۷۱ و گراشف ۱۰^۲



شکل ۲۲- نمودار سرعت u روی خط $x=0.5$ در $Pr=0.71$ و گراشف $۱۰^۶$

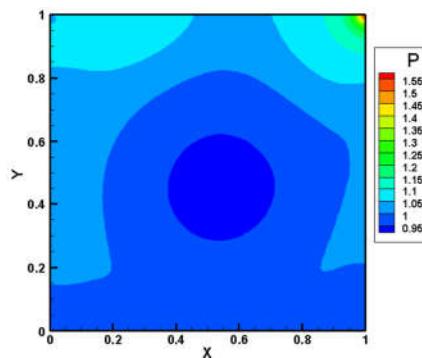
با توجه به شرایط مرزی مسئله در مکان بی بعد $y=0$ دما صفر و در مکان بی بعد $y=1$ دمای بی بعد یک می باشد. که این امر در شکل ۲۳ مشاهده می شود. در این شکل نیز با توجه به توزیع دما هر سه نوع جریان جابجایی آزاد، اجباری و مرکب قابل بررسی و تحلیل می باشند.



شکل ۲۳- نمودار سرعت T روی خط $x=0.5$ در $Pr=0.71$ ، گراشف $۱۰^۶$

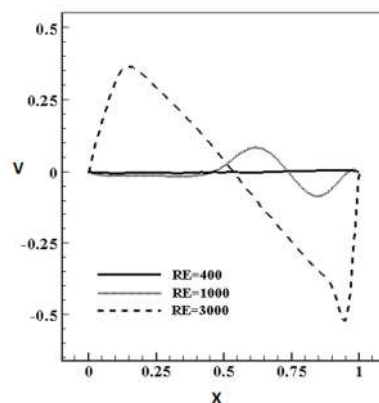
۴- نتیجه گیری

در این مقاله جریان لایه‌ای به همراه انتقال گرما روی شبکه بی سازمان و بصورت ضمنی با استفاده از روش میانگین پایدار شده با استهلاک مصنوعی جیمسون حل شده است. نتایج حاصل از پژوهش و روش عددی پیاده سازی شده همخوانی بسیار بالایی با نتایج پژوهش‌های قبلی انجام شده در مراجع معتبر دارد. با بررسی روند همگرایی جریان نشان داده شد که این روش برای محدوده‌ی جریان‌های با جابجایی اجباری دارای سرعت همگرایی قابل قبولی بوده و برای جریان‌های جابجایی آزاد سرعت و دقت همگرایی خوبی دارد. همچنین با بررسی جریان جابجایی اجباری و آزاد این نتیجه حاصل شد که به شرطی که نوع انتقال گرما ثابت باشد (اجباری یا آزاد)، تغییر عدد رینولدز در یک عدد گراشف ثابت تاثیر بسیار کمی در نتیجه دارد. در انتها می‌توان نتیجه گرفت که روش اختلاف مرکزی مبتنی بر روش جیمسون با گسسته‌سازی ضمنی در زمان، دقت مطلوبی در حل جریان تراکم ناپذیر به همراه انتقال گرما مرکب دارد و با توجه به دقت مرتبه



شکل ۲۰- کانتور فشار برای رینولدز ۳۰۰۰ و گراشف $۱۰^۶$ و $Ri=0.01$

همانگونه که در شرایط مرزی اشاره شد، سرعت در مکان بی بعد شده $x=0$ و $x=1$ برابر صفر می‌باشد و این امر در شکل ۲۱ مشاهده می‌شود. با توجه به شرایط مسئله هر سه نوع انتقال گرمای آزاد، اجباری و مرکب در نودار سرعت v برای سه عدد رینولدز ۴۰۰ ، ۱۰۰۰ و ۳۰۰۰ مشهود است. در جریان جابجایی آزاد و عدد رینولدز ۴۰۰ تقریباً مولفه‌ی عمودی سرعت در تمام نقاط روی خط افقی میانی صفر است. در عدد رینولدز ۱۰۰۰ (عدد ریچاردسون برابر ۱) حالت انتقال گرمای مرکب نه مانند حالت جابجایی آزاد این مولفه صفر است به شدت جابجایی اجباری (عدد رینولدز ۳۰۰۰ و عدد ریچاردسون ۹) تغییرات ندارد.



شکل ۲۱- نمودار سرعت v روی خط $y=0.5$ در $Pr=0.71$ و گراشف $۱۰^۶$

همانند حالت قبل در مکان $y=0$ سرعت در جهت x صفر و در مکان بی بعد شده $y=1$ سرعت بی بعد $u=1$ است و این امر در شکل ۲۲ مشاهده می‌شود. در این شکل ۳ نوع انتقال گرما اتفاق افتاده که در عدد رینولدز ۴۰۰ انتقال گرمای آزاد، در عدد رینولدز ۱۰۰۰ انتقال گرمای مرکب و در عدد رینولدز ۳۰۰۰ انتقال گرمای اجباری می‌باشد. در این نمودار نیز همانگونه که مشهود است، در عدد رینولدز ۴۰۰ جریان جز در نزدیکی دیواره متحرک تقریباً ساکن است. همچنین در عدد رینولدز ۱۰۰۰ جریان نه کاملاً ساکن و نه تغییرات سرعت آن در حد جریان جابجایی اجباری است.

a vented cavity with pulsating flow, *Computers&Fluids*, 91(0), pp. 57-67, 2014.

دو روش و ساده بودن روابط و پیاده سازی روی شبکه بی سازمان می توان در حل عددی میدان جریان حول و داخل اجسام پیچیده تر استفاده کرد. توانایی و دقت روش فوق برای شبیه سازی جریان مغشوش و نانو سیال با حضور میدان مغناطیسی با بکارگیری شبکه بی سازمان قابل بررسی می باشد.

۵- مراجع

- [1] Chorin A. J., A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. *Journal of Computational Physics*, 2, pp. 12-26, 1967.
- [2] Farmer J., Martinelli L., Jameson A., Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface, *AIAA Journal*, 32, pp. 1175-1182, 1994.
- [3] Jameson A., Schmidt W., Turkel E., Numerical solutions of the Euler equations by a finite volume method using Runge-Kutta time stepping schemes, *AIAA*, paper 81-1259, 1981.
- [4] Esfahanian V., Akbarzadeh P., The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method, *Applied Mathematics and Computation*, 206, pp. 651-661, 2008.
- [5] Liu C., Zheng X., Sung C. H., Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows, *Journal of Computational Physics*, 139, pp. 35-57, 1998.
- [6] Yuan L., Comparison of Implicit Multigrid Schemes for Three-Dimensional Incompressible Flows, *Journal of Computational Physics*, 177, pp. 134-155, 2002.
- [7] Aghaee-Shalmani Y., Hakimzadeh H., Numerical Modeling of 2-D and 3-D Flows using Artificial Compressibility Method and Collocated Mesh, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 9(5), pp. 2333-2345, 2016.
- [8] Belov A., Jameson A., Martinelli A., A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations, 43rd AIAA AeroSpace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, 1995.
- [9] Tamamidis P., Zhang G., Assanis D. N., Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows, *Journal of Computational Physics*, 124, issue 1, pp. 1-13, 1996.
- [۱۰] هاشمی م. و غرائی خسروشاهی ر. و ولی پور ا.، حل عددی جریان تراکم‌ناپذیر به همراه انتقال حرارت روی شبکه بی‌سازمان با استفاده از روش اختلاف مرکزی، پانزدهمین کنفرانس بین المللی انجمن هوا و فضای ایران، اسفند ماه ۹۴.
- [11] Mandal J. C., Lyer A. S., An upwind method for incompressible flow computations using pseudo-compressibility approach, 19th AIAA Computational Fluid Dynamics, AIAA 3541, 2009.
- [12] Melson N.D., Sanetrik M.D., Atkins H.L., Time-Accurate Navier-Stokes calculation with with multigrid acceleration. Proc. 6th Copper Mountain Conf. on multigrid methods, pp. 423-439, 1993.
- [13] Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, 48, pp. 387-411, 1982.
- [14] Iwatsu R., Hyun J. M., Kuwahara K., Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36(6), pp. 1601-1608, 1993.
- [۱۵] فرهنگ مهر و. و رضوی س. ا.، حل حجم محدود بر اساس مشخصه ها برای جریانهای تراکمناپذیر با انتقال گرما، مکانیک سازه ها و شاره ها، د. ۸، ش. ۳، ص ۳۱۵-۳۲۶، ۱۳۹۷.
- [16] Selimefendigil F., Öztürk H. F., Numerical investigation and dynamical analysis of mixed convection in