

کاربرد روش حجم محدود در تحلیل عددی پیچش مقاطع منشوری

سید اسماعیل رضوی
تاج بخش نوید چاخارلو
علی نرج آبادی فام

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

چکیده

در کار حاضر مقاطع منشوری تحت پیچش با روش حجم محدود (*FVM*) مورد تحلیل قرار گرفته اند. گفتنی است یکی از ویژگی های بارز این روش، تحلیل مقاطع با شکل نامنظم می باشد. شبکه لازم ایجاد شده و معادله پواسون با روش حجم محدود مرکز سلول تحلیل شده و شرایط مرزی سازگار با روش حجم محدود اعمال گردیده است. در این بررسی از شبکه ثانویه نیز برای مدل سازی مساله استفاده می شود. کدی به زبان فرترن ۹۰ نوشته شده و در آن معادله گسسته شده حاکم با روش حجم محدود به صورت صریح حل شده است. با اجرای این برنامه و به دست آمدن مقادیر تنش برشی برآیند در نقاط مختلف سطح مقطع، کانتور توزیع تنش برشی در کل سطح مقطع رسم گردیده است. همچنین نتایج عددی به دست آمده با این روش، به صورت نمودارهای تغییر تنش برشی بیشینه بر حسب تغییر ابعاد سطح مقطع، با جواب های تحلیلی و نیز به صورت جدول با این جواب ها و نتایج عددی حاصل از روش تفاضل محدود (*FDM*) مقایسه شده اند که توافق بسیار خوبی بین آنها وجود دارد. نمودارهای همگرایی دو روش حجم محدود و تفاضل محدود نیز رسم شده و در انتها مقایسه ای بین گشتاور پیچشی موجود در سطح مقطع با استفاده از روش حجم محدود و حل تحلیلی صورت گرفته است. در این مقاله با استفاده از روش حجم محدود و با تعداد سلول و تکرارهای کمتری نسبت به بقیه روش های رایج به جواب های دقیق تری به دست آمده است.

کلمات کلیدی: پیچش مقاطع منشوری، معادله پواسون، تابع تنش، تنش برشی، گشتاور پیچشی، روش حجم محدود، سلول های شبکه، شبکه ثانویه، روش صریح

Application of Finite-Volume Method in Torsional Analysis of Prismatic Bars

S. E. Razavi Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz
T. Navid.Chakherlou Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz
A. Narjabadi Graduate student, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

Abstract

In present paper the torsion of prismatic bars has been investigated by the finite-volume method (FVM) for the first time. One of the distinguished features of this method is the ability for treatment of complex geometries. The Poisson equation has been solved on a cell-centered mesh with consistently derived boundary conditions. For this purpose a FORTRAN 90 code was written. The shear stresses at various locations of cross-section were determined. Also, thorough comparisons have been made with the conventional methods to verify the superiority of the present scheme in terms of convergence reduction and solutions accuracy.

Keywords: Torsion, Prismatic bar, Poisson equation, Stress function, Finite-Volume, Explicit method, Boundary conditions

۱- مقدمه

در اکثر کاربردهای مهندسی اعضای تحت پیچش مورد استفاده قرار می‌گیرند. متداول ترین کاربرد پیچش در میل گردان های انتقال است که از آنها برای انتقال توان از نقطه ای به نقطه دیگر استفاده می‌شود. انتقال توان از توربین بخار به مولد الکتریکی یا از موتور به ماشین ابزار یا از موتور به محور چرخ‌های خودرو را می‌توان به عنوان نمونه نام برد. این میل گردان‌ها ممکن است تو پر، تو خالی و با هر سطح مقطعی باشند. طراحی درست و با ضریب اطمینان بالای قطعات و سازه‌هایی که در معرض پیچش بوده و به طور اخص در شاخه مکانیک کاربرد دارند، مستلزم داشتن اطلاعات کافی در مورد توزیع تنش و همچنین مقدار آن در نواحی مختلف جسم می‌باشد.

از آنجائیکه دست یافتن به راه حل‌های دقیق و تحلیلی در مسایل مربوط به پیچش با سطح مقطع غیر دایره ای مشکل است، محققان با استفاده از روش‌های عددی مسایل پیچش را تحلیل نموده‌اند.

چن [۱-۲] پیچش میله‌های با سطح مقطع مستطیلی و دارای شکاف‌های داخلی و همچنین سیلندرهای جدار نازک با شکاف‌های متعدد را با استفاده از روش تفاضل محدود FDM تحلیل کرده است. تاناکا و برسین [۳] فرکانس‌های طبیعی ناشی از خمش و پیچش تیرهای کشسان یکنواخت با سطح مقطع دلخواه را با روش المان محدود (FEM) مطالعه کرده‌اند. لی و همکارانش [۴] برای یافتن توزیع تنش برشی در سطح مقطع محورهای در معرض پیچش با الگوریتم تکاملی تولید سطح مقطع، از همین روش استفاده کرده‌اند. کیم [۵] روش المان محدود با استفاده از یک المان با تقارن محوری تعمیم یافته را برای بررسی رفتار تغییر شکل پلاستیک نمونه‌های میله مسی تحت پیچش به کار برده است. واگنر و گراتمن [۶] پیچش میله‌های منشوری را با توجه به رفتار ماده الاستیک-پلاستیک، به روش المان محدود مطالعه کرده‌اند. کاتوری [۷] از FEM برای بررسی برش و پیچش در تیرهای جدار نازک با سطح مقطع دلخواه استفاده نموده است. جیانگ و هنشال [۸] تحلیل میله‌های منشوری تحت بارگذاری پیچشی را تنها با مدل سازی تکه کوچکی از میله، به روش المان محدود انجام داده‌اند. لی و همکارانش [۹] تیرهای T شکل دو تایی کامپوزیتی در معرض پیچش را با استفاده از FEM تحلیل کرده‌اند. پارک و یانگ [۱۰] تغییر شکل ناشی از پیچش میله‌های با سطح مقطع دایره‌ای، مربعی و مستطیلی را با استفاده از همین روش و برای رفتار پلاستیک کامل و شرایط مرزی بازگشتی مورد بررسی قرار داده‌اند. کاواتورتا و همکارانش [۱۱] با FEM ، اتصال پیچی کامپوزیتی تحت بارگذاری خمشی و

پیچشی را بررسی کرده‌اند. ساپونتزاکیس و موکوس [۱۲] پیچش غیر یکنواخت میله‌های یکپارچه یا چند پارچه با سطح مقطع متغیر و دلخواه را با روش المان مرزی (BEM) مورد بررسی قرار داده‌اند. یوهانسن و کوللا [۱۳] از گسسته سازی حجم محدود با شبکه‌های منظم دکارتی، برای تحلیل معادله پواسون با ضرایب متغیر و شرایط مرزی دیریکله در دو بعد، استفاده کرده‌اند.

در کار حاضر تحلیل پیچش مقاطع منشوری با روش حجم محدود انجام می‌گیرد. تحلیل مقاطع با شکل نامنظم، از ویژگی‌های مهم روش مذکور می‌باشد. معادله پواسون برای پیچش مقاطع مربعی و مستطیلی با این روش گسسته شده است. با اجرای کدی که به زبان فرترن ۹۰ توسط مولفان نوشته شده، نتایج عددی به دست آمده‌اند. نحوه توزیع تنش برشی برای مقاطع مربعی و مستطیلی نشان داده شده است. نتایج به دست آمده از این روش برای مقدار بیشینه تنش برشی برآیند در مقاطع مختلف، به صورت نمودار و جدول با نتایج تحلیلی [۱۴] و نتایج عددی حاصل از روش تفاضل محدود [۱۵] مقایسه گردیده‌اند. همچنین منحنی‌های همگرایی FDM و FVM برای یک مقطع خاص رسم و با یکدیگر مقایسه شده و در پایان گشتاور پیچشی محاسبه شده با FVM برای مقاطع مربعی و مستطیلی با پاسخ تحلیلی [۱۴] مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم بر پیچش

در این تحلیل مختصات دکارتی به کار رفته و مبدأ محورها در یکی از دو انتهای میله قرار گرفته است. همچنین امتداد وارد شدن گشتاور پیچشی در راستای محور Z می‌باشد. معادله حاکم (معادله پواسون) بر پیچش میله‌های راست یکنواخت با سطح مقطع دلخواه به شکل زیر است [۱۴]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F \quad , \quad F = -2G\theta \quad (1)$$

در رابطه فوق G مدول برشی و θ زاویه پیچش در واحد طول میله هستند. ϕ تابع تنش بوده و داریم:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad \tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (2)$$

که τ_{zx} و τ_{zy} مولفه‌های تنش برشی در سطح مقطع میله و τ برآیند آنهاست.

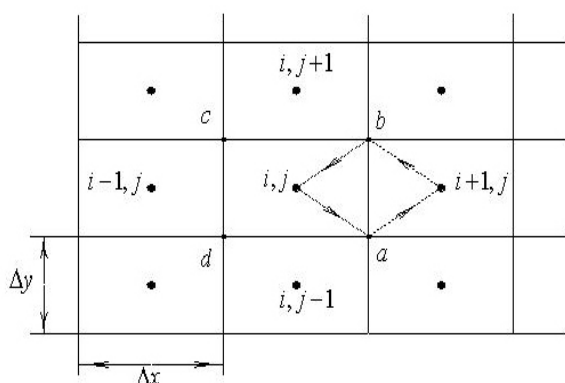
در این تحلیل فرض بر این است که میله تحت بارگذاری پیچشی، دارای خاصیت کشسان کامل است. همچنین ماده تشکیل دهنده جسم کشسان، همگن و ایزوتروپ بوده و به طور

$$\oint_C (Rdy - Sdx) = \sum_{k=1}^4 (R\Delta y - S\Delta x)_k \quad (6)$$

به عنوان مثال Δx و Δy برای ضلع ab سلول به صورت زیر است:

$$\Delta x_{ab} = x_b - x_a, \quad \Delta y_{ab} = y_b - y_a \quad (7)$$

حال اگر سطح مقطع در شکل (۱) مستطیلی و با سلول های منظم باشد، معادله (۵) در جهت پاد ساعتگرد به شکل زیر گسسته می شود:



شکل ۲- شبکه ثانویه برای محاسبه R و S در سلول های داخلی

$$(R_{ab} - R_{cd})\Delta y + (S_{bc} - S_{da})\Delta x = F\Delta x\Delta y \quad (8)$$

در این معادله R_{ab} نشان دهنده مقدار R بر روی ضلع ab و S_{bc} نشان دهنده مقدار S بر روی ضلع bc است. بایستی R و S روی اضلاع سلول $abcd$ معلوم شوند. مثلاً در سلول های داخلی داریم $R_{ab} = (\partial\phi/\partial x)_{ab}$. با انتگرال گیری از R_{ab} بر روی شبکه ثانویه شکل (۲) و کاربرد مجدد قضیه گرین داریم:

$$R_{ab} A_{a/i+1, j/b/i, j} = \oint_C \phi dy \quad (9)$$

که در آن $A_{a/i+1, j/b/i, j}$ نشان دهنده سطح سلول ثانویه در شکل (۲) است. در نتیجه معادله (۹) به شکل زیر در می آید:

$$R_{ab} = \frac{1}{A_{a/i+1, j/b/i, j}} \left[\phi_{a/i+1, j} (y_{i+1, j} - y_a) + \phi_{i+1, j/b} (y_b - y_{i+1, j}) + \phi_{b/i, j} (y_{i, j} - y_b) + \phi_{i, j/a} (y_a - y_{i, j}) \right] \quad (10)$$

یکنواخت در کل حجم مورد نظر توزیع شده است. جنس میله فولاد با $G = 79.3GPa$ می باشد.

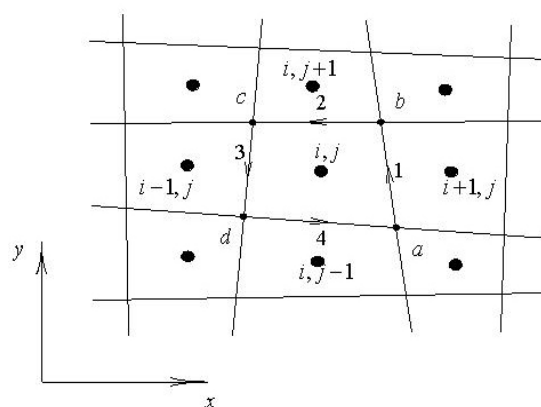
به منظور تحلیل کامل مسئله پیچش، گشتاور پیچشی موجود در سطح مقطع (T) نیز بایستی محاسبه گردد که از رابطه زیر به دست می آید [۱۴]:

$$T = 2 \iint_A \phi dx dy \quad (3)$$

که در آن A نشان دهنده مساحت سطح مقطع میله تحت پیچش می باشد.

۳- گسسته سازی با روش حجم محدود

شکل (۱) مقطع گسسته شده با شکل دلخواه و سلول های مربوطه را نشان می دهد. در روش حجم محدود سلول مرکز، اطلاعات در نقاط وسط سلول ها ذخیره و معادله (۱) به شکل انتگرالی زیر نوشته می شود:



شکل ۱- شبکه نامتعامد در تحلیل پیچش یک مقطع با شکل دلخواه

$$\iint_A \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) dx dy = F A_{abcd} \quad (4)$$

که A_{abcd} مساحت سطح مقطع سلول بوده و داریم: $\partial\phi/\partial y = S$ و $\partial\phi/\partial x = R$. با کاربرد قضیه گرین، معادله (۴) به شکل زیر در می آید:

$$\oint_C (Rdy - Sdx) = F A_{abcd} \quad (5)$$

در گسسته سازی معادله (۵) مقادیر R و S در روی اضلاع سلول ثابت فرض شده و خواهیم داشت:

$$R_{cd} = \frac{2(\phi_{1,j} - \phi_{Boundary})}{\Delta x} \quad (17)$$

با انجام عملیات مشابه برای سلول های مرزی دیگر، معادلات زیر نتیجه می شوند:

$$S_{da} = \frac{2(\phi_{i,1} - \phi_{Boundary})}{\Delta y} \quad (18)$$

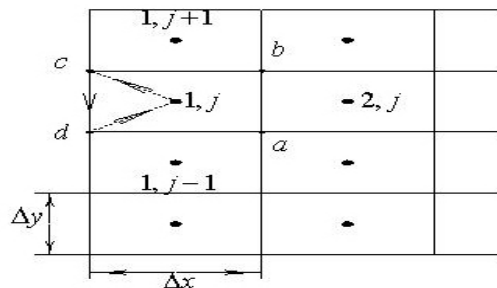
برای سلول های مرزی سمت راست

$$R_{ab} = \frac{2(\phi_{Boundary} - \phi_{M,j})}{\Delta x} \quad (19)$$

برای سلول های مرزی بالا

$$S_{bc} = \frac{2(\phi_{Boundary} - \phi_{i,N})}{\Delta y} \quad (20)$$

در معادلات فوق، M و N به ترتیب نشان دهنده تعداد سلول ها در جهت محورهای x و y هستند. مقادیر R و S در روی اضلاع مرزی سلول های واقع در گوشه ها نیز با این روابط محاسبه می شوند.



شکل ۳- نحوه محاسبه R_{cd} در سلول های مرزی سمت چپ با استفاده از شبکه ثانویه

۵- گسسته سازی معادلات پیچش

با تعیین همه مقادیر R و S و جایگذاری آنها در معادله (۸)، صورت گسسته شده معادله (۱) به شکل زیر در می آید:

$$\phi_{i,j} = \frac{\Delta y^2(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}) + \Delta x^2(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}) - F\Delta x^2\Delta y^2}{2(\Delta y^2 + \Delta x^2)} \quad (21)$$

$2 \leq i \leq M-1$
 $2 \leq j \leq N-1$

که مقدار ϕ بر روی اضلاع ثابت فرض شده و $\phi_{a/i+1,j}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\phi_{a/i+1,j} = \frac{\phi_a + \phi_{i+1,j}}{2} \quad (11)$$

در این معادله $\phi_{i+1,j}$ معلوم بوده و ϕ_a با میانگین گیری از سلول های مجاور محاسبه می شود. در نهایت معادله (۱۰) ساده می شود به:

$$R_{ab} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \quad (12)$$

همچنین

$$R_{cd} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (13)$$

همین طور برای S نتیجه می شود:

$$S_{bc} A_{b/i,j+1/c/i,j} = \oint_C \phi dx \quad (14)$$

صورت گسسته شده این معادله بعد از ساده سازی های مربوطه در نهایت بدین شکل خواهد بود:

$$S_{bc} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y} ; S_{da} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (15)$$

۴- شرایط و سلول های مرزی

با فرض عدم تأثیر نیروهای خارجی بر سطح جانبی میله، شرط مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (16)$$

در اینجا S نشان دهنده امتداد مرز سطح مقطع مورد نظر است. این رابطه نشان می دهد که ϕ باید در مرز سطح مقطع ثابت باقی بماند. در مقاطعی که بسته و به صورت یکپارچه باشند، این مقدار می تواند به طور دلخواه انتخاب گردد. بنابراین برای دانستن مقدار و توزیع تنش برشی در روی سطح مقطع میله تحت پیچش، باید تابع ϕ را طوری یافت که در رابطه (۱) صدق کرده و در مرز برابر مقدار ثابتی باشد. مقدار ϕ در مرز مستطیل با $\phi_{Boundary}$ نشان داده می شود.

در سلول های مرزی، محاسبه R و S متفاوت است. سلول های مرزی سمت چپ به جز دو سلول واقع در گوشه را در نظر بگیرید (شکل (۳)). برای محاسبه R_{cd} نمی توان معادله (۱۳) را به کار برد. در این حالت سمت چپ خط cd جزوی از سلول نیست. با انتگرال گیری از R_{cd} در شبکه ثانویه شکل (۳) داریم:

به دست می دهند. با استفاده از معادلات (۲) تنش های برشی در سلول های داخلی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$(\tau_{xz})_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{i,j} = -\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$2 \leq i \leq M-1$$

$$2 \leq j \leq N-1$$

(۳۰)

مقادیر تنش برشی در سلول های مرزی به جز چهار سلول واقع در گوشه ها با استفاده از تفاضلات پسرو و پیشرو مرتبه اول، بدین صورت محاسبه می شوند:

$$(\tau_{xz})_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{i,j} = -\frac{\phi_{2,j} - \phi_{1,j}}{\Delta x}$$

$$2 \leq j \leq N-1$$

برای سلول های مرزی پایین

$$(\tau_{xz})_{i,1} = \frac{\phi_{i,2} - \phi_{i,1}}{\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{i,1} = -\frac{\phi_{i+1,1} - \phi_{i-1,1}}{2\Delta x}$$

$$2 \leq i \leq M-1$$

برای سلول های مرزی سمت راست

$$(\tau_{xz})_{M,j} = \frac{\phi_{M,j+1} - \phi_{M,j-1}}{2\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{M,j} = -\frac{\phi_{M,j} - \phi_{M-1,j}}{\Delta x}$$

$$2 \leq j \leq N-1$$

برای سلول های مرزی بالا

$$(\tau_{xz})_{i,N} = \frac{\phi_{i,N} - \phi_{i,N-1}}{\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{i,N} = -\frac{\phi_{i+1,N} - \phi_{i-1,N}}{2\Delta x}$$

$$2 \leq i \leq M-1$$

و مقادیر تنش برشی در چهار سلول واقع در گوشه های مقطع به طریق زیر قابل محاسبه اند:

$$(\tau_{xz})_{1,1} = \frac{\phi_{1,2} - \phi_{1,1}}{\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{1,1} = -\frac{\phi_{2,1} - \phi_{1,1}}{\Delta x}$$

(۳۵)

$$(\tau_{xz})_{1,N} = \frac{\phi_{1,N} - \phi_{1,N-1}}{\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{1,N} = -\frac{\phi_{2,N} - \phi_{1,N}}{\Delta x}$$

(۳۶)

$$(\tau_{xz})_{M,1} = \frac{\phi_{M,2} - \phi_{M,1}}{\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{M,1} = -\frac{\phi_{M,1} - \phi_{M-1,1}}{\Delta x}$$

(۳۷)

$$(\tau_{xz})_{M,N} = \frac{\phi_{M,N} - \phi_{M,N-1}}{\Delta y} \quad ; \quad (\tau_{zy})_{M,N} = -\frac{\phi_{M,N} - \phi_{M-1,N}}{\Delta x}$$

(۳۸)

مقادیر ϕ در سلول های مرزی به جز چهار سلول واقع در گوشه، از روابط زیر قابل محاسبه اند: برای سلول های مرزی سمت چپ

$$\phi_{1,j} = \frac{\Delta y^2 \phi_{2,j} + \Delta x^2 (\phi_{1,j+1} + \phi_{1,j-1}) + 2\Delta y^2 \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{3\Delta y^2 + 2\Delta x^2}$$

$$2 \leq j \leq N-1$$

(۳۲)

برای سلول های مرزی پایین

$$\phi_{i,1} = \frac{\Delta x^2 \phi_{i,2} + \Delta y^2 (\phi_{i+1,1} + \phi_{i-1,1}) + 2\Delta x^2 \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{2\Delta y^2 + 3\Delta x^2}$$

$$2 \leq i \leq M-1$$

(۳۳)

برای سلول های مرزی سمت راست

$$\phi_{M,j} = \frac{\Delta y^2 \phi_{M-1,j} + \Delta x^2 (\phi_{M,j+1} + \phi_{M,j-1}) + 2\Delta y^2 \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{3\Delta y^2 + 2\Delta x^2}$$

$$2 \leq j \leq N-1$$

(۳۴)

برای سلول های مرزی بالا

$$\phi_{i,N} = \frac{\Delta x^2 \phi_{i,N-1} + \Delta y^2 (\phi_{i+1,N} + \phi_{i-1,N}) + 2\Delta x^2 \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{2\Delta y^2 + 3\Delta x^2}$$

$$2 \leq i \leq M-1$$

(۳۵)

و مقادیر ϕ در سلول های واقع در گوشه های سطح مقطع عبارتند از:

$$\phi_{1,1} = \frac{\Delta y^2 \phi_{2,1} + \Delta x^2 \phi_{1,2} + 2(\Delta y^2 + \Delta x^2) \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{3(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

(۳۶)

$$\phi_{1,N} = \frac{\Delta y^2 \phi_{2,N} + \Delta x^2 \phi_{1,N-1} + 2(\Delta y^2 + \Delta x^2) \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{3(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

(۳۷)

$$\phi_{M,1} = \frac{\Delta y^2 \phi_{M-1,1} + \Delta x^2 \phi_{M,2} + 2(\Delta y^2 + \Delta x^2) \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{3(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

(۳۸)

$$\phi_{M,N} = \frac{\Delta y^2 \phi_{M-1,N} + \Delta x^2 \phi_{M,N-1} + 2(\Delta y^2 + \Delta x^2) \phi_{Boundary} - F\Delta x^2 \Delta y^2}{3(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

(۳۹)

روابط (۲۱) تا (۲۹) مقدار ϕ در داخل تمام سلول های شبکه را به صورت صریح بر حسب ϕ ها در سلول های مجاور،

سطح مقطع، تنش برشی برآیند بیشینه و گشتاور پیچشی را به عنوان خروجی، ارائه می کند. در این قسمت نتایج عددی به دست آمده از طریق اجرای این برنامه ارائه شده اند. توزیع تنش برشی با رسم کانتور برای دو سطح مقطع با نسبت ابعاد $b/a = 1, 2.5$ و b به ترتیب نصف اندازه اضلاع سطح مقطع مستطیلی به موازات محورهای x و y نشان داده شده است. نتایج به دست آمده برای تنش برشی بیشینه در سطح مقطع های با ابعاد مختلف، با نتایج تحلیلی [۱۴] و نتایج عددی حاصل از روش تفاضل متناهی [۱۵]، مقایسه و منحنی های همگرایی دو روش حجم محدود و تفاضل متناهی برای دو سطح مقطع با نسبت ابعاد فوق رسم و مقایسه گردیده اند. همچنین نتایج حاصل از FVM برای گشتاور پیچشی، با نتایج تحلیلی [۱۴] مقایسه شده اند.

در شکل (۴) توزیع تنش برشی در سطح مقطع میله تحت پیچش مربعی و با ابعاد $20cm \times 20cm$ و در شکل (۵) توزیع تنش برشی در سطح مقطع میله مستطیلی تحت پیچش با ابعاد $20cm \times 50cm$ نشان داده شده اند. جنس میله در هر دو مورد، از فولاد با مدول برشی $G = 79.3GPa$ و زاویه پیچش در واحد طول (θ) برابر 1° است. همان گونه که در شکل (۴) مشاهده می شود، تنش برشی بیشینه در وسط اضلاع مربع اتفاق افتاده و در شکل (۵) نیز تنش برشی بیشینه در وسط ضلع پهن تر مستطیل ایجاد شده است. همچنین در گوشه های هر دو سطح مقطع، مقدار تنش برشی برابر با صفر است. این مطالب با نتایج تحلیلی و تجربی کاملاً سازگار هستند [۱۴].

در شکل (۶) نمودار تغییرات تنش برشی بیشینه به دست آمده با FVM ، بر حسب $2a$ که همان عرض مستطیل می باشد، برای نسبت های $b/a = 1, 1.2, 2, 2.5, 4$ نشان داده شده است. از مرجع [۱۴] برای تنش برشی بیشینه داریم:

$$\tau_{\max} = k2G\theta a \quad (43)$$

که در آن k ضریب ثابتی بوده و به نسبت b/a بستگی دارد. به این ترتیب معادله (۴۳) نشان می دهد که تنش برشی بیشینه در یک b/a ثابت، با $2a$ رابطه خطی دارد. این مطلب در شکل (۶) به خوبی مشهود است. خطوط رسم شده در روی نمودار، برازش داده های به دست آمده از FVM با یک خط هستند و به طوری که مشاهده می شود این خطوط همه نقاط را پوشش می دهند. در جدول (۱) شیب خطوط مذکور برای مقایسه با مقدار $kG\theta$ از معادله فوق، آورده شده است که توافق بسیار خوبی بین آنها وجود دارد.

در جدول (۲) نتایج به دست آمده از FVM برای تنش برشی بیشینه، با نتایج تحلیلی مرجع [۱۴] که همان معادله

این مقادیر بایستی با استفاده از اطلاعات سلول های مرزی، روی مرز مستطیل نیز تعیین شوند. این کار با ایجاد نقاطی در وسط اضلاعی از سلول های مرزی که بر مرز مستطیل منطبق هستند و با استفاده از تفاضلات پسرو و پیشرو مرتبه اول امکان پذیر است. برای جلوگیری از اشتباه، به جای τ از نماد τb برای نمایش تنش های مرزی استفاده شده است. خواهیم داشت: در مرز سمت چپ

$$(\tau b_{xy})_{1,j} = 0 \quad ; \quad (\tau b_{zy})_{1,j} = -\frac{\phi_{1,j} - \phi_{Boundary}}{(\Delta x/2)} \quad (39)$$

$$1 \leq j \leq N$$

در مرز پایین

$$(\tau b_{zx})_{i,1} = \frac{\phi_{i,1} - \phi_{Boundary}}{(\Delta y/2)} \quad ; \quad (\tau b_{zy})_{i,1} = 0 \quad (40)$$

$$1 \leq i \leq M$$

در مرز سمت راست

$$(\tau b_{zx})_{M,j} = 0 \quad ; \quad (\tau b_{zy})_{M,j} = -\frac{\phi_{Boundary} - \phi_{M,j}}{(\Delta x/2)} \quad (41)$$

$$1 \leq j \leq N$$

در مرز بالا

$$(\tau b_{zx})_{i,N} = \frac{\phi_{Boundary} - \phi_{i,N}}{(\Delta y/2)} \quad ; \quad (\tau b_{zy})_{i,N} = 0 \quad (42)$$

$$1 \leq i \leq M$$

با توجه به معادلات (۲) و (۱۶)، در چهار رأس مستطیل مقادیر تنش برشی برابر با صفر خواهند بود. بر اساس معادله (۲) در نوشتن برنامه کامپیوتری، از برآیند دو مقدار به دست آمده برای τ_{zy} و τ_{zx} به عنوان تنش برشی برای τb_{zy} و τb_{zx} به عنوان تنش برشی برآیند در روی مرز، استفاده شده است. با معلوم گردیدن مقادیر ϕ در داخل شبکه، گشتاور پیچشی مقطع با استفاده از معادله (۳) قابل محاسبه خواهد بود.

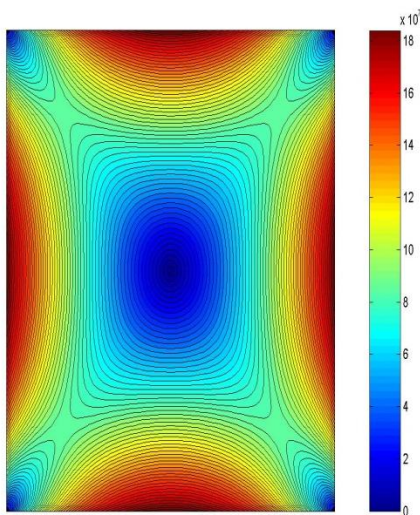
۶- نتایج عددی و بحث

در بخش های پیشین معادلات حاکم بر پیچش یک میله با سطح مقطع مستطیلی با استفاده از FVM به صورت گسسته در آمدند. برنامه نویسی با فرترن ۹۰ انجام گرفته است. ابتدا مقدار ϕ به صورت صریح در سلول های شبکه محاسبه شده و با استفاده از مقادیر ϕ به دست آمده، تنش برشی برآیند (هم در داخل سطح مقطع و هم در روی مرز) و گشتاور پیچشی مقطع محاسبه می شوند. این برنامه متغیرهای ورودی معرف ابعاد سلول ها و مدول برشی و زاویه پیچش در واحد طول میله مورد نظر و نیز مقدار خطای مجاز در محاسبه ϕ ، برای خروج از برنامه را دریافت کرده و مقدار تنش برشی برآیند در تمام نقاط

بیشتر مشهود است.

۷- نتیجه گیری

با مقایسه نتایج حاصل از روش ارائه شده در این مقاله با نتایج تحلیلی [۱۴] و نیز نتایج عددی مرجع [۱۵] می‌توان نتیجه گرفت که روش حجم محدود برای تحلیل عددی پیش در مقاطع منشوری در محدوده کشسان و برای گستره وسیعی از ابعاد سطح مقطع ها دارای دقت بسیار خوبی بوده و برای به دست آوردن مقدار تنش برشی بیشینه، نحوه توزیع تنش برشی در سطح مقطع میله و نیز گشتاور پیچشی مقطع قابل استفاده است. همچنین سرعت همگرایی این روش در مقایسه با روش تفاضل متناهی [۱۵]، برای رسیدن به جواب های دقیق یکسان، بیشتر است. مزیت دیگری که این تحلیل دارد، این است که تعداد سلول های مورد نیاز برای رسیدن به جواب های دقیق، در مقایسه با تعداد شبکه های مورد نیاز در روش تفاضل محدود [۱۵] کمتر است و این امر سبب کمتر شدن تعداد تکرارها و زمان انجام محاسبات توسط کامپیوتر می شود.



شکل ۴- توزیع تنش برشی در سطح مقطع مربعی به ابعاد

$$FVM \text{ با } 20cm \times 20cm$$

$$\theta = 1^\circ, G = 79.3GPa, b/a = 1$$

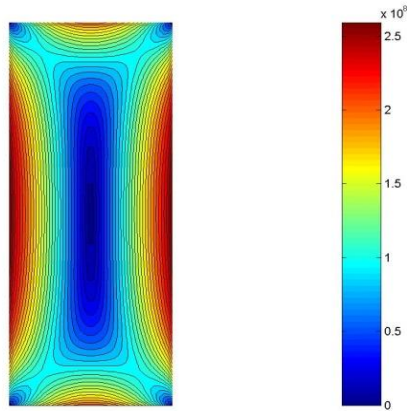
$$\Delta x = \Delta y = 0.4cm$$

(۴۳) بوده و نیز با نتایج عددی مرجع [۱۵] که بر اساس روش تفاضل متناهی می باشد، مقایسه شده است. این جدول برای چند سطح مقطع با $b/a = 1, 2.5$ در نظر گرفته شده است. داده های این جدول نشان می دهند که نتایج به دست آمده از روش حجم محدود با جواب های تحلیلی [۱۴] و نتایج عددی روش تفاضل محدود [۱۵] مطابقت دارند. همچنین نتایج FVM دقیق تر از نتایج FDM می باشند. از طرفی دیگر با افزایش ابعاد سطح مقطع، نتایج از مقدار تحلیلی اندکی دور می شوند.

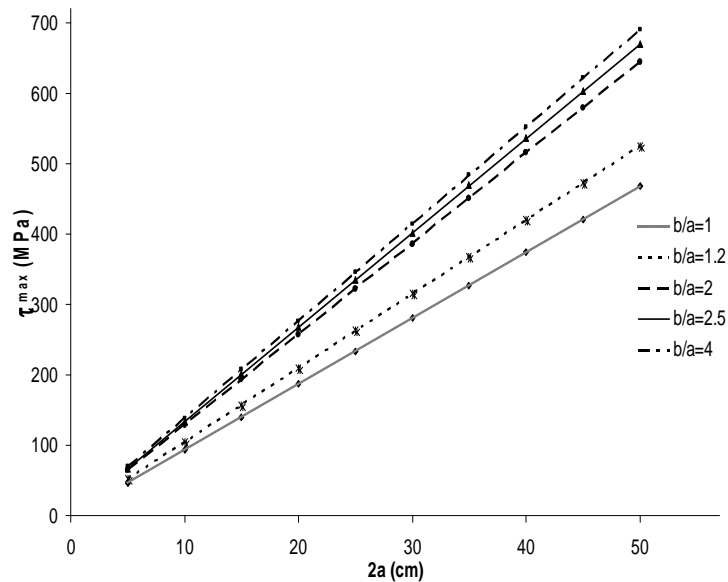
در یک مقایسه دیگر داده های جدول فوق برای سه مورد روش حجم محدود، روش تفاضل محدود و جواب های تحلیلی بر حسب ابعاد سطح مقطع ها در روی یک نمودار ترسیم شده‌اند. ولی از آنجائیکه داده ها بسیار به هم نزدیک بوده و تقریباً بر هم منطبق هستند، به طوری که تشخیص آنها از یکدیگر ممکن نمی باشد، از آوردن آن در اینجا صرف نظر شده است. این امر نشان دهنده تطابق نتایج به دست آمده از طریق FVM با جواب های مراجع مذکور می باشد.

در شکل های (۷) و (۸) نمودارهای همگرایی روش حجم محدود و تفاضل متناهی رسم شده است. این دو نمودار نشان می دهند که سرعت همگرایی روش حجم محدود برای رسیدن به جواب دقیق، بسیار بیشتر از روش دیگر می باشد. نکته قابل توجه در ارتباط با تعداد سلول های شبکه است؛ به طوری که این تعداد برای رسیدن به جواب های دقیق، کمتر از تعداد شبکه های مورد نیاز برای استفاده در روش تفاضل محدود می باشد؛ که این امر باعث کمتر شدن تعداد محاسبات و کوتاه تر شدن زمان صرف شده توسط کامپیوتر برای انجام محاسبات می شود. برای مثال در سطح مقطع مربعی با روش حجم محدود از شبکه 50×50 استفاده شده در حالیکه برای اخذ همان دقت با روش تفاضل محدود، شبکه 80×80 لازم است. نکته قابل توجه دیگر این است که در روش حجم محدود برای محاسبه تنش برشی در مرز از تفاضلات مرتبه اول استفاده شده، در حالیکه در مرجع [۱۵] برای این منظور از تفاضلات مرتبه دو استفاده گردیده است.

در جدول (۳) نتایج حاصل از FVM برای گشتاور پیچشی با نتایج تحلیلی مرجع [۱۴] مقایسه شده است. این جدول برای چند سطح مقطع با $b/a = 1, 2.5$ در نظر گرفته شده است. داده های این جدول نیز نشان می دهند که نتایج به دست آمده از روش حجم محدود با جواب های تحلیلی [۱۴] مطابقت دارند. از طرفی دیگر با افزایش ابعاد سطح مقطع، نتایج از مقدار تحلیلی اندکی دور می شوند. این امر در مورد سطح مقطع های مستطیلی در مقایسه با سطح مقطع های مربعی،



شکل ۵- توزیع تنش برشی در سطح مقطع مستطیلی به ابعاد $20\text{cm} \times 50\text{cm}$ با FVM ، $\Delta x = 0.4\text{cm}$ ، $\theta = 1^\circ$ ، $G = 79.3\text{GPa}$ ، $b/a = 2.5$



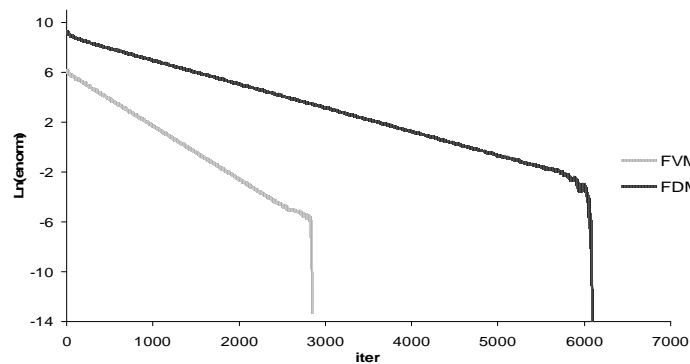
شکل ۶- نمودار تغییرات تنش برشی بیشینه بر حسب تغییر $2a$ با استفاده از نتایج FVM ، $\theta = 1^\circ$ ، $G = 79.3\text{GPa}$

جدول ۱- مقایسه نتایج FVM با نتایج مرجع [۱۴] مربوط به شکل ۶

b/a	۱	۲/۱	۲	۵/۲	۴
شیب خطوط به دست آمده با FVM	۹,۳۴۲	۱۰,۵۰۳	۱۲,۸۷۲	۱۳,۳۹۸	۱۳,۷۹۸
شیب خطوط از مرجع [۱۴] ($kG\theta$)	۹,۳۴۲	۱۰,۵۰۵	۱۲,۸۷۲	۱۳,۳۹۸	۱۳,۷۹۹

جدول ۲- مقایسه نتایج *FVM* با نتایج مراجع [۱۴ و ۱۵] برای تنش برشی بیشینه به ازای $b/a = 1, 2.5$

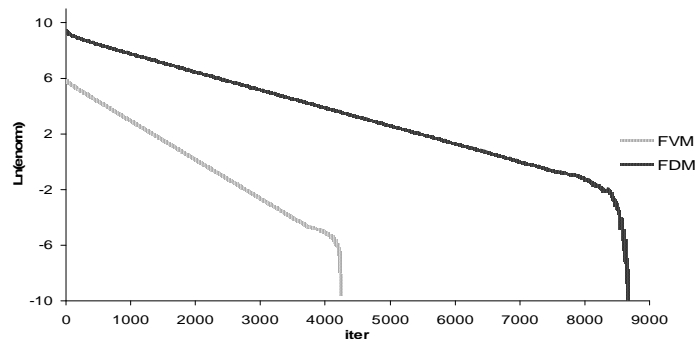
$2a$ (cm)	$b/a = 1$			$b/a = 2.5$		
	نتایج <i>FVM</i> (MPa)	جواب های تحلیلی [۱۴] (MPa)	نتایج <i>FDM</i> [۱۵] (MPa)	نتایج <i>FVM</i> (MPa)	جواب های تحلیلی [۱۴] (MPa)	نتایج <i>FDM</i> [۱۵] (MPa)
۵	۴۶,۷۱۱	۴۶,۷۱۲	۴۶,۷۱۲	۶۶,۹۸۸	۶۶,۹۸۸	۶۶,۹۸۷
۱۰	۹۳,۴۲۳	۹۳,۴۲۳	۹۳,۴۲۴	۱۳۳,۹۷۵	۱۳۳,۹۷۶	۱۳۳,۹۷۴
۱۵	۱۴۰,۱۳۴	۱۴۰,۱۳۵	۱۴۰,۱۳۷	۲۰۰,۹۶۳	۲۰۰,۹۶۳	۲۰۰,۹۶۱
۲۰	۱۸۶,۸۴۶	۱۸۶,۸۴۶	۱۸۶,۸۴۸	۲۶۷,۹۵۱	۲۶۷,۹۵۱	۲۶۷,۹۴۹
۲۵	۲۳۳,۵۵۷	۲۳۳,۵۵۸	۲۳۳,۵۶۲	۳۳۴,۹۳۸	۳۳۴,۹۳۹	۳۳۴,۹۳۵
۳۰	۲۸۰,۲۶۸	۲۸۰,۲۶۹	۲۸۰,۲۷۳	۴۰۱,۹۲۶	۴۰۱,۹۲۷	۴۰۱,۹۲۳
۳۵	۳۲۶,۹۸۰	۳۲۶,۹۸۱	۳۲۶,۹۸۴	۴۶۸,۹۱۳	۴۶۸,۹۱۵	۴۶۸,۹۰۹
۴۰	۳۷۳,۶۹۱	۳۷۳,۶۹۲	۳۷۳,۶۹۶	۵۳۵,۹۰۱	۵۳۵,۹۰۳	۵۳۵,۸۹۷
۴۵	۴۲۰,۴۰۲	۴۲۰,۴۰۴	۴۲۰,۴۱۰	۶۰۲,۸۹۰	۶۰۲,۸۹۰	۶۰۲,۸۸۵
۵۰	۴۶۷,۱۱۴	۴۶۷,۱۱۶	۴۶۷,۱۲۴	۶۶۹,۸۷۶	۶۶۹,۸۷۸	۶۶۹,۸۶۹



شکل ۷- نمودار همگرایی در سطح مقطع مربعی به ابعاد $20cm \times 20cm$ با *FVM* و *FDM*

$$\theta = 1^\circ, G = 79.3GPa, b/a = 1$$

ابعاد شبکه *FVM*: 50×50 , ابعاد شبکه *FDM*: 80×80



شکل ۸- نمودار همگرایی در سطح مقطع مستطیلی به ابعاد $20cm \times 50cm$ با *FVM* و *FDM*

$$\theta = 1^\circ, G = 79.3GPa, b/a = 2.5$$

ابعاد شبکه *FVM*: 50×100 , ابعاد شبکه *FDM*: 80×125

جدول ۳- مقایسه نتایج *FVM* با نتایج تحلیلی مرجع [۱۴] برای گشتاور پیچشی مقطع به ازای $b/a = 1, 2.5$

$2a$ (cm)	$b/a = 1$		$b/a = 2.5$	
	نتایج <i>FVM</i> (kN .m)	جواب های تحلیلی [۱۴] (kN .m)	نتایج <i>FVM</i> (kN .m)	جواب های تحلیلی [۱۴] (kN .m)
۵	۱,۲۱۶	۱,۲۱۶	۵,۳۹۲	۵,۳۸۵
۱۰	۱۹,۴۶۱	۱۹,۴۶۰	۸۶,۲۹۱	۸۶,۱۵۷
۱۵	۹۸,۵۲۱	۹۸,۵۱۵	۴۳۶,۸۴۴	۴۳۶,۱۶۹
۲۰	۳۱۱,۳۷۹	۳۱۱,۳۵۵	۱۳۸۰,۶۲۰	۱۳۷۸,۵۱۰
۲۵	۷۶۰,۱۹۹	۷۶۰,۱۴۴	۳۳۷۰,۷۰۹	۳۳۶۵,۵۰۳
۳۰	۱۵۷۶,۳۳۸	۱۵۷۶,۲۳۵	۶۹۸۹,۵۰۳	۶۹۷۸,۷۰۶
۳۵	۲۹۲۰,۴۵۳	۲۹۲۰,۱۶۹	۱۲۹۴۸,۷۶۰	۱۲۹۲۸,۹۱۵
۴۰	۴۹۸۰,۰۶۴	۴۹۸۱,۶۸۰	۲۲۰۹۰,۱۵۰	۲۲۰۵۶,۱۵۹
۴۵	۷۹۸۰,۲۴۰	۷۹۷۹,۶۸۸	۳۵۳۸۴,۸۶۰	۳۵۳۲۹,۷۰۱
۵۰	۱۲۱۶۳,۲۲۰	۱۲۱۶۲,۳۰۵	۵۳۹۲۹,۵۳۰	۵۳۸۴۸,۰۴۳

مراجع

[1] Chen, Y. Z. "Torsion problem of rectangular cross section bar with inner crack", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 162, pp. 107-111, 1998.

[2] Chen, Y. Z. "Multiple crack problems for torsion thin-walled cylinder", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 76, pp. 49-53, 1999.

[3] Tanaka, M. and Bercin, A. N. "Finite element modelling of the coupled bending and torsional free vibration of uniform beams with an arbitrary cross-section", Applied Mathematical Modelling, Vol. 21, pp. 339-344, 1997.

[4] Li, Q., Steven, G. P., Querin, O. M. and Xie, Y. M. "Stress based optimization of torsional shafts using an evolutionary procedure", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 5661-5677, 2001.

[5] Kim, H. S. "Finite element analysis of torsional deformation", Materials Science and Engineering A, Vol. 299, pp. 305-308, 2001.

[6] Wagner, W. and Gruttmann, F. "Finite element analysis of Saint-Venant torsion problem with exact integration of the elastic-plastic constitutive equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 3831-3848, 2001.

[7] Katori, H. "Consideration of the problem of shearing and torsion of thin-walled beams with arbitrary cross-section", Thin-Walled Structures, Vol. 39, pp. 671-684, 2001.

[8] Jiang, W. G. and Henshall, J. L. "A coupling cross-section finite element model for torsion analysis of prismatic bars", European Journal of Mechanics – A/Solids, Vol. 21, pp. 513-522, 2002.

[9] Lee, Y. H., Sung, W. J., Lee, T. H. and Seong, K.

نمادها	
d, c, b, a	نامگذاری سلول ها
b, a	نصف اندازه عرض و طول مقطع مستطیلی
A	مساحت
C	خم بسته ساده
$F = -2G\theta$	مورد استفاده در معادله پیچش
G	مدول برشی
j, i	نامگذاری نقاط وسط سلول های شبکه
k	ضریب
N, M	تعداد سلول ها در راستای محورهای x و y
$R = \partial\phi/\partial x$	مورد استفاده در گسسته سازی معادله پواسون
s	طول
$S = \partial\phi/\partial y$	مورد استفاده در گسسته سازی معادله پواسون
T	گشتاور پیچشی مقطع
z, y, x	مختصات دکارتی
θ	زاویه پیچش در واحد طول
τ	تنش برشی برابند
τ_{zy}, τ_{zx}	مولفه های تنش برشی برابند
τb	تنش برشی برابند در مرز سطح مقطع
$\tau b_{zy}, \tau b_{zx}$	مولفه های تنش برشی در مرز سطح مقطع
ϕ	تابع تنش

- W. "Finite element formulation of a composite double T-beam subjected to torsion", Engineering Structures, Article in Press, Corrected Proof.
- [10] Park, Y. B. and Yang, D. Y. "Analysis of torsional deformation by rigid-plastic finite element method using recurrent boundary conditions", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 182, pp. 303-311, 2007.
- [11] Cavatorta, M. P., Paolino, D. S., Peroni, L. and Rodino, M. "A finite element simulation and experimental validation of a composite bolted joint loaded in bending and torsion", Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 38, pp. 1251-1261, 2007.
- [12] Sapountzakis, E. J. and Mokos, V. G. "Nonuniform torsion of bars of variable cross section", Computers & Structures, Vol. 82, pp. 703-715, 2004.
- [13] Johansen, H. and Colella, P. "A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson's Equation on Irregular Domains", Journal of Computational Physics, Vol. 147, pp. 60-85, 1998.
- [14] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity", 3d ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.
- [۱۵] نرج آبادی فام، علی، "بررسی عددی پیچش در مقاطع منشوری با FDM و FVM"، پایان نامه، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، ۱۳۸۶.