

تحلیل ایزوژئومتریک پوسته‌های با شکل آزاد و محاسبه دقیق بردار جهتی آن با استفاده از نظریه‌های کیرشهف-لاو و رایزنر-میندلین

سجاد نیکویی
بهروز حسنی*

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

در این پژوهش با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک و بر اساس نظریه‌های کیرشهف-لاو و رایزنر-میندلین به تحلیل پوسته‌های با شکل آزاد پرداخته شده است. در روش ایزوژئومتریک برای مدل‌سازی دقیق هندسه مسئله و تقریب متغیرهای مجهول از توابع پایه یکسانی استفاده می‌شود. برای تعریف هندسه پوسته در هر دو نظریه از سطوح تولید شده با استفاده از تکنیک نربز استفاده شده است. در استفاده از نظریه رایزنر-میندلین، با بهره‌گیری از مفهوم نقاط مهار، بردار نرمال بر سطح میان پوسته به صورت دقیق محاسبه می‌شود. نظریه کیرشهف-لاو برای پوسته از سه درجه آزادی جابه‌جایی برای هر نقطه کنترلی و برای درجات آزاد چرخشی نیز از همان متغیرها بهره می‌جوید، پس نیازمند پیوستگی C^1 است. نظریه رایزنر-میندلین از سه درجه آزادی جابه‌جایی و دو درجه آزادی چرخشی مستقل برای هر نقطه کنترلی بهره می‌جوید که با پیوستگی C^0 نیاز آن تأمین می‌شود. برای بررسی دقت این روش‌ها چند مثال از پوسته‌های دارای حل تحلیلی ارائه شده و برای نشان دادن کارایی و توانایی این روش‌ها، مسئله پوسته با شکل آزاد طرح و نتایج بدست‌آمده مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک، پوسته‌های با شکل آزاد، نظریه کیرشهف-لاو، نظریه رایزنر-میندلین.

Isogeometric analysis of Free Form Shells and Accurate calculation of direction vectors using Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin theories

S. Nikoei

Department of Mechanical Engineering Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

B. Hassani

Department of Mechanical Engineering Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract

This paper presents isogeometric analysis of free form shells based on Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin theories. The isogeometric approach utilizes Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) for different order approximation of the variables defining the geometry as well as the unknown functions. The geometry is defined for both theories by the NURBS technique for surface generation. In the employed Reissner-Mindlin shell theory, by making use of the anchor point concept the normal vector is calculated accurately. The Kirchhoff-Love shell theory uses three displacements degrees of freedom per node, but the Reissner-Mindlin theory uses five degrees of freedom, three displacements and two rotations. Also, for Kirchhoff-Love shell theory $C1$ continuity of the NURBS basis functions is needed, while for the Reissner-Mindlin shell theory $C0$ continuity is sufficient. Several standard benchmark examples with available analytical solutions are presented to demonstrate the performance and accuracy of the approaches. Also, a new benchmark problem is designed to study the performance of the methods as well as the convergence behavior of the presented approach when applied to completely free form shells.

Keywords: Isogeometric Analysis; Free Form Shells; Kirchhoff-Love Theory; Reissner-Mindlin Theory.

لاو^۱ برای پوسته‌های نازک ($R/t \geq 20$) [۱] و [۲] و نظریه دیگر "نظریه رایزنر-میندلین"^۲ برای پوسته‌های ضخیم ($R/t < 20$) هستند [۳]. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که نظریه رایزنر-میندلین اثر تغییر شکل‌های برشی را در پوسته‌ها در نظر می‌گیرد که این اثر برای پوسته‌های نازک ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است. به همین دلیل برای پوسته‌های نازک استفاده از نظریه کیرشهف-لاو تجویز می‌شود. با این حال در توسعه تحلیل صفحات خمشی و پوسته‌ها با استفاده از روش اجزای محدود، نظریه رایزنر-میندلین، هم برای پوسته‌های نازک و هم برای پوسته‌های ضخیم مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. این موضوع به این دلیل است که در این نظریه چرخش و تغییر مکان به‌عنوان دو متغیر مستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند و استفاده از

۱- مقدمه

پوسته‌ها در واقع سازه‌های مهندسی بسیار پرکاربردی هستند که در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی عمران، مکانیک و هوافضا کاربردهای فراوانی دارند. برخی از مهم‌ترین کاربردهای پوسته‌ها در مهندسی مکانیک و هوافضا را می‌توان استفاده وسیع در خطوط انتقال سیالات، مخازن تحت فشار، صنایع خودرو، هواپیما و موشک بیان نمود. تمامی سازه‌هایی که به صورت سطوح انحنا دار نمایش داده می‌شوند با نام پوسته معروف هستند. دو پارامتر لازم جهت تعریف هندسی پوسته‌ها عبارتند از شکل سطح میانی و ضخامت در هر نقطه از پوسته. تحلیل پوسته‌ها ارتباط تنگاتنگی با انحنا داشته و همین امر تحلیل این سازه‌ها را به مراتب پیچیده‌تر از سایر سازه‌ها مانند تیرها و یا ورق‌ها کرده است. دو نظریه مهم و پرکاربرد در تحلیل ورق‌های خمشی و پوسته‌ها مطرح است. یکی از این نظریه‌ها معروف به "نظریه کیرشهف-

¹ Kirchhoff-Love Theory

² Reissner-Mindlin Theory

المان‌هایی با پیوستگی C^0 برای آن‌ها کافی می‌باشد. در حالی که نظریه کیرشلف-لاو نیازمند المان‌هایی با پیوستگی C^1 است. مشکلی که در استفاده از نظریه رایزنر- میندلین به خصوص برای پوسته‌های نازک وجود دارد، پدیده قفل‌شدگی برشی^۱ است که به استفاده از توابع پایه مرتبه پایین مربوط می‌شود. راه‌های مختلفی برای کاهش قفل‌شدگی برشی در روش تحلیل ایزوژئومتریک پیشنهاد شده است که در این زمینه می‌توان به پژوهش‌های آدام [۴]، بولکیر [۵] و اکثر [۶] اشاره کرد.

یکی از مهم‌ترین شاخه‌های علوم کاربردی، مکانیک کاربردی^۲ است و در این شاخه از علم، به بررسی مسائلی در حوزه علم مکانیک پرداخته می‌شود. یکی از زیر مجموعه‌های مکانیک کاربردی، مکانیک محاسباتی^۳ است. برای حل مسائل حوزه مکانیک، معمولاً با یک یا چند معادله دیفرانسیل برخورد خواهیم کرد که برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی مسئله مورد نظر، مانند تغییر مکان‌ها، تنش‌های تحت اثر بارهای وارده و یا فرکانس‌ها و شکل مودهای طبیعی، بایستی به حل این معادلات تن داد. ایده اصلی پیدایش روش ایزوژئومتریک استفاده از توابع پایه یکسان در مدل‌سازی دقیق هندسه جسم و تقریب حل است. در واقع این نکته که از توابع پایه مشابه برای تولید هندسه و تحلیل مسئله استفاده می‌شود، با نام مفهوم ایزوپارامتریک نام برده می‌شود که در روش اجزای محدود نیز کاملاً مرسوم و شناخته شده است. در روش ایزوژئومتریک و مفهوم قدیم روش ایزوپارامتریک مورد استفاده در روش اجزای محدود کلاسیک، تفاوت اساسی وجود دارد. این تفاوت را می‌توان بدین صورت بیان کرد که در روش ایزوپارامتریک روش اجزای محدود کلاسیک از توابع پایه (توابع شکل)، ابتدا برای تقریب زدن حل مسئله و سپس از آن‌ها برای تولید هندسه جسم استفاده می‌شود. اما در روش ایزوژئومتریک این فرایند کاملاً به صورت عکس اتفاق می‌افتد؛ یعنی از توابع پایه‌ای که قادر به تولید دقیق یا نسبتاً دقیق هندسه جسم هستند، به عنوان توابع تقریب‌زننده حل مسئله استفاده می‌شود.

در این پژوهش استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک [۷] برای هر دو نظریه‌ی پوسته پیشنهاد شده است. توصیف کاملی از پوسته‌ها و دو نظریه‌ی مهم حاکم بر آن‌ها توسط بیسجف [۸] در سال ۲۰۰۴ ارائه شده است. در این مرجع خلاصه‌ی کاملی از فرضیات رایج مدل‌سازی در پوسته‌ها و نیز نحوه حل به روش اجزای محدود ارائه شده است. از اولین کارها در مورد استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک برای حل پوسته‌ها بر اساس نظریه کیرشلف-لاو می‌توان به پژوهش‌های کایندل [۹] اشاره کرد که در آن از پیوستگی بالایی که روش ایزوژئومتریک فراهم می‌کند به خوبی استفاده شده است. نگوین و همکارانش نوع دیگری از اسپلاین‌ها موسوم به تی- اسپلاین را برای پوسته‌های بدون چرخش پیشنهاد دادند. بنسون و همکاران [۱۰] از فرضیات کیرشلف-لاو و اقتناع آن‌ها در نقاط گسسته‌سازی استفاده کردند. گوپال و همکارانش [۱۱] به بررسی پوسته‌های کیرشلف-لاو و گسسته‌سازی آن‌ها با استفاده از نرزه‌ها^۴ پرداختند.

بنسون و همکارانش [۱۲] تحلیل پوسته رایزنر- میندلین را در نرم‌افزار Ls-dyna اجرا کردند. اهم و یون [۱۳] تحلیل پوسته‌ای رایزنر- میندلین را با استفاده از فرمول‌بندی ایزوژئومتریک و تی- اسپلاین‌ها انجام دادند. حسینی و همکاران [۱۴] و همچنین بولکیر و همکارانش [۱۵] المان پوسته جامد ایزوژئومتریک را ارائه دادند. دارنیچ و همکاران [۱۶] نیز به تحلیل پوسته‌های رایزنر- میندلین با استفاده از فرمول‌بندی غیرخطی هندسی و روش ایزوژئومتریک برای محاسبه بردار جهتی آن پرداختند. ایشان همچنین نسخه چند وصله‌ای خود را توسعه دادند. نیکویی و حسنی [۱۷] و [۱۸] تحلیل ورق‌ها و پوسته‌های چندلایه هوشمند را با استفاده از نظریه رایزنر- میندلین و بکارگیری روش تحلیل ایزوژئومتریک پیشنهاد دادند. تحلیل و بهینه‌سازی پوسته‌ها با استفاده از روش ایزوژئومتریک توسط لی [۱۹] انجام شد. همچنین، لی و همکاران [۲۰] در کار دیگری تحلیل ایزوژئومتریک سازه‌های پوسته‌ای را بر اساس ترکیب شبکه ارائه دادند. پدیده قفل‌شدگی در ورق‌ها و پوسته‌های نازک با استفاده از روش ایزوژئومتریک و نظریه رایزنر- میندلین توسط هو و همکاران [۲۱] مورد بررسی قرار گرفت.

خصیصه مهم دیگری که در تحلیل ایزوژئومتریک پوسته‌ی رایزنر- میندلین مطرح است، بحث بردار جهتی (بردار سوئی) برای بیان درجات آزادی چرخشی است. علت مشکل در تعریف بردار جهتی و عدم امکان تعریف آنها بر روی نقاط کنترلی دو مسئله زیر است. نخست اینکه توابع مرسوم در روش ایزوژئومتریک، مانند نرزه‌ها، بر خلاف توابع شکل اجزای محدود، درونیاب نیستند [۲۲]. دوم اینکه در بیشتر مسائل پوسته‌ای، اکثر نقاط کنترلی، که در واقع نقاط گسسته‌سازی را تشکیل داده و نقش گره‌ها در اجزای محدود را بازی می‌کنند، بر روی سطح پوسته واقع نمی‌شوند و مختصات در فضای پارامتریک تعریف نمی‌شود. برای رفع این مشکل روش‌هایی برای تصویر نقاط کنترلی توسط بنسون [۲۳] و آدام و همکاران [۴] ارائه شده است.

در این مقاله سعی بر این شده است تا پوسته‌های با شکل دلخواه و آزاد^۵ با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک و با تکیه بر هر دو نظریه کیرشلف-لاو و رایزنر- میندلین و تعریف دقیق بردار نرمال میان‌پوسته با توجه به نقاط مهار مورد بحث و بررسی قرار گیرند. برای نشان دادن توانایی روش ایزوژئومتریک، مثال‌هایی که حل تحلیل آنها وجود دارد مورد بحث قرار گرفته است که دقت بالا و کارایی این روش، از لحاظ زمانی و هزینه کم محاسبات را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج بدست آمده از حل مسائل موجود، توانایی این روش در حل هر نوع پوسته با شکل دلخواه و آزاد را می‌توان انتظار داشت. این موضوع را در مثال آخر، که پوسته‌ای با شکل دلخواه است، می‌توان مشاهده نمود.

۲- بی- اسپلاین و نرزه

برای توصیف بی- اسپلاین‌ها و نرزه‌ها باید با فضای پارامتری آشنا شد که برای معرفی آن در یک‌بعد از بردار گره‌ی $\Psi = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+p+1}\}$ استفاده می‌شود، که درایه‌های آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی غیر نزولی η_i است که فضای پارامتری را به بخش‌هایی تقسیم می‌کند. حال با داشتن یک بردار گره‌ی، توابع پایه

¹ Shear Locking

² Applied Mechanic

³ Computational Mechanic

⁴ Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)

⁵ Free Form Shell

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\varphi}_0(\xi, \eta) + \frac{1}{2} h \zeta \mathbf{t}_0(\xi, \eta) \quad (6)$$

همانند رابطه (۶) بردار موقعیت را برای هندسه تغییرشکل یافته^۳ با استفاده از رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta) + \frac{1}{2} h \zeta \mathbf{t}(\xi, \eta) \quad (7)$$

که $-1 \leq \zeta \leq 1$ مختصات راستای ضخامت، h ضخامت پوسته و \mathbf{t} بردار یکه نرمال پوسته است. توابع $\boldsymbol{\varphi}_0(\xi, \eta)$ و $\boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta)$ سطح میان پوسته را در پیکربندی مرجع^۴ و تغییرشکل یافته^۵ به صورت پارامتری تبیین می‌کنند. همچنین میدان جابه‌جایی از هر نقطه دلخواه پوسته به صورت رابطه (۸) بدست می‌آید:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) - \mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) \quad (8)$$

با توجه به فرض کیرشهف-لاو مبنی بر عمود بودن بردار نرمال به سطح میان پوسته پیکربندی تغییرشکل یافته، بردارهای یکه نرمال \mathbf{t}_0 و \mathbf{t} با توجه به روابط (۶) و (۷) به صورت رابطه (۹) استخراج می‌شوند:

$$\mathbf{t}_0 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_{,\xi}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{,\eta}^0}{\|\boldsymbol{\varphi}_{,\xi}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{,\eta}^0\|}; \quad \mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_{,\xi} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\eta}}{\|\boldsymbol{\varphi}_{,\xi} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\eta}\|} \quad (9)$$

در ادامه از اندیس‌های یونانی استفاده شده است که مقادیر {1,2} را به خود اختصاص می‌دهند.

بردارهای پایه هم‌وارد^۶ برای هر نقطه دلخواه از پوسته و سطح میانی آن با پیکربندی مرجع به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^0 + \zeta \mathbf{t}_{\alpha 0}; \quad \mathbf{G}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta} = \mathbf{t}_0 \quad (10)$$

همچنین بردارهای پایه هم‌وارد برای هر نقطه دلخواه از پوسته و سطح میانی آن با پیکربندی تغییرشکل یافته به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{t}_\alpha; \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} = \mathbf{t} \quad (11)$$

تانسور کرنش را می‌توان به دو بخش، بخش ثابت ناشی از نیروهای غشایی و بخش خطی ناشی از خمش، تقسیم کرد. در ادامه ضرایب هم‌وارد، کرنش به صورت رابطه (۱۲) ارائه خواهند شد:

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) + \zeta (\kappa_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta}) \quad (12)$$

که تانسور متریک هم‌وارد و تانسور انحنا سطح به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta; \quad G_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta; \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{t}; \quad K_{\alpha\beta} = -\mathbf{G}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{t}_0 \quad (13)$$

برای رسیدن به معادله تعادل حاکم بر سازه‌ی پوسته‌ای از اصل کار مجازی برای نیروهای داخلی و خارجی استفاده می‌شود که در رابطه (۱۴) بیان شده است:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} \quad (14)$$

تانسور تنش می‌تواند به شکل رابطه (۱۵) نوشته شود:

بی-اسپلاین $N_{i,p}(\eta)$ از مرتبه $p=0$ به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شوند [۲۲]:

$$N_{i,0}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1)$$

توابع پایه بی-اسپلاین با توجه به روابط بازگشتی به صورت رابطه (۲) بیان می‌شوند:

$$N_{i,p}(\eta) = \frac{\eta - \eta_i}{\eta_{i+p} - \eta_i} N_{i,p-1}(\eta) + N_{i,p}(\eta) = \frac{\eta - \eta_i}{\eta_{i+p} - \eta_i} N_{i,p-1}(\eta) \quad (2)$$

از آنجا که این پژوهش حول محور پوسته‌ها است، فقط به بیان روابط سطوح نرئز بسند می‌کنیم. یک سطح نرئز که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q باشد، به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (3)$$

که در آن $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}\}$ توابع پایه بی-اسپلاین می‌باشند که بر روی بردارهای گرهی تعریف شده‌اند. اگر در رابطه (۳) تابع پایه‌ای نسبی تکه‌ای را به صورت رابطه (۴) تعریف شود:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (4)$$

پس برای سطوح نرئز می‌توان نوشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (5)$$

۳- نظریه‌های پوسته‌ای پرکاربرد

دو نظریه‌ی مهم و پرکاربرد در تحلیل ورق‌های خمشی و پوسته‌ها مطرح است. یکی از این نظریه‌ها معروف به "نظریه کیرشهف-لاو" برای پوسته‌های نازک و دیگری "نظریه رایزنر-میندلین" برای پوسته‌های ضخیم هستند. در ادامه، فرمول‌بندی روابط با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک مبتنی بر توابع پایه نرئز در ایجاد هندسه و مدل محاسباتی پوسته بر اساس هر دو نظریه آورده شده است.

۳-۱- نظریه کیرشهف-لاو

در این نظریه، تغییرشکل برشی نادیده گرفته می‌شود و فرض می‌شود بردار جهتی همواره بر سطح میانی پوسته تغییرشکل یافته عمود باقی می‌ماند. همچنین، در صفحه‌های عمود بر سطح میانی اعوجاجی رخ نداده و بعد از تغییرشکل همچنان صفحه و عمود باقی می‌مانند. تغییرشکل پوسته‌های نازک با در نظر گرفتن هندسه خطی و استفاده از تغییرشکل سطح میان پوسته به‌طور کامل قابل تشریح هستند [۹]. نگاشت سطح میان پوسته با بهره‌گیری از مختصات پارامتری $\xi = \xi^1$ و $\eta = \xi^2$ صورت می‌گیرد. بردار موقعیت^۱ از یک نقطه مادی در هندسه مرجع^۲ به صورت رابطه (۶) بدست می‌آید:

³ Deformed geometry
⁴ Reference configuration
⁵ Deformed configuration
⁶ Covariant base vector

¹ Position vector
² Reference geometry

۲-۳- نظریه رایزنر - میندلین

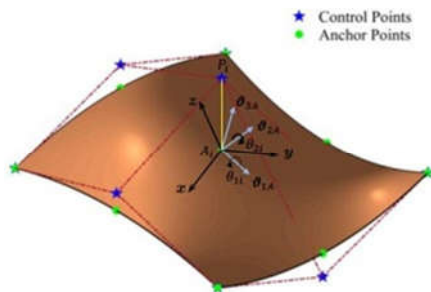
همان‌طور که در قسمت قبل، درباره پوسته‌های نازک و اعمال نظریه کیرشلف-لاو توضیح داده شد، یکی از معایب این نظریه عدم در نظر گرفتن تغییر شکل برشی است. برای رفع این مشکل، رایزنر (۱۹۴۵) نظریه‌ای معرفی کرد که بر خلاف نظریه‌ی قبل، تغییر شکل برشی را در نظر می‌گیرد. این نظریه توسط میندلین (۱۹۵۴) تکامل یافت و به نظریه رایزنر- میندلین شهرت یافت [۳].

فرضیه حاکم بر این نظریه این گونه است که صفحه‌ی عمود بر سطح میان‌پوسته، بعد از تغییر شکل نیز صفحه باقی می‌ماند و می‌تواند بر سطح میان‌پوسته عمود نباشد. این فرض این امکان را فراهم می‌سازد که چرخش‌ها به‌صورت مستقل از تغییر مکان‌ها در نظر گرفته شوند.

در این بخش مبانی این نظریه و روابط حاکم بر پوسته بیان می‌شود. روند کار بدین گونه است که برای هر نقطه پوسته یک دستگاه مختصات محلی تعریف می‌شود که فرضیات مکانیکی مبتنی بر این نظریه در این دستگاه معنا پیدا می‌کند. در نهایت با داشتن زوایای محورهای دستگاه مذکور با محورهای دستگاه کلی و با اعمال قواعد مربوط به چرخش محورهای مختصات، نتایج به دستگاه مختصات کلی انتقال می‌یابد. به بیان دیگر، در این بخش فرض بر این است که دستگاه‌های مختصات محلی و کلی بر هم منطبق نیستند.

برای ایجاد المان‌های پوسته‌ای در تحلیل ایزوژئومتریک، سطح میانی سازه پوسته با استفاده از سطوح نرئز توصیف می‌شود. هر نقطه بر روی سطح پوسته دارای پنج درجه آزادی می‌باشد؛ سه درجه آزادی تغییر مکانی و دو درجه آزادی چرخشی. از آنجا که نقاط کنترلی بر روی سطح سازه پوسته قرار ندارند (شکل ۱) و نیز باید دستگاه مختصات محلی در هر نقطه برای توصیف درجات آزادی چرخشی وجود داشته باشد، روش‌های گوناگونی برای ایجاد این نقاط از نگاهت نقاط کنترلی بر روی سطح میانی پوسته، که معروف به نقاط مهار هستند، تعریف شده است [۱۲].

در فرمول‌بندی حاضر، که مبتنی بر توابع نرئز و نقاط کنترلی است، نمی‌توان بردارهای متعامد را به‌طور مستقیم روی نقاط کنترلی تعریف نمود و در نتیجه امکان اختصاص درجات آزادی چرخشی به نقاط کنترلی وجود ندارد. جهت رفع این مشکل، یک الگوی نگاهت می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بدین منظور، هر نقطه کنترلی به یک نقطه در فضای فیزیکی و روی سطح میانی سازه پوسته نگاهت می‌شود و درجات آزادی چرخشی روی این نقطه تعریف می‌شوند. یکی از ساده‌ترین فاصله را با آن دارد، است. اشکال این روش هزینه محاسباتی روش‌ها، نگاهت هر نقطه کنترلی با نقطه‌ای از سطح میانی که کمترین



شکل ۱- تصویر نقطه کنترلی و ایجاد دستگاه مختصات محلی بر روی سطح پوسته

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (15)$$

که $\sigma_{\alpha\beta}$ تنش‌ها، $E_{\alpha\beta}$ کرنش‌ها، E ضریب الاستیک و ν ضریب پواسون هستند.

برای نظریه‌ی پوسته‌ی نازک، توصیف سه‌بعدی فقط محدود به سطح میان‌پوسته شده و تنش‌های عمودی عرضی در نظر گرفته نمی‌شوند ($\sigma_{33} = 0$).

در اینجا ابتدا سطح پوسته اولیه را با استفاده از رابطه (۶) و توابع پایه نرئز، تقریب زده می‌شود:

$$\Phi_0(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) P_i \quad (16)$$

میدان جابه‌جایی نیز به‌صورت رابطه (۱۷) بیان می‌شود:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i \quad (17)$$

کرنش‌های غشایی و کرنش‌های خمشی به‌صورت رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) بدست می‌آیند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_n^i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i \quad (18)$$

و

$$\boldsymbol{\kappa}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_m^i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i \quad (19)$$

برای ماتریس‌های \mathbf{B}_m^i و \mathbf{B}_n^i خواهیم داشت:

$$\mathbf{B}_n^i = \begin{bmatrix} b_1^i \varphi_1^0 \cdot \mathbf{e}_1 & b_1^i \varphi_1^0 \cdot \mathbf{e}_2 & b_1^i \varphi_1^0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ b_2^i \varphi_2^0 \cdot \mathbf{e}_1 & b_2^i \varphi_2^0 \cdot \mathbf{e}_2 & b_2^i \varphi_2^0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ (b_2^i \varphi_1^0 + b_1^i \varphi_2^0) \cdot \mathbf{e}_1 & (b_2^i \varphi_1^0 + b_1^i \varphi_2^0) \cdot \mathbf{e}_2 & (b_2^i \varphi_1^0 + b_1^i \varphi_2^0) \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

و

$$\mathbf{B}_m^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m11}^i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{B}_{m11}^i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{B}_{m11}^i \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{B}_{m22}^i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{B}_{m22}^i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{B}_{m22}^i \cdot \mathbf{e}_3 \\ 2\mathbf{B}_{m12}^i \cdot \mathbf{e}_1 & 2\mathbf{B}_{m12}^i \cdot \mathbf{e}_2 & 2\mathbf{B}_{m12}^i \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن \mathbf{e}_1 ، \mathbf{e}_2 و \mathbf{e}_3 بردارهای پایه در دستگاه مختصات متعامد هستند و برای $\mathbf{B}_{m\alpha\beta}^i$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{B}_{m\alpha\beta}^i = \varphi_{\alpha\beta}^0 \cdot t_0 \frac{1}{J_0} [b_{1,1}^i(\varphi_2^0 \times t_0) - b_{2,2}^i(\varphi_1^0 \times t_0)] + \frac{1}{J_0} [b_{1,1}^i(\varphi_{\alpha\beta}^0 \times \varphi_2^0) - b_{2,2}^i(\varphi_{\alpha\beta}^0 \times \varphi_1^0)] \quad (22)$$

با ترکیب همزمان نیروهای غشایی و خمشی و نوشتن رابطه خطی نیرو- جابه‌جایی برای بدست آوردن مجهولات گرهی \mathbf{u} به‌صورت رابطه (۲۳) خواهد بود:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (23)$$

در نهایت با سرهم‌بندی^۱ سختی‌های غشایی و خمشی در ماتریس کلی ماتریس کلی \mathbf{K} به‌صورت رابطه (۲۴) بدست خواهد آمد و با حل معادله (۲۳) مجهولات مسئله معین می‌گردند.

$$\mathbf{K}^{ij} = \int_A \left(h(\mathbf{B}_n^i)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n^j + \frac{h^3}{12} (\mathbf{B}_m^i)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_m^j \right) J_0 d\xi d\eta \quad (24)$$

^۱ Assembly

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

با توجه به اینکه انتگرال گیری گوس در فضای پایه انجام می شود، نیاز به تبدیلی دیگر از فضای پارامتری نریز به فضای پایه انتگرال گیری است. این تبدیل به صورت رابطه (31) معرفی می شود:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\hat{\xi}}{2}(\xi_2 - \xi_1) + \frac{1}{2}(\xi_2 + \xi_1) \\ \eta &= \frac{\hat{\eta}}{2}(\eta_2 - \eta_1) + \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1) \\ \zeta &= \hat{\zeta} \end{aligned} \quad (31)$$

این تبدیل منجر به ایجاد جاکوبی \mathbf{J}_B می شود که می توان آن را به صورت رابطه (32) بیان نمود:

$$\mathbf{J}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

برای یافتن کرنش ها مشتقات جابه جایی را نسبت به پارامترهای x و y و z به صورت رابطه (33) بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \\ &= \Lambda \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن جاکوبی \mathbf{J} به صورت رابطه (34) محاسبه می شود:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_B \mathbf{J}_P \quad (34)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} &= \sum \mathbf{n}_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{bmatrix} \\ &= \sum \begin{bmatrix} R_{i\xi} & 0 & 0 & -z_i(\ell_{2\xi} \sum R_i + \ell_2 \sum R_{i\xi}) & z_i(\ell_{1\xi} \sum R_i + \ell_1 \sum R_{i\xi}) \\ R_{i\eta} & 0 & 0 & -z_i(\ell_{2\eta} \sum R_i + \ell_2 \sum R_{i\eta}) & z_i(\ell_{1\eta} \sum R_i + \ell_1 \sum R_{i\eta}) \\ 0 & 0 & 0 & -\ell_2 \sum R_i \frac{h_i}{2} & \ell_1 \sum R_i \frac{h_i}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 \sum R_i \frac{h_i}{2} & n_1 \sum R_i \frac{h_i}{2} \end{bmatrix} \mathbf{d}_i^T \end{aligned} \quad (35)$$

که در آن $z_i = \frac{h_i}{2} \zeta$ است. که سرانجام، روابط کرنش- جابه جایی از ترکیب روابط (26) تا (35) بدست خواهند آمد:

$$\{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}^T = \sum \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i^T \quad (36)$$

جایی که \mathbf{B} و \mathbf{T} ماتریس تبدیل مختصات به صورت رابطه (37) و \mathbf{A} به صورت رابطه (38) بیان می شوند.

زیاد آن است. برای پیدا کردن چنین نقطه ای باید یک روش تکراری مانند جستجوی نیوتن به کار گرفته شود. این هزینه با ریزتر شدن شبکه به سرعت افزایش می یابد. در این پژوهش از روش مذکور به علت هزینه بالای محاسباتی صرف نظر شده و از یک الگوی ساده استفاده می شود. نگاشت مورد استفاده بدین صورت است که برای هر نقطه کنترلی یک نقطه در فضای گرهی متناظر می شود. البته توجه شود که این نقاط در یک تناظر یک به یک قرار ندارند. در این روش، نقطه کنترلی P_i بر روی پوسته، با روش بیان شده، نگاشته شده و به نقطه P_i' که مبدا دستگاه مختصات محلی است، تبدیل می شود (شکل 1).

با این حال، به صورت قرار دادی می توان نقطه متناظر هر نقطه کنترلی را روی فضای گرهی تعریف نمود. برای هر تابع پایه $R_{i,p}$ نقطه مهار که با $A_i = (A_{i\xi}, A_{i\eta})$ نمایش داده می شود، به صورت رابطه (25) قابل تعریف است:

$$A_{i\xi} = \begin{cases} \xi_{i+(p+1)/2} & \text{اگر } p \text{ فرد باشد} \\ \frac{1}{2}(\xi_{i+(p)/2} + \xi_{i+(p+1)/2}) & \text{اگر } p \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (25)$$

$A_{i\eta}$ نیز مشابه رابطه (25) بدست خواهد آمد.

چنانچه ملاحظه می شود، این تعریف طوری انجام می شود که برای توابع از درجه فرد نقاط مهار همان گره ها و برای درجات زوج این نقاط مرکز دهانه های گرهی قرار گیرند.

در ایجاد المان های پوسته بر اساس نظریه ی راینر- میندلین [12]، بردار موقعیت به صورت رابطه (26) بیان می شود:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) P_i + \zeta \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_{3i} \frac{t_i}{2} \quad (26)$$

که P_i مختصات نقطه کنترلی نام، t_i ضخامت پوسته، و $\zeta \in [-1, 1]$ مختصات راستای ضخامت است. بردار نرمال دقیق نقطه مهار مربوطه است که به صورت رابطه (27) بیان می شود:

$$\boldsymbol{\theta}_{3i} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\|} \quad (27)$$

با توجه به رابطه (26)، جمله اول سمت راست این معادله بیان گر سطح میان پوسته و جمله دوم، بیان گر ضخامت پوسته است. همچنین بردار جابه جایی به صورت رابطه (28) بیان می شود:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\mu}_i \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$\boldsymbol{\mu}_i$ شامل دو بردار دیگر است که امتدادی اختیاری داشته و به صورت رابطه (29) بیان می شود:

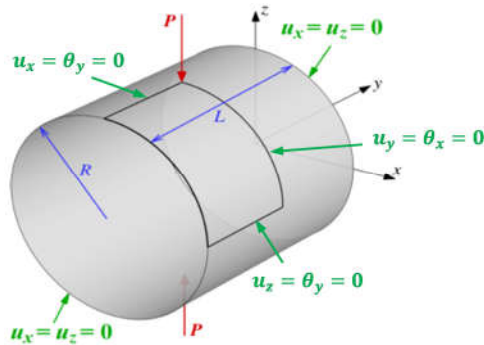
$$\boldsymbol{\mu}_i = [-\boldsymbol{\theta}_{2i} \ \boldsymbol{\theta}_{1i}] \quad (29)$$

همچنین در رابطه (28) θ_{2i} و θ_{1i} چرخش متناظر با این بردارهای جهتی می باشند.

فرمول بندی ایزوژئومتریک پوسته و بدست آوردن ماتریس سختی آن، با توجه به اصل کار مجازی صورت می گیرد. برای دست یابی به این مهم نیاز به انتگرال گیری بر روی پوسته است. برای این کار، یک المان پایه برای انتگرال گیری عددی معرفی می شود. نقاط انتگرال گیری به خوبی از المان پایه به فضای پارامتری و از آنجا به فضای فیزیکی نگاشته می شوند (شکل 2). برای ایجاد ارتباط بین فضای فیزیکی و پارامتری نیاز به ماتریس جاکوبی رابطه (30) است:

یکی از بحرانی‌ترین آزمون‌های روش‌های عددی برای دو حالت خمشی و غشایی می‌باشد [۲۵]. سازه مذکور چنانچه در شکل ۳ مشاهده می‌شود، تحت دو بار متمرکز $P = 1$ هم‌راستا و خلاف جهت در راستای قطر خود قرار گرفته است. مرزهای استوانه تحت تکیه‌گاه دیافراگم صلب قرار دارند که به غیر از تغییرمکان در جهت محور استوانه و چرخش حول محور مماس بر مرز، سایر درجات آزادی آن مقید است. همچنین مختصات نقاط کنترلی مورد استفاده به همراه مقادیر وزن‌ها، در جدول ۱ قابل مشاهده است. پارامترهای مسئله به‌صورت رابطه (۴۰) بیان می‌شود:

$$E = 3 \times 10^6; \nu = 0.3; R = 300; L = 600; t = 3 \quad (40)$$



شکل ۳- پوسته استوانه‌ای تحت فشار با دیافراگم صلب و شرایط مرزی

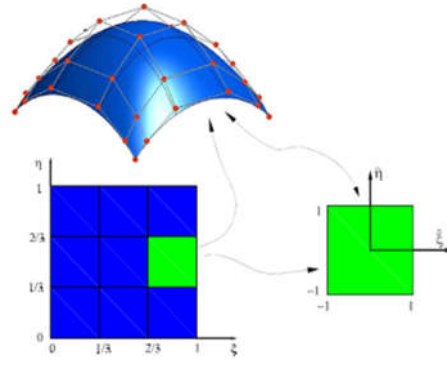
که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، R شعاع، L طول و t ضخامت استوانه می‌باشد. به دلیل تقارن مضاعف موجود در مسئله، تنها یک هشتم استوانه مدل‌سازی می‌شود.

جدول ۱- مختصات و وزن‌های نقاط کنترلی استوانه تحت فشار

نقطه	x	y	z	وزن
۱	۳۰۰	۰	۰	۱
۲	۳۰۰	۰	۰/۷۱	۲
۳	۰	۳۰۰	۰	۱
۴	۳۰۰	۰	۳۰۰	۱
۵	۳۰۰	۰	۳۰۰/۷۱	۲
۶	۰	۳۰۰	۳۰۰	۱

این مسئله با درجات ۲، ۳، ۴ و ۵ تابع نریز حل شده است. از حل تحلیلی این مسئله مقدار تغییرمکان شعاعی نقطه زیر بار متمرکز، برابر $u_{ref} = 1/8248 \times 10^{-5}$ بدست می‌آید [۲۰].

برای حل ایزوژئومتریکی این مسئله شبکه نقاط کنترلی با ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۵ و ۶۵ نقطه در هر لبه در نظر گرفته می‌شود. شکل ۴ نمودار همگرایی پاسخ برای مسئله مذکور را با استفاده از دو نظریه کیرشلف-لاو و رایزنر-میندلین نشان می‌دهد. همچنین، کانتور تغییرشکل شعاعی پوسته استوانه‌ای در شکل ۵ قابل مشاهده است.



شکل ۲- فضاهای فیزیکی، پارامتری و پایه در انتگرال‌گیری [۲۴]

$$T = \begin{bmatrix} \ell_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & \ell_1 m_1 & m_1 n_1 & \ell_1 n_1 \\ \ell_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & \ell_2 m_2 & m_2 n_2 & \ell_2 n_2 \\ \ell_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & \ell_3 m_3 & m_3 n_3 & \ell_3 n_3 \\ 2\ell_1 \ell_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & \ell_1 m_2 + \ell_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & \ell_1 n_2 + \ell_2 n_1 \\ 2\ell_2 \ell_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & \ell_2 m_3 + \ell_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & \ell_2 n_3 + \ell_3 n_2 \\ 2\ell_1 \ell_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & \ell_3 m_1 + \ell_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & \ell_3 n_1 + \ell_1 n_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

و

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

در نتیجه ماتریس سختی K به‌صورت رابطه (۳۹) معرفی می‌شود:

$$K = \iiint_{\Omega} B^T D B d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J_P| d\xi d\eta d\zeta \quad (39)$$

$$= \sum_{k=1}^{NG} B_k^T D B_k |J_P| W_k$$

که در آن، NG مجموع نقاط انتگرال‌گیری گوسی، W_k وزن نقاط انتگرال‌گیری، B ماتریس مشتقات نریز و D ماتریس مواد می‌باشد.

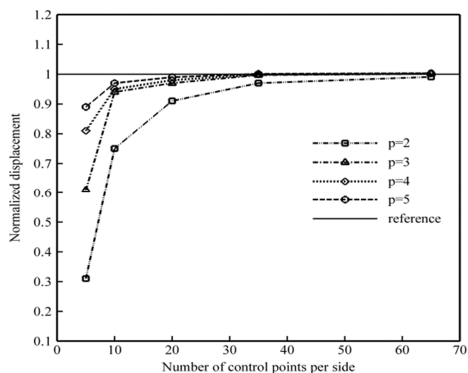
۴- نتایج عددی

در این پژوهش برای نشان دادن کارایی روش تحلیل مطرح شده در پوسته‌ها، دو دسته از مسائل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. دسته اول مسائلی موسوم به مسائل معیار هستند که مبنای مناسبی برای سنجش درستی روش‌های تحلیل خطی ارتجاعی پوسته‌اند و دسته دوم مسائلی مربوط به پوسته‌ها با شکل آزاد هستند که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرند.

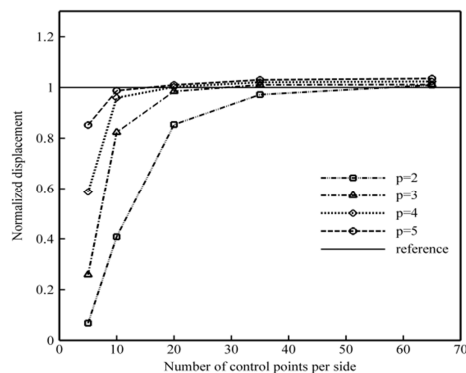
مسائل معیار پوسته شامل سه مسئله استوانه تحت فشار با دیافراگم صلب، نیم‌کره تحت فشار و بام اسکوردلیس-لو هستند که در ادامه به تشریح آن‌ها پرداخته شده است [۲۵]. در هر یک از این مثال‌ها، تحلیل ایزوژئومتریکی با شبکه‌بندی‌های مختلف بر مبنای دو نظریه "کیرشلف-لاو" و "رایزنر-میندلین" انجام شده و نتایج با حل تحلیلی مقایسه شده است.

۴-۱- مسائل معیار

مثال اول، استوانه‌ای تحت فشار با دیافراگم صلب است. این مسئله



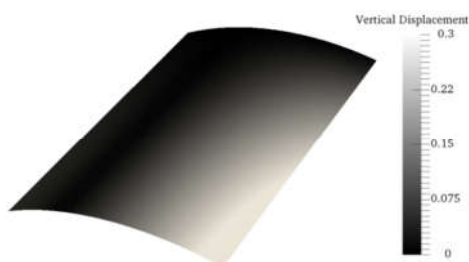
(ب)



(الف)

شکل ۴- نمودار همگرایی خیز شعاعی بیشینه استوانه تحت فشار (الف) نظریه کیرشهف-لاو (ب) نظریه رایزنر- میندلین

و t ضخامت بام اسکوردلیس می‌باشد. با توجه به تقارن، تنها یک چهارم سازه با شرایط مرزی مناسب جهت مدل‌سازی و تحلیل به کار می‌رود. این مسئله با درجات ۲، ۳، ۴ و ۵ تابع نریز حل شده است. از حل تحلیلی این مسئله مقدار تغییرمکان میانی لبه آزاد برابر $u_{ref} = 0.3024$ بدست می‌آید [۲۵]. شکل ۷ کانتور تغییرمکان قائم بدست آمده از حل ایزوژئومتریک این مسئله را نشان می‌دهد.



شکل ۷- کانتور تغییرمکان قائم بام اسکوردلیس- لو



شکل ۵- کانتور تغییرمکان شعاعی استوانه تحت فشار

مثال دوم به تحلیل سازه بام اسکوردلیس- لو تحت اثر وزن خودش می‌پردازد. این مسئله معیار استاندارد برای مسائل پوسته می‌باشد که در آن نیروهای غشایی نقش نیروهای غالب را بازی می‌کنند [۲۵]. شکل ۶ این سازه را با پارامترهای هندسی تعریف شده‌اش نشان می‌دهد. دو مرز خمیده سازه تحت تکیه‌گاه دیافراگم صلب قرار دارند که اجازه حرکت در راستای محور سازه و چرخش حول محور مماس بر مرز را به آن می‌دهد. پارامترهای مسئله به صورت رابطه (۴۱) بیان می‌شود:

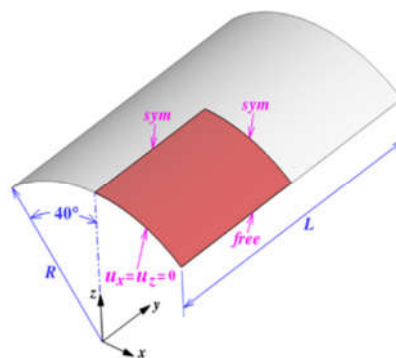
$$E = 4.32 \times 10^8; \nu = 0.0; R = 25; L = 50; t = 0.25 \quad (41)$$

برای حل ایزوژئومتریک این مسئله شبکه نقاط کنترلی با ۵، ۱۰، ۲۰ و ۳۵ نقطه کنترلی در هر لبه در نظر گرفته می‌شود. همگرایی پاسخ این تغییرمکان در نقطه میانی لبه آزاد با استفاده از دو نظریه ذکر شده در شکل ۸ نشان داده شده است.

مثال سوم یک سازه پوسته نیم‌کره تحت فشار مطابق شکل ۹ است که توسط دو نیروی شعاعی خلاف جهت هم با بزرگی $F = 2$ بارگذاری شده است. لبه تحتانی نیم‌کره آزاد است. همچنین مختصات نقاط کنترلی مورد استفاده به همراه مقادیر وزن‌ها، در جدول ۲ ذکر شده است. پارامترهای مسئله به صورت رابطه (۴۲) بیان می‌شود:

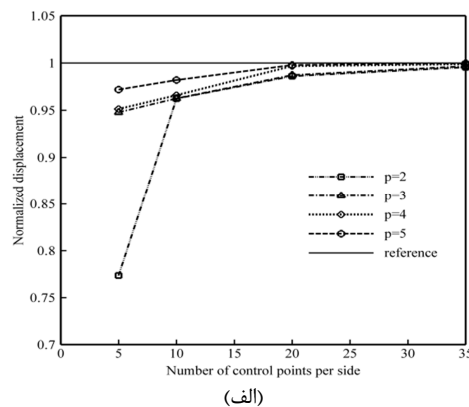
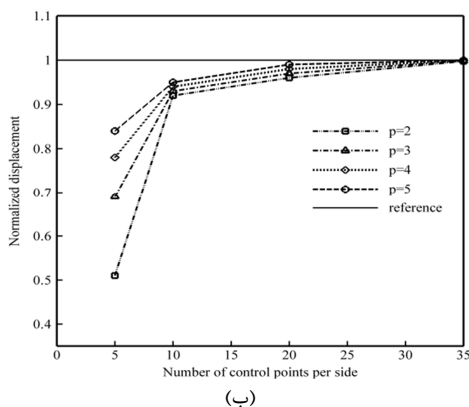
$$E = 6.825 \times 10^7; \nu = 0.3; R = 10; t = 0.04 \quad (42)$$

که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، R شعاع نیم‌کره و t ضخامت سازه می‌باشد. این مسئله معیار مناسبی از فرمول‌بندی پوسته در ارائه مودهای تغییرشکل بدون تغییر حجم می‌باشد. همچنین می‌توان گفت که هیچ کرنش غشایی در آن ایجاد نمی‌شود. با توجه به تقارن مسئله، تنها یک چهارم آن مدل می‌گردد.



شکل ۶- پوسته بام اسکوردلیس- لو تحت وزن خودش با تکیه‌گاه دیافراگم صلب

که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، R شعاع انحنا، L طول

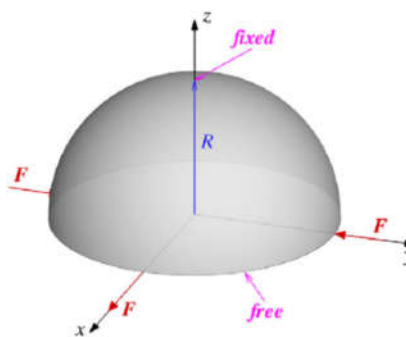


شکل ۸- نمودار همگرایی خیز بیشینه نرمال بام اسکوردلیس- لو (الف) نظریه کیرششف-لاو (ب) نظریه رایزنر- میندلین



شکل ۱۰- کانتور تغییرمکان شعاعی نیم کره تحت فشار

جواب، دقیق‌تر و سریع‌تر از نظریه کیرششف-لاو عمل می‌کند؛ یعنی با استفاده از تعداد نقاط کنترلی کمتر و یا بکارگیری توابع پایه مرتبه پایین‌تر سریع‌تر به جواب تحلیلی همگرا می‌شود.



شکل ۹- پوسته نیم کره تحت فشار

۴-۲- مسائل پوسته با شکل آزاد

مثال چهارم سازه‌ی پوسته‌ای با شکل دلخواه جهت بررسی کارایی روش ارائه شده را بیان می‌کند. شکل اولیه این سازه پوسته‌ای به همراه ۱۶ نقطه کنترلی آن در شکل ۱۲ نشان داده شده است. همچنین مختصات نقاط کنترلی مورد استفاده به همراه مقادیر وزن‌ها، در جدول ۳ قابل رؤیت است.

سازه مذکور در چهار گوشه‌ی خود توسط تکیه‌گاه ساده مقید شده و تحت اثر بار گسترده یکنواخت $q_0 = 100$ بر واحد سطح در جهت محور z قرار دارد. پارامترهای این مسئله به صورت رابطه (۴۳) بیان می‌شود:

$$E = 2.5 \times 10^7; \nu = 0.29; t = 0.3 \quad (43)$$

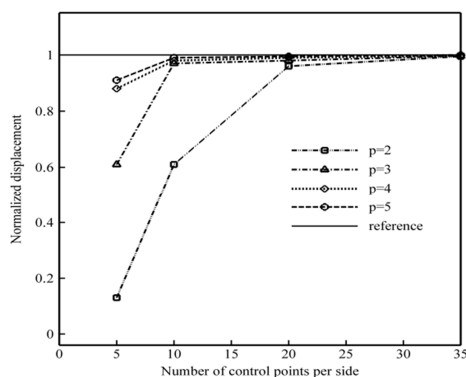
که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون و t ضخامت سازه پوسته شکل آزاد می‌باشد که در همه نقاط ثابت فرض شده است. برای این پوسته شکل آزاد، با استفاده از دو بردار گرهی $H = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$ و $\Xi = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$ و همچنین شبکه‌هایی با ۵، ۷، ۱۱، ۱۹ و ۳۵ نقطه کنترلی در هر لبه‌ی پوسته و درجات تابع نرَبز ۳، ۴ و ۵ خیز قائم بیشینه به مقدار $u = 0.9829$ همگرا شده است. کانتور پوسته تغییرشکل یافته در شکل ۱۳ نشان داده شده است و همچنین، نمودار همگرایی خیز قائم بیشینه با استفاده از دو

حل تحلیلی برای تغییرمکان شعاعی نقطه زیر بار متمرکز مقدار خیز $u_{ref} = 0.94$ را نشان می‌دهد [۲۵]. کانتور تغییرمکان شعاعی حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و نمودار همگرایی خیز شعاعی نقطه زیر بار، به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده‌اند که نشان‌دهنده کارایی روش حاضر برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای است.

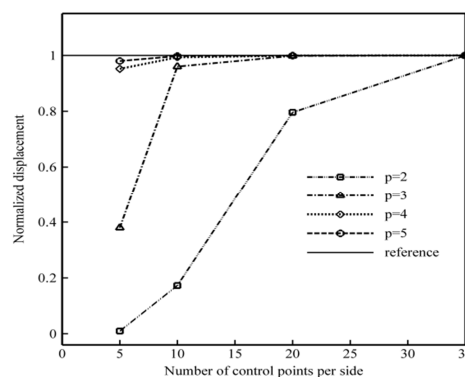
همان‌طور که در شکل‌های ۵، ۸ و ۱۱، که مقایسه دو نظریه موجود با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک است، مشاهده می‌شود نظریه رایزنر- میندلین با به کار بردن درجات آزادی چرخشی مستقل، که با بهره‌گیری از بردارهای نرمال دقیق حاصل شده‌اند، در رسیدن به

جدول ۲- مختصات و وزن‌های نقاط کنترلی نیم کره تحت فشار

نقطه	x	y	z	وزن
۱	۱۰	۰	۰	۱
۲	۱۰	۱۰	۰	۰/۷۱
۳	۱۰	۰	۱۰	۱
۴	۱۰	۱۰	۱۰	۰/۷۱
۵	۱۰	۱۰	۱۰	۰/۵
۶	۱۰	۱۰	۱۰	۰/۷۱
۷	۱۰	۰	۱۰	۱
۸	۱۰	۰	۱۰	۰/۷۱
۹	۱۰	۰	۱۰	۱

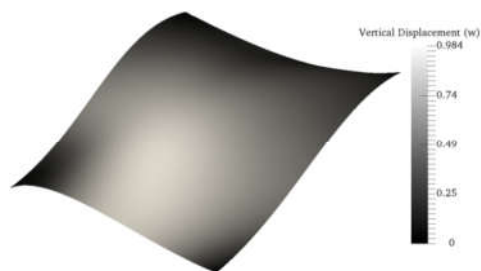


(ب)

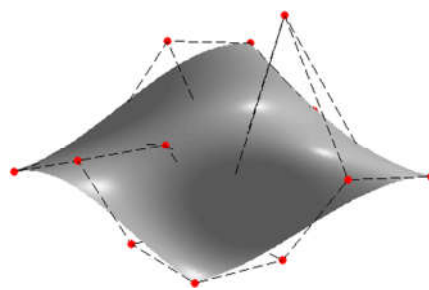


(الف)

شکل ۱۱- نمودار همگرایی خیز شعاعی بیشینه نیم کره تحت فشار (الف) نظریه کیرشلف-لاو (ب) نظریه رایزنر- میندلین



شکل ۱۳- کانتور خیز قائم پوسته شکل آزاد



شکل ۱۲- پوسته شکل آزاد به همراه نقاط کنترلی

۵- نتیجه گیری

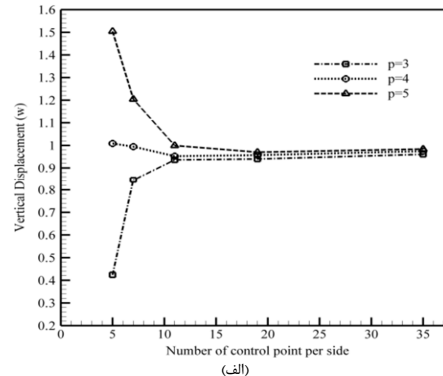
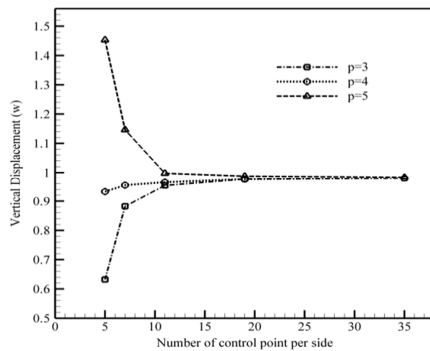
در این مقاله، تحلیل پوسته‌های شکل آزاد با استفاده از روش ایزوژئومتری و بهره‌گیری از دو نظریه کیرشلف-لاو و رایزنر- میندلین انجام گرفت. پوسته‌ها به دلیل داشتن انحنا جزوه سازه‌های پیچیده محسوب می‌شوند، از این رو مدل‌سازی و تحلیل آن‌ها دشوارتر از سایر سازه‌ها می‌باشد. در این پژوهش، برای رفع پیچیدگی‌های مدل‌سازی پوسته از توابع پایه نریز و برای تحلیل آن از روش ایزوژئومتری استفاده شد. استفاده از روش ایزوژئومتری در تحلیل پوسته‌ها مزایای فراوانی از جمله مدل‌سازی دقیق هندسه و همگرایی سریع با در نظر گرفتن نقاط کنترلی و درجات آزادی کمتر نسبت به روش اجزای محدود کلاسیک دارد. در این مقاله همچنین، برای تعریف درجات آزادی چرخشی مستقل در نظریه رایزنر- میندلین از تعریف دقیق بردار نرمال بهره گرفته شد که سبب بهبود دقت حل شد. برای نشان دادن کارایی این روش‌ها، مسائلی موسوم به مسائل معیار حل گردید که مشاهده شد نظریه رایزنر- میندلین با تعداد نقاط کنترلی کمتر همگرایی بهتری نسبت به نظریه کیرشلف-لاو دارد و علت آن هم در نظر گرفتن جملات برشی است. با توجه به نتایج بدست آمده مشخص گردید که با افزایش تعداد نقاط کنترلی در مدل‌سازی پوسته‌ها و درجه توابع پایه، نتایج به حل تحلیلی بسیار نزدیک شده و نتایج حاصل از دقت مطلوبی برخوردار هستند. در نهایت از این روش برای تحلیل پوسته با شکل آزاد با بهره‌گیری از هر دو نظریه استفاده شد و برای خیز بیشینه مشاهده شد که هر دو نظریه با دقت خوبی به مقدار 0.9839 رسیدند، اما همان‌گونه که دیده شد نظریه رایزنر- میندلین با سرعت همگرایی بالاتری به جواب مورد نظر میل می‌کند (شکل ۱۴).

روش کیرشلف-لاو و رایزنر- میندلین در شکل ۱۴ آورده شده است. از آنجا که در این مسئله پوسته‌ای با شکل دلخواه مورد بررسی قرار گرفته است مرجعی برای مقایسه وجود ندارد؛ با این وجود، همگرایی پاسخ و شکل تغییر یافته پوسته شکل آزاد نشان از کارآمدی

جدول ۳- مختصات و وزن‌های نقاط کنترلی پوسته شکل آزاد

وزن	Z	Y	X	نقطه
۱	۲	-۱۰	-۱۰	۱
۱	۱/۶۹۸	-۲/۹۲۴	-۱۰	۲
۱	۵/۲۴۴	۲/۹۸۷	-۱۰	۳
۱	۱/۲	۱۰	-۱۰	۴
۱	۱/۱۱۲	-۱۰	-۲/۵۶۳	۵
۱	۰/۲۷۷	-۲/۹۲۴	-۲/۵۶۳	۶
۱	۳/۸۵۵	۲/۹۸۷	-۲/۵۶۳	۷
۱	-۰/۸۷۵	۱۰	-۲/۵۶۳	۸
۱	۵/۳۱۲	-۱۰	۲/۹۸	۹
۱	۱۴/۵۱۹	-۲/۹۲۴	۲/۹۸	۱۰
۱	-۱/۰۸۸	۲/۹۸۷	۲/۹۸	۱۱
۱	۶/۶۵۹	۱۰	۲/۹۸	۱۲
۱	۳	-۱۰	۱۰	۱۳
۱	-۰/۷۵۳	-۲/۹۲۴	۱۰	۱۴
۱	۲/۰۸۴	۲/۹۸۷	۱۰	۱۵
۱	۴	۱۰	۱۰	۱۶

این روش در حل مسائل پوسته با هر شکل دلخواهی دارد.



شکل ۱۴- نمودار همگرایی خیز قائم بیشینه پوسته شکل آزاد (الف) نظریه کیرشهف-لاو (ب) نظریه رایزنر- میندلین

۶- مراجع

- [14] Hosseini S., Remmers J. C., Verhoosel C. V. and Borst R., An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 95, No.3, pp. 238–256, 2013.
- [15] Bouclier R., Elguedj T. and Combescuré A., Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and B-method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 267, No.5, pp. 86–110, 2013.
- [16] Dornisch W., Klinkel S. and Simeon B., Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 253, No.34, pp. 491–504, 2013.
- [۱۷] آنیکویی س. و حسنی ب.، تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد ایزومتریک ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پوشیده شده از پیزوالکتریک با استفاده از نظریه رایزنر- میندلین. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۷، ش. ۱۱، ص ۱۸۱–۱۹۱، ۱۳۹۶.
- [18] Nikoei S. and Hassani B., Isogeometric analysis of laminated smart shell structures covered with piezoelectric sensors and actuators using degenerated shell formulation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 30, No.13, pp. 1913–1931, 2019.
- [19] Lei Z., *Isogeometric shell analysis and optimization for structural dynamics*, PhD. Thesis, 2015.
- [20] Lei Z., Gillot F. and Jezequel L., An isogeometric Reissner–Mindlin shell element based on mixed grid. *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 10, No.4, pp. 1687814018766997, 2018.
- [21] Hu Q., Xia Y., Natarajan S., Zilian A., Hu P. and Bordas S., Isogeometric analysis of thin Reissner–Mindlin plates and shells: locking phenomena and B-bar method. *arXiv preprint arXiv:1709.00402*, 2017.
- [22] Piegl L. and Tiller W., *The NURBS book*, Second Edition, New York, Springer-Verlag, 1997.
- [23] Benson D., Hartmann S., Bazilevs Y., Hsu M. C. and Hughes T. J. R., Blended isogeometric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 255, No.9, pp. 133–146, 2013.
- [24] Nguyen-Thanh N., Kiendl J., Nguyen-Xuan H., Wuchner R., Bletzinger K. U., Bazilevs Y. and Rabczuk T., Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, No.47, pp. 3410–3424, 2011.
- [25] Belytschko T., Stolarski H., Liu W. K., Carpenter N. and Jame S. J., Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, No.1-3, pp. 221–258, 1985.
- [1] Kirchhoff G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 40, No.4, pp. 51–88, 1850.
- [2] Love A. E. H., The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 179, No.16, pp. 491–546, 1888.
- [3] Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of applied Mechanics*, Vol 12, No.5, pp. 69–77, 1945.
- [4] Adam C., Bouabdallah S., Zarroug M. and Maitournam H., Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II: Plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 284, No.4, pp. 106–137, 2006.
- [5] Bouclier R., Elguedj T. and Combescuré A., Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 245, No.11, pp. 144–162, 2012.
- [6] Echter R. and Bischoff M., Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No.12, pp. 374–382, 2010.
- [7] Hughes T. J. R., Cottrell J. A. and Bazilevs Y., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No.39–41, pp. 4135–4195, 2005.
- [8] Bischoff M., Wall W. A., Bletzinger K. U. and Ramm E., Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures. *Encyclopedia of computational mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 2004.
- [9] Kiendl J., Bletzinger K. U., Linhard J. and Wüchner R., Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No.49–52, pp. 3902–3914, 2009.
- [10] Benson D., Bazilevs Y., Hsu M. C. and Hughes T. J. R., A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, No.13, pp. 1367–1378, 2011.
- [11] Goyal A., Dörfel M. R., Simeon B. and Vuong A. V., Isogeometric shell discretizations for flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, Vol. 30, No.2, pp. 139–151, 2013.
- [12] Benson D., Bazilevs Y., Hsu M. C., Hughes T. J. R., Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No.5, pp. 276–289, 2010.
- [13] Uhm T. K. and Youn S. K., T-spline finite element method for the analysis of shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 80, No.4. pp. 507–536, 2009.