

کنترل ارتعاشات آشوبناک در سیستم انتقال قدرت چرخنده ساده به کمک کنترل مد لغزشی

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران، arian.ghasem71@gmail.com

قاسم آریان

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران، sj.taghvaei@shirazu.ac.ir

سجاد تقوایی*

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران، rvatankhah@shirazu.ac.ir

رامین وطن خواه

چکیده

ارتعاشات ناشی از لقی و دیگر پدیده‌های غیرخطی موجود در سیستم‌های انتقال قدرت چرخ دنده یکی از مشکلات رایج در صنایع مختلف است. هدف از مطالعه حاضر، کنترل رفتار آشوبناک سیستم انتقال قدرت جفت چرخنده ساده با انتقال پاسخ سیستم به نزدیکی یک مدار ناپایدار متناوب و در نهایت دنبال کردن آن به کمک کنترل مد لغزشی است. مدل ارائه شده در این پژوهش مدل جفت چرخنده ساده با در نظر گرفتن سختی متغیر با زمان، لقی و خطای انتقال استاتیکی می‌باشد. در ابتدا معادلات دینامیکی مدل مورد بحث استخراج می‌شود و شبیه‌سازی‌هایی برای بررسی رفتار آشوبناک آن به ازای مقادیر خاصی از پارامترهای معرف سیستم انجام می‌گیرد. در ادامه با استفاده از نگاشت پوانکاره و یک الگوریتم کارآمد مدار ناپایدار متناوبی برای سیستم آشوبناک یافت می‌شود. در نهایت برای پایداری رفتار آشوبناک حول مدار ناپایدار متناوب سیستم، یک کنترلر مد لغزشی طراحی شده و به منظور نشان دادن کارایی کنترلر طراحی شده شبیه‌سازی‌های عددی صورت می‌گیرد. شبیه‌سازی‌های عددی کارآمدی کنترل طراحی شده را نشان می‌دهند. **واژه‌های کلیدی:** آشوب، کنترل آشوب، سیستم جفت چرخنده ساده، مدار ناپایدار متناوب، کنترل مد لغزشی.

Controlling Chaotic Vibrations in Power Transmission system with Spur Gear Using Sliding Mode Control

Gh. Arian
S. Taghvaei
R. Vatankhah

School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran
School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran
School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract

Vibrations due to backlash and other nonlinear effects is a common problem in industries with power transmission systems with gear. Various dynamic models show chaotic behavior in power transmission systems that use spur gears. The aim of this study is to control the chaotic behavior in spur gear transmission system by transferring the system onto an existing unstable periodic orbit and tracking the trajectory using sliding mode control. The proposed model in this study considers a pair of spur gears with time dependent stiffness, backlash and static translation error. Firstly, the dynamic equations are extracted and the effect of model parameters on system response are indicated by simulation results. Then using Poincare' map and an efficient algorithm, the unstable periodic orbit is detected. Finally, the sliding mode controller is designed to track the desired trajectory obtained from the unstable periodic orbit. The simulation results show the performance of the proposed controller.

Keywords: Chaos, Chaos control, Spur gear system, Unstable periodic orbit, Sliding mode control.

محدود بودن پاسخ سیستم، نتوان در بلند مدت رفتار سیستم را پیش‌بینی کرد. ارتعاشات غیرخطی در سیستم چرخنده منجر به بروز اثرات مخربی نظیر ایجاد سر و صدا، افزایش استهلاک و کاهش طول عمر و کاهش دقت در سیستم‌هایی که نیاز به دقت بالایی دارند، می‌گردد. مهندسان در اغلب مواقع از این اثرات چشم‌پوشی می‌کنند و در طراحی‌های خود، ارتعاشات ناشی از تماس دندانه‌های چرخنده‌ها را در نظر نمی‌گیرند. اما زمانی که سیستم رفتار آشوبناک داشته باشد، دامنه نوسانات نامنظم و در بعضی از زمان‌ها از مقدار بیشینه‌اش در حالت ارتعاشات متناوب، بیشتر می‌شود. در نتیجه ارتعاشات شدیدتر، سر و صدا بیشتر و گوش خراش‌تر و آسیب‌های ناشی از خستگی بر دندانه‌ها و محورهای انتقال قدرت افزایش می‌یابد. تا مدت‌ها سیستم‌های انتقال توان چرخنده‌ای را با نظریه‌های ارتعاشات خطی مورد بررسی قرار می‌دادند و پارامترهای غیرخطی در نظر گرفته نمی‌شد. اوزگوان و هوسر در سال ۱۹۸۶ مجموعه‌ای از مقالات چاپ شده در این حیطه را بررسی و آنها را طبقه بندی و خلاصه‌ای از آنها را

۱- مقدمه

تاکنون مدل‌های دینامیکی متعددی برای سیستم جفت چرخنده پیشنهاد شده است. در گذشته ارتعاشات این سیستم را با نظریه ارتعاشات خطی توصیف می‌کردند اما بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های چرخنده‌ای نشان داده است که در تماس دندانه‌های چرخنده و پینیون طی روند انتقال قدرت ارتعاشات ناخواسته‌ای دیده می‌شود که ماهیت غیر خطی دارند. همچنین به ازای مقادیر مشخص از پارامترهای سیستم جفت چرخنده رفتار آشوبناک نیز دیده شده است که این موضوع به طور حتم ماهیت غیرخطی بودن رفتار سیستم را نشان می‌دهد.

آشوب به طور خلاصه به معنای رفتار نوسانی نامنظم است که به شرایط اولیه بسیار حساس می‌باشد. تغییر بسیار کوچک در شرایط اولیه، در یک سیستم آشوبناک، منجر به تغییرات بسیاری در پاسخ سیستم خواهد شد. این رفتار نامنظم منجر شده است تا با وجود

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: sj.taghvaei@shirazu.ac.ir

طی مقاله‌ای به چاپ رساندند [۱].

پس از آن ارزیابی‌های دقیق و آزمایشات متعدد بر روی پاسخ دینامیکی این سیستم‌ها نشان داد که در ارتعاشات سیستم‌های چرخنده‌ای باید نظریه ارتعاشات غیرخطی در نظر گرفته شود [۲-۶]. در نظر گرفتن سیستم چرخنده‌ای با لقی، خطای انتقال و سختی متغیر با زمان، یک سیستم ارتعاشی غیرخطی را به دست می‌دهد که ممکن است در پاسخ این سیستم ارتعاشاتی منظم یا حرکت غیر متناوب و یا حتی آشوب وجود داشته باشد. مقالات بسیار متعددی در حیطه مدل‌سازی این سیستم‌ها وجود دارد. [۲-۱۸]. وانگ مطالعه‌ای را بر روی جفت چرخنده با در نظر گرفتن اصطکاک، لقی و سختی درگیری متغیر با زمان انجام داد و با استفاده از حل عددی، دوشاخگی، آشوب و بزرگترین نمای لیاپانوف را برای سیستم به دست آورد و مقدار پارامترهای بحرانی را تعیین کرد [۷].

چانگ ژیان به همراه چن و چانگ یک سری تحقیقات در مورد دوشاخگی و آشوبناک شدن سیستم چرخنده و یاتاقان با در نظر گرفتن میراکننده غیرخطی انجام دادند [۸-۱۰]. چانگ ژیان رفتار سیستم دینامیکی چرخنده-یاتاقان را با وجود میراکننده فشار-لایه‌ای ترکیبی با نیروی به شدت غیرخطی لایه‌ی روغن و نیروی درگیری چرخنده‌ها، مورد مطالعه قرار داد [۱۱]. او همچنین اثر میراکننده غیرخطی بر سیستم چرخنده مخروطی را مورد مطالعه قرار داد و مانند تحقیقات قبلی مسیر آشوبناک شدن را بررسی کرد [۱۲]. وجود نواقص ریز در دندانه چرخنده و مدل‌سازی آن در سیستم دینامیکی چرخنده توسط ما و چن انجام گرفت [۱۳]. مدلی که آنها برای این کار مورد استفاده قرار دادند، مدل چهار درجه آزادی جفت چرخنده با محور و یاتاقان انعطاف‌پذیر با سختی متغیر با زمان، لقی و خطای انتقال استاتیکی بود. فرشی‌دیان‌فر و ثقفی با استفاده از روش تحلیلی ملنیکوف امکان بروز دوشاخگی هموکلینیک جهانی و آشوبناک شدن سیستم جفت چرخنده را مورد بررسی قرار دادند [۱۴-۱۵]. آنها با روش ملنیکوف مقدار آستانه پارامترهای کنترلی را برای شروع رفتار آشوبناک بدست آوردند. آنها همچنین در طی مقاله‌ای دیگر به شناسایی و کنترل سیستم جفت چرخنده پرداختند [۱۶]. تاثیرات اختلال تصادفی یک تحریک فرکانس پایین ناشی از نوسانات گشتاور، نسبت میرایی چرخنده، لقی چرخنده، فرکانس درگیری و سختی درگیری، بر روی یک سیستم جفت چرخنده با درجه آزادی سه، توسط وانگ و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفت [۱۷]. ژو و همکارانش اثر تحریکات داخلی و خارجی را بر سیستم چرخنده ساده-محور-یاتاقان هشت درجه آزادی مورد مطالعه قرار دادند [۱۸].

روش‌های بسیاری برای یافتن مدارهای ناپایدار متناوب وجود دارد [۱۹-۲۴]. یو و ژیا طی مقاله‌ای با استفاده از یک الگوریتم بر پایه‌ی مد لغزشی به یافتن مدارهای ناپایدار متناوب سیستم آشوبناک چن دست زدند [۱۹]. دامالا و همکارانش با استفاده از سری زمانی حاصل از آزمایشات یک سیستم مکانیکی و روش تکرار، مدارهای ناپایدار این سیستم آشوبناک را یافتند [۲۰]. ارتباط دادن دینامیک گسسته-زمان و پیوسته-زمان در یک سیستم آشوبناک و استفاده از آن برای یافتن مدارهای ناپایدار متناوب توسط پینکل و شیمیلیچر انجام گرفت [۲۱]. بو و همکارانش الگوریتمی موثر بر پایه روش تکرار برای پیدا کردن مدار ناپایدار متناوب بدست آوردند و از این روش برای یافتن مدارهای

ناپایدار متناوب نگاشت هنون استفاده کردند [۲۲]. سایکی با استفاده از روش عددی و بازنگری الگوریتم نیوتن-رافسون-مس تکنیک جدیدی را برای یافتن مدارهای ناپایدار متناوب ارائه و آن را بر روی مدل لورنز پیاده کرد [۲۳].

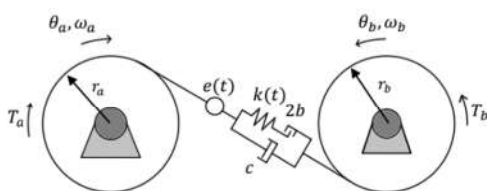
با ظهور آشوب، پژوهش‌های گسترده‌ای پیرامون کنترل این پدیده صورت گرفته است [۲۵-۳۲]. نزل و ناتشه با استفاده از کنترل مد لغزشی به کنترل سیستم چوا و لورنز پرداختند [۲۵]. هوانگ و همکارانش برای سیستم‌های غیرخطی با عدم قطعیت به طراحی کنترل تطبیقی دست زدند [۲۶]. پای با استفاده از کنترل مود لغزشی به کنترل سیستم آشوبناک با عدم قطعیت و ورودی غیرخطی دست زد [۲۷]. تقوایی و وطن‌خواه برای مدل دو پای منفعل مدارهای ناپایدار متناوب را یافته و رفتار آشوبناک سیستم را کنترل کردند [۳۰]. سونگ و همکارانش برای یک سیستم مکانیکی با استفاده از کنترل تطبیقی مد لغزشی به همگام‌سازی و پایدارسازی این سیستم پرداختند [۳۲]. اعمال الگوریتم‌های کنترل ارتعاشات چرخنده علاوه بر افزایش طول عمر چرخنده باعث کاهش سر و صدای ناخواسته در محیط می‌گردد [۳۳].

نوآوری این مقاله در واقع استفاده از روش کنترل مود لغزشی جهت کنترل ارتعاشات آشوبناک چرخنده غیرخطی است. مدل‌سازی دینامیکی این ارتعاشات پیش از این انجام شده و در درجات آزادی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است اما تا کنون کنترل غیرخطی ناظر به رفتار آشوبناک بر این سیستم اعمال نشده است.

در این مقاله در ابتدا و در بخش ۲ به مدل‌سازی سیستم جفت چرخنده با لقی، سختی متغیر با زمان و خطای انتقال استاتیکی و استخراج معادلات دیفرانسیل برای آن می‌پردازیم. در بخش ۳ با استفاده از یک الگوریتم کارآمد [۲۲] مدارهای ناپایدار متناوب را برای سیستم آشوبناک چرخنده با مدل استخراج شده در بخش ۲ به دست می‌آیند. در بخش ۴ به طراحی کنترل مد لغزشی به منظور حذف ارتعاشات آشوبناک و انتقال آن بر روی مدار ناپایدار متناوب و همچنین ارائه نتایج شبیه‌سازی سیستم کنترلی حلقه بسته خواهیم پرداخت. و در انتها و در آخرین بخش مقاله نیز نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲- مدل‌سازی سیستم جفت چرخنده

در این بخش یک مدل برای سیستم جفت چرخنده ارائه و معادلات حاکم بر آن استخراج می‌شود. مدل ارتعاشی یک چرخنده در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- مدل‌سازی سیستم جفت چرخنده و درگیری بین آنها

یک سیستم چرخ دنده‌ای عموماً توسط دو دیسک که بیانگر اینرسی دو چرخ دنده می‌باشند، مدل می‌شود. یک المان میراکننده و

گشتاور ورودی را می‌توان به صورت تابعی نوسانی با فرکانس

تحریک ω_p به صورت زیر نوشت:

$$k(t) = k \left(t + \frac{\gamma\pi}{\omega_k} \right) = k_m + \sum_{r=1}^{\infty} (k_r \cos(r\omega_k t + \phi_{kr})) \quad (6)$$

$$T_a(t) = T_{ma} + \sum_{r=1}^{\infty} (T_{pr} \cos(r\omega_p t + \phi_{pr})) \quad (7)$$

معادله حاکم بر دینامیک سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + c \frac{d \bar{x}}{dt} + k(t) f_h(\bar{x}) = \bar{F}_m + \bar{F}_e(t) + \bar{F}_p(t) \quad (8)$$

که برای آن داریم:

$$m = \frac{I_b I_a}{I_b r_a^2 + I_a r_b^2}, \bar{F}_e(t) = -m \frac{d^2 e(t)}{dt^2}, \bar{F}_m = m \left(\frac{T_{ma} r_a}{I_a} + \frac{T_{mb} r_b}{I_b} \right)$$

در ادامه از F_p که مربوط به نوسانات گشتاور ورودی است، صرف

نظر می‌کنیم. معادله بی بعد سیستم با تعریف پارامترهای زیر قابل بیان است:

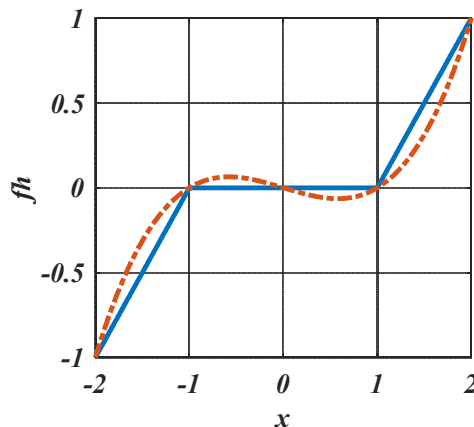
$$x = \frac{\bar{x}}{b}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_m}{m}}, \tau = \omega_n t, \tilde{\mu} = \frac{c}{2m\omega_n}, \tilde{k}_{pr} = \frac{k_r}{2m\omega_n^2}, \Omega_k = \frac{\omega_k}{\omega_n}, \Omega_e = \frac{\omega_e}{\omega_n}, \tilde{F}_m = \frac{F_m}{bk_m}, \tilde{F}_{er} = \frac{F_{er}}{b}$$

تابع پس زنی پس از بی‌بعد سازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_h(x) = \begin{cases} x - (1 - \alpha) & 1 < x \\ \alpha x & -1 \leq x \leq 1 \\ x + (1 - \alpha) & x < -1 \end{cases} \quad (9)$$

که با در نظر گرفتن α برابر صفر می‌توان آن را با یک تابع درجه ۳

به صورت $f_h(x) = -0.1667x + 0.1667x^3$ تقریب زد (شکل ۲) [۱۴].



شکل ۲- تابع لقی و تابع درجه ۳ تقریب زده شده با آن [۱۴]

در نهایت معادله بی بعد شده به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\tilde{\mu} \frac{dx}{dt} + \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{k}_{pr} \cos(r\Omega_k \tau + \phi_{kr}) \right) \times (-0.1667x + 0.1667x^3) = \tilde{F}_m + \sum_{r=1}^{\infty} (r\Omega_e)^2 \tilde{F}_{er} \cos(r\Omega_e \tau + \phi_{er}) \quad (10)$$

شکل ۴ ترسیمه صفحه فاز را برای سیستم به صورت عددی با

شرط اولیه (۰/۴، ۱) در حالت آشوبناک نشان می‌دهد. در مطالعه حاضر، برای شبیه‌سازی‌های عددی فقط از هارمونیک اول پارامترهای

یک فنر نیز به منظور بیان درگیری دو چرخنده ارائه می‌شود. در این

$$I_a \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} + c \left(r_a \frac{d\theta_a}{dt} - r_b \frac{d\theta_b}{dt} - \frac{de}{dt} \right) r_a + r_a k(t) f_h(r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t)) = T_a \quad (1)$$

$$I_b \frac{d^2 \theta_b}{dt^2} + c \left(r_a \frac{d\theta_a}{dt} - r_b \frac{d\theta_b}{dt} - \frac{de}{dt} \right) r_b + r_b k(t) f_h(r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t)) = -T_b \quad (2)$$

مدل چرخنده های a و b با شعاع های r_a و r_b معرفی می‌شوند. I_a و I_b

بیانگر ممان اینرسی دو چرخنده، c و $k(t)$ سختی درگیری و ضریب

میرایی معادل بین جفت چرخنده درگیر هستند. گشتاور های اعمالی

بر چرخنده‌ها، T_a و T_b می‌باشند. تابع پس زنی f_h نیز برای بیان لقی و

همچنین جایابی $e(t)$ به منظور ارائه خطای انتقال استاتیکی سیستم،

تعریف می‌شوند. با توجه به فرضیات فوق معادله حرکت سیستم

چرخنده‌ای به صورت معادلات (۱) و (۲) استخراج می‌شوند.

جفت چرخنده‌ها ملزم به داشتن مقداری لقی هستند که به

منظور روغن کاری بهتر و کاهش بر هم کنش طراحی می‌شوند.

همچنین خطاهای نصب و سایش نیز از عوامل ایجاد این لقی می‌باشند.

لذا تابع پس زنی f_h ، برای بیان لقی جفت چرخنده به صورت یک

تابع خطی تکه‌ای تعریف می‌شود [۱۴].

$$f_h = \begin{cases} r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t) - (1 - \alpha)b & b < r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t) \\ \alpha(r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t)) & -b \leq (r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t)) \leq b \\ r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t) + (1 - \alpha)b & b < -(r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t)) \end{cases} \quad (3)$$

با تعریف متغیر جدید $\bar{x} = r_a \theta_a - r_b \theta_b - e(t)$ که جایابی

نسبی روی خط درگیری و بیانگر خطای انتقال سیستم است، معادله

بالا به صورت معادله زیر ساده می‌شود:

$$f_h(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x} - (1 - \alpha)b & b < \bar{x} \\ \alpha \bar{x} & -b \leq \bar{x} \leq b \\ \bar{x} + (1 - \alpha)b & \bar{x} < -b \end{cases} \quad (4)$$

در روابط (۳) و (۴)، مقدار α تعیین‌کننده تابعیت غیرخطی

پس‌زنی f_h است، به ترتیبی که با تنظیم این مقدار، شکل تابعیت غیرخطی تنظیم می‌شود.

خطای انتقال استاتیکی $e(t)$ ، به عنوان یکی از پارامترهای موثر در

ارتعاشات سیستم‌های چرخنده‌ای مطرح می‌شود. خطای انتقال

استاتیکی به دلیل خطاهای ساخت و تغییر شکل دندانه‌ها از فرم

اینولوت سالم یکی از مهمترین منابع تولید ارتعاش در چرخنده‌ها

است. در مدل‌سازی‌های انجام گرفته، با توجه به تغییر متناوب جفت

دندانه‌های درگیر در طول سیکل تماس، خطای انتقال به صورت یک

تحریک جایابی متناوب در نظر گرفته می‌شود. خطای انتقال

استاتیکی تابعی از فرکانس درگیری خواهد بود و به صورت زیر قابل

بیان است [۱۴]:

$$e(t) = e \left(t + \frac{2\pi}{\omega_e} \right) = \sum_{r=1}^{\infty} (e_r \cos(r\omega_e t + \phi_{er})) \quad (5)$$

که ω_e فرکانس درگیری و از رابطه $\omega_e = n_b \omega_b = n_a \omega_a$ بدست

می‌آید، ω_a و ω_b سرعت زاویه‌ای چرخنده‌ها می‌باشند. سختی

چرخنده‌ها نیز به صورت تابعی متناوب که وابسته به تعداد و موقعیت

دندانه‌ها در هنگام درگیری است، بیان می‌شود. از این رو سختی

متناوب و متغیر با زمان و فرکانس درگیری است. با استفاده از بسط

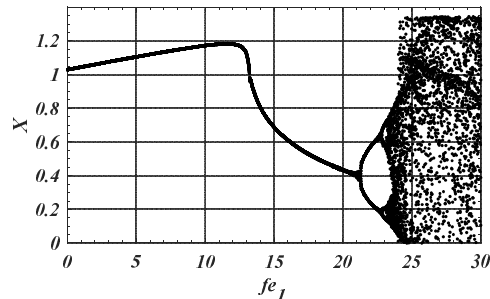
فوریه معادله سختی به صورت زیر قابل بیان است [۱۴]:

متغیر با زمان استفاده شده است. سایر پارامترها به صورت زیر مقاردهی می‌شوند.

$$\bar{\mu} = 0.7, \bar{k}_{pr} = 0.1, \Omega_k = \Omega_e = 0.7, \bar{F}_m = 0.01, \bar{F}_{er} = 0.28$$

۳- نمودار دوشاخگی و یافتن مدار ناپایدار متناوب

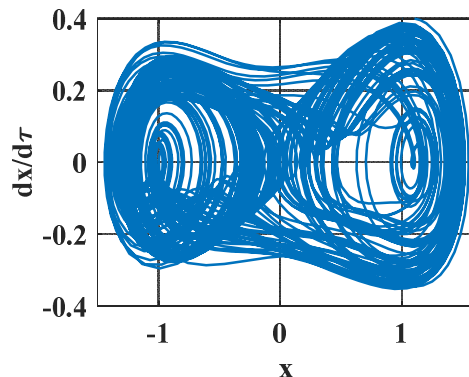
یکی از مهمترین ابزارهای بررسی روند آشوبناک شدن سیستم، استفاده از نمودار دو شاخگی بر حسب یک پارامتر قابل تغییر است. در اینجا نمودار دوشاخگی مدل دینامیکی بر حسب پارامتر F_{er} رسم شده است. بروز دوشاخگی در این مدل از نوع جهانی است و بر اثر ایجاد مدارهای هتروکلینیک و هموکلینیک روی می‌دهد [۱۴]. نمودار مستخرج شده با نمودار ارائه شده در [۱۴] تطابق کامل داشته که بیان کننده صحت معادلات و شبیه‌سازی‌های انجام شده است.



شکل ۳- نمودار دوشاخگی سیستم بر حسب پارامتر F_{er}

روندی که برای پیدا کردن مدارهای ناپایدار متناوب سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد، مطابق با الگوریتم معرفی شده در [۲۲] می‌باشد. طبق روش آمده در [۲۲]، برای پیدا کردن مدار ناپایدار سیستم گسسته‌ای با بعد n به صورت $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}^p(\mathbf{x}_k) + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^p(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k)$ که در اینجا بیان کننده نگاشت پوانکاره برای سیستم مورد نظر است، از رابطه تکرار شونده زیر استفاده می‌کنیم [۲۲]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}^p(\mathbf{x}_k) + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^p(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k) \quad (11)$$



شکل ۴- ترسیم فاز برای سیستم جفت چرخنده در گیردر حالت وجود آشوب

در واقع یک مدار ناپایدار متناوب از تناوب p یکی از حل‌های معادله $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k = 0$ است که در آن $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}_k)$ بیان کننده p مرتبه تکرار نگاشت بیان شده است. در رابطه بیان شده زمانی که شود یک

مدار ناپایدار متناوب با تناوب p را یافته‌ایم. ماتریس \mathbf{Q} در رابطه فوق به صورت زیر قابل محاسبه است [۲۲]:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{cI} - \mathbf{J}(\mathbf{x}))(\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{I})^{-1} \quad (12)$$

که در آن $\mathbf{c} \in (-1, 1)$ یک ثابت و $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}^p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ماتریس ژاکوبی است که در این مقاله به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۲]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = \prod_{m=0}^{p-1} \mathbf{J}_m \quad (13)$$

که در اینجا \mathbf{x}_0 یک نقطه شروع برای تکرار است و $\mathbf{J}_m = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_m)}{\partial \mathbf{x}}$ است که در آن $\mathbf{x}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{m-1})$ و خواهد بود. با توجه به روش گفته شده ماتریس ژاکوبی در هر مرحله تغییر خواهد کرد. برای سیستم مورد بحث الگوریتم را را برای یافتن یک مدار ناپایدار متناوب از تناوب یک به ازای مقدار اولیه $(0.9/0)$ و نگاشت پوانکاره با سطح قطع $\mathbf{x}_2 = 0$ پیاده سازی شد. مقدار $\mathbf{x}_p = (0.42932502061, 0)$ برای سیستم آشوبناک بدست آمده است.

۴- کنترل رفتار آشوبناک سیستم به کمک کنترل کننده مد لغزشی

یکی از خصوصیات مهم کنترل مد لغزشی، مقاوم بودن آن در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات است [۲۶]. با توجه به این ویژگی و همچنین تطابق مدل دینامیکی موجود با فرمتی که در آن کنترل مود لغزشی برای مدل قابل اثبات پایداری باشد، از این کنترلر بهره گرفته شد. بر این اساس برای سیستم چرخنده با پارامترهای متغیر با زمان، این پارامترها به صورت عدم قطعیت‌هایی با دامنه محدود در نظر گرفته خواهند شد و در این حالت برای سیستم مورد بحث طراحی کنترلر مد لغزشی انجام خواهد شد.

رابطه (۱۰) بیان کننده معادلات دیفرانسیل سیستم چرخنده ساده بدون حضور ورودی کنترلی است. معادلات حاکم بر سیستم در فضای حالت برای سیستم کنترلی انتقال قدرت جفت چرخنده ساده با در نظر گرفتن سیگنال کنترلی u به عنوان یک گشتاور ورودی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\bar{\mu}x_2 - \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \bar{k}_{pr} \cos(r\Omega_k\tau + \phi_{kr})\right) \times \\ &\times (-0.1667x_1 + 0.1667x_1^3) + \bar{F}_m + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} (r\Omega_e)^2 \bar{F}_{er} \cos(r\Omega_e\tau + \phi_{er}) + u \end{aligned} \quad (14)$$

در این بخش هدف کنترلی این است که رفتار آشوبناک سیستم حذف و به رفتاری متناوب با انتقال سیستم به مدار ناپایدار متناوب، تبدیل شود. به این منظور سیستم عمومی کنترلی غیر خطی از مرتبه n با عدم قطعیت زیر را در نظر بگیرید که در آن $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]^T = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_1^{(n-1)}]^T \in \mathbf{R}^n$ می‌باشد [۲۶].

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u + \mathbf{w} \quad (15)$$

همچنین $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ اغتشاش ورودی به سیستم و $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_0(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ و $\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ می‌باشد. \mathbf{f}_0 و \mathbf{b}_0

منظور کنترل سیستم با معادلات (۱۴) استفاده خواهد شد.

برای سیستم (۱۴) خطا به صورت $e_1 = x_1 - x_{1d}$ و $e_2 = x_2 - x_{2d}$ تعریف می‌شود، که در آن x_{1d} و x_{2d} حالات مدار ناپایدار متناوب خواهد بود. مطابق با (۱۳) سطح لغزشی به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$s = e_2 + \lambda e_1 \quad (23)$$

برای سیستم (۱۴) عبارت $2 \sum_{r=1}^{\infty} \bar{k}_{pr} \cos(r\Omega_k \tau + \phi_{kr}) \times (-0.1667x_1 + 0.1667x_1^3)$ بیان کننده نوسانات سختی متغیر با زمان حول مقدار متوسط سختی است که بر همان مقدار تقسیم شده است و همچنین عبارت مربوط به خطای انتقال استاتیکی $\sum_{r=1}^{\infty} (r\Omega_e)^2 \bar{F}_{er} \cos(r\Omega_e \tau + \phi_{er})$ می‌باشد که می‌توان آن را به صورت اغتشاش وارده به سیستم در نظر گرفت. در اینجا این دو عبارت به عنوان تابع متغیر Δf و معرفی شده در سیستم (۱۵) در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین ورودی کنترلی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$u = -(-2\bar{\mu}x_2 - (-0.1667x_1 + 0.1667x_1^3) + \bar{F}_m) + \dot{x}_{2d} - \lambda e_2 - \beta \text{sgn}(s) \quad (24)$$

اثبات پایداری سطح s و کنترل طراحی شده با استفاده از معیار پایداری لیاپانوف به صورت زیر است:

تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (25)$$

با مشتق‌گیری از این تابع خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} = s\dot{s} = s(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} + \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d})) = \\ = s \left(-2\bar{\mu}x_2 - \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \bar{k}_{pr} \cos(r\Omega_k \tau + \phi_{kr}) \right) \times \right. \\ \left. \times (-0.1667x_1 + 0.1667x_1^3) + \bar{F}_m + \sum_{r=1}^{\infty} (r\Omega_e)^2 \bar{F}_{er} \cos(r\Omega_e \tau + \phi_{er}) + u - \dot{x}_{2d} + \lambda e_2 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری u از رابطه (۲۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} = s \left(\left(2 \sum_{r=1}^{\infty} \bar{k}_{pr} \cos(r\Omega_k \tau + \phi_{kr}) \right) \times \right. \\ \left. \times (-0.1667x_1 + 0.1667x_1^3) + \sum_{r=1}^{\infty} (r\Omega_e)^2 \bar{F}_{er} \cos(r\Omega_e \tau + \phi_{er}) \right) - \beta |s| \end{aligned} \quad (27)$$

با توجه به نحوه انتخاب β در رابطه (۲۲) $\dot{V} < 0$ خواهد شد و براساس معیار پایداری لیاپانوف s به سمت صفر خواهد رفت و به دنبال آن خطا نیز صفر خواهد شد و در همانجا خواهد ماند.

۵- نتایج شبیه سازی

سیستم بدون کنترل با رفتار آشوبناک و سیستم کنترلی حلقه- بسته به صورت کامپیوتری شبیه‌سازی شده و نتایج شبیه‌سازی عددی برای این دو سیستم رسم شده در شکل ۶ با در نظر گرفتن $\lambda = 0.1$ و $\beta = 1$ رسم شده است. این مقادیر متناسب با $\zeta(x) = 0.4267$ و $\xi = 0.7$ و متناسب با رابطه (۲۲) حاصل شده است. شکل ۵ مقدار تغییرات $\|f(x)\|$ برای سیستم آشوبناک شکل ۴ را نشان می‌دهد. البته در این شبیه‌سازی‌ها برای جلوگیری از بروز پدیده چترینگ به جای استفاده از تابع علامت در سیگنال کنترلی به دست آمده از تابع اشباع

قسمت نامی توابع f و h هستند. با فرض تعریف x_d به عنوان مقدار مطلوب، بردار خطا به صورت $e = x - x_d$ تعریف می‌شود. هدف در اینجا رساندن $e \rightarrow 0$ است. اولین مرحله برای طراحی کنترل مد لغزشی تعریف یک سطح لغزش است. سطح لغزش زیر را در نظر بگیرید [۲۶]:

$$s = c^T e \quad (16)$$

که برای آن $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ می‌باشد. در صورتی که یک قانون کنترلی مناسب وجود داشته باشد، مد لغزشی در زمان محدود قابل دسترسی خواهد بود. دینامیک خطا در مد لغزشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$c_n e_1^{(n-1)} + c_{n-1} e_1^{(n-2)} + \dots + c_1 e_1 = 0 \quad (17)$$

ضرایب باید مثبت و به نحوی انتخاب شوند که چند جمله‌ای $\varphi(\lambda) = c_n \lambda^{n-1} + c_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + c_1$ دارای ریشه‌های سمت چپ محور موهومی در صفحه مختلط باشد. در این صورت دینامیک خطا در مد لغزشی پایدار خواهد بود. البته نحوه انتخاب c و شرایط $h(x)$ باید به گونه‌ای باشد که رابطه $\delta < 1$ $\left| (c^T b_0(x))^T c^T \Delta b(x) \right| < \delta$ برقرار باشد [۲۶]. که δ یک مقدار مثبت حقیقی است. همچنین فرض می‌کنیم که $\zeta(x) < \xi$ و $\|f(x)\| < \xi$ هستند.

حال قانون کنترلی لازم به منظور همگرایی مجانبی و تثبیت متغیر سطح لغزشی روی سطح صفر را بدست می‌آوریم. هدف طراحی ورودی کنترلی u است به نحوی است که شرط زیر برقرار باشد [۲۶].

$$s\dot{s} < 0 \quad (18)$$

این شرط برای تضمین منفی بودن مشتق زمانی تابع لیاپانوف رابطه (۲۵) در نظر گرفته شده است. اگر شرط (۱۸) برقرار باشد، مد لغزشی وجود دارد و قابل دسترسی است. ورودی کنترلی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$u = u_0 + u_s \quad (19)$$

قسمت u_0 بخش نامی سیستم (۱۵) و قسمت u_s به عدم قطعیت-ها و اغتشاشات می‌پردازد [۲۶]. برای اینکه شرط (۱۸) برقرار شود u_s و u_0 به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۶].

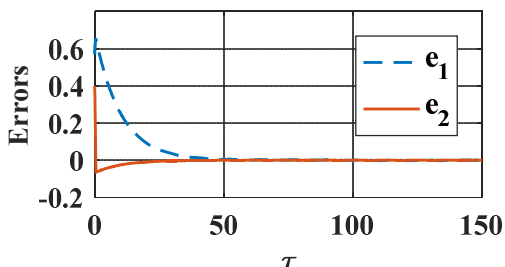
$$u_0 = -(c^T b_0(x))^{-1} (c^T f_0(x) - c^T \dot{x}_d) \quad (20)$$

$$u_s = -(c^T b_0(x))^{-1} \beta \text{sgn}(s) \quad (21)$$

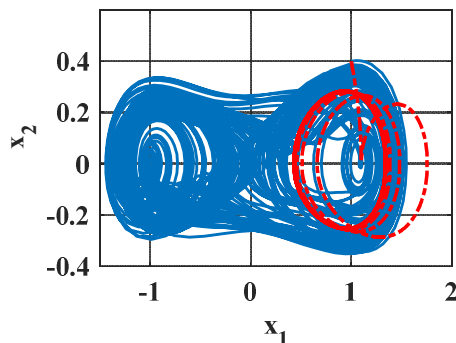
$$\beta > \frac{\|c\|(\zeta(x) + \xi) + \delta \|c^T(\dot{x}_d - f_0(x))\|}{1 - \delta} \quad (22)$$

در [۲۶] در قضیه‌ای اثبات می‌شود که برای سیستم با عدم قطعیت (۱۲)، سطح لغزش (۱۸) و قانون کنترلی (۱۹)-(۲۲)، تضمین می‌شود که در زمان محدود خطا صفر خواهد شد. جهت برقراری شرط رابطه ۲۲، کران بالا و پایین عدم قطعیت با توجه به مرجع [۲۶] باید به صورت $\xi < \|w\| < 1$ ، $\frac{1 + (c^T b_0(x_0))^{-1} c^T \Delta b(x)}{1 - \delta} > \xi$ برقرار باشند.

در این تحقیق از همین روش برای طراحی کنترلر غیرخطی به

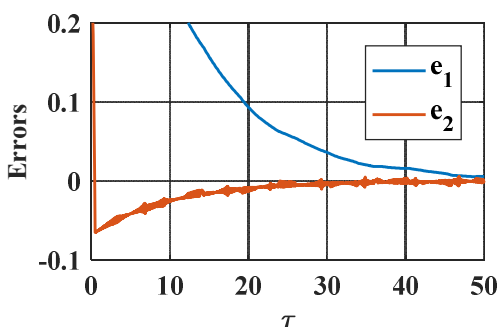


شکل ۸- تغییرات خطای متغیرهای حالت سیستم چرخنده با اعمال کنترلر مد لغزشی



شکل ۹- پاسخ سیستم بدون کنترل آشوبناک و سیستم کنترل شده در صفحه فاز

برای نشان دادن پدیده چترینگ در انتخاب تابع ناپیوسته علامت در قانون کنترلی مد لغزشی و توجیه انتخاب تابع پیوسته اشباع به جای آن شکل ۱۰ آورده شده است. همان‌گونه که مشخص است لرزش‌ها و نوسان‌های کوچکی در سیگنال خطای e_2 دیده می‌شود که ناشی از ناپیوستگی تابع علامت در قانون کنترلی می‌باشد.

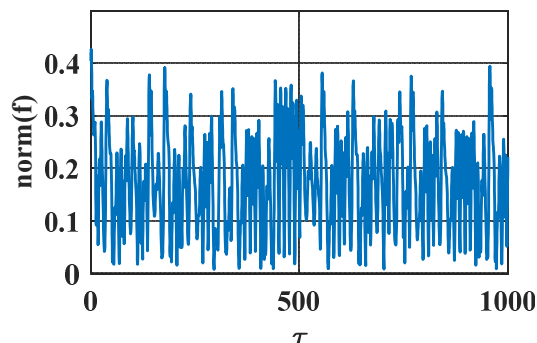


شکل ۱۰- تغییرات خطای متغیرهای حالت سیستم چرخنده با اعمال کنترلر مد لغزشی با استفاده از تابع علامت و مشاهده چترینگ

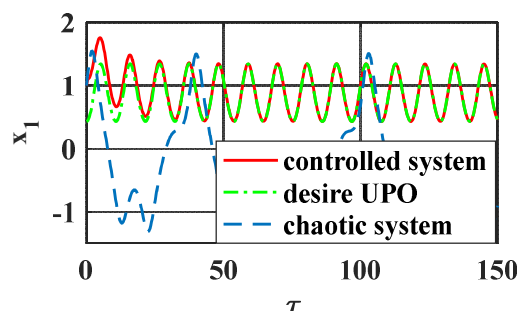
در خصوص نحوه اعمال کنترلر به سیستم واقعی باید گفت سیگنال کنترلی اعمالی به معادلات سیستم در رابطه ۱۰ به صورت بی بعد می‌باشد. اما با توجه به نحوه بی‌بعدسازی گشتاورهای ورودی به سیستم و توجه به معادلات نهایی سیستم، می‌توان دریافت که سیگنال کنترلی از جنس گشتاور است. سیگنال کنترلی را می‌توان به صورت کلی با تغییر گشتاور ورودی به سیستم اعمال کرد. از این رو اگر منبع قدرت قابل تنظیم باشد، راحت‌ترین روش تنظیم گشتاور ورودی از

به صورت زیر استفاده شده است که برای آن $\varphi = 0.005$ انتخاب شده است.

$$\text{sat}(s/\varphi) = \begin{cases} +1, & s > \varphi \\ s/\varphi, & -\varphi < s < \varphi \\ -1, & s < -\varphi \end{cases} \quad (28)$$

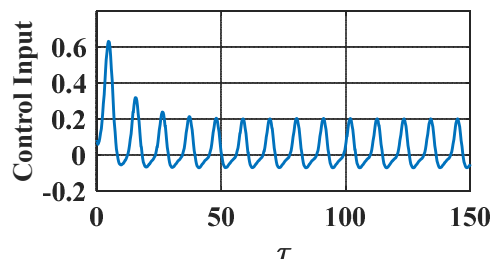


شکل ۵- $\|f(x)\|$ برای سیستم انتقال قدرت آشوبناک چرخنده ساده



شکل ۶- پاسخ سیستم کنترل نشده (پاسخ آشوبناک)، سیگنال مطلوب و پاسخ سیستم کنترلی حلقه-بسته برای سیستم جفت چرخنده

شکل ۷ الف نشان دهنده ورودی کنترلی در حالتی است که از تابع علامت استفاده شده و شکل ۷ ب نشان دهنده تغییرات ورودی کنترلی بر حسب زمان در حالت استفاده از تابع اشباع است. در شکل ۹ پاسخ سیستم آشوبناک و سیستم کنترل شده در صفحه فاز مشاهده می‌شود. همچنین در شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب سیگنال کنترلی u و خطای تعریفی برای دو متغیر حالت معادلات حاکم بر سیستم جفت چرخنده بر حسب زمان رسم شده است. همان‌گونه که از نتایج شبیه‌سازی مشخص است، مشاهده می‌گردد که کنترلر مد لغزشی در کنترل رفتار آشوبناک سیستم کارایی قابل قبولی داشته و موفق عمل کرده است.



شکل ۷- سیگنال کنترلی مد لغزشی طراحی شده برای سیستم جفت چرخنده در حالت استفاده از تابع اشباع

- [10] Chang Jian C. W. Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear suspension bifurcation and chaos. *Nonlinear analysis: Real world applications*. 11(3):1760-1774, 2010.
- [11] Chang Jian C. W. Non-linear dynamic analysis of a HSFD mounted gear-bearing system. *Nonlinear Dynamics*. 62(1):333-347, 2010.
- [12] Chang Jian C. W. Nonlinear dynamic analysis for bevel-gear system under nonlinear suspension-bifurcation and chaos. *Applied Mathematical Modelling*. 35(7):3225-3237, 2011.
- [13] Ma, R., & Chen, Y. S. (2013). Bifurcation of multi-freedom gear system with spalling defect. *Applied Mathematics & Mechanics*. 34(4):475-488.
- [14] Farshidianfar A., & Saghafi A. Global bifurcation and chaos analysis in nonlinear vibration of spur gear systems. *Nonlinear Dynamics*. 75(4):783-806, 2014.
- [15] Farshidianfar, A., & Saghafi, A. (2014). Identification and control of chaos in nonlinear gear dynamic systems using Melnikov analysis. *Physics Letters A*. 378(46):3457-3463.
- [16] Saghafi, A., & Farshidianfar A. An analytical study of controlling chaotic dynamics in a spur gear system. *Mechanism and Machine Theory*. 96:179-191, 2016.
- [17] Wang J., Wang H., & Guo L. Analysis of effect of random perturbation on dynamic response of gear transmission system. *Chaos, Solitons & Fractals*. 68:78-88, 2014.
- [18] Zhou S., Song G., Ren Z., & Wen B. Nonlinear dynamic analysis of coupled gear-rotor-bearing system with the effect of internal and external excitations. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 29(2):281-292, 2016.
- [19] Yu, X., & Xia, Y. (2000). Detecting unstable periodic orbits in Chen's chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(08), 1987-1991.
- [20] Dhamala M., Lai Y. C., & Kostelich E. J. Detecting unstable periodic orbits from transient chaotic time series. *Physical Review E*, 61(6), 6485, 2000.
- [21] Pingel D., Schmelcher P., & Diakonou F. K. Detecting unstable periodic orbits in chaotic continuous-time dynamical systems. *Physical Review E*, 64(2), 026214, 2001.
- [22] Bu S., Wang B. H., & Jiang P. Q. Detecting unstable periodic orbits in chaotic systems by using an efficient algorithm. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(1), 237-241, 2004.
- [23] Saiki Y. Numerical detection of unstable periodic orbits in continuous-time dynamical systems with chaotic behaviors. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 14(5), 615-620, 2007.
- [24] Ma H., Lin W., & Lai Y. C. Detecting unstable periodic orbits in high-dimensional chaotic systems from time series: Reconstruction meeting with adaptation. *Physical Review E*, 87(5), 050901, 2013.
- [25] Nazzari J. M., & Natsheh A. N. Chaos control using sliding-mode theory. *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(2), 695-702, 2007.
- [26] Huang Y. J., Kuo T. C., & Chang S. H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 38(2), 534-539, 2008.
- [27] Pai M. C. Chaotic sliding mode controllers for uncertain time-delay chaotic systems with input nonlinearity. *Applied Mathematics and Computation*, 271, 757-767, 2015.
- [28] Ghamati M., & Balochian S. Design of adaptive sliding mode control for synchronization Genesis-Tesi chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 75, 111-117, 2015.
- [29] Xu C., & Zhang Q. On the chaos control of the Qi system. *Journal of Engineering Mathematics*, 90(1), 67-81, 2015.
- [30] Taghvaei S., & Vatankeh R. Detection of unstable periodic orbits and chaos control in a passive biped

منبع است. اما ممکن است مدل ارائه شده قسمتی از یک سیستم انتقال قدرت پیچیده تر باشد، بنابراین با قرار دادن یک عملگر بر روی یکی از محورهای ورودی و یا خروجی می توان سیستم را کنترل کرد. این عملگر می تواند یک موتور الکتریکی و یا با توجه به بسامد بالای سیگنال کنترلی^۱، می تواند یک ضربه زن مغناطیسی در کنار یک سیستم ترمز باشد.

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش مدلی برای تماس جفت چرخنده ساده در یک سیستم انتقال قدرت ارائه شد و نشان داده شد که به ازای مقادیر خاصی از پارامترهای معرف سیستم، رفتار آشوبناک اتفاق می افتد. برای این سیستم آشوبناک، مدار ناپایدار متناوب با تناوب یک با استفاده از یک الگوریتم کارآمد به دست آمد و در نهایت برای حذف ارتعاشات آشوبناک و انتقال پاسخ سیستم به مدار ناپایدار متناوب یافت شده از کنترل مد لغزشی استفاده شد. شبیه سازی های عددی نشان داد که کنترل مد لغزشی با کارایی قابل قبولی موفق به حذف آشوب و پایدارسازی سیستم آشوبناک حول مدار ناپایدار متناوب سیستم شده است.

۷- مراجع

- [1] Özgüven H. N., & House, D. R. Mathematical models used in gear dynamics a review. *Journal of sound and vibration*. 121(3): 383-411, 1988..
- [2] Sato K., Yamamoto S., & Kawakami T. Bifurcation sets and chaotic states of a gear system subjected to harmonic excitation. *Computational Mechanics*. 7(3):173-182, 1991.
- [3] Blankenship G. W., & Kahraman A. Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity. *Journal of Sound and Vibration*. 185(5):743-765, 1995.
- [4] Kahraman A., & Blankenship G. W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters. *Journal of Applied Mechanics*. 64(1): 217-226, 1997.
- [5] Raghothama, A., & Narayanan, S. Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*. 226(3): 469-492, 1999.
- [6] Theodossiades, S., & Natsiavas S. Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash. *Journal of Sound and vibration*. 229(2):287-310, 2000.
- [7] Wang J., Zheng J., & Yang A. An analytical study of bifurcation and chaos in a spur gear pair with sliding friction. *Procedia Engineering*. 31:563-570, 2012.
- [8] Chang Jian, C. W., & Chen C. O. K. Bifurcation and chaos of a flexible rotor supported by turbulent journal bearings with non-linear suspension. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 220(6):549-561, 2006.
- [9] Chang Jian C. W., & Chang S. M. Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair with and without nonlinear suspension. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 12(2):979-989, 2011.

^۱ توجه شود که زمان در این پژوهش به صورت $\tau = \omega_n t$ بی بعد شده است.

model. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 40(4), 303-313, 2016..

[31] Yan J. J., Chen C. Y., & Tsai J. S. Hybrid chaos control of continuous unified chaotic systems using discrete rippling sliding mode control. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 22, 276-283, 2016.

[32] Song, Z., Sun, K., & Ling, S. Stabilization and synchronization for a mechanical system via adaptive sliding mode control. *ISA transactions*, 68, 353-366, 2017.

[۳۳] شیرالی، پوریا، پورسینا، مهرداد، محقق، شیدا. اصلاح پروفیل چرخنده ماریج به منظور کاهش سروصدا. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، ۴۷(۲)، ۱۳۹-۱۴۸. ۱۳۹۶.