

# طراحی کنترلر زیربهبینه‌ی توزیع شده برای آرایش‌بندی گروه ربات متحرک غیرهولونومیک در حضور موانع محیطی

علی جبار رشیدی\*

بهرام کریمی

ایوب خداپرست

دانشیار، مجتمع دانشگاهی مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

دانشیار، مجتمع دانشگاهی مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

دکتری، دانشکده الکتروسرام و مهندسی برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران

## چکیده

این مقاله به طراحی کنترلر برای آرایش‌بندی گروه ربات‌های متحرک غیرهولونومیک مبتنی بر روش زیربهبینه‌ی توزیع شده در حضور موانع محیطی می‌پردازد. آرایش‌بندی گروه ربات‌های متحرک یکی از مسائل مهم در حرکت گروهی و رفتار مشارکتی سیستم‌های چندعاملی است که قیود موجود بر روی مکانیزم‌های فرآیند و همچنین چالش و محدودیت‌های محیط دینامیکی ناشناخته بر پیچیدگی‌های کنترلی آن افزوده است. در این مقاله با ترکیب روش‌های رهبر-پیرو و رویکرد مبتنی بر رفتار برای هر یک از رفتارهای مطلوب نظر مانند تشکیل آرایش هندسی، تعقیب مسیر و اجتناب از برخورد، تابع هزینه‌ای تعریف شده و معادله دینامیک خطای آرایش به عنوان قید مسئله در نظر گرفته می‌شود. هدف طراحی یک قانون کنترلر بهینه برای حرکت گروهی ربات‌ها به نحوی است که در محدودیت‌ها و قیود صدق کرده و در ضمن معیار معینی را حداقل نماید. در ادامه پایداری و بهینه بودن سیستم حلقه بسته نیز اثبات شده است. نتایج شبیه‌سازی، کارایی و عملکرد مناسب کنترلر طراحی شده را به خوبی نشان می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** کنترلر زیربهبینه توزیع‌شده، آرایش‌بندی، ربات متحرک غیرهولونومیک، نظریه گراف، اجتناب از برخورد.

## Design of Distributed Suboptimal Controller for Formation of a Group of Non-holonomic Mobile Robots in the presence of Environmental Obstacles

A.J. Rashidi

Faculty of Electrical and Computer Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

B. Karimi

Faculty of Electrical and Computer Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

A. Khodaparast

Department of Electroceramics and Electrical Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Iran

## Abstract

This paper is concerned with the controller design for formation of a group of non-holonomic mobile robots based on distributed suboptimal method in the presence of environmental obstacles. Formation control of mobile robots is one of the important aspects in group movement and cooperative behavior of multi-agent systems. Challenges and constraints on procedure mechanisms and unknown dynamic environments have made the control process of such systems more complicated. In this study, integrated leader-follower method and behavioral approach also for each of the desired behaviors including geometrical formation, trajectory tracking and obstacle collision avoidance, a cost function and a formation error dynamic equation are defined as constraints. The main goal in the present paper is to design an optimum control law for the robots applicable to the whole constraints and limits of the problem while minimizing certain criterion. The present research study also presents a stability analysis to show the closed loop system is stable and works optimally. The simulation results illustrate the effectiveness and efficient performance of the proposed suboptimal control law design.

**Keywords:** Distributed suboptimal control, Formation, Non-holonomic mobile robot, Graph theory, Obstacle avoidance.

کلونی مورچه‌ها<sup>۱</sup>، ازدحام دسته‌ای پروانه‌ها و تجمع توده‌ای زنبورهای عسل نمونه‌هایی از حرکت هماهنگ و رفتار مشارکتی موجود در طبیعت است [۱]. در ساختار رفتاری این موجودات اجتماعی، هر عضو نسبت به سایرین یا رهبر گروه در یک موقعیت خاص قرار گرفته و موقعیت خود را نسبت به آن‌ها تنظیم می‌کند. در سیستم‌های چند-ربات<sup>۲</sup> نیز هر ربات به عنوان یک عضو مجموعه در جهت معینی نسبت به رهبر گروه یا نسبت به همسایه خود حرکت می‌کند تا کل مجموعه به هدف مورد نظر خود برسد [۲]. امروزه با گسترش دانش کنترل،

## ۱- مقدمه

انسان‌ها همواره از محیط طبیعت اطراف خود الهام گرفته‌اند و به کمک آن توانسته‌اند دانش خود را رشد دهند و در زندگی روزمره از آن استفاده کنند. در همین راستا توجه به پدیده‌هایی چون حرکت هماهنگ، مهاجرت دسته‌جمعی و زندگی اجتماعی حیوانات در طبیعت جلب شد. حرکت هماهنگ یک پدیده برجسته در سیستم‌های زیست‌محیطی و یک ابزار بسیار مفید برای هدایت و کنترل مجموعه‌های مصنوعی از ماشین‌ها، حسگرهای متحرک و سیستم‌های رباتیکی است. پرواز دسته‌جمعی پرندگان، حرکت گروهی چهارپایان،

<sup>1</sup> Ant colony

<sup>2</sup> Multi-robot systems

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: aiorashidi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۳/۱۹

تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۷/۰۸

ربات‌های متحرک زمینی<sup>۱</sup> مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. قابلیت کار در فضاهای مختلف، عدم محدودیت فضای کاری، عملیات پذیری، سادگی مکانیکی و غیره از جمله قابلیت‌های مهم این دسته از ربات‌ها می‌باشند. این ربات‌ها دارای سه درجه آزادی در صفحه شامل مختصات مکانی و جهت‌گیری می‌باشند. ربات‌های متحرک چرخ‌دار<sup>۲</sup> یک نمونه از متداول‌ترین ربات‌های متحرک زمینی هستند. مطالعه دقیق و بررسی کاملی روی مدل سینماتیکی و دینامیکی این ربات‌ها در [۳ و ۴] انجام شده است. ربات‌های متحرک چرخ‌دار غیرهولونومیک<sup>۳</sup> دسته‌ای از ربات‌های متحرک چرخ‌دار هستند که به خاطر تماس میان چرخ‌ها با سطح زمین، مقید به قیود غیرهولونومیک می‌باشند. این قیود در اثر غلزش خالص چرخ‌ها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش در جهت جانبی به وجود می‌آیند. بنابراین حرکت ربات‌های چرخ‌دار نه تنها توسط یک مسیر هندسی مشخص بلکه توسط یک رابطه دینامیکی با توجه به جهت لغزش طولی مشخص می‌شود. بنابراین با توجه به کاربردهای متعدد این نوع ربات‌های چرخ‌دار، کنترل آن‌ها مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است [۵]. در بسیاری از کاربردها استفاده از یک ربات به تنهایی برای انجام وظیفه مورد نظر کافی نبوده یا بسیار سخت و زمانبر خواهد بود. لذا استفاده از سیستم‌های چند رباتی و به تبع آن تحقیق در مورد کنترل توزیع شده یکی از مهم‌ترین مباحث و شاخه‌های علم رباتیک شده است. کنترل توزیع شده در مقایسه با کنترل متمرکز دارای مزایای بسیاری از جمله پیچیدگی محاسبات پایین‌تر، عدم نیاز به یک مرکز تصمیم‌گیری بصورت متمرکز بوده که باعث مورد توجه قرار گرفتن این زمینه شده است. همچنین از مزایای سیستم‌های چند رباتی می‌توان به توسعه‌پذیری بیشتر، انعطاف‌پذیری بهتر، قابلیت اطمینان بالاتر و شکست‌ناپذیر بودن مأموریت نسبت به یک ربات اشاره کرد. از کاربردهای حرکت گروهی ربات‌های متحرک می‌توان به عملیات امداد و نجات، حمل بار، گشت و حفاظت از مرزها، شناسایی مناطق، عملیات مین‌یابی و خنثی‌سازی، نمونه‌برداری در کُرآت و سیاره‌های دیگر، مراقبت، نظارت و پایش محیط‌های خطرناک اشاره کرد [۶].

حرکت گروهی ربات‌های متحرک چرخ‌دار مثل سایر سیستم‌های چندعاملی<sup>۴</sup> با مسائل و مباحث مختلفی مواجه است که هر یک سهم بسزایی در کنترل مشارکتی آن را دارند. یکی از مسائل مهمی که در حرکت گروهی ربات‌های متحرک چرخ‌دار مطرح می‌شود و نقش اساسی در انجام مأموریت ایفا می‌کند، مسئله آرایش‌بندی<sup>۵</sup> است [۷]. در صورتی که آرایش گروهی ربات‌ها انجام نشود، حرکت گروهی ربات‌ها مطلوب نخواهد بود، به عبارت دیگر در حین حرکت مشکلات متعددی از قبیل بالا رفتن احتمال برخورد ربات‌ها با یکدیگر و یا برخورد با موانع و غیره به وجود خواهد آمد که موجب می‌شود ربات‌ها تعامل و همبستگی خود را از دست بدهند [۸]. در سال‌های اخیر روش‌های متفاوتی برای آرایش‌بندی گروه ربات‌ها به صورت توزیع‌شده ارائه شده است که می‌توان به روش میدان پتانسیل مصنوعی و یا

روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های توافقی مانند روش‌های رهبر-پیرو، ساختار مجازی و مبتنی بر رفتار اشاره کرد. در روش میدان پتانسیل مصنوعی، با تشکیل تابع پتانسیل جاذبه و دافعه بین ربات‌ها و تنظیم پارامترهای آن، آرایش مورد نظر حاصل می‌شود [۹]. در روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های توافقی ارتباط بین ربات‌ها براساس نظریه گراف مدل‌سازی می‌شود. در نظریه گراف هر ربات به عنوان یک گره و تبادل اطلاعات بین ربات‌ها به صورت یال‌های گراف مدل‌سازی می‌شود. روش رهبر-پیرو پرکاربردترین استراتژی کنترل آرایش است. در این رویکرد، ربات رهبر مسیر مرجع را تولید نموده و ربات‌های دیگر به عنوان پیرو، با حفظ فاصله مطلوب و زاویه مشخص نسبت به ربات رهبر به تعقیب آن می‌پردازند. این امر با انتخاب یک قانون کنترل توزیع‌شده روی هر پیرو مبتنی بر دینامیک موقعیت نسبی آن محقق خواهد شد. در نتیجه پایداری گروه تضمین می‌شود به این معنی که کل گروه آرایش مورد نظر را ایجاد نموده و آن را حفظ خواهند کرد [۱۰]. در روش مبتنی بر رفتار، چند رفتار مورد نظر به هر ربات اختصاص داده شده و قانون کنترل نهایی برحسب اهمیت نسبی هر یک از رفتارها طراحی می‌شود. در این روش سیگنال کنترلی برای هر ربات برابر میانگین وزنی رفتارهای دلخواه است [۱۱ و ۱۲]. در واقع روش‌های توافقی در سیستم‌های چند رباتی یک چهارچوب حل مناسب برای مدل‌سازی و فرمول‌بندی مسائل کنترلی ابعاد وسیع با تعاملات دینامیکی را فراهم می‌آورد که در آن استراتژی هر ربات بستگی به عملکرد خود ربات و دیگر عامل‌های مجموعه دارد. در این رویکرد عوامل به دنبال یافتن مجموعه‌ای از سیاست‌های کنترلی قابل قبولی هستند که علاوه بر تضمین پایداری سیستم و همزمان‌سازی با حداقل‌سازی توابع هزینه، رفتارهای مطلوب مسئله حاصل گردد. دستیابی به بهترین عملکرد و رفتار در تمامی فرآیندهای دینامیکی کنترل‌پذیر، هدف اصلی مهندسان و طراحان سیستم‌های کنترل می‌باشد. نظریه کنترل بهینه یکی از روش‌های موثر در طراحی پارامترهای بهینه می‌باشد. مهم‌ترین هدف کنترل بهینه تعیین سیگنال کنترلی است که باعث شود یک فرآیند در برخی محدودیت‌ها یا قیود فیزیکی صدق کرده و در عین حال یک معیار کارایی بهینه شود [۱۳]. روش‌های کنترل بهینه اگرچه در افزایش پایداری سیستم بسیار موثر می‌باشند، اما به علت پیچیدگی ناشی از دخالت متغیرهای زیاد و ایجاد حلقه‌های متعدد فیدبک که اکثراً با تخمین‌زنده‌های متغیر حالت همراه می‌باشند، هزینه‌ی محاسباتی زیادی داشته و کاربرد این کنترلگرها را محدود کرده است. در روش‌های کنترل زیربهینه با کاهش منطقی و صحیح متغیرهای موجود و فقط استفاده از حلقه‌های فیدبک موثر می‌توان از پیچیدگی سیستم کنترل به مقدار زیاد کاست و در نتیجه عملی بودن آن را تضمین کرد. همچنین ایجاد یک مسیر امن به منظور جلوگیری از برخورد ربات‌ها با هم و یا با موانع مسئله‌ی مهمی است که تحت عنوان روش‌های برنامه‌ریزی حرکت و اجتناب از برخورد مطرح می‌شود [۱۴-۱۶]. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش تابع پتانسیل [۱۷]، روش‌های مبتنی بر نمونه‌برداری<sup>۶</sup> مانند تجزیه سلولی و نقشه راه<sup>۷</sup>.

<sup>1</sup> Ground mobile robots

<sup>2</sup> Wheeled mobile robots

<sup>3</sup> Non-holonomic

<sup>4</sup> Multi-agent systems

<sup>5</sup> Formation

<sup>6</sup> Sampling based methods

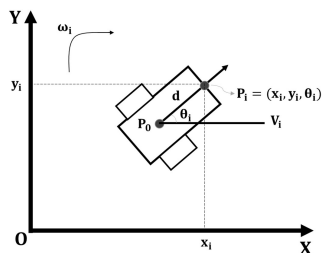
<sup>7</sup> Roadmap and cell decomposition

معیار بهینگی در چهارچوب تشکیل آرایش هندسی مطلوب، تعقیب مسیر و اجتناب از برخورد حاصل می‌شود.

در ادامه چیدمان بخش‌های مختلف مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش دوم معادلات دینامیکی ربات متحرک غیرهولونومیک که طراحی کنترلگر بر مبنای آن است، مدل‌سازی می‌شود. بخش سوم به توپولوژی شبکه ارتباطی بین ربات‌ها براساس نظریه گراف اختصاص دارد. در بخش چهارم ساختار کنترل آرایش مورد نظر بیان می‌شود. در بخش پنجم فرمول‌بندی مسئله ارائه شده و رفتارهای مطلوب به عنوان توابع هزینه برای مسئله کنترل بهینه، تعریف می‌شود. سپس تابع هامیلتونی معرفی و تابع لیاپانوف متناسب با مسئله انتخاب می‌شود. در ادامه به کمک تحلیل پایداری لیاپانوف، کران نهایی کل سیستم حلقه بسته تضمین شده است. در بخش ششم نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده برای کنترل آرایش زیربهینه چهار ربات متحرک چرخ‌دار غیرهولونومیک در یک محیط پویا آورده شده است. در پایان نتیجه‌گیری حاصل از مقاله بیان شده است.

## ۲- مدل ربات متحرک غیرهولونومیک

نمای ساختاری از یک ربات متحرک غیرهولونومیک در شکل ۱ نشان داده شده است. این شکل یک طرحواره از ربات متحرک با دو چرخ می‌باشد که بر روی یک محور سوار شده است [۲۱]. در این مقاله یک گروه  $n$  تایی از این ربات‌ها که ساختار مشابهی دارند به عنوان یک سیستم چند رباتی در نظر گرفته می‌شود. در این ساختار موقعیت ربات  $i$ ام  $1 \leq i \leq n$  در دستگاه مختصات کارترین OXY توسط  $P_i = [x_i, y_i, \theta_i]$  مشخص می‌شود که در آن  $[x_i, y_i]$ ، مختصات رو به جلوی ربات  $R_i$  و  $\theta_i$  زاویه خط عمود بر محور چرخ‌های ربات با خط افق است. فاصله بین مرکز چرخ‌های ربات تا جلوی ربات با  $d$  نشان داده شده است.



شکل ۱- نمای ساختاری از یک ربات متحرک غیرهولونومیک [۲۲]

در سیستم چند رباتی مد نظر، هر ربات با سرعت خطی  $v_i$  و سرعت زاویه‌ای  $\omega_i$  در حال حرکت است. در صورتی که چرخ‌های ربات پایه متحرک غیرهولونومیک  $R_i$  نلغزد و غلتش خالص داشته باشند، قید سینماتیکی مطابق معادله‌ی (۱) برقرار است:

$$\dot{y}_i \cos \theta_i - \dot{x}_i \sin \theta_i = d \dot{\theta}_i \quad (1)$$

در نتیجه مدل سینماتیکی یک ربات متحرک غیرهولونومیک به صورت زیر بیان می‌شود [۲۳].

$$\dot{P}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -d \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & d \cos \theta_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

روش‌های اکتشافی و فوق اکتشافی<sup>۱</sup> مانند درخت جستجوگر سریع تصادفی<sup>۲</sup> [۱۸ و ۱۹]، شبکه‌ی عصبی و الگوریتم مورچگان، روش‌های مبتنی بر الگوریتم باگ<sup>۳</sup> و روش‌های واکنشی<sup>۴</sup> اشاره کرد [۲۰].

در این مقاله هدف طراحی کنترلگر زیربهینه برای آرایش‌بندی گروهی از ربات‌های متحرک چرخ‌دار غیرهولونومیک در محیطی پویا است. الگوریتم مورد نظر به صورتی است که ربات‌ها ضمن تشکیل آرایش هندسی مطلوب بتوانند مسیری را در کمترین تلاش کنترلی طی کنند و در حین پیمایش مسیر از برخورد با یکدیگر و با موانع اجتناب کنند. در روش ارائه شده به منظور کمینه کردن تابع هزینه کلی، مسئله بهینه‌سازی اولیه به یک سری زیر مسئله‌های بهینه‌سازی بر حسب زیرسیستم‌ها تجزیه شده است. کنترلی که به هر زیرسیستم اعمال می‌شود از ترکیب دو سیگنال حاصل می‌شود یکی سیگنال کنترل محلی (یا لایه اول) و دیگری سیگنال کنترل لایه دوم که با دوره زمانی مشخصی (هماهنگ‌سازی) به کنترلگرهای محلی ارسال می‌شود و در حقیقت اطلاعات مربوط به ارتباط بین زیرسیستم‌ها را که پیش‌بینی نموده است، در بر دارد. کنترل آرایش برای گروه ربات متحرک با ترکیب روش‌های رهبر-پیرو و مبتنی بر رفتار طراحی شده و برای مسئله اجتناب از برخورد از روش واکنشی استفاده شده است. در این تحقیق ابتدا مدل و معادلات مورد نیاز برای طراحی کنترلگر ربات متحرک غیرهولونومیک ارائه می‌شود. سپس به منظور تشکیل آرایش هندسی مطلوب و پایداری سیستم، قانون کنترل بهینه طوری طراحی می‌شود که در محدودیت‌ها و قیود صدق کرده و تابع هزینه در رفتارهای مطلوب مورد نظر، کمینه گردد. در این مسئله معادله دینامیک خطای آرایش به عنوان قید در نظر گرفته می‌شود و رفتارهای مورد نظر در حرکت گروهی ربات‌ها نظیر تشکیل آرایش هندسی، تعقیب مسیر و اجتناب از برخورد می‌باشند که به عنوان توابع هزینه در نظر گرفته شده است. آرایش مطلوب برای ربات‌ها به شکل مثلث منظم فرض شده و مسأله تحت شبکه ارتباطی گراف جهت‌دار بررسی شده است. هر ربات اطلاعات را با عوامل واقع در همسایگی‌اش بطور محلی به اشتراک می‌گذارد و همزمان تلاش می‌کند تا مسیر مرجع تعیین شده را تعقیب کند. ربات‌های مسأله تحت هر گرافی که دارای درخت پوشا<sup>۵</sup> است، با هم در ارتباط می‌باشند. برای بحث اجتناب از برخورد، محیط پیرامون مانع به سه ناحیه‌ی ایمن، اجتناب و خطر تقسیم شده است. در ناحیه‌ی ایمن مانع هیچ‌گونه اثری روی ورودی کنترلی ندارد. در این ناحیه ورودی طوری طراحی شده که ربات‌ها به هم برخوردی ندارند و همچنین آرایش مورد نظر را تشکیل می‌دهند. حال وقتی یکی از ربات‌ها وارد ناحیه اجتناب شد، اثر مانع بر روی ورودی کنترلی اعمال خواهد شد. در این صورت سیگنال کنترلی جدید طوری طراحی می‌شود که ربات با زاویه مناسب از ناحیه خطر خارج شده و از برخورد مانع جلوگیری می‌شود. بنابراین قانون کنترل بهینه به صورتی طراحی شده که سیگنال کنترلی کمینه شده و در عین حال

<sup>1</sup> Metaheuristic and heuristic

<sup>2</sup> Rapidly exploring Random Tree (RRT)

<sup>3</sup> Bug algorithm

<sup>4</sup> Reactive

<sup>5</sup> Spanning tree

### ۳- مدل سازی ارتباطات بین ربات ها

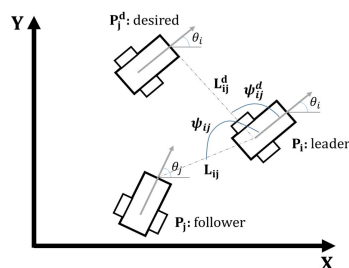
تبادل اطلاعات در سیستم های چند رباتی با استفاده از نظریه گراف مدل سازی می شود. در نظریه گراف ربات ها به عنوان رئوس گراف یا گره ها و ارتباط بین آن ها با یکدیگر توسط لبه ها یا بال ها مدل سازی می شود. یک گراف  $G$  یک جفت منظمی از  $(V(G), E(G))$  شامل یک مجموعه  $V(G)$  از گره ها و یک مجموعه  $E(G)$  از لبه ها است که  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  و  $E \subseteq V \times V$  است. در یک گراف  $V_i$ ،  $i$  آمین ربات را نشان می دهد و یک لبه، یک جفت از گره های مجزای متصل شده است که با  $(v_i, v_j) \in E$  نشان داده می شود. گراف ها بر دو نوع گراف جهت دار و گراف بدون جهت هستند. در گراف جهت دار، لبه  $(v_i, v_j) \in E$  به معنای ارسال اطلاعات از  $v_i$  به  $v_j$  است. در حالی که در یک گراف بدون جهت لبه  $(v_i, v_j) \in E$  به معنای ارسال اطلاعات از هر دو گره به یکدیگر است. برخی از مفاهیم مورد استفاده در نظریه گراف به صورت زیر تعریف می شود:

- مرتبه و اندازه یک گراف: تعداد رئوس یک گراف را مرتبه و تعداد لبه های آن را اندازه گراف گویند.
- ماتریس مجاورت: ماتریس  $A = [a_{ij}]$  را ماتریس مجاورت یا همسایگی گویند اگر  $(v_i, v_j) \in E$  که در آن  $a_{ij} = 0$  و  $a_{ij} > 0$  در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$ ،  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ .
- ماتریس درجه: ماتریس  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  را که در آن  $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  است، ماتریس درجه گویند.
- ماتریس  $L = D - A$  را ماتریس لاپلاس گویند.

با توجه به تعاریف ماتریس مجاورت و درجه، مجموع مولفه های هر سطر از ماتریس لاپلاس صفر خواهد بود. ماتریس لاپلاس یک مقدار ویژه صفر ساده دارد ( $\lambda_1 = 0$ ) که بردار ویژه نظیر آن نیز ۱ خواهد بود و سایر مقادیر ویژه آن  $0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  قسمت حقیقی مثبت دارند اگر و فقط اگر گراف نظیر درخت پوشا داشته باشد. وجود درخت پوشا در گراف سبب می شود مقدار ویژه صفر، ساده باشد. همچنین مقدار ویژه دوم ماتریس لاپلاس نقش مهمی در سرعت همگرایی و پیوستگی شبکه دارد [۲۴].

### ۴- ساختار کنترل آرایش

برای تحقق آرایش بندی نیاز است که روابط بین ربات ها شرح داده شود. در این پژوهش از طرح ارائه شده در شکل ۲ استفاده می شود [۲۵].



شکل ۲- ساختار کنترل آرایش رهبر-پیرو

در شکل ۲ موقعیت پیموده شده ربات رهبر  $i$  ام با  $P_i = [x_i, y_i, \theta_i]$  و موقعیت پیموده شده ربات پیرو  $j$  ام با  $P_j = [x_j, y_j, \theta_j]$ ، فاصله و

زاویه پیموده شده بین ربات پیرو  $j$  ام و ربات رهبر  $i$  ام با  $L_{ij}$  و  $\psi_{ij}$  و فاصله و زاویه مطلوب بین ربات پیرو  $j$  ام و ربات رهبر  $i$  ام با  $L_{ij}^d$  و  $\psi_{ij}^d$  نشان داده می شود. هدف الگوریتم کنترلی، حفظ فاصله و زاویه مطلوب بین ربات رهبر و پیرو است. در این راستا، باید ورودی های کنترلی  $v_i$  و  $\omega_i$  برای ربات پیرو  $R_j$  طوری طراحی شود که خطای بین موقعیت مطلوب و موقعیت پیموده شده ربات پیرو صفر شده و شرایط زیر برقرار گردد:

$$(L_{ij}^d - L_{ij}) = 0, \quad (\psi_{ij}^d - \psi_{ij}) = 0 \quad (3)$$

با توجه به شکل ۲ و از طریق روابط هندسی می توان موقعیت مطلوب ربات پیرو یعنی  $P_j^d$  و موقعیت پیموده شده ربات یعنی  $P_i$  را مطابق روابط (۴) و (۵) استخراج کرد:

$$P_j = \begin{bmatrix} x_i - d \cos \theta_i + L_{ij} \cos(\psi_{ij} + \theta_i) \\ y_i - d \sin \theta_i + L_{ij} \sin(\psi_{ij} + \theta_i) \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$P_j^d = \begin{bmatrix} x_i - d \cos \theta_i + L_{ij}^d \cos(\psi_{ij}^d + \theta_i) \\ y_i - d \sin \theta_i + L_{ij}^d \sin(\psi_{ij}^d + \theta_i) \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

اگر فاصله نسبی بین ربات ها  $L_{ij}$  روی محورهای  $X$  و  $Y$  در دستگاه مختصات کارتزین تصویر شود، روابط (۶) برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \sqrt{L_{ijx}^2 + L_{ijy}^2} \\ L_{ijx} &= X_i - X_j - d \cos \theta_i \\ L_{ijy} &= y_i - y_j - d \sin \theta_i \end{aligned} \quad (6)$$

بنابراین با توجه به شکل ۲ می توان رابطه (۷) را برای  $\psi_{ij}$  نوشت:

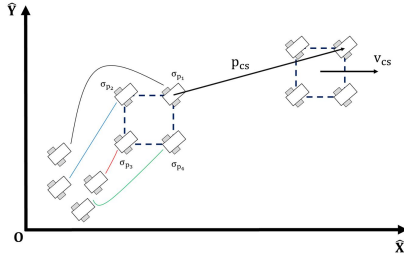
$$\psi_{ij} = \arctan\left(\frac{L_{ijy}}{L_{ijx}}\right) - \theta_i + \pi \quad (7)$$

### ۵- فرمول بندی قیود و توابع هزینه و روش طراحی

در این قسمت استراتژی کنترل آرایش بهینه برای یک گروه ربات متحرک چرخ دار رهبر-پیرو به نحوی طراحی می شود که گروه ربات ها در طول مسیر حرکت بتواند با حفظ یک یا چند آرایش هندسی مشخص، در سرعت های مختلف حرکت کرده و از برخورد با یکدیگر و موانع اجتناب کنند. در این حرکت گروهی، ربات ها به گونه ای حرکت می کنند که یک حرکت هماهنگ بین عوامل ایجاد شده و در نتیجه آرایش مورد نظر در مکان مطلوب تشکیل شود. این کار با اعمال یک کنترلگر بهینه ی توزیع شده برای تعقیب مسیر هماهنگ انجام می گیرد. در این روش ربات ها اطلاعات را با عامل های واقع در همسایگی شان بطور محلی به اشتراک می گذارند و همزمان تلاش می کنند تا مسیر مرجع تعیین شده را تعقیب کنند. همانطور که بیان شد در استراتژی کنترل آرایش از روش بهینه استفاده شده است. مهم ترین هدف کنترل زبربهنیه در این روش تعیین سیگنال کنترلی است که باعث شود فرآیند در محدودیت ها یا قیود صدق کرده و در عین حال توابع هزینه را حداقل نماید. برای تدوین مسئله کنترل زبربهنیه این موارد به ترتیب در نظر گرفته می شود:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{p_1}^T, \dots, \sigma_{p_n}^T, 0^T, \dots, 0^T \\ \sigma_p^T \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

در شکل ۵ تشکیل آرایش هندسی برای چهار ربات توسط بردارهای موقعیت و سرعت خردجمعی و همچنین بردار آفست ثابت جابه‌جایی  $\sigma_{p_i}$  نشان داده شده است.



شکل ۵- آرایش‌بندی ربات‌ها به مکان مطلوب تحت بردارهای موقعیت و سرعت خردجمعی

بردار آرایش  $X$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X} = [\bar{p}^T \quad \bar{v}^T]^T = X - \sigma = [(p - \sigma_p)^T \quad (v - 0)^T]^T \quad (11)$$

با توجه به این که  $\dot{\sigma} = 0$  و  $A\sigma = 0$  مشتق بردار آرایش بصورت معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\dot{\bar{X}} = \dot{X} - \dot{\sigma} = AX + BU + FW = A(\bar{X} + \sigma) + BU + FW = A\bar{X} + BU + FW \quad (12)$$

در معادله فوق،  $A$  ماتریس دینامیک، بردار متغیرهای حالت،  $B$  ماتریس ضرایب ورودی،  $u(t)$  بردار ورودی،  $F$  ماتریس اثر اغتشاش و  $w(t)$  بردار اغتشاش می‌باشد. منظور از اغتشاش در سیستم مورد نظر، انحراف از مقدار اصلی فرایند است که اغلب در بار خارجی و ورودی محرک یا پستی و بلندی سطح مسیر مطرح می‌شود. فرکانس آن کم است و طی زمان میرا می‌شود. بردار خطای آرایش نیز بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$X = \begin{bmatrix} \bar{p}^T & \bar{v}^T \end{bmatrix}^T \quad \square \quad \bar{X} - \bar{X}_{fs} \quad (13)$$

در رابطه فوق  $\bar{X}_{fs}$  بردار حالت خردجمعی نهایی است و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{X}_{fs} = \begin{bmatrix} \underbrace{p_{cs}^T, \dots, p_{cs}^T}_{\bar{p}_{cs}^T} \quad \underbrace{v_{cs}^T, \dots, v_{cs}^T}_{\bar{v}_{cs}^T} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} I_{1 \times n} \otimes [a_x \quad a_y] & I_{1 \times n} \otimes [\beta_x \quad \beta_y] \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

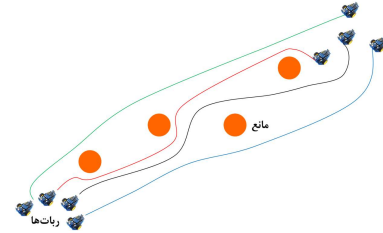
در عبارات فوق،  $a_x$  و  $a_y$  به ترتیب موقعیت خردجمعی نهایی و عبارات  $\beta_x$  و  $\beta_y$  به ترتیب سرعت خردجمعی نهایی در امتداد محورهای  $X$  و  $Y$  هستند. در حالت خردجمعی نهایی  $\bar{U}_{fs} = 0_{2n \times 1}$  و معادله دینامیکی آن بصورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\bar{X}}_{fs} = A\bar{X}_{fs} + BU_{fs} + FW = A\bar{X}_{fs} \quad (15)$$

با توجه به معادله‌ی فوق معادله دینامیک خطای آرایش بصورت زیر بدست می‌آید:

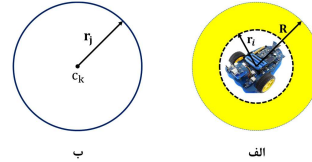
$$\dot{\bar{X}} = \dot{\bar{X}} - \dot{\bar{X}}_{fs} = A\bar{X} + BU + FW - A\bar{X}_{fs} = A\hat{X} + BU + FW \quad (16)$$

- مدل‌سازی سیستم بصورت مشخص نمودن معادلات دینامیکی آن
  - مشخص نمودن و تعریف ریاضی محدودیت‌های فیزیکی
  - تعیین معیار عملکرد سیستم (مشخص نمودن تابع هزینه)
- بنابراین طبق الگوریتم زیربهبوده ابتدا مدل‌سازی ربات انجام شده سپس قیود و پس از آن توابع هزینه در نظر گرفته می‌شود. شکل ۳ سناریوی مورد نظر برای کنترل آرایش چهار ربات در حضور موانع محیطی را نشان می‌دهد.



شکل ۳- نمایی از آرایش‌بندی چهار ربات در حضور موانع محیطی

با توجه به شکل ظاهری ربات و همچنین به منظور در نظر گرفتن شعاع حسی هر ربات را مطابق شکل ۴ به صورت یک دایره با شعاع  $r$  فرض کرده و محدوده سنجش و آشکارسازی ربات با  $R$  نشان داده می‌شود. همچنین  $r_k$  شعاع مانع و  $c_k$  مرکز مانع می‌باشد [۵] و [۲۳]. قسمت الف در شکل ۴ ناحیه‌ی در نظر گرفته شده برای ربات را نشان می‌دهد. قسمت زرد رنگ مشخص شده در این تصویر محدوده سنجش ربات (شعاع حسی) است. قسمت (ب) ابعاد مانع را نشان می‌دهد.



شکل ۴- نواحی در نظر گرفته شده (الف) ربات (ب) مانع

برای هر یک از رفتارهای مورد نظر یک تابع هزینه تعریف شده و معادله دینامیک خطای آرایش به عنوان قید مسئله در نظر گرفته می‌شود. قانون کنترل زیربهبوده بایستی به صورتی طراحی شود که قیود برآورده شود و تابع هزینه کمینه گردد تا ربات‌ها به آرایش مورد نظر دست یابند و در حین پیمایش مسیر، مسئله اجتناب از برخورد اعمال شود. برای حصول کنترل آرایش بایستی دو بردار موقعیت و سرعت خردجمعی که به ترتیب به صورت  $p_{cs}$  و  $v_{cs}$  نشان داده می‌شود، به گونه‌ای وجود داشته باشد که با توجه به ویژگی‌های ماتریس لاپلاس شرایط زیر برآورده شود.

$$(L \otimes I_2)\bar{p}_{cs} = 0_{2n \times 1} \quad , \quad (L \otimes I_2)\bar{v}_{cs} = 0_{2n \times 1} \quad (8)$$

در رابطه‌ی فوق  $L$  ماتریس لاپلاس،  $p_{cs}$  و  $v_{cs}$  به ترتیب موقعیت و سرعت خردجمعی است که بصورت زیر می‌باشد:

$$p_{cs} = p_i - \sigma_{p_i} \quad , \quad v_{cs} = v_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

در رابطه فوق  $\sigma_{p_i}$  بردار آفست ثابت<sup>۱</sup> می‌باشد. این بردار ربات‌ها را به موقعیت مطلوب جابه‌جا می‌کند و عبارت است از:

<sup>۱</sup> Constant offset vector

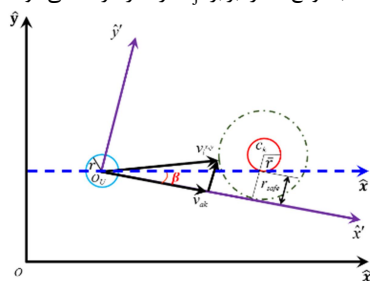
$$\Psi_{i,k} \square \left\{ x \mid x \in \square^2, \|x - c_k\| > R + \bar{r} \right\} \quad (21)$$

در نواحی در نظر گرفته شده در فوق،  $C_k \in \Omega_k$  که  $k = 1, \dots, n+q-1$  است، تعداد موانع است و  $\Omega_i$  اشاره به مجموعه‌ای از موانع دارد که ربات با آن مواجه می‌شود و بصورت زیر است.

$$\Omega_i \square \{p_1, \dots, p_i, \dots, p_n, o_1, \dots, o_j, \dots, o_q\} \quad (22)$$

شکل ۶ نمایی از روش اجتناب از برخورد را نشان می‌دهد. در این شکل نشان‌دهنده‌ی دستگاه مختصات مرجع،  $O_U$  مرکز ربات در دستگاه مختصات متصل به بدنه و  $C_k$  مرکز مانع را نشان می‌دهد. شعاع مانع،  $r_{safe}$  فاصله ایمن از پیش تعیین شده برای شیء برخورد کننده است. همان‌طور که بیان شد الگوریتم اجتناب از برخورد به این

صورت است که ربات با سرعت  $v_i^{x,y}$  به سمت مانع نزدیک می‌شود، هنگامی که ربات در ناحیه عکس‌العمل قرار گرفت بایستی این بردار به بردار  $v_{ak}$  مماس شود تا برخوردی صورت نگیرد. برای مسئله اجتناب از برخورد ربات‌ها با یکدیگر  $\bar{r}$  را برابر  $r$  و برای بحث اجتناب از برخورد ربات‌ها با موانع  $\bar{r}$  را برابر  $r_j$  در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶- استراتژی اجتناب از برخورد ربات با مانع

در شکل فوق  $v_i^{x,y} \in \square^2$  بردار سرعت است که در صفحه  $xOy$  در دستگاه مختصات متصل به بدنه و تبدیل آن به دستگاه مختصات مرجع به صورت (۲۳) می‌باشد. همچنین  $C(\beta)$  ماتریس تبدیل است که بصورت رابطه (۲۴) نوشته می‌شود:

$$v_i^{x',y'} = \begin{bmatrix} v_i^{x'} \\ v_i^{y'} \end{bmatrix} = C(\beta) v_i^{x,y} \quad (23)$$

$$C(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (24)$$

به دلیل این‌که بردار سرعت ربات بر روی محور  $X$  مماس می‌شود، مولفه  $v_i^{x'}$  مد نظر قرار می‌گیرد و بردار اجتناب از برخورد  $v_{ak}$  بصورت عبارت زیر نوشته می‌شود:

$$v_{ak} = C^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} v_i^{x'} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{ak} \in \square^2 \quad (25)$$

زاویه  $\beta$  برای محاسبه تبدیل وضعیت بین دو دستگاه مختصات استفاده می‌شود. در صورتی که مانع در سمت راست ربات قرار داشته باشد، حرکت ربات به دور مانع ساعتگرد بوده و رابطه (۲۶) برقرار است. اگر مانع در سمت چپ ربات قرار داشته باشد حرکت ربات به دور آن پادساعتگرد بوده و رابطه (۲۷) برای محاسبه زاویه  $\beta$  استفاده می‌شود.

$$\beta = \angle c_k O_U \hat{x}' - \angle c_k O_U \hat{x} \quad (26)$$

$$\beta = \angle c_k O_U \hat{x}' + \angle c_k O_U \hat{x} \quad (27)$$

در معادله‌ی فوق در صورتی آرایش تشکیل می‌شود که  $\dot{X} \rightarrow 0$  یعنی پایداری مجانبی حاصل شود. قانون کنترل مطلوب به صورتی است که توابع هزینه را کمینه و قید مسئله را برآورده سازد. حال به بیان توابع هزینه می‌پردازیم. مسئله کنترل آرایش زیربهبودی برای ربات‌ها زمانی حاصل می‌شود که مطابق رابطه زیر،  $J$  کمینه و قید  $\dot{X}$  برآورده شود.

$$\text{Min: } J = J_1 + J_2 + J_3, \quad \dot{X} = A\dot{X} + BU + FW \quad (17)$$

در معادله‌ی فوق، توابع  $J_1$ ،  $J_2$  و  $J_3$  به ترتیب هزینه‌های مربوط به تشکیل آرایش، مسئله اجتناب از برخورد و تعقیب مسیر و تلاش کنترلی می‌باشد. هزینه  $J_1$  که مربوط به تشکیل آرایش است، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_1 = \int_0^\infty \dot{X}^T R_1 \dot{X} dt = \int_0^\infty \left\{ \dot{X}^T \left( \begin{bmatrix} \omega_p^2 L & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \omega_v^2 L^2 - 2\omega_p \omega_c L \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \dot{X} \right\} dt \quad (18)$$

در رابطه‌ی فوق  $L$  ماتریس لاپلاس متقارن،  $\omega_p$ ،  $\omega_v$  و  $\omega_c$  به ترتیب نشان‌دهنده ضریب همگرایی در موقعیت، سرعت و تلاش کنترلی است. در بخش بعد به یافتن  $J_2$  که هزینه مربوط به تعقیب مسیر و اجتناب از برخورد است، پرداخته می‌شود.

## ۵-۱- طراحی روش اجتناب از برخورد

در این قسمت الگوریتمی به منظور جلوگیری از برخورد ربات‌ها با موانع و همچنین با یکدیگر با توجه به حرکت هماهنگ گروه ارائه می‌شود. در این روش با استفاده از اطلاعات محلی بدست آمده، طراحی مسیر انجام می‌شود. این اطلاعات محلی با استفاده از حسگرهای ربات بدست آمده و با استفاده از توابع تبدیل مستقیماً روی ورودی کنترلی اثرگذار هستند. بنابراین تغییرات محیط باعث ایجاد تغییرات در طراحی مسیر می‌شود. در این روش دور هر مانع ثابت یا متحرک یک دایره که نشان‌دهنده محدوده سنجش خطر است، احاطه می‌شود. ایده استفاده از این روش به این صورت است که هنگامی که یک ربات با سرعت  $v_i^{x,y}$  وارد ناحیه سنجش خطر یک مانع می‌شود بردار سرعت ربات به برداری بر دایره‌ی سنجش خطر که دور مانع احاطه شده، مماس می‌شود و وقتی که خطر برخورد با مانع رفع شد مجدداً ربات به تعقیب مسیر هماهنگ گروه می‌پیوندد. در این الگوریتم برای بحث اجتناب از برخورد ربات‌ها با یکدیگر، ربات‌های همسایه به عنوان مانع در نظر گرفته می‌شود [۲۶ و ۲۷]. برای فرمول‌بندی بحث اجتناب از برخورد صفحه به سه ناحیه تقسیم‌بندی می‌شود:

- ناحیه برخورد ربات  $i$  با مانع  $k$   $A_m^k$  که بصورت رابطه (۱۹) نوشته می‌شود:

$$\Lambda_{i,k} \square \left\{ x \mid x \in \square^2, \|x - c_k\| \leq r + \bar{r} \right\} \quad (19)$$

- ناحیه سنجش خطر مانع که تحت عنوان ناحیه عکس‌العمل ربات  $i$  با مانع  $k$   $A_m^k$  نامگذاری می‌شود، بصورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$\Gamma_{i,k} \square \left\{ x \mid x \in \square^2, r + \bar{r} < \|x - c_k\| \leq R + \bar{r} \right\} \quad (20)$$

- ناحیه ایمن نیز بصورت رابطه (۲۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{dg_{i,k}(\hat{X})}{dp_i} = \frac{-4((R+\bar{r})^2 - (r+\bar{r})^2(R+\bar{r}) - \|p_i - c_k\|^2)}{\left(\|p_i - c_k\|^2 - (r+\bar{r})^2\right)^3} \times \quad (37)$$

$$(p_i - c_k) \begin{pmatrix} v_i^{x,y} - v_{a_k} \\ v_i^{x,y} - v_{a_k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_i^{x,y} - v_{a_k} \\ v_i^{x,y} - v_{a_k} \end{pmatrix}$$

، if  $p_i \in \Gamma_{i,k}$

همچنین تابع هزینه  $J_3$  که به فرم مربعی و به منظور یافتن حداقل تلاش کنترلی است، بصورت (38) است:

$$J_3 = \int_0^\infty U^T R_2 U dt \quad (38)$$

در معادله‌ی فوق،  $R_2$  مثبت معین و برابر  $\omega_c^2 I_n \otimes I_2$  می‌باشد.

### ۵-۲- حل مسئله کنترل بهینه

برای حل مسئله کنترل زیربهینه معادله دینامیکی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [28 و 29]:

$$\dot{\hat{X}}(t) = f(\hat{X}(t), U(t)), \quad \hat{X}(0) = \hat{X}_0, \quad t \geq 0 \quad (39)$$

در معادله فوق،  $\hat{X}(t)$  بردار متغیرهای حالت  $n$  بُعدی و  $U(t)$  ورودی‌های کنترلی و عبارت  $\hat{X}(0) = \hat{X}_0$  شرط مرزی است. شاخص عملکرد برای تابع هزینه  $J$  بصورت (40) در نظر گرفته می‌شود:

$$J(\hat{X}_0, U(\cdot)) = \int_0^\infty T(\hat{X}(t), U(t)) dt \quad (39)$$

در رابطه فوق،  $U(\cdot)$  سیگنال کنترلی قابل قبول است که در تمامی زمان‌ها در محدوده‌ی ورودی کنترل صدق می‌کند. تابع هامیلتونی در نظریه کنترل بهینه به وسیله‌ی پونتریاگن ابداع شد. این قانون جزئی از اصل کمینه است. پونتریاگن اثبات کرد یک شرط اساسی برای حل مسئله کنترل بهینه این است که سیگنال کنترلی باید طوری انتخاب شود که تابع هامیلتونی را کمینه کند. این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\hat{X}, U) = T(\hat{X}, U) + V'(\hat{X})f(\hat{X}, U) \quad (40)$$

در تابع فوق  $T(\hat{X}, U)$  اشاره به توابع هزینه،  $V(\hat{X})$  تابع لیاپانوف و  $f(\hat{X}, U)$  دینامیک ربات دارد. طبق کنترل فیدبک  $U(\cdot) = \varphi(\hat{X}(\cdot))$  کمینه تابع هزینه  $J(\hat{X}_0, U(\cdot))$  بصورت (41) حاصل می‌شود:

$$J(\hat{X}_0, \varphi(\hat{X}(\cdot))) = \min_{U(\cdot) \in S(\hat{X}_0)} J(\hat{X}_0, U(\cdot)) \quad (41)$$

در رابطه فوق،  $S(\hat{X}_0)$  اشاره به مجموعه‌ای از کنترلرهای پایدار مجانبی برای هر شرط اولیه  $\hat{X}_0 \in D$  دارد [30]. نهایتاً اگر  $\Omega = \mathbb{R}^m$ ،  $D = \mathbb{R}^n$  و  $\|\hat{X}\| \rightarrow \infty$ ،  $V(\hat{X}) \rightarrow \infty$  باشد، پاسخ سیستم حلقه بسته  $\hat{X} \equiv 0$  پایدار مجانبی سراسری است. مسئله کنترل آرایش بهینه شامل قیود و معادله دینامیک بصورت معادلات زیر است:

$$\begin{aligned} T(\hat{X}, U) &= \hat{X}^T R_1 \hat{X} + h(\hat{X}) + U^T R_2 U \\ f(\hat{X}, U) &= A\hat{X} + BU + FW \end{aligned} \quad (42)$$

در رابطه فوق، تابع لیاپانوف  $V(\hat{X})$  که به طور پیوسته مشتق پذیر است، بصورت (43) انتخاب شده است:

$$V(\hat{X}) = \hat{X}^T P \hat{X} + g(\hat{X}) \quad (43)$$

با جایگذاری توابع هزینه، مدل دینامیکی و تابع لیاپانوف، تابع هامیلتونی برای مسئله آرایش بهینه بصورت زیر نوشته می‌شود:

کمان زاویه‌ای در عبارات فوق برای حرکت ساعتگرد و پادساعتگرد بصورت (28) و (29) بدست می‌آید:

$$c_k \circ_U \hat{x}' = \arcsin \frac{r_{safe} + \hat{r}}{d} \quad (28)$$

$$c_k \circ_U \hat{x} = \arccos \frac{\hat{X}_o - \hat{X}_U}{d} \quad (29)$$

بنابراین با توجه به بحث فوق تابع  $J_2$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$J_2 = \int_0^\infty h(\hat{X}) dt \quad (30)$$

برای یافتن  $h(\hat{X})$  که تابع هزینه مربوط به مسئله تعقیب مسیر و اجتناب از برخورد است، عبارت  $g(\hat{X})$  بصورت (31) تعریف می‌شود:

$$g(\hat{X}) = g_{tr}(\hat{X}) + g_a(\hat{X}) \quad (31)$$

در رابطه فوق  $g_{tr}(\hat{X})$  مسئله تعقیب مسیر و  $g_a(\hat{X})$  مربوط به مسئله اجتناب از برخورد است. تابع مربوط به تعقیب مسیر بصورت معادله‌ی زیر بیان می‌شود:

$$g_{tr}(\hat{X}) = \sum_{i=1}^n g_{tr_i}(\hat{X}) \quad (32)$$

اگر ربات به سیگنال مرجع دسترسی نداشته باشد  $g_{tr}(\hat{X})$  برابر صفر است و اگر دسترسی به مرجع وجود داشته باشد، این تابع بصورت (33) بدست می‌آید:

$$g_{tr_i}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} (p_i - p_{ref})^T & (v_i - v_{ref})^T \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \omega_{tp}^2 I_2 & \omega_{tp} \omega_{tv} I_2 \\ \omega_{tp} \omega_{tv} I_2 & \omega_{tv}^2 I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i - p_{ref} \\ v_i - v_{ref} \end{bmatrix} \quad (33)$$

در رابطه فوق،  $\omega_{tp}$  و  $\omega_{tv}$  وزن‌های قابل تنظیم برای کنترل و تعقیب مسیر هستند. همچنین  $v_{ref}$  و  $p_{ref}$  به ترتیب موقعیت و سرعت مرجع هستند. قسمت دوم  $g(\hat{X})$  یعنی  $g_a(\hat{X})$  مربوط به بحث اجتناب از برخورد است که مطابق زیر تعریف می‌شود.

$$g_a(\hat{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n+q-1} g_{i,k}(\hat{X}) \quad (34)$$

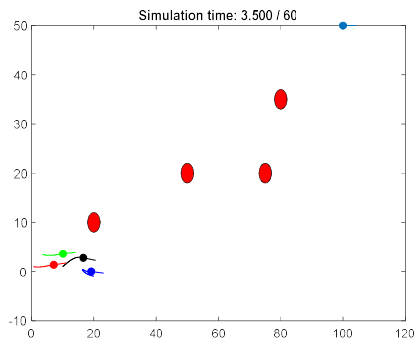
اگر ربات در ناحیه ایمن قرار داشته باشد تابع اجتناب از برخورد  $g_{i,k}(\hat{X})$  برابر صفر و اگر در ناحیه عکس‌العمل باشد این تابع بصورت (35) بدست می‌آید:

$$g_{i,k}(\hat{X}) = \frac{\left( (R+\bar{r})^2 - \|p_i - c_k\|^2 \right)^2}{\left( \|p_i - c_k\|^2 - (r+\bar{r})^2 \right)^2} \times \begin{pmatrix} v_i^{x,y} - v_{a_k} \\ v_i^{x,y} - v_{a_k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_i^{x,y} - v_{a_k} \\ v_i^{x,y} - v_{a_k} \end{pmatrix} \quad (35)$$

با در نظر گرفتن روابط فوق تابع  $h(\hat{X})$  بصورت (36) بدست می‌آید:

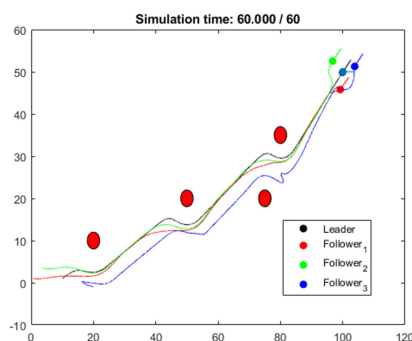
$$\begin{aligned} h(\hat{X}) &= \frac{\omega_p}{\omega_c} g_v^T(\hat{X})(L \otimes I_2) \hat{p} + \\ & \frac{\omega_v}{\omega_c} g_v^T(\hat{X})(L \otimes I_2) \hat{v} - g_p^T(\hat{X}) \hat{v} + \frac{1}{4\omega_c^2} \|g_v'(\hat{X})\|^2 \end{aligned} \quad (36)$$

در رابطه فوق عبارات  $g_v'(\hat{X})$ ،  $g_p'(\hat{X})$  و  $g_v(\hat{X})$  به ترتیب مشتقات جزئی  $g(\hat{X})$  نسبت به خطای سرعت  $\hat{v}$ ، خطای موقعیت  $\hat{p}$  است. مشتق  $g_{i,k}(\hat{X})$  نسبت  $p_i$  در ناحیه عکس‌العمل بصورت زیر بدست می‌آید:



شکل ۸- موقعیت اولیه ربات‌ها، موانع و محل قرارگیری آرایش مطلوب

در شکل ۹ حرکت چهار ربات و رسیدن به آرایش هندسی مورد نظر با اعمال مسئله اجتناب از برخورد ربات‌ها با یکدیگر و با موانع پس از طی زمان ۶۰ ثانیه نشان داده شده است.



شکل ۹- حرکت چهار ربات و رسیدن به آرایش مد نظر با اعمال مسئله اجتناب از برخورد

مطابق شکل فوق در ابتدا خطر برخورد ربات ۱ با ربات ۲ ایجاد می‌شود که الگوریتم اجتناب از برخورد بین ربات‌ها از برخورد جلوگیری می‌کند. الگوریتم اجتناب از برخورد ربات‌ها با یکدیگر به گونه‌ای است که در این قسمت ربات ۲ مانعی برای ربات ۱ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین پیرامون ربات ۲ یک دایره تشکیل می‌شود که مسیر مرجعی برای ربات ۱ طراحی می‌کند و این مسیر مرجع توسط کنترلگر تعقیب مسیر ربات ۱ تعقیب می‌شود تا خطر برخورد بین این دو ربات از بین برود. بعد از رفع خطر برخورد، هر دو ربات به رفتار جمعی گروه ادامه می‌دهد تا آرایش مثلث در مکان مطلوب همگرا شود. همین حالت نیز در ابتدای حرکت برای ربات‌های ۲ و ۳ نیز رخ می‌دهد. در ادامه نیز ربات رهبر شروع به تعقیب مسیر خود کرده و ربات‌های پیرو به صورت هماهنگ مسیر مرجع را دنبال می‌کنند به نحوی که در مکان مطلوب آرایش هندسی مدنظر تشکیل دهند. مطابق شکل خطر برخورد ربات‌ها با مانع نیز وجود دارد ولی کنترلگر اجتناب از برخورد بین ربات‌ها و با مانع از برخورد بین آن‌ها جلوگیری می‌کند. بنابراین مطابق الگوریتم پیشنهادی ربات‌ها به آرایش هندسی مثلثی دست یافته و در حین پیمایش مسیر از برخورد با یکدیگر و موانع اجتناب کرده و در مکان مطلوب قرار می‌گیرند. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ موقعیت ربات‌ها در

$$H(\hat{X}, U, v^T(X)) = T(\hat{X}, U) + v^T(\hat{X})f(\hat{X}, U) = \quad (44)$$

$$\hat{X}R_1\hat{X} + h(\hat{X}) + U^TR_2U + [2\hat{X}^TP + g^T(\hat{X})][A\hat{X} + BU]$$

با مشتق‌گیری تابع همیلتونی نسبت به  $U$ ، قانون کنترل زیربهبینه بصورت زیر بدست می‌آید:

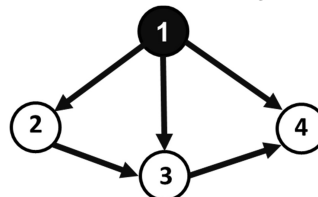
$$\frac{\partial H(\hat{X}, U, v^T(X))}{\partial U} = 0 \quad (45)$$

$$U = -\frac{\omega_p}{\omega_c}(L \otimes I_2)(p - \sigma_p) - \frac{\omega_v}{\omega_c}(L \otimes I_2)v - \frac{1}{2\omega_c^2}g'_v(X)$$

قانون کنترل طراحی شده، توابع هزینه مورد نظر را کمینه و قیود مسئله را برآورده می‌کند. بنابراین هدف مسئله که حل زیربهبینه آرایش‌بندی ربات‌های متحرک بود، حاصل شد. یعنی توابع هزینه مورد نظر شامل تشکیل آرایش، تعقیب مسیر، اجتناب از برخورد ربات‌ها با یکدیگر و با موانع کمینه شد و قید مسئله یعنی معادله دینامیک خطای آرایش برآورده شد.

## ۶- نتایج شبیه‌سازی

به منظور نشان دادن عملکرد صحیح کنترلگر زیربهبینه طراحی شده در رسیدن به آرایش هندسی مورد نظر و همچنین بحث اجتناب از برخورد، شبیه‌سازی‌هایی در محیط نرم‌افزار MATLAB انجام شد. بدین منظور فرض شد در یک محیط پویا ۴ ربات متحرک چرخ‌دار وجود دارد و هدف تشکیل آرایش هندسی مثلث منظم در محیطی پویا است. توپولوژی تبادل اطلاعات بین ربات‌ها به صورتی در نظر گرفته شده که گراف جهت‌دار قوی و دارای درخت پوشا است. شبکه ارتباطی ربات‌ها در شکل ۷ نشان داده شده است.



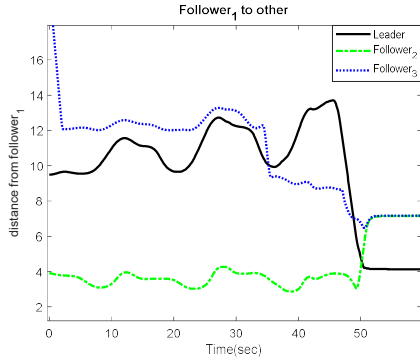
شکل ۷- شبکه ارتباطی بین ربات‌ها

در شکل ۷، عامل ۱ نقش ربات رهبر و عامل‌های دیگر نقش ربات‌های پیرو را دارند. در (۴۶) ماتریس‌های مجاورت، درجه و لاپلاس این توپولوژی به ترتیب از چپ به راست نشان داده شده است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

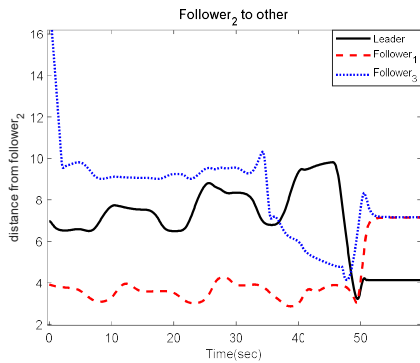
به منظور اعتبارسنجی الگوریتم اجتناب از برخورد با موانع، ۴ مانع به صورت دایروی در مسیر پیمایش ربات‌ها فرض شده است. با توجه به معادلات دینامیکی و مانورپذیری ربات‌های مورد نظر و با استفاده از معیار نایکوئیست زمان نمونه‌برداری ۰/۰۳ ثانیه بدست آمد. همچنین مدت زمان شبیه‌سازی ۶۰ ثانیه در نظر گرفته شد. در شکل ۸ موقعیت اولیه ربات‌ها و موانع نشان داده شده است. دایره آبی‌رنگ مشخص شده در گوشه بالا و سمت راست مکان مطلوب قرارگیری ربات رهبر در نقطه (۵۰، ۱۰۰) را نشان می‌دهد.





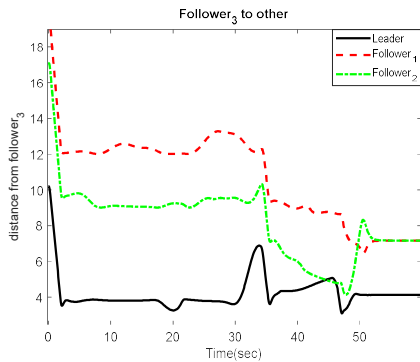
شکل ۱۳- فاصله بین ربات پیرو ۱ با ربات‌های دیگر

در شکل ۱۴ فاصله بین ربات پیرو ۲ با دیگر ربات‌ها نشان داده شده است. مطابق شکل خطر برخورد این ربات یکبار با ربات رهبر و بار دیگر با ربات پیرو ۱ وجود داشته اما کنترلگر اجتناب از برخورد ربات‌ها با یکدیگر از برخورد جلوگیری کرده است.



شکل ۱۴- فاصله بین ربات پیرو ۲ با ربات‌های دیگر

در شکل ۱۵ فاصله بین ربات پیرو ۳ با دیگر ربات‌ها نشان داده شده است. مطابق شکل خطر برخورد این ربات با هیچکدام از ربات‌های دیگر وجود ندارد و کمترین فاصله این ربات با ربات رهبر در حدود ۴ متر است.

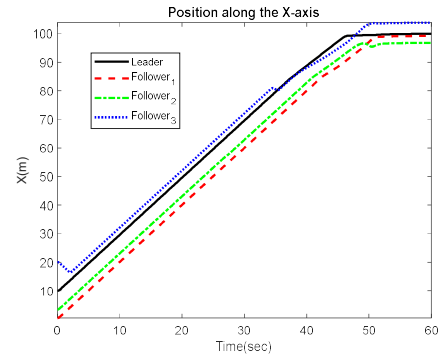


شکل ۱۵- فاصله بین ربات پیرو ۳ با ربات‌های دیگر

## ۷- نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت و ضرورت رو به رشد استفاده از ربات‌های متحرک چرخ‌دار غیرهولونومیک به صورت گروهی، در این مقاله مسئله

راستای محورهای طولی (X) و عرضی (Y) نشان داده شده است.



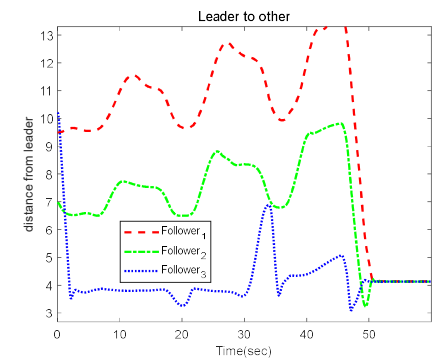
شکل ۱۰- موقعیت ربات‌ها در راستای محور X

در شکل ۱۱ موقعیت ربات‌ها نسبت به محور Y نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل نیز مشخص است پس از تشکیل آرایش، ربات‌های پیرو مسیر مرجع رهبر را دنبال کرده و از برخورد با یکدیگر و با موانع اجتناب کرده‌اند.



شکل ۱۱- موقعیت ربات‌ها در راستای محور Y

در شکل‌های ۱۲ تا ۱۵ فاصله ربات‌ها با یکدیگر ارائه شده است. مطابق شکل ۱۲ خطر برخورد ربات رهبر با ربات پیرو ۲ و ۳ در لحظه ۵۰ ثانیه وجود دارد که در این زمان الگوریتم اجتناب از برخورد، مانع برخورد شده است.



شکل ۱۲- فاصله بین ربات رهبر با ربات‌های پیرو

در شکل ۱۳ فاصله بین ربات پیرو ۱ با دیگر ربات‌ها نشان داده شده است. مطابق شکل خطر برخورد این ربات با ربات پیرو ۲ وجود دارد که الگوریتم اجتناب از برخورد مانع برخورد شده است.

- [13] Xu D., Zhang X., Zhu Z., Chen C. and Yang P., Behavior-based formation control of swarm robots. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-13, 2014.
- [۱۴] فریطوس س.م.ر، همایی ه. و هادیان جزی ش. کنترل بینه در برنامه‌ریزی مسیر بازوهای مکانیکی افزونه با رابط نهایی انعطاف‌پذیر براساس حرکت صلب در مساله تعقیب مسیر. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۴۷، ش. ۳، ص ۱۹۷-۲۰۶، ۱۳۹۶.
- [15] Keighobadi, J., Fazeli, K.A. and Shahidi, M.S., Self-Constructing Neural Network Modeling and Control of an AGV. *Positioning*, Vol. 4, No. 2, pp. 160-168, 2013.
- [16] Pandey A, Pandey S, Parhi D.R., Mobile Robot Navigation and Obstacle Avoidance Techniques. *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 3, pp. 1-12, 2017.
- [17] Wang G., Wang C., Du Q., Li L., Dong W., Distributed cooperative control of multiple nonholonomic mobile robots. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 83, No. 3, pp. 525-541, 2016.
- [18] Wu Z., Hu G., Feng L., Wu J., Liu S., Collision avoidance for mobile robots based on artificial potential field and obstacle envelope modelling. *Assembly Automation*, Vol. 36, No. 3, pp. 318-332, 2016.
- [19] Kloetzer M., Mahulea C. and Gonzalez R., Optimizing cell decomposition path planning for mobile robots using different metrics. *In 19<sup>th</sup> International Conference on System Theory, Control and Computing*, Chelie Gradistei, Romania, 2015.
- [20] Iswanto I., Wahyunggoro O., Cahyadi A.L., Formation pattern based on modified cell decomposition algorithm. *International Journal on Advanced Science, Engineering and Information Technology*, Vol. 7, No. 3, pp. 829-835, 2017.
- [۲۱] کیقبادی ج.، منهای م. ب. و کیگانیان م.، کنترل غیر خطی روبات سیار چرخدار با روش محاسبات فازی. *مجله علمی پژوهشی امیرکبیر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر*، د. ۳۷، ش ۲، ص ۴۱-۵۱، ۱۳۸۵.
- [22] Keighobadi, J. and Menhaj, M.B., From Nonlinear to Fuzzy Approaches in Trajectory Tracking Control of Wheeled Mobile Robots. *Asian Journal of Control*, Vol. 14, No. 4, pp. 960-973, 2012.
- [23] Keighobadi, J., Sadeghi, M.S. and Fazeli, K.A., Dynamic Sliding Mode Controller for Trajectory Tracking of Nonholonomic Mobile Robots. *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 44, No. 1, pp. 962-967, 2011.
- [24] Ganeshmurthy M.S. and Suresh G.R., Path planning algorithm for autonomous mobile robot in dynamic environment. *In 3<sup>rd</sup> International Conference on Signal Processing, Communication and Networking*, Chennai, India, 2015.
- [25] Cheng Y., Jia R., Du H., Wen G., Zhu W., Robust finite time consensus formation control for multiple nonholonomic wheeled mobile robots via output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Vol. 28, No. 6, pp. 2082-2096, 2018.
- [26] Siegwart R., Nourbakhsh I.R. and Scaramuzza D., *Introduction to autonomous mobile robots*. MIT press, Cambridge, 2011.
- [27] Diestel R., *Graph Theory*, Springer, Verlag, 2017.
- [28] Miao Z., Liu Y.H., Wang Y., Yi G., Fierro R., Distributed Estimation and Control for Leader-Following Formations of Nonholonomic Mobile Robots. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 1-9, 2018.
- [29] Wang Y., Wang D., Yang S., Shan M.A., Practical leader-follower tracking control scheme for multiple nonholonomic mobile robots in unknown obstacle environments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 26, No. 1, pp. 1-9, 2018.
- [30] Du H., Wen G., Cheng Y., He Y., Jia R., Distributed finite-time cooperative control of multiple high-order nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Vol. 28, No. 12, pp. 2998-3006, 2017.
- آرایش‌بندی بینه توزیع‌شده برای چهار ربات در یک محیط دینامیکی با در نظر گرفتن مسئله اجتناب از برخورد به روش واکنشی طراحی شد. روش کنترل زبربینه‌ای طراحی شده از ترکیب روش رهبر-پیرو و رویکرد مبتنی بر رفتار بدست آمد. بدین صورت که برای هر یک از رفتارهای مورد نظر مانند تشکیل آرایش هندسی، تعقیب مسیر و اجتناب از برخورد، تابع هزینه‌ای تعریف شد و معادله دینامیک خطای آرایش به عنوان قید مسئله در نظر گرفته شد. به منظور مدل‌سازی ارتباطات بین ربات‌ها از نظریه گراف استفاده شد. قانون کنترل زبربینه به صورتی طراحی شد که ربات‌ها به آرایش مد نظر دست یافته و در طی پیمایش مسیر از برخورد با یکدیگر و با موانع اجتناب شد. به عبارت دیگر قانون کنترل مشارکتی برای ربات‌ها به نحوی طراحی شد که در محدودیت‌ها و قیود صدق کرد و توابع هزینه را حداقل نمود. علاوه بر این ورودی‌های کنترلی در لحظه شروع و نیز به هنگام گذر از موانع هموار بوده و پرش‌های ناگهانی نداشته و قابل قبول هستند. کنترلگر پیشنهادی پایدار و انعطاف‌پذیر بوده و قابلیت پیاده‌سازی را دارد. نتایج شبیه‌سازی کارایی و موثر بودن قانون کنترل زبربینه طراحی شده در ایجاد آرایش، تعقیب مسیر، اجتناب از برخورد و کمینه کردن ورودی‌های کنترلی را به خوبی نشان می‌دهد.

## ۸- مراجع

- [1] Arai T., Pagello E. and Parker L.E., Advances in multi-robot systems, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 18, No. 5, pp. 655-661, 2002.
- [2] Ani Hsieh M., Chirikji An G., *Distributed autonomous robotic systems*. Springer, Berlin Heidelberg, 2014.
- [3] Keighobadi J. and Menhaj M. B., From Nonlinear to Fuzzy Approaches in Trajectory Tracking Control of Wheeled Mobile Robots, *Asian Journal of Control*, Vol. 14, No. 4, pp. 960-973, 2012.
- [4] Keighobadi, J., Shahidi, M.S., Khajeh, A.N. and Fazeli, K.A., Dynamic Based SMC of Nonholonomic Mobile Robots. *Positioning*, Vol. 4, No. 2, pp. 153-159, 2013.
- [5] Azizi M. R. and Keighobadi J., Point Stabilization of Nonholonomic Spherical Mobile Robot Using Nonlinear Model Predictive Control, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 98, pp. 347-359, 2017.
- [6] Desai J.P., Ostrowski J.P., Kumer V., Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 6, pp. 905-908, 2001.
- [7] Lima P.U., Custodio L.M., *Multi-robot systems*. In *Innovations in Robot Mobility and Control*, Springer, Berlin Heidelberg, 2005.
- [8] Dong W.J., Guo Y. and Farrell J.A., Formation control of nonholonomic mobile robots, *American Control Conference*, Minnesota, USA, 2006.
- [9] Savkin A.V., Wang C., Baranzadeh A., Xi Z., Nguyen H.T., Distributed formation building algorithms for groups of wheeled mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 75, No. 1, pp. 463-474, 2016.
- [10] Kowdiki K.H., Barai R.K. and Bhattacharya S., Leader-follower formation control using artificial potential functions: A kinematic approach, *International Conference on Advances in Engineering, Science and Management*, Nagapattinam, Tamil Nadu, India, 2012.
- [11] Loria A., Dardemir J., Jarquin N.A., Leader-follower formation and tracking control of mobile robots along straight paths. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 24, No. 2, pp. 727-732, 2016.
- [12] Lee G., Chwa D., Decentralized behavior-based formation control of multiple robots considering obstacle avoidance. *Intelligent Service Robotics*, Vol. 11, No. 1, pp. 127-138, 2018.