

تحلیل سینماتیک و دینامیک معکوس مکانیزم استوارت

سیامک پدرام مهر دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

مهران محبوب خواه استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

چکیده

در این مقاله، تحلیل سینماتیک و دینامیک معکوس مکانیزم استوارت با در نظر گرفتن تمامی نیروهای گرانشی، اصطکاکی، کریولیس، اینرسی و نیروهای خارجی با استفاده از روش نیوتن- اویلر انجام شده است. تحقیقات متعددی در این زمینه ارائه شده است که از تقریبهایی ساده سازی برای کاهش پیچیدگی مسأله استفاده نموده اند. در این تحقیق معادلات سینماتیکی و دینامیکی مکانیزم استوارت با استفاده از سینماتیک مفصل یونیورسال برای در نظر گرفتن درجه آزادی دورانی پایه حول محور خود و با معرفی جهت مناسب برای ممان و انتقال صحیح ممان با در نظر گرفتن قضیه محورها موازی ارائه شده است. معادلات دینامیکی بدست آمده در کار حاضر کاملاً متفاوت از نتایج مطالعات پیشین می باشند.

کلمات کلیدی: مکانیزم استوارت، سینماتیک و دینامیک معکوس، روش نیوتن- اویلر

Inverse Kinematic and Dynamic Analysis of Stewart Mechanism

S. Pedrammehr M.Sc. Student, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

M. Mahboubkhah Assistant Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

Abstract

In this paper an analytical study of the inverse kinematics and dynamics of Stewart platform will be addressed. The dynamic equations are generated through the Newton-Euler approach and all the gravity, frictional, coriolis, inertial and external forces has been considered in the formulation. There have been number of previous researches in this subject which consist of simplifying assumptions for derivation of less complicated formulation. In this research, the kinematic and dynamic equations will be presented using kinematic model of universal joint, the rotational degree of freedom of the pods around the axial direction. The intact relations for the inertia tensors of different elements of the manipulator and the justifiable direction of the reaction moment on the pods are taken into account in deriving the new formulation. The Dynamic equations of the new formulation are absolutely different from those introduced before.

Keywords: Stewart Mechanism, Inverse Kinematics and Dynamics, Newton-Euler Approach

۱- مقدمه

مکانیزم استوارت [۱]، با داشتن قابلیت‌های فراوانی چون سفتی زیاد، دقت زیاد، نسبت تحمل بار به وزن زیاد، دارا بودن شش درجه آزادی حرکتی و مانورپذیری زیاد، در زمینه‌های مختلف صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

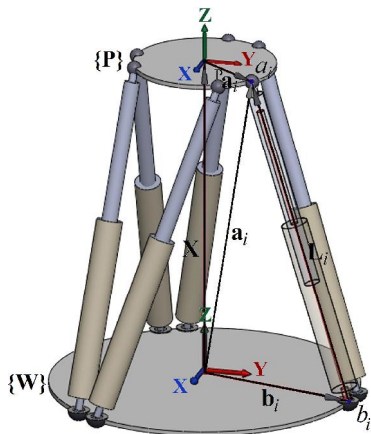
مدلسازی دینامیکی مکانیزم‌هایی نظیر سکوی استوارت از نظر طراحی و توانایی کنترل حرکت حائز اهمیت ویژه‌ای می‌باشد که بهمین دلیل موضوع مطالعات مختلفی قرار گرفته است. روش‌های متعددی بمنظور تحلیل دینامیکی مکانیزم مورد نظر توسط محققان ارائه شده است. ژنگ و همکارانش [۲]، لبرت و همکارانش [۳] و پانگ و شاهین‌پور [۴] روش حل معادلات لاگرانژی حرکت سکوی استوارت را در مختصات عمومی ارائه نمودند؛ این روش توسط تینگ و همکارانش [۵] و عبداللطیف و همین [۶] نیز مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از روش نیوتن-اولر در حل معادلات دینامیکی مکانیزم مورد نظر، به دلیل عدم نیاز به محاسبه بسیاری از مشتقات جزئی و محدود بودن حجم محاسبات عددی لازم و نیز توانایی استخراج معادلات دینامیکی حلقه بسته، برتری ویژه‌ای در مقایسه با روش اولر-لاگرانژ دارد. دو و یانگ [۷]، ربولت و همکارش [۸]، جی [۹]، حریب [۱۰]، داسگوپتا و همکارش [۱۱ و ۱۲]، گو و لی [۱۳] و محمودی و همکارانش [۱۴]، با استفاده از فرضهای ساده‌سازی، از روش نیوتن-اولر در حل معادلات دینامیکی مکانیزم مورد نظر استفاده نموده‌اند. فو و همکارش [۱۵] روش بکار رفته در مرجع [۱۱] را با روش اولر-لاگرانژ مقایسه کرده و پیشنهادهایی را برای اصلاح برخی از مشکلات فنی و علمی آن مرجع، در قالب توضیحی برای آن ارائه نموده‌اند. وکیل و همکارانش [۱۶] نیز اصلاحاتی را برای بکارگیری فرضهای صحیح در تحلیل مکانیزم مورد نظر، بصورت توضیحی برای مراجع [۱۱ و ۱۲]، پیشنهاد نموده‌اند.

در این تحقیق، روابط سینماتیکی و دینامیکی مکانیزم استوارت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. تحلیل سینماتیک و دینامیک معکوس مکانیزم مورد نظر با در نظر گرفتن تمامی نیروهای گرانشی، اصطکاکی، کریولیس، اینرسی و نیروهای خارجی با استفاده از روش نیوتن-اولر انجام شده است. در مقالات متعدد ارائه شده توسط محققان، معادلات دینامیکی مکانیزم مورد نظر با فرضهایی برای ساده‌سازی پیچیدگی مسأله ارائه شده است؛ معادلات سینماتیکی و دینامیکی مکانیزم، با استفاده از سینماتیک مفصل یونیورسال و با در نظر گرفتن درجه آزادی دورانی پایه حول محور خود و با معرفی جهت مناسب برای ممان قابل تحمل مفصل یونیورسال و

انتقال صحیح ممان با در نظر گرفتن قضیه محوره‌های موازی ارائه شده است. معادلات دینامیکی بدست آمده در کار حاضر، از نظر تئوری، دارای دقت بیشتری در مقایسه با معادلات حاصل از مطالعات پیشین می‌باشند. مدلسازی دینامیکی مکانیزم مورد نظر با برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار MATLAB انجام شده است.

۲- معرفی مکانیزم استوارت تحت بررسی

مکانیزم تحت بررسی که در شکل ۱ نشان داده شده است؛ شامل یک سکوی متحرک، یک سکوی ثابت و شش پایه با طول متغیر می‌باشد. ارتباط پایه‌ها به سکوی متحرک با مفاصل کروی و به سکوی ثابت توسط مفاصل یونیورسال می‌باشد، مفاصل کشویی نیز بین دو قسمت بالایی و پایینی هر پایه بکار گرفته می‌شود. در شکل ۱، چارچوب متحرک {P} متصل به سکوی متحرک در نظر گرفته شده و با آن حرکت می‌کند و چارچوب مرجع {W} متصل به سکوی ثابت در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- مکانیزم استوارت تحت بررسی

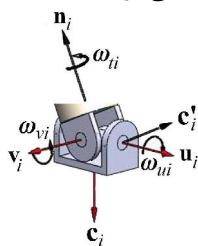
۳- تحلیل سینماتیک معکوس

مسأله سینماتیک معکوس مکانیزم استوارت در واقع محاسبه میزان جابجایی، سرعت و شتاب پایه‌های مکانیزم می‌باشد. بردار طولی هر پایه در امتداد محور مفصل کشویی مربوط به آن L_i ، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$L_i = a_i - b_i \quad (1)$$

بطوریکه a_i و b_i بترتیب بردارهای موقعیت نقطه مفصلی i ام در محل اتصال سکوی متحرک و سکوی ثابت به هر کدام از پایه‌ها با مبدأ در چارچوب مرجع می‌باشند؛ a_i بصورت زیر محاسبه می‌شود:

کاهش پیچیدگی فرمولاسیون دینامیکی مکانیزم بکار گرفته شده‌اند. در این مقاله تحلیل دینامیکی مکانیزم با استفاده از سینماتیک مفصل یونیورسال شکل ۲ و بدون استفاده از ساده‌سازیهای مذکور ارائه می‌شود.



شکل ۲- مفصل یونیورسال و بردارهای سرعت زاویه‌ای

در شکل ۲ بردار یکه \mathbf{u}_i نشان دهنده محور ثابت مفصل یونیورسال می‌باشد؛ بردار یکه \mathbf{v}_i هم بر بردار \mathbf{u}_i و هم بر بردار \mathbf{n}_i عمود می‌باشد. بردار \mathbf{c}_i بردار نرمال صفحه متشکل از بردارهای \mathbf{v}_i و \mathbf{u}_i بوده و بردار \mathbf{c}'_i نیز بردار نرمال صفحه متشکل از بردارهای \mathbf{v}_i و \mathbf{n}_i می‌باشد.

با توجه به شکل ۲، سرعت زاویه‌ای هر پایه برآیند دو مؤلفه حول محورهای \mathbf{u}_i و \mathbf{v}_i می‌باشد، بنابراین می‌توان سرعت زاویه‌ای هر کدام از پایه‌ها را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{\omega}_{li} = \omega_{ui}\mathbf{u}_i + \omega_{vi}\mathbf{v}_i \quad (11)$$

بطوریکه ω_{ui} و ω_{vi} بترتیب اندازه مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای حول محورهای \mathbf{u}_i و \mathbf{v}_i می‌باشند؛ با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۹) و سپس با ضرب داخلی طرفین رابطه بدست آمده در \mathbf{v}_i و \mathbf{u}_i ، بترتیب اندازه مؤلفه سرعت زاویه‌ای حول محورهای \mathbf{v}_i و \mathbf{u}_i محاسبه می‌شود:

$$\omega_{ui} = -(\dot{\mathbf{L}}_i - \dot{l}_i\mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{v}_i / l_i\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (12)$$

$$\omega_{vi} = (\dot{\mathbf{L}}_i - \dot{l}_i\mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{u}_i / l_i\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (13)$$

از طرفی سرعت زاویه‌ای هر پایه را می‌توان برآیند دو مؤلفه، یکی حول امتداد پایه و دیگری حول امتدادی عمود بر پایه در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{\omega}_{li} = \boldsymbol{\omega}_{ni} + \omega_{li}\mathbf{n}_i \quad (14)$$

بطوریکه مؤلفه سرعت زاویه‌ای حول امتدادی عمود بر پایه بوده و ω_{li} اندازه مؤلفه سرعت زاویه‌ای حول امتداد پایه می‌باشد؛ مؤلفه $\boldsymbol{\omega}_{ni}$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{\omega}_{ni} = (\mathbf{n}_i \times \dot{\mathbf{L}}_i) / l_i \quad (15)$$

با توجه به اینکه سرعت زاویه‌ای هر پایه حول محور \mathbf{c}_i فاقد مؤلفه می‌باشد، ω_{li} با ضرب داخلی طرفین رابطه (۱۴) در \mathbf{c}_i بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega_{li} = -\boldsymbol{\omega}_{ni} \cdot \mathbf{c}_i / \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (16)$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{X} + \mathbf{q}_i \quad (2)$$

که در رابطه فوق \mathbf{X} بردار موقعیت مرکز سکوی متحرک در چارچوب مرجع بوده و \mathbf{q}_i نیز بردار موقعیت نقطه مفصلی i ام در محل اتصال سکوی متحرک به هر کدام از پایه‌ها در چارچوب مرجع می‌باشد که جزئیات آن در ضمیمه مورد بررسی قرار گرفته است.

بدین ترتیب طول پایه i ام از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$l_i = \|\mathbf{L}_i\| \quad (3)$$

بردار یکه هر پایه در امتداد محور مفصل کشویی مربوط به آن \mathbf{n}_i ، نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{L}_i / l_i \quad (4)$$

با توجه به معادله (۴)، بردار طولی هر پایه را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{L}_i = l_i\mathbf{n}_i \quad (5)$$

با قرار دادن معادله (۲) در معادله (۱) و برابر قرار دادن معادله بدست آمده با معادله (۵)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$l_i\mathbf{n}_i = \mathbf{X} + \mathbf{q}_i - \mathbf{b}_i \quad (6)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۶) نسبت به زمان و سپس با ضرب داخلی طرفین رابطه بدست آمده در \mathbf{n}_i ، اندازه سرعت خطی هر پایه \dot{l}_i بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{l}_i = \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{q}_i \times \mathbf{n}_i) \quad (7)$$

اندازه شتاب خطی هر پایه \ddot{l}_i ، با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۶) نسبت به زمان و سپس با ضرب داخلی طرفین رابطه بدست آمده در \mathbf{n}_i ، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\ddot{l}_i = \ddot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{q}_i \times \mathbf{n}_i) + \dot{\mathbf{X}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{n}_i) + \boldsymbol{\omega} \cdot [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_i) \times \mathbf{n}_i + \mathbf{q}_i \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{n}_i)] \quad (8)$$

بطوریکه، $\dot{\mathbf{X}}$ و $\ddot{\mathbf{X}}$ بترتیب سرعت و شتاب خطی مرکز سکوی متحرک بوده و $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ بترتیب سرعت و شتاب زاویه‌ای سکوی متحرک می‌باشند؛ $\boldsymbol{\omega}_{li}$ و $\boldsymbol{\alpha}_{li}$ نیز سرعت و شتاب زاویه‌ای مربوط به پایه i ام می‌باشند.

سرعت هر کدام از نقاط مفصلی، $\dot{\mathbf{L}}_i$ ، با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۵) نسبت به زمان، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \boldsymbol{\omega}_{li} \times l_i\mathbf{n}_i + \dot{l}_i\mathbf{n}_i \quad (9)$$

شتاب نقطه مفصلی i ام، $\ddot{\mathbf{L}}_i$ ، نیز با دو بار مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۵) نسبت به زمان بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\ddot{\mathbf{L}}_i = \boldsymbol{\alpha}_{li} \times l_i\mathbf{n}_i + \boldsymbol{\omega}_{li} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times l_i\mathbf{n}_i) + 2\boldsymbol{\omega}_{li} \times \dot{l}_i\mathbf{n}_i + \ddot{l}_i\mathbf{n}_i \quad (10)$$

۴- سرعت و شتاب زاویه‌ای پایه‌ها

در تحلیل دینامیکی ارائه شده در مراجع [۷-۱۶] ساده‌سازیهایی نظیر $\boldsymbol{\alpha}_{li} \cdot \mathbf{n}_i = 0$ و $\boldsymbol{\omega}_{li} \cdot \mathbf{n}_i = 0$ برای

۵-۱- تحلیل دینامیکی یک پایه

با در نظر گرفتن تعادل دورانی کل پایه، معادلهٔ اوپلر در یک پایه از مکانیزم بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{M}_i + l_i \mathbf{n}_i \times \mathbf{F}_i + (m_u \mathbf{L}_{ui} + m_d \mathbf{L}_{di}) \times \mathbf{G} - m_u \mathbf{L}_{ui} \times \dot{\mathbf{L}}_{ui} - m_d \mathbf{L}_{di} \times \dot{\mathbf{L}}_{di} - (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \boldsymbol{\omega}_i - C_s (\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}) - C_u \boldsymbol{\omega}_i = 0 \quad (27)$$

که در آن C_s و C_u بترتیب ضرایب اصطکاک لزجی در مفاصل یونیورسال و کروی می‌باشند؛ \mathbf{G} بردار شتاب جاذبه بوده و \mathbf{M}_i و \mathbf{F}_i بترتیب نشان دهندهٔ نیرو و گشتاور وارد شده از سکوی متحرک به هر کدام از پایه‌ها می‌باشند. \mathbf{I}_{ui} و \mathbf{I}_{di} بترتیب تانسور لختی قسمتهای پایین و بالای هر پایه می‌باشند که با در نظر گرفتن قضیهٔ محوره‌های موازی در ضمیمه ارائه شده‌اند. در مراجع [۱۱ و ۱۲] با صرفنظر از درجهٔ آزادی دورانی پایه ممان قابل تحمل مفصل یونیورسال حول محور پایه در نظر گرفته شده است، که مفصل یونیورسال ممانی را در این راستا تحمل نمی‌کند؛ با توجه به شکل ۲، \mathbf{M}_i حول برداری عمود بر محوره‌های چرخشی مفصل یونیورسال بوده و بر حسب اندازهٔ ممان حول آن محور، m_i ، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{c}_i \quad (28)$$

رابطهٔ (۲۷)، با استفاده از رابطهٔ (۲۸) بصورت خلاصه شدهٔ زیر بازنویسی می‌شود:

$$m_i \mathbf{c}_i + l_i \mathbf{n}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}_i \quad (29)$$

بطوریکه \mathbf{N}_i بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{N}_i = -(m_u \mathbf{L}_{ui} + m_d \mathbf{L}_{di}) \times \mathbf{G} + m_u \mathbf{L}_{ui} \times \dot{\mathbf{L}}_{ui} + m_d \mathbf{L}_{di} \times \dot{\mathbf{L}}_{di} + C_s (\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}) + C_u \boldsymbol{\omega}_i + (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \boldsymbol{\omega}_i \quad (30)$$

با ضرب داخلی طرفین رابطهٔ (۲۹) در بردار \mathbf{n}_i ، اندازه ممان حول محور \mathbf{c}_i بصورت زیر بدست می‌آید:

$$m_i = \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{n}_i / \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i \quad (31)$$

با ضرب خارجی طرفین رابطهٔ (۲۹) در بردار \mathbf{n}_i ، نیروی وارد بر پایهٔ i ام پس از ساده‌سازی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{F}_i) \mathbf{n}_i + [\mathbf{N}_i \times \mathbf{n}_i - m_i (\mathbf{c}_i \times \mathbf{n}_i)] / l_i \quad (32)$$

اندازهٔ نیروی محرکهٔ لازم F_{acti} ، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_{acti} = -(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{F}_i) + m_u \mathbf{n}_i \cdot (\dot{\mathbf{L}}_{ui} - \mathbf{G}) + C_p \dot{l}_i \quad (33)$$

که C_p ضریب اصطکاک ویسکوز در مفصل کشویی می‌باشد.

با جایگذاری رابطهٔ (۳۱) و $(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{F}_i)$ از رابطهٔ (۳۳) در رابطهٔ (۳۲)، \mathbf{F}_i بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{F}_i = -F_{acti} \mathbf{n}_i + m_u [\mathbf{n}_i \cdot (\dot{\mathbf{L}}_{ui} - \mathbf{G})] \mathbf{n}_i + C_p \dot{l}_i \mathbf{n}_i + [\mathbf{N}_i \times \mathbf{n}_i - (\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{c}_i \times \mathbf{n}_i)] / \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i / l_i \quad (34)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۳۰) در رابطهٔ (۳۳) و با جایگذاری رابطهٔ

با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ (۱۱) نسبت به زمان، رابطهٔ شتاب زاویه‌ای هر پایه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_{ui} \mathbf{u}_i + \alpha_{vi} \mathbf{v}_i + \omega_{ui} \omega_{vi} \mathbf{c}_i \quad (17)$$

بطوریکه α_{ui} و α_{vi} اندازهٔ مؤلفه‌های شتاب زاویه‌ای بترتیب حول محوره‌های \mathbf{u}_i و \mathbf{v}_i می‌باشند؛ با جایگذاری رابطهٔ (۱۷) در رابطهٔ (۱۰) و سپس با ضرب داخلی هر کدام از بردارهای \mathbf{v}_i و \mathbf{u}_i به طرفین رابطهٔ بدست آمده، بترتیب مقادیر α_{vi} و α_{ui} بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\alpha_{ui} = -\dot{\mathbf{L}}'_i \cdot \mathbf{v}_i / l_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (18)$$

$$\alpha_{vi} = \dot{\mathbf{L}}'_i \cdot \mathbf{u}_i / l_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (19)$$

که در رابطهٔ فوق $\dot{\mathbf{L}}'_i$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\mathbf{L}}'_i = \dot{\mathbf{L}}_i - \omega_{ui} \omega_{vi} \times l_i \mathbf{n}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times l_i \mathbf{n}_i) - 2 \dot{l}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{n}_i - \ddot{l}_i \mathbf{n}_i \quad (20)$$

شتاب زاویه‌ای هر پایه را می‌توان برآیند دو مؤلفه، یکی حول امتداد پایه و دیگری حول امتدادی عمود بر پایه در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_{ni} + \alpha_{ii} \mathbf{n}_i \quad (21)$$

بطوریکه $\boldsymbol{\alpha}_{ni}$ مؤلفهٔ شتاب زاویه‌ای حول امتدادی عمود بر پایه بوده و α_{ii} اندازهٔ مؤلفهٔ شتاب زاویه‌ای حول امتداد پایه می‌باشد؛ مؤلفهٔ $\boldsymbol{\alpha}_{ni}$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{\alpha}_{ni} = \{ \mathbf{n}_i \times \dot{\mathbf{L}}_i - \mathbf{n}_i \times [\boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times l_i \mathbf{n}_i) + 2 \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{l}_i \mathbf{n}_i] \} / l_i \quad (22)$$

با برابر قرار دادن روابط (۱۷) و (۲۱) و سپس با ضرب داخلی طرفین رابطهٔ بدست آمده در بردار \mathbf{u}_i ، رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_{ui} = (\boldsymbol{\alpha}_{ni} + \alpha_{ii} \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{u}_i \quad (23)$$

α_{ii} با جایگذاری رابطهٔ (۱۷) در رابطهٔ (۲۱) و سپس با ضرب داخلی طرفین رابطهٔ بدست آمده در بردار \mathbf{n}_i و با استفاده از رابطهٔ (۲۳)، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_{ii} = [(\boldsymbol{\alpha}_{ni} \cdot \mathbf{u}_i) (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i) / 1 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i)^2] - \omega_{ui} \omega_{vi} \quad (24)$$

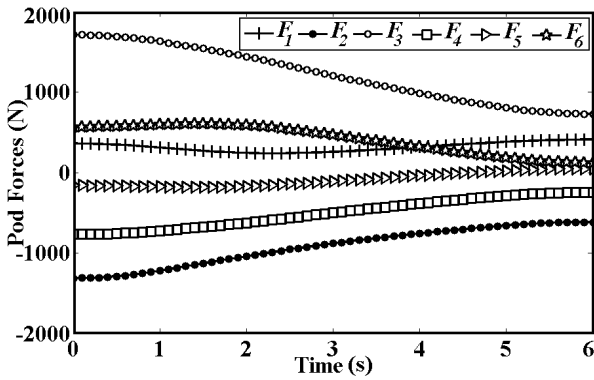
با در نظر گرفتن \mathbf{L}_{di} و \mathbf{L}_{ui} به ترتیب به عنوان بردارهای موقعیت مراکز جرم قسمتهای پایین و بالای پایهٔ i ام، شتابهای مراکز جرم قسمتهای پایین و بالای آن به ترتیب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{\mathbf{L}}_{di} = \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{L}_{di} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{di}) \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{ui} = \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{L}_{ui} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{ui}) + 2 \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{l}_i \mathbf{n}_i + \ddot{l}_i \mathbf{n}_i \quad (26)$$

۵- تحلیل دینامیک معکوس

در کار حاضر از روش تحلیلی نیوتن-اوپلر جهت تحلیل دینامیک معکوس سکوی استوارت استفاده شده است.



شکل ۳- نیروهای محرک مورد نیاز در پایه‌ها

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، روابط سینماتیکی و دینامیکی مکانیزم استوارت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. تحلیل سینماتیک و دینامیک معکوس مکانیزم مورد نظر با در نظر گرفتن تمامی نیروهای گرانشی، اصطکاکی، کریولیس، اینرسی و نیروهای خارجی با استفاده از روش نیوتن-اولیتر انجام شده است. معادلات سینماتیکی و دینامیکی مکانیزم، با استفاده از سینماتیک مفصل یونیورسال و با در نظر گرفتن درجه آزادی دورانی هر پایه حول محور خود و با معرفی جهت مناسب برای ممان قابل تحمل مفصل یونیورسال و نیز با انتقال صحیح ممان بواسطه در نظر گرفتن قضیه محوره‌های موازی ارائه شده است. معادلات دینامیکی بدست آمده در کار حاضر، از نظر تئوری، دارای دقت بیشتری در مقایسه با معادلات دینامیکی حاصل از مدل‌های ساده‌سازی شده پیشین می‌باشند.

ضمیمه

در رابطه (۲)، بردار \mathbf{q}_i بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{R}^p \mathbf{a}_i$$

بطوریکه \mathbf{a}_i بردار موقعیت نقاط مفصلی در چارچوب متحرک می‌باشد. \mathbf{R} نیز ماتریس دوران 3×3 بوده و بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C\theta_z C\theta_y & -S\theta_z C\theta_x + C\theta_z S\theta_y S\theta_x & S\theta_z S\theta_x + C\theta_z S\theta_y C\theta_x \\ S\theta_z C\theta_y & C\theta_z C\theta_x + S\theta_z S\theta_y S\theta_x & -C\theta_z S\theta_x + S\theta_z S\theta_y C\theta_x \\ -S\theta_y & C\theta_y S\theta_x & C\theta_y C\theta_x \end{bmatrix}$$

$$C\theta_x = \cos(\theta_x); \quad S\theta_x = \sin(\theta_x);$$

در مراجع [۱۱] و [۱۲]، تعاریف مربوط به \mathbf{I}_{ui} و \mathbf{I}_{di} بدون در نظر گرفتن قضیه محوره‌های موازی ارائه شده است؛ \mathbf{I}_{ui} و \mathbf{I}_{di} با در نظر گرفتن قضیه محوره‌های موازی و با استفاده از بردارهای $\mathbf{L}_{ui} = [l_{ux} \ l_{uy} \ l_{uz}]^T$ و $\mathbf{L}_{di} = [l_{dx} \ l_{dy} \ l_{dz}]^T$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

(۲۶) در رابطه حاصل و با استفاده از معادلات (۲۲)، (۲۱) و (۸)، نیروی وارد بر پایه‌ها بصورت خلاصه شده زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{F}_i = -F_{acti} \mathbf{n}_i + \mathbf{Q}_i (\ddot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{q}_i) + \mathbf{V}_i \quad (۳۵)$$

عوامل \mathbf{Q}_i و \mathbf{V}_i در ضمیمه مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۵-۲- تحلیل دینامیکی سکوی متحرک

شتاب مرکز جرم سکوی متحرک بارگذاری شده $\ddot{\mathbf{X}}_g$ ،

بصورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\ddot{\mathbf{X}}_g = \ddot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (۳۶)$$

بطوریکه \mathbf{r} بردار موقعیت مرکز جرم سکوی متحرک در چارچوب مرجع بوده و در ضمیمه مورد بررسی قرار گرفته است.

با در نظر گرفتن \mathbf{F}_i از رابطه (۳۵) و $\ddot{\mathbf{X}}_g$ از رابطه (۳۶)،

معادله تعادل نیروها در سکو بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$(m_p \mathbf{I}_3 + \sum_{i=1}^6 \mathbf{Q}_i) \ddot{\mathbf{X}} - (m_p \tilde{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^6 \mathbf{Q}_i \tilde{\mathbf{q}}_i) \boldsymbol{\alpha} + m_p [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{G}] + \sum_{i=1}^6 \mathbf{V}_i = \mathbf{R} \mathbf{F}_{ext} + \sum_{i=1}^6 F_{acti} \mathbf{n}_i \quad (۳۷)$$

که در آن \mathbf{M}_{ext} و \mathbf{F}_{ext} به ترتیب نیرو و گشتاور خارجی اعمال شده بر سکوی متحرک می‌باشند؛ m_p نیز بیانگر جرم سکوی متحرک به همراه جرم بار روی آن می‌باشد.

با در نظر گرفتن \mathbf{F}_i از رابطه (۳۵) معادله اولیتر بصورت زیر

نوشته می‌شود:

$$(m_p \tilde{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^6 \tilde{\mathbf{q}}_i \mathbf{Q}_i) \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{I}_p - m_p (\tilde{\mathbf{r}})^2 - \sum_{i=1}^6 \tilde{\mathbf{q}}_i \mathbf{Q}_i \tilde{\mathbf{q}}_i] \boldsymbol{\alpha} + m_p \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{G}] + \sum_{i=1}^6 (\mathbf{q}_i \times \mathbf{V}_i) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_p \boldsymbol{\omega} - \sum_{i=1}^6 C_s (\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R} \mathbf{M}_{ext} + \sum_{i=1}^6 (\mathbf{q}_i \times F_{acti} \mathbf{n}_i) \quad (۳۸)$$

بطوریکه \mathbf{I}_p تانسور لختی سکوی متحرک و بار روی آن در چارچوب مرجع بوده و در ضمیمه مورد بررسی قرار گرفته است.

۶- نتایج شبیه‌سازی

رفتار مکانیزم مورد نظر با استفاده از برنامه نوشته شده در محیط نرم‌افزار MATLAB مورد بررسی قرار گرفته است؛ نیروهای محرک لازم در پایه‌ها مدلسازی شده و در شکل ۳ نشان داده شده‌اند.

مشخصات مکانیزم و مشخصات مسیر در مرجع [۱۱] در برنامه شبیه‌سازی مکانیزم استفاده شده است. بدین منظور یک مسیر با پروفیل سرعت دوزنقه‌ای مطابق با مسیر \mathbf{I} در مرجع [۱۱] و با همان موقعیت‌ها و جهت‌گیری‌های مشخص شده در آن مرجع، مورد استفاده قرار گرفته است.

- a Class of Stewart Platforms”, Robot. Auton. Syst., Vol. 9, No. 4, pp. 237-254, 1992.
- [3] Leuret G., Liu K. and Lewis F.L., “Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator”, J. Robotic. Syst., Vol. 10, No. 5, pp. 629-655, 1993.
- [4] Pang H. and Shahinpoor M., “Inverse Dynamics of a Parallel Manipulator”, J. Robotic. Syst., Vol. 11, No. 8, pp. 693-702, 1994.
- [5] Ting Y., Chen Y.-S., Jar H.-C., “Modeling and Control for a Gough-Stewart Platform CNC Machine”, J. Robotic. Syst., Vol. 21, No. 11, pp. 609-623, 2004.
- [6] Abdellatif H. and Heimann B., “Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism”, Mech. Mach. Theory., Vol. 44, No. 1, 192-207, 2009.
- [7] Do W.Q.D. and Yang D.C.H., “Inverse Dynamic Analysis and Simulation of a Platform Type of Robot”, J. Robotic. Syst., Vol. 5, No. 3, pp. 209-227, 1988.
- [8] Reboulet C. and Berthomieu T., “Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators”, in Proc. IEEE int. conf. robotics and automation, Vol. 2, pp. 1153-1157, 1991.
- [9] Ji Z., “Study of the Effect of Leg Inertia in Stewart Platform”, in Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 121-126, 1993.
- [10] Harib, K.H., Dynamic modeling, identification and control of Stewart platform-Based Machine Tools, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1997.
- [11] Dasgupta B. and Mruthyunjaya T.S., “A Newton-Euler Formulation for the Inverse Dynamics of Stewart platform Manipulator”, Mech. Mach. Theory., Vol. 33, No. 8, pp. 1135-1152, 1998.
- [12] Dasgupta B. and Mruthyunjaya T.S., “Closed-Form Dynamic Equations of the General Stewart Platform through Newton-Euler Approach”, Mech. Mach. Theory., Vol 33, No. 7, pp. 993-1012, 1998.
- [13] Guo H.B. and Li H.R., “Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart platform manipulator”, Proc. IMechE, Part C: J. Mechanical Engineering Science, Vol. 220, No. C1, pp. 61-72, 2006.
- [14] Mahmoodi A., Menhaj M.B. and Sabzehparvar M., “An efficient method for solution of inverse dynamics of Stewart platform”, Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal, Vol 81, No. 5, pp. 398-406, 2009.
- [15] Fu S. and Yao Y., “Comments on ‘‘A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of Stewart platform manipulator’’ by B. Dasgupta and T.S. Mruthyunjaya [Mech. Mach. Theory 33 (1998) 1135-1152]”, Mech. Mach. Theory., Vol 42, No.12, pp. 1668-1671, 2007.
- [16] Vakil M., Pendar H. and Zohoor H., “Comments to the: ‘‘Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton-Euler approach’’ and ‘‘A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of Stewart platform manipulator’’”, Mech. Mach. Theory., Vol. 43, No. 10, pp. 1349-1351, 2008.

$$\mathbf{I}_{di} = \mathbf{T}_i (\mathbf{I}_{doi} + m_d \begin{bmatrix} l_{dy}^2 + l_{dz}^2 & -l_{dx}l_{dy} & -l_{dx}l_{dz} \\ -l_{dx}l_{dy} & l_{dx}^2 + l_{dz}^2 & -l_{dy}l_{dz} \\ -l_{dx}l_{dz} & -l_{dy}l_{dz} & l_{dx}^2 + l_{dy}^2 \end{bmatrix}) \mathbf{T}_i^T$$

$$\mathbf{I}_{ui} = \mathbf{T}_i (\mathbf{I}_{uoi} + m_u \begin{bmatrix} l_{uy}^2 + l_{uz}^2 & -l_{ux}l_{uy} & -l_{ux}l_{uz} \\ -l_{ux}l_{uy} & l_{ux}^2 + l_{uz}^2 & -l_{uy}l_{uz} \\ -l_{ux}l_{uz} & -l_{uy}l_{uz} & l_{ux}^2 + l_{uy}^2 \end{bmatrix}) \mathbf{T}_i^T$$

بطوریکه \mathbf{I}_{doi} و \mathbf{I}_{uoi} بترتیب تانسورهای لختی قسمتهای پایین و بالای هر پایه در مختصات محلی واقع در مراکز جرم هر قسمت می‌باشند و توسط ماتریس انتقال $\mathbf{T}_i = [\mathbf{n}_i \quad \mathbf{v}_i \quad \mathbf{c}'_i]$ به مختصات مفصل یونیورسال نگاشته می‌شوند.

تعاریف مربوط به عوامل \mathbf{Q}_i و \mathbf{V}_i در رابطه (۳۵):

$$\mathbf{Q}_i = m_u (\mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T) + [m_u \tilde{\mathbf{n}}_i (\tilde{\mathbf{L}}_{ui})^2 \tilde{\mathbf{n}}_i / l_i^2] + [m_d \tilde{\mathbf{n}}_i (\tilde{\mathbf{L}}_{di})^2 \tilde{\mathbf{n}}_i / l_i^2] - [\tilde{\mathbf{n}}_i (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \tilde{\mathbf{n}}_i / l_i^2] + (\mathbf{c}_i \times \mathbf{n}_i / \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i) \{ [m_u \mathbf{n}_i^T (\tilde{\mathbf{L}}_{ui})^2 \tilde{\mathbf{n}}_i / l_i^2] + [m_d \mathbf{n}_i^T (\tilde{\mathbf{L}}_{di})^2 \tilde{\mathbf{n}}_i / l_i^2] - \mathbf{n}_i^T (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \{ \mathbf{n}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{n}_i \mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{n}}_i / l_i^2 [1 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i)^2] \} \}$$

$$\mathbf{V}_i = m_u \{ \mathbf{n}_i \cdot [\boldsymbol{\omega}_{li} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{L}_{ui})] \} \mathbf{n}_i + m_u \{ [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_i)] \cdot \mathbf{n}_i - [\boldsymbol{\omega}_{li} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times l_i \mathbf{n}_i)] \cdot \mathbf{n}_i \} \mathbf{n}_i - m_u (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{G}) \mathbf{n}_i + C_p \dot{l}_i \mathbf{n}_i + \{ -[(m_u \mathbf{L}_{ui} + m_d \mathbf{L}_{di}) \times \mathbf{G}] \times \mathbf{n}_i + m_u (\mathbf{n}_i \times \mathbf{S}_{ui} / l_i) + m_u \{ \mathbf{L}_{ui} \times [\boldsymbol{\omega}_{li} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{L}_{ui})] \} \times \mathbf{n}_i + 2 \dot{l}_i m_u \{ \mathbf{L}_{ui} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{n}_i) \} \times \mathbf{n}_i + m_d (\mathbf{n}_i \times \mathbf{S}_{di} / l_i) + m_d \{ \mathbf{L}_{di} \times [\boldsymbol{\omega}_{li} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{L}_{ui})] \} \times \mathbf{n}_i - [\mathbf{n}_i \times \{ (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \mathbf{S}_i \} / l_i] + [\boldsymbol{\omega}_{li} \times (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \boldsymbol{\omega}_{li}] \times \mathbf{n}_i + C_u \boldsymbol{\omega}_{li} \times \mathbf{n}_i + C_s (\boldsymbol{\omega}_{li} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n}_i \} / l_i - \{ -[(m_u \mathbf{L}_{ui} + m_d \mathbf{L}_{di}) \times \mathbf{G}] \cdot \mathbf{n}_i - m_u (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{S}_{ui} / l_i) - m_d (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{S}_{di} / l_i) + \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \{ (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{S}_i) (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i / l_i [1 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i)^2] \} - \boldsymbol{\omega}_{ui} \boldsymbol{\omega}_{vi} \cdot \mathbf{n}_i \} + [\boldsymbol{\omega}_{li} \times (\mathbf{I}_{ui} + \mathbf{I}_{di}) \boldsymbol{\omega}_{li}] \cdot \mathbf{n}_i + C_s (\boldsymbol{\omega}_{li} - \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n}_i + C_u \boldsymbol{\omega}_{li} \cdot \mathbf{n}_i \} \{ \mathbf{c}_i \times \mathbf{n}_i / l_i (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i) \}$$

در رابطه فوق، \mathbf{S}_i ، \mathbf{S}_{di} و \mathbf{S}_{ui} بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{S}_i = \{ \mathbf{n}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_i)] - \boldsymbol{\omega}_{li} \times (\boldsymbol{\omega}_{li} \times l_i \mathbf{n}_i) - 2 \boldsymbol{\omega}_{li} \times \dot{l}_i \mathbf{n}_i \}$$

$$\mathbf{S}_{ui} = [\mathbf{L}_{ui} \times (\mathbf{L}_{ui} \times \mathbf{S}_i)] \quad \text{و} \quad \mathbf{S}_{di} = [\mathbf{L}_{di} \times (\mathbf{L}_{di} \times \mathbf{S}_i)]$$

بردار \mathbf{r} بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}_o$$

با در نظر گرفتن \mathbf{I}_p^P ، بعنوان تانسور لختی سکوی متحرک و بار روی آن در چارچوب متحرک، \mathbf{I}_p ، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{R} (\mathbf{I}_p^P + m_p \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix}) \mathbf{R}^T$$

مراجع

- [1] Stewart D., “A Platform with Six Degrees of Freedom”, in Proc. Inst. Mech. Eng., London, Vol. 180, No. 15, pp. 371-386, 1965.
- [2] Geng Z., Haynes L.S., Lee J.D. and Carroll R.L., “On the Dynamic Model and Kinematic Analysis of