نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۹۴، جلد ۵۱، شماره ۱، بهار، ۱۴۰۰، صفحه ۲۴۷-۲۵۵ - پژوهشی کامل - DOI: 10.22034/jmeut.2021.10471

تحلیل ارتعاشی نانوتیر حسگر جرم در مودهای بالا با در نظر گرفتن اثر ابعاد در مقیاس نانو

مصطفی ناظمی زاده* استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مکانیک، ایران، nazemizadeh@aut.ac.ir

هادی صفاری دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مکانیک، ایران، saffari.hadi@yahoo.com

چکیده

در مقیاس نانو، استفاده از نانوتیرهای مرتعش در کاربرد حسگر جرم‌های ناچیز بسیار متداول بوده و مورد بررسی بسیاری از محققان فناوری نانو می‌باشد. این مقاله به تحلیل دینامیکی و ارتعاشی نانوتیرهای حسگر جرم در مودهای مختلف ارتعاشی با در نظر گرفتن اثر ابعاد در مقیاس نانو می‌پردازد. بدین منظور، معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی یک نانوتیر با در نظر گرفتن اثر ابعاد و جرم حسگر در فاصله دلخواه از تیر و با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی استخراج می‌شود. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات نهایی و شرایط مرزی نانوتیر حسگر جرم بدست آمده و از روش تحلیلی، مشخصات فرکانسی نانوتیر حسگر جرم به‌دست می‌آید. سپس اثر ابعاد و جرم حس شده بر رفتار فرکانسی نانوتیر به ویژه در مودهای بالاتر ارتعاشی شبیه‌سازی می شود. نتایج نشان می‌دهد که ویژگی حسگر جرم نانوتیر در مودهای بالاتر افزایش یافته و لذا کاربرد نانوتیر حسگر جرم در مودهای بالاتر ارتعاشی حایز اهمیت است. همچنین مشاهده می‌شود که اثر ابعاد در مودهای بالاتر ارتعاشی غیرقابل چشم‌پوشی بوده و این اثرات بر فرکانس طبیعی بیشتر از تابع شکل مود نانوتیر است.

واژه‌های کلیدی: نانوتیر، حسگر جرم، ارتعاش، غیر محلی، اثر ابعاد، مود بالا.

Vibration Analysis of Mass Sensing Nanobeams at Higher Modes with Consideration of Size Effects in Nano-Scales

M. Nazemizadeh Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran.

H. Saffari Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran.

Abstract

In Nano-scales, the application of nanobeams as sensors of infinitesimal masses is widespread and they been studied by many researchers in nanotechnology. This paper analyzes dynamics and vibration of mass sensing nanobeams in various vibrational modes, taking into account the size effects in nano-scales. To do this, the governing equations for the transverse vibration of a nanotube are derived by considering size effects and an added mass at the arbitrary distance from the beam using the nonlocal elasticity theory. Employing the Hamilton principle, final equations and boundary conditions of the mass sensing nanobeam are obtained. Using the exact method, the frequency characteristics of the mass sensing nanobeam are obtained. Then, The size effects and mass sensing on the frequency behavior of the nonlocal nanobeam are simulated especially at higher modes of vibration. The obtained results show that the mass sensor feature of the nanobeam has increased at higher modes and therefore higher vibrational modes should be carefully studied. It is also observed that size effects at the higher vibrational modes are inventible, and these effects on the frequency are greater than the mode shapes of the nanobeam.

Keywords: Nanobeam, Mass Sensor, Vibration, Non-local, Size effect, Higher modes.

۱- مقدمه

از دیرباز تیرهای مکانیکی در بسیاری از سازه های مهندسی به‌صورت گسترده مورد کاربرد قرار می‌گیرند. همچنین با توجه به پیشرفت‌های چشمگیر در فناوری‌های ساخت و تولید، ساخت و کاربرد تیرهای کوچک با ابعاد میکرو/نانو در دو دهه گذشته در تمامی زمینه‌های مهندسی گسترش یافته است [۱-۴]. امروزه تیرهای کوچک به‌علت خصوصیات ویژه نظیر جرم ناچیز، ابعاد کوچک، ساخت آسان و عملکرد فرکانس بالا، به‌عنوان عضو اصلی در سیستم‌های مقیاس میکرو/نانو شناخته می‌شوند [۵]. یکی دیگر از ویژگی‌های مهم میکرو/نانوتیرها مربوط به جابجایی و تغییر شکل آن‌ها ناشی از خاصیت الاستیک این سیستم‌ها می‌باشد. این برتری از ناتوانی ساخت مفاصل در مقایس کوچک ناشی شده و لذا کاربرد آن‌ها را در سیستم‌های نانوتکنولوژی حایز اهمیت کرده است [۶]. بنابراین تیرهای مقیاس کوچک در بسیاری از کاربردهای نانو فناوری نظیر میکروسکوپ‌های مقیاس نانو، نانو رزوناتورها، نانو حسگرها و نانومحرک‌ها به عنوان سازه اصلی نقش ایفا می‌کنند [۷-۹]. بنابراین در دو دهه اخیر تحقیقات زیادی بر عملکرد تیرهای مقیاس کوچک انجام شده است.

طاهری [۱۰] به تحلیل مکانیکی نانوتیر میکروسکوپ نیروی اتمی با در نظر گرفتن مدل‌های مختلف اصطکاکی در مجاورت سطح پرداختند. او به مدلسازی دقیق سیستم پرداخته و با در نظر گرفتن مدل‌های مختلف تماسی نانوتیر با سطح به تحلیل نانوتیر پرداخت. لیو و همکارانش [۱۱] به تحلیل استاتیکی و کمانش یک نانوتیر کربنی پرداختند. آن‌ها اثر ناپایداری استاتیکی بر اندازه‌گیری مشخصات مکانیکی تیرنانو را بررسی کردند. اگر چه آن‌ها از مود استاتیکی نانوتیرها استفاده کردند، اما به‌علت محدودیت جابجایی و خیز تیرها در

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: nazemizadeh@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۰۲/۰۲
تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۲/۰۱

مقیاس کوچک، در کاربردهای عملی اکثر نانوتیرها در مود دینامیکی و ارتعاشی به کار می‌روند. دمیر و همکارانش [۱۲] به تحلیل دینامیکی یک نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات برش پرداختند. آن‌ها از روش عددی برای حل معادلات ارتعاشی حاکم بر نانوتیر پرداخته و فرکانس‌های طبیعی سیستم را به‌دست آوردند. ژیانگ و دیگران [۱۳] ارتعاشات یک نانوتیر تحریک شده با نیروهای محیط الاستیک را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که فرکانس‌های طبیعی نانوتیر به پارامترهای متعددی نظیر ابعاد تیر و مشخصات محیط بستگی دارد. طاهری [۱۴] به آنالیز حساسیت پارامترهای ابعادی بر رفتار مکانیکی نانوتیرهای کربنی با استفاده از روش آماری آنالیز حساسیت سوبل پرداخت. او نیرو را به عنوان پارامتر مهم در عملکرد نانوتیر میکروسکوپ نیروی اتمی معرفی کرد و اثر پارامترهای مختلف ورودی نظیر طول، ضخامت و ارتفاع نانوتیر را بر عملکرد آن با استفاده از آنالیز حساسیت مورد مطالعه قرار داد.

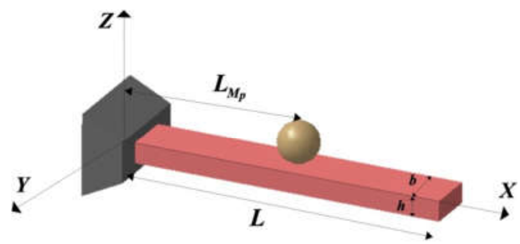
اگرچه مراجع بیان شده به مدل‌سازی مکانیکی و تحلیل تیرهای کوچک بر اساس نظریه الاستیسیته کلاسیک پرداخته‌اند، اما توانایی این نظریه در تشریح مکانیک سیستم‌های مقیاس کوچک با انجام آزمایشات تجربی و شبیه‌سازی مولکولی مورد تردید زیادی قرار گرفته است [۱۵-۱۷]. در حقیقت در مقیاس کوچک، خصوصیات و رفتار مکانیکی میکرو/نانوتیرها وابسته به ابعاد آن‌ها بوده که نظریه الاستیک کلاسیک قادر به اعمال و تفسیر اثر ابعاد در مقیاس کوچک نیست [۱۷]. از طرفی انجام آزمایشات تجربی در مقیاس میکرو/نانو بسیار دشوار و هزینه بر می‌باشد. لذا در چند دهه اخیر نظریه‌های الاستیسیته مرتبه بالاتر به منظور تحلیل استاتیکی و دینامیکی سیستم‌های مقیاس کوچک ارائه شده که توانایی در نظر گرفتن اثر ابعاد را داشته و مورد توجه بسیاری از محققان علم نانو قرار گرفته است. در [۱۸] به تحلیل استاتیکی نانوتیرها با استفاده از نظریه الاستیسیته سطح پرداخته شد. با حل دقیق معادلات حاکم بر سیستم، اثرات سطح بر خیز نانوتیرها مورد بررسی قرار گرفت. ایلیشاکوف و دیگران [۱۹] به تحلیل ارتعاشی نانوتیر کربنی با کاربرد حسگر بیولوژیکی با استفاده از اثرات تنش سطح پرداختند. آن‌ها نشان دادند که اثر ابعاد بر رفتار دینامیکی و خاصیت حسگری نانوتیر بسیار موثر است. در [۲۰] از نظریه تنش کوپل اصلاح شده برای مدلسازی و بررسی اثر گرما بر رفتار ارتعاشی نانو صفحه با ساختار درجه بندی شده استفاده شد و نشان داده شد که تغییر دما و پارامترهای ابعادی بر فرکانس طبیعی سیستم در شرایط مرزی مختلف اثرگذار است.

از طرفی در میان نظریه‌های الاستیسیته مرتبه بالاتر، نظریه مکانیک پیوسته غیرمحلی که برای اولین بار توسط ارینگن [۲۱-۲۲] معرفی شده است توانسته است توجه بسیاری از محققان علم نانوفناوری را جلب کرده است. پدیسون و همکارانش [۲۳] نظریه الاستیسیته غیرمحلی برای مدل‌سازی نانوتیر را بکار بردند و نشان دادند که نظریه الاستیسیته غیرمحلی نقش مفیدی در کاربردهای میکرو/نانوفناوری ایفا می‌کند. در [۲۴] از نظریه الاستیسیته غیرمحلی برای استخراج معادلات خمش و ارتعاش تیرهای غیرمحلی دو سر ثابت استفاده کردند. ژانگ و دیگران [۲۵] به تحلیل کمانش تیر با تکیه گاههای ضعیف در معرض نیروی محوری بر اساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی پرداختند. آنها اثر ابعاد و اتصالات تضعیف شده بر بار کمانشی نانوتیر را بررسی کردند. آیدوگ [۲۶] به بررسی اثر ابعاد کوچک بر ارتعاشات طولی نانومیله‌ها بر اساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی پرداختند. آن‌ها با حل دقیق مسئله، یک معادله فرکانسی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی نانومیله‌های دوسر و یکسرگیردار ارائه دادند. وانگ و دیگران [۲۷] فرمولاسیون ارتعاشات آزاد میکرو/نانوتیرها ضخیم و کوتاه مدل شده با نظریه الاستیسیته غیرمحلی ارائه داده و اثر ابعاد کوچک و تغییر شکل برشی را بر فرکانس طبیعی تیر بررسی کردند. رئیسی استبرق [۲۸] به تحلیل نانو صفحات با استفاده از نظریه الاستیسیته غیر محلی پرداخت. او تاثیر عوامل مختلفی همچون شعاع و ضخامت نانو صفحه و همچنین شرایط مرزی بر روی رفتار مکانیکی نانوصفحه بررسی کرد. او با بیان اهمیت اثر ابعاد در مقیاس کوچک، اثرات مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طبیعی و بارهای بحرانی نانوصفحات را بررسی کرد. ناظمی زاده و بختیاری نژاد [۲۹] به تحلیل ارتعاشات آزاد میکرو/نانوتیرها دارای لایه پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها اثر ابعاد را بر رفتار ارتعاش خطی تیر غیرمحلی بررسی کرده و نشان دادند که پارامتر غیرمحلی اثر غیر قابل چشم‌پوشی بر رفتار دینامیکی نانوتیر دارد. همچنین آن‌ها [۳۰] به ارائه یک فرمول بندی عمومی برای محاسبه فاکتور کیفیت نانوتیرهای مرتعش در مجاورت هوا پرداختند. تای و دیگران [۳۱] به ارائه فرمولاسیون خمش و ارتعاش نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و اثر ابعاد با در نظر گرفتن تئوری الاستیسیته غیرمحلی پرداختند. سپس پاسخ تحلیلی معادلات حاکم ارائه گردیده و اثر ابعاد بر رفتار مکانیکی نانوتیر بررسی شد. همچنین طرابلسی و همکارانش [۳۲] به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری نانوتیر غیرمحلی بر بستر الاستیک پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش دیفرانسیلی تربیعی به حل معادلات حاکم بر تیر غیرمحلی پرداخته و به بررسی اثر رفتار بر رفتار ارتعاشی آن پرداختند.

در مقاله کنونی، تحلیل ارتعاشی نانوتیر حسگر جرم در مودهای بالا با در نظر گرفتن اثر ابعاد در مقیاس نانو انجام می‌شود. اهمیت بررسی جرم افزوده شده بر نانوتیر حسگر در مودهای بالاتر از این لحاظ مورد مطالعه قرار می‌گیرد تا بررسی شود که حساسیت شناسایی جرم حس‌شده بر اساس تغییر فرکانس در مودهای بالاتر بیشتر خواهد شد یا خیر. لذا در این تحقیق، نانوتیر با در نظر گرفتن اثر ابعاد و جرم حسگر در فاصله دلخواه از تیر در نظر گرفته شده و از نظریه الاستیسیته غیرمحلی برای مدلسازی دینامیکی نانوتیر استفاده می‌شود. برای استخراج معادلات ارتعاشی حاکم بر سیستم، انرژی جنبشی و کرنش سیستم بیان و با استفاده از اصل همیلتون، معادلات نهایی و شرایط مرزی نانوتیر غیرمحلی با شرایط مرزی یکسرگیردار استخراج می‌شود. سپس با استفاده از حل تحلیلی، معادله فرکانسی نانوتیر با لحاظ جرم حس شده به‌صورت یک رابطه جبری به‌دست می‌آید. با استفاده از حل عددی، فرکانس طبیعی در مودهای مختلف نانوتیر بدست آمده و اثر جرم حس شده و پارامتر غیرمحلی بر رفتار فرکانسی آن بررسی می شود. همچنین اثر ابعاد و جرم حس شده بر مود شکل-های نانوتیر و در مودهای بالا بررسی می‌شود. این اثرات در مودهای بالا با دقت بیشتری بررسی می گردد تا کاربرد و کارایی حسگر جرم با در نظر گرفتن مودهای بالاتر با در نظر گرفتن تغییرات فرکانس و مود شکل مورد مطالعه قرار گیرد.

۲- بیان مسئله

در این بخش، ابتدا یک نانوتیر حسگر جرم یکسرگیردار با جرم حس شده در فاصله دلخواه از تکیه گاه نشان داده شده و سپس با استفاده از اصل همیلتون معادله ارتعاشی حاکم بر آن بدست می‌آید. در استخراج معادلات ارتعاشی نانوتیر فرضیات شامل: رابطه تنش-کرنش غیرمحلی، عدم لحاظ اثرات غیرخطی و مدل تیر غیرمحلی اویلر-برنولی در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱ نانوتیر یکسرگیردار نشان داده شده است.



شکل ۱- نانوتیر یکسرگیردار با حسگر جرم

مشخصات نانوتیر برابر با: طول L، وعرض b، ضخامت h ... موقعیت جرم متمرکز L_{Mp} است. با در نظر گرفتن ارتعاشات عرضی نانوتیر در راستای محور z، جابجایی هر نقطه دلخواه از مقطع عرضی نانوتیر به فاصله z از تارخنثی در راستای محور x و z به ترتیب برابر با U و W نشان داده شده و برابر است با:

$$U = -z\frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} \quad \text{and} \quad W = \bar{w}(x,t) \tag{۱}$$

که در رابطه بالا، $\bar{w}(x,t)$ برابر با جابجایی عرضی تار خنثی نانوتیر در زمان t است.

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم، اصل همیلتون به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\int_{t_0}^{t}(\delta T - \delta U + \delta W_{n.c}) = 0 \tag{۲}$$

که T، U و $W_{n.c}$ به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروی خارجی سیستم است.

انرژی جنبشی سیستم برابر با رابطه (۳) می‌باشد:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\iiint_{V_b} \bar{\rho}_b \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\right)^2 d\bar{V}_b + \frac{1}{2}\bar{M}_p\left(\frac{\partial \bar{w}(L_{M_p},t)}{\partial t}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \bar{\rho}_b \bar{A}_b \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\bar{M}_p\left(\frac{\partial \bar{w}(L_{M_p},t)}{\partial t}\right)^2 \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $\bar{\rho}_b$ و $\bar{V}_b$ به‌ترتیب چگالی جرم و حجم نانوتیر می‌باشد و $\bar{M}_p$ جرم افزوده شده بر روی نانوتیر می‌باشد.

همچنین، انرژی پتانسیل سیستم برابر با رابطه (۴) محاسبه می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{V_b} \bar{\sigma}_{xx,b}\varepsilon_{xx} d\bar{V}_b \tag{۴}$$

که $\bar{\sigma}_{xx,b}$ تنش غیرمحلی نانوتیر در امتداد محور x است. همچنین ترم غیرصفر کرنش نانوتیر، کرنش محوری بوده و برابر است با:

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} \tag{۵}$$

از طرفی تنش در نانوتیر بر اساس نظریه الاستیسیته غیر محلی بدست می‌آید. در نظریه مکانیک پیوسته غیرمحلی فرض این است که تانسور تنش غیرمحلی در نقطه مرجع $\vec{r}$ نه تنها به تانسور کرنش همان نقطه، بلکه به جابجایی و کرنش تمام نقاط جسم بستگی دارد [۲۱-۲۲].

رابطه اساسی تنش غیرمحلی پیشنهاد شده توسط ارینگن در شکل انتگرالی برابر است با [۲۲]:

$$\bar{\sigma}_{ij}(\vec{r}) = \int_V \alpha(|\vec{r}-\vec{r}'|)\sigma_{ij}(\vec{r}')d\bar{V}(\vec{r}') \tag{۶}$$

که در آن $\overline{\sigma_{ij}}$ تانسور تنش غیرمحلی، $\alpha(|\vec{r}|)$ تابع کرنل غیر محلی، $\vec{r}$ بردار موقعیت نقطه مرجع و $\vec{r}'$ نشان دهنده موقعیت هر نقطه دلخواه می‌باشد. علاوه بر این σ_{ij} برابر با تانسور تنش محلی است که برای یک جسم همگن همسان برابر است با:

$$\sigma_{ij} = \bar{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{۷}$$

در رابطه (۷)، $\bar{E}_{ijkl}$ تانسور سختی الاستیک و ε_{kl} تانسور کرنش است. همچنین ارینگن نشان داد که می‌توان بجای معادله انتگرالی (۶) از یک رابطه دیفرانسل معادل بصورت زیر استفاده کرد [۲۲]:

$$(1-\mu^2\nabla^2)\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \tag{۸}$$

که در آن ∇^2 عملگر لاپلاس و μ به عنوان ضریب مقیاس تعریف شده است و بیانگر وابستگی به اندازه در سیستم‌های مقیاس کوچک است.

سپس با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۸) فرم دیفرانسیلی تانسور تنش غیر محلی به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$(1-\mu^2\nabla^2)\bar{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{۹}$$

همچنین شکل یک بعدی معادله (۹) را می‌توان به‌صورت معادله (۱۰) بازنویسی کرد:

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\bar{\sigma}_{xx,b} = \bar{E}_b\varepsilon_{xx} \tag{۱۰}$$

که در آن $\bar{E}_b$ مدول یانگ نانوتیر است.

اکنون با جایگذاری معادله (۵) در (۱۰) و سپس با جایگذاری در معادله (۴)، معادله انرژی کرنش مطابق با رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{L}}\left(\bar{M}_{x,b}\frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2}\right)dx \tag{۱۱}$$

که در آن $\bar{M}_{x,b}$ گشتاور غیرمحلی نامیده و برابر با رابطه (۱۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{M}_{x,b} = -\iint_{\bar{A}_b}\bar{\sigma}_{xx,b} z d\bar{A}_b \tag{۱۲}$$

همچنین کار نیروی خارجی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W_{n.c} = \frac{1}{2}\int_0^L (\bar{f} - f_{vis})\bar{w}(x,t)dx \tag{۱۳}$$

که در آن $\bar{f}$ برابر با نیروی خارجی وارد بر نانوتیر و f_{vis} نیروی استهلاک لزجت است.

بنابراین با جایگذاری معادلات (۳)، (۱۱) و (۱۳) در اصل همیلتون، معادله (۲)، معادلات حرکت و شرایط مرزی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\rho}_{eq}\bar{A}_{eq}\frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2} + \bar{f} = \frac{\partial^2 \bar{M}_{x,b}}{\partial x^2} \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned} &x=0: \ \bar{w}(0,t)=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{w}(0,t)}{\partial x}=0 \\ &x=L: \ \bar{M}_{x,b}=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{M}_{x,b}}{\partial x}=0 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن جرم معادل سیستم بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{\rho}_{eq}\bar{A}_{eq} = \bar{\rho}_b\bar{A}_b + \bar{M}_p(x - L_{M_p}) \tag{۱۶}$$

علاوه بر این، با ترکیب معادلات (۱۰) و (۱۱) در هر مقطع نانوتیر،

رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{M}_{x,b} - \mu^2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{x,b}}{\partial x^2} = -\bar{E}_b \bar{I}_b \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \qquad (۱۷)$$

که در آن $\bar{I}_b$ ممان اینرسی سطح مقطع بوده و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{I}_b = \iint_{\bar{A}_b} z^2 \, d\bar{A}_b \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری معادله (۱۵) در (۱۷) خواهیم داشت:

$$\bar{M}_{x,b} = -\bar{E}_b \bar{I}_b \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} + \mu^2 \left[\bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2} + \bar{f}\right] \qquad (۱۹)$$

همچنین، با استفاده از معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۱۹)، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی نانوتیر دارای جرم حسگر و شرایط مرزی غیرمحلی را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\left(1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\bar{E}_b \bar{I}_b \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2}\right) + \bar{f}\left(1 - \mu^2 \frac{\partial^3 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2 \partial t}\right) = 0 \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned}
&x = 0: \\
&\bar{w}(0,t) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{w}(0,t)}{\partial x} = 0 \\
&x = L: \\
&-\bar{E}_b \bar{I}_b \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} + \mu^2 \bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[-\bar{E}_b \bar{I}_b \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} + \mu^2 \bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2}\right] = 0
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

شرایط مرزی داده شده توسط معادله (۲۱) مربوط به جابجایی و شیب صفر در $x = 0$ و همچنین، گشتاور غیرمحلی و نیروی برشی عرضی صفر در $x = L$ است.

۳- پاسخ تحلیلی مسئله

در این بخش، در ابتدا معادلات ارتعاشی حاکم بر نانو تیر حسگر جرم بی‌بعد سازی می‌شود. برای بدون بعد سازی معادلات، از تغییر متغیر $\bar{x} = \frac{x}{L}$ استفاده شده و معادله حاکم بر ارتعاشات نانوتیر با لحاظ تغییر متغیر برابر است با:

$$\frac{\bar{E}_b \bar{I}_b}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{w}(\bar{x},t)}{\partial t^4} + \bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x},t)}{\partial t^2} - \mu^2 \bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} \frac{\partial^4 \bar{w}(\bar{x},t)}{\partial \bar{x}^2 \partial t^2} = 0 \qquad (۲۲)$$

در حالت کلی پاسخ ارتعاشی سیستم برابر $\bar{w}(\bar{x},t) = \bar{w}(\bar{x}) e^{i\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود و با فرض $\beta^4 = \frac{\bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} L^4 \omega^2}{\bar{E}_b \bar{I}_b}$، معادله ارتعاشی نانوتیر غیرمحلی در حوزه مکان برابر است با:

$$\frac{d^4 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} + \mu^2 \beta^4 \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \beta^4 \bar{W}(\bar{x}) = 0 \qquad (۲۳)$$

برای حل دقیق ارتعاشات نانوتیر با جرم حس شده در فاصله دلخواه $\bar{L}_M$، تیر را به دو بخش از سرگیردار تا محل جرم افزوده شده و از محل جرم افزوده تا انتهای آزاد تیر تقسیم کرده و جابجایی عرضی هر قسمت را به ترتیب $\bar{W}_1(\bar{x},t)$ و $\bar{W}_2(\bar{x},t)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت شرایط مرزی در دو انتهای نانوتیر به‌صورت معادله (۲۴) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = 0: \\
&\bar{W}_1(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{W}_1(0)}{\partial \bar{x}} = 0 \\
&\bar{x} = \frac{L}{L} = 1: \\
&\frac{d^2 \bar{W}_2(1)}{d\bar{x}^2} + \mu^2 \beta^4 \bar{W}_2(1) = 0 \\
&\frac{d^3 \bar{W}_2(1)}{d\bar{x}^3} + \mu^2 \beta^4 \frac{\partial \bar{W}_2(1)}{\partial \bar{x}} = 0
\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

همچنین، شرایط سازگاری حاکم بر دو طرف نانوتیر در محل قرارگیری جرم حس شده به‌صورت معادله (۲۵) بیان می‌شود::

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = \frac{L_{M_p}}{L} = \bar{L}_M \\
&\bar{W}_1(\bar{L}_M) = \bar{W}_2(\bar{L}_M) \quad \text{and} \quad \frac{\partial W_1(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{w}_2\left(\bar{L}_{M_p}\right)}{\partial \bar{x}} \\
&M_1 = M_2: \\
&\frac{\partial^2 \bar{W}_1(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}^2} + \mu^2 \beta^4 \bar{W}_1(\bar{L}_M) - \frac{\partial^2 \bar{W}_2(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}^2} - \mu^2 \beta^4 \bar{W}_2(\bar{L}_M) = 0 \\
&V_2 - V_1 = M_p \frac{\partial^2 \bar{W}(\bar{L}_M)}{\partial t^2}: \\
&\frac{\partial^3 \bar{W}_1(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}^3} + \mu^2 \beta^4 \frac{\partial \bar{W}(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}} + \frac{M_P}{\bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq}} \frac{\partial^3 \bar{W}_2(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^3 \bar{W}_1(\bar{L}_M)}{\partial \bar{x}^3} - \mu^2 \beta^4 \frac{\partial \bar{W}(\bar{L}_M)}{\partial x} = 0
\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

در معادله (۲۵)، نسبت جرم افزوده شده به جرم نانوتیررا با پارامتر R و به‌صورت رابطه (۲۶) بیان می‌شود:

$$R = \frac{M_P}{\bar{\rho}_{eq} \bar{A}_{eq} L} \qquad (۲۶)$$

اکنون از حل عمومی معادله دیفرانسیل (۲۳) حاکم بر روابط ارتعاشی نانوتیر در حوزه مکان، پاسخ تابع شکل مود هر یک از دو بخش نانوتیر برابر با رابطه (۲۷) حاصل می‌شود:

$$W_i = A_i \sin(\eta \bar{x}) + B_i \cos(\eta \bar{x}) + C_i \sinh(\lambda \bar{x}) + D_i \cosh(\lambda \bar{x}) \qquad (۲۷)$$

در رابطه (۲۷)، پارامترهای بدون بعد η و λ برابر است با:

$$\begin{aligned}
&\eta^2 = \frac{\mu \beta^4}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2 \beta^8}{4} + \beta^4} \\
&\lambda^2 = -\frac{\mu \beta^4}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2 \beta^8}{4} + \beta^4}
\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

اکنون چنانچه شرایط مرزی (۲۴) و سازگاری (۲۵) در پاسخ‌های (۲۹) جایگذاری شود، ماتریس فرکانس زیر حاصل می‌شود:

$$\left[[K_1]_{8\times1} \quad [K_1]_{8\times1} \cdots [K_7]_{8\times1} \quad [K_8]_{8\times1}\right]_{8\times8} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۲۹)$$

که ستون‌های ماتریس ضرایب در رابطه (۲۹)، از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \\ \sin(\eta \bar{L}_M) \\ \eta \cos(\eta \bar{L}_M) \\ -\sin(\eta \bar{L}_M)\left(\eta^2 - \beta^4 \mu^2\right) \\ R\beta^4 \sin(\eta \bar{L}_M) - \eta^3 \cos(\eta \bar{L}_M) + \beta^4 \eta \mu^2 \cos(\eta \bar{L}_M) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos(\eta \bar{L}_M) \\ -\eta \sin(\eta \bar{L}_M) \\ -\cos(\eta \bar{L}_M)\left(\eta^2 - \beta^4 \mu^2\right) \\ \eta^3 \sin(\eta \bar{L}_M) + R\beta^4 \cos(\eta \bar{L}_M) - \beta^4 \eta \mu^2 \sin(\eta \bar{L}_M) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \sinh(\lambda\bar{L}_M) \\ \lambda\cosh(\lambda\bar{L}_M) \\ \sinh(\lambda\bar{L}_M)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ R\beta^4\sinh(\lambda\bar{L}_M)+\cosh(\lambda\bar{L}_M)\left(\lambda^3+\beta^4\lambda\mu^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cosh(\lambda\bar{L}_M) \\ \lambda\sinh(\lambda\bar{L}_M) \\ \cosh(\lambda\bar{L}_M)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ R\beta^4\cosh(\lambda\bar{L}_M)+\sinh(\lambda\bar{L}_M)\left(\lambda^3+\beta^4\lambda\mu^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(\eta\bar{L}_M) \\ -\eta\cos(\eta\bar{L}_M) \\ \sin(\eta\bar{L}_M)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \\ \eta\cos(\eta\bar{L}_M)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \\ -\sin(\eta)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \\ -\eta\cos(\eta)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(\eta\bar{L}_M) \\ \eta\sin(\eta\bar{L}_M) \\ \cos(\eta\bar{L}_M)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \\ -\eta\sin(\eta\bar{L}_M)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \\ -\cos(\eta)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \\ \eta\sin(\eta\bar{L}_M)\left(\eta^2-\beta^4\mu^2\right) \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sinh(\lambda\bar{L}_M) \\ -\lambda\cosh(\lambda\bar{L}_M) \\ -\sinh(\lambda\bar{L}_M)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ -\lambda\cosh(\lambda\bar{L}_M)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ \sinh(\lambda)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ \eta\cosh(\lambda)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \end{bmatrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cosh(\lambda\bar{L}_M) \\ -\lambda\sinh(\lambda\bar{L}_M) \\ -\cosh(\lambda\bar{L}_M)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ -\lambda\sinh(\lambda\bar{L}_M)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ \cosh(\lambda)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \\ \lambda\sinh(\lambda)\left(\beta^4\mu^2+\lambda^2\right) \end{bmatrix}$$

اکنون با دترمینان‌گیری از ماتریس ضرایب رابطه (۲۹)، معادله فرکانسی حاصل می‌شود. همچنین از حل معادله فرکانسی، فرکانس-های طبیعی و سپس شکل مودهای سیستم بدست می‌آید.

۴- شبیه سازی و نتایج

در این بخش با شبیه سازی‌های مختلف به تحلیل فرکانسی نانوتیر حسگر جرم در مودهای بالاتر پرداخته می‌شود. مشخصات فیزیکی و هندسی نانوتیر در جدول ۱ بیان شده‌است:

جدول ۱- مشخصات هندسی و فیزیکی نانوتیر حسگر جرم

مقدار	مشخصات
۹۰ (nm)	L
۲۰ (nm)	b
۱۰ (nm)	h
۲۳۳۰ (kg/m^3)	ρ
۱۰۷ (Gpa)	E

در ابتدا به منظور صحت سنجی مدل‌سازی و کدنویسی انجام شده برای فرکانس طبیعی نانوتیر در حالت بدون جرم حس شده، فرکانس طبیعی اول بدون بعد نانوتیر یک‌سرگیردار با مقادیر ارائه شده در مرجع [۲۴] در جدول ۲ مقایسه می شود.

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی اول تحقیق کنونی و مرجع [۲۴]

مرجع [۲۴]	تحقیق کنونی	μ	R
۱/۸۷۵۱	۱/۸۷۵۱	۰	۰
۱/۸۷۹۱	۱/۸۷۹۲	۰/۱	
۱/۸۹۱۷	۱/۸۹۱۹	۰/۲	

همچنین فرکانس طبیعی بدون بعد نانوتیر محلی حسگر جرم در مودهای اول و دوم ارتعاشی ارائه و با مرجع [۳۳] مقایسه شده است.

جدول ۳- فرکانس طبیعی بدون بعد نانوتیر محلی حسگر جرم

مرجع [۳۳]	تحقیق کنونی	مود ارتعاشی	R
۱/۸۵۲	۱/۸۵۶۸	اول	۰/۰۱
۴/۶۵۰	۴/۶۴۹۸	دوم	
۱/۷۲۳	۱/۷۲۲۸	اول	۰/۱
۴/۳۹۹	۴/۳۹۹۶	دوم	

همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج ارایه شده در این تحقیق تطبیق مناسبی با نتایج ارایه شده در مرجع [۳۳]دارد.

در شبیه سازی اول، اثر ابعاد و پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی نانوتیر دارای جرم حس شده مختلف در انتهای آن، در مودهای ارتعاشی اول تا سوم بررسی می‌شود. در جدول ۴، مقادیر فرکانس طبیعی در جرم‌های حس شده متفاوت در انتهای نانوتیر به‌ازای جملات غیرمحلی مختلف، بر حسب مگا هرتز محاسبه و ارائه شده است:

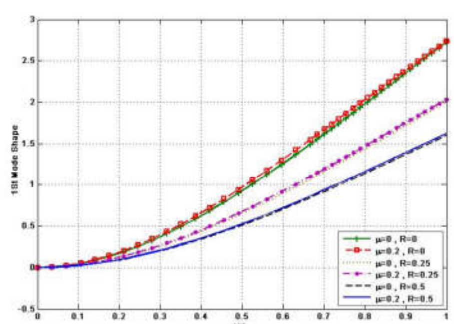
جدول ۴- فرکانس طبیعی نانوتیر دارای حسگر جرم بر حسب مگاهرتز

$\bar{L}_M$ =۱				
مود سوم	مود دوم	مود اول	μ	R
۲۳/۷۱۵	۸/۴۷۰	۱/۳۵۲	۰	
۲۲/۴۶۰	۸/۳۳۲	۱/۳۵۳	۰/۰۵	
۱۹/۶۲۸	۷/۹۴۹	۱/۳۵۷	۰/۱	۰
۱۶/۶۴۳	۷/۳۹۶	۱/۳۶۵	۰/۱۵	
۱۴/۱۵۰	۶/۷۵۶	۱/۳۷۶	۰/۲	

	۰	۱/۰۶۶	۷/۱۸۲	۲۰/۸۸۴
	۰/۰۵	۱/۰۶۷	۷/۰۷۶	۱۹/۸۴۴
۰/۱۵	۰/۱	۱/۰۷۰	۶/۷۸۲	۱۷/۴۶۱
	۰/۱۵	۱/۰۷۴	۶/۳۵۴	۱۴/۸۹۴
	۰/۲	۱/۰۸۰	۵/۸۵۶	۱۲/۶۹۷
	۰	۰/۹۵۲	۶/۸۶۲	۲۰/۳۷۹
	۰/۰۵	۰/۹۵۳	۶/۷۶۲	۱۹/۳۳۶
۰/۲۵	۰/۱	۰/۹۵۵	۶/۴۸۴	۱۷/۰۴۵
	۰/۱۵	۰/۹۵۸	۶/۰۸۲	۱۴/۵۳۹
	۰/۲	۰/۹۶۲	۵/۶۱۵	۱۲/۳۸۹
	۰	۰/۷۷۵	۶/۴۹۷	۱۹/۸۷۳
	۰/۰۵	۰/۷۷۵	۶/۴۰۴	۱۸/۸۸۶
۰/۵	۰/۱	۰/۷۷۶	۶/۱۴۴	۱۶/۶۲۳
	۰/۱۵	۰/۷۷۸	۵/۷۷۰	۱۴/۱۷۹
	۰/۲	۰/۷۸۱	۵/۳۳۶	۱۲/۰۷۶

همانطور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، اثر ابعاد و افزایش ترم غیرمحلی در تغییر فرکانس اول نانوتیر ناچیز بوده و این تاثیر با افزایش نسبت جرم افزوده شده کاهش می‌یابد. همچنین در مود ارتعاشی اول، تغییرات فرکانسی تحت اثر جرم حسگر ناچیز بوده و لذا حساسیت نانوتیر ارتعاشی حسگر جرم ناچیز است. در حالیکه در مودهای ارتعاشی بالاتر، اثر جرم افزوده شده بر فرکانس طبیعی نانوتیر بیشتر بوده و لذا حساسیت حسگری نانوتیر افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش مودهای ارتعاشی، اثر ابعاد و ترم غیرمحلی بر فرکانس حایز اهمیت بوده و باعث کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌شود. علت این امر آن است که در نظریه الاستیسیته کلاسیک فرض بر آن است که اتم‌های ماده به صورت صلب به یکدیگر متصل شده‌اند در حالیکه در نظریه الاستیسیته غیرمحلی اتم‌های ماده در یک محیط ماتریسی الاستیک و با فرض اتصال فنری به یکدیگر متصل هستند. لذا در نظریه الاستیسیته غیرمحلی، سختی سازه نانو کمتر بوده و فرکانس طبیعی کاهش یافته است.

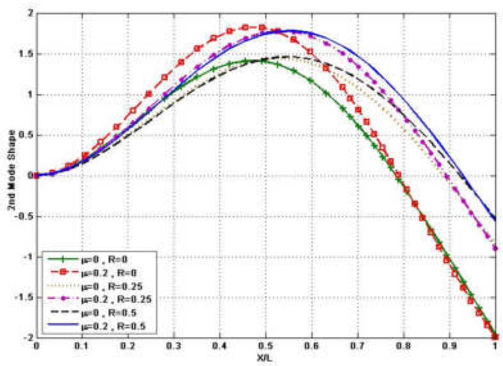
در شبیه‌سازی دوم اثر پارامتر غیرمحلی بر شکل مودهای اول و دوم برای نانوتیر حسگر جرم در انتها به‌ازای جرم‌های مختلف نشان داده می‌شود. در شکل ۲ تابع شکل مود اول نانوتیر حسگر جرم به‌ازای جرم حس شده مختلف در انتهای آن نشان داده می‌شود:



شکل ۲- تابع شکل مود اول نانوتیر حسگر جرم در انتها

همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود، با افزایش جمله غیرمحلی، دامنه شکل مود اول افزایش می‌یابد، اما این اثر با افزایش جرم حسگر کاهش می‌یابد. از طرفی با افزایش جرم حسگر، دامنه شکل مود کاهش می‌یابد. علت در این است که با افزایش جرم انتهایی، اینرسی انتهایی نانوتیر حسگر جرم افزایش یافته و باعث کاهش دامنه انتهای تیر می‌شود.

همچنین در شکل ۳، تابع شکل مود دوم نانوتیر حسگر جرم به‌ازای جرم حس شده مختلف در انتهای نانوتیر نشان داده می‌شود:



شکل ۳- تابع شکل مود دوم نانوتیر حسگر جرم در انتها

همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود، در مود دوم ارتعاشی، با افزایش جمله غیرمحلی، دامنه شکل مود افزایش یافته و این افزایش در مقایسه با مود اول ارتعاشی بیشتر است. علت افزایش دامنه شکل مود آن است که جمله غیرمحلی باعث کاهش سختی نانوتیر شده و لذا افزایش دامنه ارتعاشی را به همراه دارد. از طرفی با افزایش جرم حسگر، دامنه شکل مود کاهش می‌یابد. علت در این است که با افزایش جرم انتهایی، اینرسی انتهایی نانوتیر حسگر جرم افزایش یافته و باعث کاهش دامنه انتهای نانوتیر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش جرم حس شده، اثر جمله غیرمحلی بر شکل مود نانوتیر کاهش می‌یابد.

در شبیه‌سازی سوم اثر ابعاد و پارامتر غیرمحلی به‌ازای مقدار جرم حس شده ثابت در موقعیت‌های مکانی مختلف بر روی نانوتیر بررسی می‌شود. جدول ۵ سه فرکانس طبیعی اول نانوتیر را بر حسب مقدار جرم حس شده ثابت در موقعیت مختلف بر روی نانوتیر به ازای جمله غیرمحلی مختلف نشان می‌دهد.

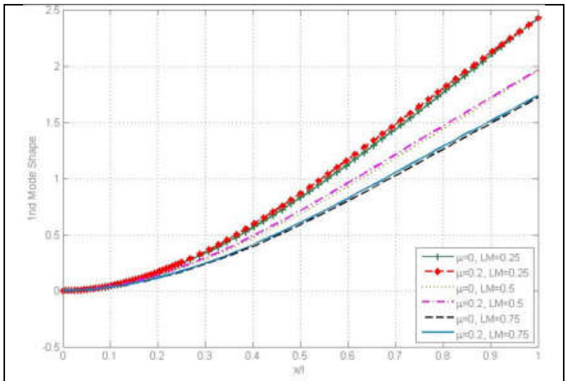
جدول ۵- اثر تغییر موقعیت حسگر جرم روی نانوتیر بر فرکانس ارتعاشی مودهای اول تا سوم بر حسب مگاهرتز

R =۰/۵				
$\bar{L}_M$	μ	مود اول	مود دوم	مود سوم
	۰	۱/۳۳۹	۷/۱۷۵	۱۷/۵۸۴
۰/۲۵	۰/۰۵	۱/۳۴۰	۷/۰۹۹	۱۷/۰۲۰
	۰/۱	۱/۳۴۴	۶/۸۷۸	۱۵/۶۰۰
	۰/۱۵	۱/۳۵۲	۶/۵۴۱	۱۳/۸۵۴
	۰/۲	۱/۳۶۲	۶/۱۲۲	۱۲/۱۷۵

۰/۵	۰	۱/۲۱۶	۶/۲۵۱	۲۳/۷۱۰
	۰/۰۵	۱/۲۱۷	۶/۲۱۱	۲۲/۴۵۴
	۰/۱	۱/۲۲۰	۶/۰۹۳	۱۹/۶۱۳
	۰/۱۵	۱/۲۲۴	۵/۹۰۷	۱۶/۶۰۹
	۰/۲	۱/۲۳۱	۵/۶۶۵	۱۴/۰۸۶
۰/۷۵	۰	۰/۹۸۹	۸/۳۸۳	۲۰/۰۵۰
	۰/۰۵	۰/۹۹۰	۸/۲۶۲	۱۹/۴۹۸
	۰/۱	۰/۹۹۱	۷/۹۲۰	۱۸/۰۸۱
	۰/۱۵	۰/۹۹۴	۷/۴۱۷	۱۶/۲۶۶
	۰/۲	۰/۹۹۸	۶/۸۲۶	۱۴/۴۱۹

همانطور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، در مود اول فرکانسی با تغییر موقعیت جرم حسگر به انتهای نانوتیر، کاهش فرکانس طبیعی بیشتر خواهد شد. علت آن است که جرم اضافی در انتهای تیر اثر بیشتری بر جرم برآیند کل سازه داشته و فرکانس را کاهش بیشتری می‌دهد. به عبارت دیگر با توجه به اینکه انتهای آزاد تیر دارای جابجایی بیشتری می‌باشد، قرارگیری جرم متمرکز در انتهای آزاد اثر بیشتری بر اینرسی کل دارد و باعث کاهش بیشتر فرکانس می‌شود. همچنین حساسیت جرم حسگر در مود اول ارتعاشی در انتهای آزاد تیر بیشتر از هر موقعیت دیگری بوده. از طرفی مشاهده می‌شود در مود دوم ارتعاشی، حساسیت حسگر جرم افزایش یافته است و لذا مودهای ارتعاشی بالاتر کاربرد مناسبی بر نانوحسگر ارتعاشی دارند. همچنین در مودهای بالاتر ارتعاشی نیز مشاهده می‌شود که با تغییر موقعیت جرم حسگر به انتهای نانوتیر در حالت کلی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. البته در هر مود ارتعاشی، قرار گرفتن جرم حس شده در نزدیکی موقعیت‌های گره‌های تابع شکل مود، باعث بی‌اثر شدن خاصیت حسگر جرم نانوتیر می‌شود و لذا یکی از بهترین نقاط برای قرارگیری جرم حسگر، موقعیت انتهای آزاد نانوتیر می‌باشد. از طرفی، در مودهای ارتعاشی بالاتر اثرات نانو و ترم غیرمحلی افزایش یافته است و لذا نبایستی از اثر ابعاد برای نانوتیرهای مرتعش صرف نظر کرد. علت این امر در آن است که در مودهای بالاتر ارتعاشی، طول موجها کاهش یافته و اندرکنش قوی‌تر اتمها باعث افزایش بیشتر اثر الاستیسیته غیرمحلی بر سازه می‌شود.

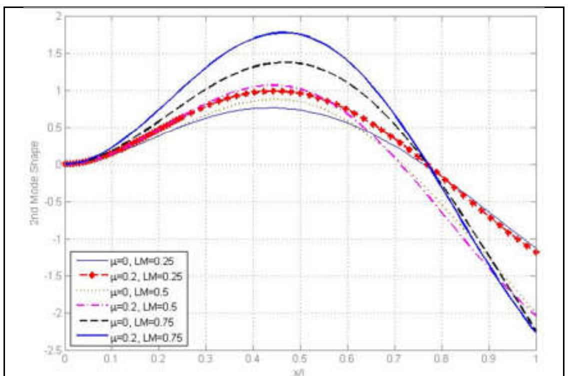
در شبیه سازی‌های دیگری اثر پارامتر غیرمحلی بر تابع شکل مودهای اول و دوم نانوتیر داری جرم حسگر به ازای موقعیت مکانی مختلف نشان داده می‌شود. در شکل ۴، شکل مود اول نانوتیر به ازای موقعیت مکانی مختلف جرم حسگر بر روی آن نشان داده می‌شود.



شکل ۴- تابع شکل مود اول نانوتیر به ازای موقعیت مختلف جرم حسگر

همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، با تغییر موقعیت جرم حس شده به انتهای تیر، دامنه شکل مودها کاهش یافته است. علت در آن است که با حرکت جرم به انتهای تیر، شرط مرزی آزاد به شرط مرزی دارای جرم متمرکز نزدیکتر شده و لذا باعث کاهش دامنه می‌شود. همچنین اثرات ترم غیرمحلی بر شکل مود اول ارتعاشی ناچیز است.

از طرفی تابع شکل مود دوم ارتعاشی نانوتیر حسگر جرم به ازای موقعیت مکانی مختلف جرم حس شده در شکل ۵ نشان داده شده است:



شکل ۵- تابع شکل مود دوم نانوتیر به ازای موقعیت مختلف جرم حسگر

مطابق با شکل ۵، با افزایش ترم غیرمحلی در مود دوم ارتعاشی، دامنه تابع شکل مود افزایش می‌یابد. علت این پدیده آن است که با افزایش ترم غیرمحلی، سختی سازه کاهش یافته و لذا تابع شکل مود دارای دامنه بیشتری خواهد بود. همچنین مشاده می‌شود که با تغییر موقعیت مرکز جرم به سمت انتهای آزاد آن، در حالت کلی دامنه تابع شکل مود کاهش می‌یابد اما چنانچه جرم حسگر در نزدیکی گره شکل مود باشد، اثر جرم متمرکز ناچیز می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشی نانوتیر حسگر جرم در مودهای بالا

با در نظر گرفتن اثر ابعاد در مقیاس نانو انجام شد. نظریه الاستیسیته غیرمحلی برای مدلسازی دینامیکی نانوتیر با لحاظ اثر ابعاد و جرم حسگر بکار گرفته شد. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات نهایی ارتعاش عرضی و شرایط مرزی نانوتیر حسگر جرم یکسرگیردار استخراج گردید. سپس با حل دقیق و تحلیلی، معادله فرکانسی و توابع شکل مود نانوتیر بدست آمده و شبیه‌سازی گردید. نتایج شبیه‌سازی نشان داد اثر ابعاد و ترم غیرمحلی در تغییر فرکانس اول نانوتیر ناچیز بوده و این تاثیر با افزایش جرم حسگر افزوده شده کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش مودهای ارتعاشی، اثر ابعاد و جمله غیرمحلی بر فرکانس حایز اهمیت بوده و باعث کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌شود.

از طرفی با افزایش جمله غیرمحلی، دامنه شکل مود اول افزایش می‌یابد، اما این اثر با افزایش جرم حسگر کاهش می‌یابد. با افزایش جمله غیرمحلی در مود دوم ارتعاشی، دامنه شکل مود افزایش یافته و این افزایش در مقایسه با مود اول ارتعاشی بیشتر است. همچنین با افزایش جرم حس شده، اثر جمله غیرمحلی بر شکل مود نانوتیر کاهش می‌یابد. همچنین در مودهای بالاتر ارتعاشی نیز مشاهده می‌شود که با تغییر موقعیت جرم حسگر به انتهای نانوتیر در حالت کلی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. از طرفی، در مودهای ارتعاشی بالاتر اثرات نانو و جمله غیرمحلی افزایش یافته است و لذا نبایستی از اثر ابعاد برای نانوتیرهای مرتعش صرف نظر کرد.

۶- نمادها

A_b	سطح مقطع
E_{igkl}	تانسور سختی الاستیک
$\alpha\lvert\bar{r}\rvert$	تابع هسته غیر محلی
L	طول (nm)
B	عرض (nm)
H	ارتفاع (nm)
ρ	جرم واحد حجم (kg/m^3)
E	مدول یانگ (Gpa)

۷- مراجع

[1] Song B. S., Jeon S., Kim H., Kang D. D., Asano T. and Noda S., High-Q-Factor Nanobeam Photonic Crystal Cavities in Bulk Silicon Carbide. Applied Physics Letters, Vol.113, No.23, pp.231106, 2018.

[۲] عثمان نـژاد آ. و آشـنای قاسـمی ف. و قاسـمی ا.،تحلیـل تجربـی خـواص نانوکامپوزیت‌های هیبریدی پلی پروپیلن/ پـودر چـوب/ گـرافن. مهندسـی مکانیک دانشگاه تبریز، د۴۷، ش.۴، ص.۱۹۹-۱۹۱، ۱۳۹۶.

[۳] لقمان م. ر. و شجاع رضوی ر. و قادری م.، تهیه نانو پودر اکسید ایتریوم به روش هیدروترمال: بررسی اثر نسبت مولی سیتریک اسید به ۳Y+ و pH. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د.۴۸، ش.۲، ص.۳۱۵-۳۰۹، ۱۳۹۷.

[۴] صادق حسنی ص. و قاسمی م. ر. و رشیدزاده م. و مسعودیان س.ک.، ساخت پایه آلفا آلومینا وکاتالیست اتیلن اکسید(۳O۲Ag/α-Al) با پراکندگی بالای نانو ذرات نقره. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د.۳۹، ش.۲، ص.۴۴-۳۷، ۱۳۸۸.

[5] Valente J., Fabrication of Planar Nanomechanical Photonic Metamaterials. Journal of Optics, Vol.20, No.9, pp. 093501, 2018.

[6] Yang G., Li X., He Y., Ma J., Ni G. and Zhou S., From Nano to Micro to Macro: Electrospun Hierarchically Structured Polymeric Fibers for Biomedical Applications. Progress in Polymer Science, 81, pp.80-113, 2018.

[7] Perez-Guaita D., Kochan K., Batty M., Doerig C., Garcia-Bustos J., Espinoza S. and Wood B. R., Multispectral Atomic Force Microscopy-Infrared Nano-Imaging of Malaria Infected Red Blood Cells. Analytical chemistry, Vol.90, No.5, pp.3140-3148, 2018.

[8] LaHaye M., Investigations and Potential Applications of Qubit-Nanoresonator-Cavity Interactions in a Superconducting Quantum Electromechanical System. Bulletin of the American Physical Society, 2018.

[9] Shen Y., Liang L., Zhang J., Li Z., Yue J., Wang J. and Xu S., Interference-Free Surface-Enhanced Raman Scattering Nanosensor for Imaging and Dynamic Monitoring of Reactive Oxygen Species in Mitochondria During Photothermal Therapy. Sensors and Actuators B: Chemical, 285, pp.84-91, 2019.

[۱۰]طاهری م.، استفاده از مدل‌های تماس کروی در مـدل‌سـازی منیپولیشـن سه‌بعدی نانوذرات طـلا بـا اسـتفاده از میکروسـکوپ نیـروی اتمـی جهـت محاسبه‌ی نیرو و زمان بحرانی. مجله مهندسـی مکانیـک دانشـگاه تبریـز، د.۴۸، ش.۲، ص.۱۷۵-۱۸۴، ۱۳۹۷.

[11] Liu J. Z., Zheng Q. and Jiang Q., Effect of Bending Instabilities on the Measurements of Mechanical Properties of Multiwalled Carbon Nanotubes. Physical Review B, Vol.67, No.7, pp.75414, 2003.

[12] Demir Ç., Civalek Ö., and Akgöz B., Free Vibration Analysis of Carbon Nanotubes Based on Shear Deformable Beam Theory by Discrete Singular Convolution Technique. Mathematical and Computational applications, Vol.15, No.1, pp.57-65, 2010.

[13] Jiang L.Y., Mahdavi M. H. and Sun X., Nonlinear Vibration of a Single-Walled Carbon Nanotube Embedded in a Polymer Matrix Aroused by Interfacial Van Der Waals Forces. Journal of Applied Physics, Vol.106, No.11, pp. 114309, 2009.

[۱۴]طاهری م.، بررسی و تحلیـل حساسـیت پارامترهـای ابعـادی و سـرعت در دینامیک نانومنیپولیشن سه‌بعدی نانولوله‌های کربنـی بـا اسـتفاده از روش آماری سـوبل. مجلـه مهندسـی مکانیـک مـدرس، د.۱۹، ش.۱، ص ۱۲۵-۱۳۵، ۱۳۹۷.

[15] Lu X., Zhang X., Shi M., Roters F., Kang G. and Raabe D., Dislocation Mechanism Based Size-Dependent Crystal Plasticity Modeling and Simulation of Gradient Nano-Grained Copper. International Journal of Plasticity, 113, pp.73-52, 2019.

[16] Cooley M., Sarode A., Hoore M., Fedosov D. A., Mitragotri S. and Gupta A. S. Influence of Particle Size and Shape on Their Margination and Wall-Adhesion: Implications in Drug Delivery Vehicle Design Across Nano-to-Micro Scale. Nanoscale, Vol.10, No.32, pp.15350-15364, 2018.

[17] Chen C.Q., Shi Y., Zhang Y.S., Zhu J. and Yan Y.J., Size Dependence of Young's Modulus in Zno Nanowires. Physical Review Letters, Vol.96, No.7, pp.075505, 2006.

[18] Jiang L. Y. and Yan Z., Timoshenko Beam Model for Static Bending of Nanowires with Surface Effects. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,Vol.42, No.9, pp.2274-2279, 2010.

[19] Elishakoff I., Challamel N., Soret C., Bekel Y. and Gomez T., Virus Sensor Based on Single-Walled Carbon Nanotube: Improved Theory Incorporating Surface Effects. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol.371, No.1993, pp.20120424, 2013.

[۲۰]قدیری م. و قربانی خ. و مهین زارع م.، بررسی اثـر گرمـا بـر فرکـانس نـانو صفحه دایره ای با ساختار درجه بندی شده بر اساس نظریـه تـنش کوپـل اصلاح شـده. مجلـه مهندسـی مکانیـک دانشـگاه تبریـز، د.۴۸، ش.۱، ص. ۲۸۷-۲۹۶، ۱۳۹۷.

[21] Eringen A.C. and Edelen D.G.B., On Nonlocal Elasticity. International Journal of Engineering Science, Vol.10, No. 3, pp.233-248, 1972.

[22] Eringen A.C., Screw Dislocation in Non-local Elasticity. Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 10, N0.5, pp. 671, 1997.

[23] Peddieson J., Buchanan G. R. and McNitt R. P., Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. International Journal of Engineering Science, Vol.41, No.3, pp.305-312, 2003.

[24] Reddy J. N., Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams. International Journal of Engineering Science,Vol.45, No.2, pp.288-307, 2007.

[25] Zhang Y., Pang M. and Chen W., Non-local Modeling on the Buckling of a Weakened Nanobeam. Micro & Nano Letters, Vol.8No.2, pp.102-106, 2013.

[26] Aydogdu M., Axial Vibration of the Nanorods with the Nonlocal Continuum Rod Model. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol.41, No.5, pp.861-864, 2009.

[27] Wang C. M., Zhang Y. Y. and He X. Q., Vibration of Nonlocal Timoshenko Beams. Nanotechnology, Vol.18, No.10, pp.105401, 2007.

[۲۸]رئیسی استبرق ا.، استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلـی در آنـالیز نـانو صفحات. سومین کنگره سراسری فناوریهای نوین ایران با هـدف دسـتیابی به توسعه پایدار، تهران، موسسه آموزش عالی مهر اروند، مرکز راهکارهـای دستیابی به توسعه پایدار، ۱۳۹۴.

[29] Nazemizadeh M. and Bakhtiari-Nejad F., Size-Dependent Free Vibration of Nano/Microbeams with Piezo-Layered Actuators. Micro & Nano Letters, Vol.10, No.2, pp.93-98, 2015.

[30] Nazemizadeh M. and Bakhtiari-Nejad F., A General Formulation of Quality Factor for Composite Micro/Nano Beams in the Air Environment Based on the Nonlocal Elasticity Theory. Composite Structures, 132, 772-783, 2015.

[31] Thai S., Thai H.T., Vo T.P. and Patel V.I., A simple shear deformation theory for nonlocal beams, Composite Structures, 183, 262-270, 2018.

[32] Trabelssi M., El-Borgi S., Fernandes R. and Ke, L.L., Nonlocal free and forced vibration of a graded Timoshenko nanobeam resting on a nonlinear elastic foundation. Composites Part B: Engineering, 157, 331-349, 2019.

[33] Rao S.S., Vibration of continuous systems, New York: Wiley, 2007.