

تعیین ضرایب شدت تنش در صفحات مستطیل شکل FGM حاوی ترک با استفاده از روش بدون المان گالرکین

محمود شریعتی
محمد مجیدزاده
محمدباقر نظری

استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در این مقاله با استفاده از تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ در روش گالرکین بدون المان (EFGM^۱)، ضریب شدت تنش در صفحات مستطیل شکل ساخته شده از مواد FG^۲ ایزوتروپیک که دارای ترک های لبه ای و مرکزی می باشند، محاسبه شده است. این روش با توجه به ساختار خود دارای مزایای بسیاری نسبت به روش اجزای محدود (FEM) و همچنین روش گالرکین بدون المان معمول می باشد. در این مقاله نتایج مربوط به چند مثال با هندسه و بارگذاری های مختلف که با استفاده از این روش تحلیل شده اند، ارائه شده است. در انتها نتایج حاصل از این روش با نتایج به دست آمده توسط پژوهشگران دیگر مقایسه شده است که نزدیکی مطلوبی را با نتایج کار آنها ارائه می دهد.

کلمات کلیدی: مواد FG - روش گالرکین بدون المان - ضریب شدت تنش - انتگرال J

Determination of stress intensity factors in cracked FGM rectangular plates by element-free Galerkin method

M.Shariati Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology
M.Majidzade M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology
M.B. Nazari Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology

Abstract

This paper addresses the implementation of the element-free Galerkin method for calculation of stress intensity factors in cracked functionally graded materials. The physical interpretation of Lagrange coefficients is used in the element-free Galerkin method which has more advantages than the finite element method and the common element-free Galerkin method. The obtained results for problems with different geometries and loadings are in good agreement with reported analytical and numerical works.

Keywords: Element-Free Galerkin Method, Stress Intensity Factor, J integral, Functionally Graded Materials, Crack, Fracture Mechanics

^۱ - Element Free Galerkin Method

^۲ - Functionally Graded Material

۱- مقدمه

مواد FG، مواد مرکبی هستند متشکل از دو یا چند فاز متفاوت که کسر حجمی آنها به صورت تابعی پیوسته و هموار از یک فاز به فاز دیگر تغییر می کند. این تغییرات پیوسته در خواص، باعث می گردد که تا حدود زیادی از لایه لایه شدن ماده و رشد ترک خستگی جلوگیری شود [۱]. با این وجود، به علت ناهمگن بودن ساختار این مواد، در بارگذاری های متغیر، ایجاد و رشد ترک، همچنان عامل اصلی در تخریب ساختارهای مواد FG می باشد [۲].

تحقیقات تحلیلی بر روی مواد FG در دهه ۱۹۶۰، هنگامی که خاک به عنوان یک ماده غیر همگن به وسیله گیبس مدل شد، آغاز گردید [۳]. از آن پس، تحقیقات بسیاری در زمینه های مختلف بر روی مواد FG انجام گرفت؛ ولی به صورت جامع، اولین بار در دهه ۱۹۸۰ در کشور ژاپن به ساخت اینگونه مواد پرداخته شد [۴] و اکنون کشورهای بسیاری به صورت گسترده بر روی ساخت و تحلیل اینگونه مواد سرمایه گذاری کرده اند. زمینه اولیه تحقیق بر روی مواد FG، ایجاد نوعی پوشش مقاوم در برابر تنش های حرارتی در سازه های فضایی بود، ولی پس از آن با آشکار شدن پتانسیل بالای اینگونه مواد در زمینه های گوناگون، مواد FG کاربرد وسیعی در صنایع دیگر از جمله راکتورهای هسته ای، وسایل ساخته شده از مواد پیزوالکتریک و ترمو الکتریک، مبدل های ترمو یونیک و کاربردهای دندان پزشکی و پزشکی پیدا کرده است [۲].

در بیشتر مطالعات انجام شده بر روی مواد FG، از تحلیل های عددی مبتنی بر روش های اجزای محدود به عنوان ابزاری برای تحلیل استفاده شده است؛ ولی روش های اجزای محدود، محدودیت هایی برای آن دسته از مسایل مکانیک شکست که با تغییرات پیوسته در محدوده تحلیل روبرو هستند، ایجاد می کند. به عنوان یکی از مهم ترین موارد می توان به رشد ترک اشاره کرد که با استفاده از روش های اجزای محدود می بایست شبکه بندی ساختار را به دفعات تغییر داد تا تحلیل با دقت مناسبی صورت پذیرد. مواردی از این قبیل باعث می گردد، تحلیل های مبتنی بر شبکه، سنگین و زمانبر باشد.

در سال های اخیر از روش های تحلیل بدون المان به عنوان جایگزینی مناسب برای تحلیل اینگونه مسایل استفاده شده است. یکی از کاربردی ترین روش های بدون المان، روش گالرکین بدون المان می باشد که بر پایه تقریب حداقل مربعات متحرک پایه گذاری شده است. این روش با توجه به همگرایی مناسب و سهولت تطابق آن با ساختارهای ترکدار، در زمینه مکانیک شکست می تواند بسیار مؤثر باشد.

در این مقاله با استفاده از تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ در روش گالرکین بدون المان به محاسبه پارامتر ضریب شدت تنش در صفحه مستطیلی شکل ساخته شده از مواد FG ایزوتروپیک در مدهای I و II پرداخته شده است. مبنای محاسبه ضرایب شدت تنش، روش انتگرال J می باشد.

۲- روش گالرکین بدون المان

۲-۱- تقریب حداقل مربعات متحرک

در روش حداقل مربعات متحرک، یک تابع میانیاب $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ به صورت زیر به عنوان تقریبی از تابع حقیقی $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ در نظر گرفته می شود.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

که در آن، $p_i(\mathbf{x})$ یک تابع پایه چندجمله ای کامل با رتبه دلخواه m می باشد. $a_i(\mathbf{x})$ نیز ماتریس ضرایب مجهول است که با یافتن این ماتریس، تابع $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ نیز تقریب زده می شود. تابع چندجمله ای $p_i(\mathbf{x})$ و نیز ماتریس $a_i(\mathbf{x})$ تابعی از موقعیت مکانی \mathbf{x} می باشند.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\} \quad (2)$$

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})\} \quad (3)$$

در روابط فوق همواره $p_1(\mathbf{x})$ برابر واحد و $p_i(\mathbf{x})$ نیز یک-جمله ایی در مختصات فضایی می باشند. برای پی بردن به مفهوم توابع پایه کامل، مثال های زیر آورده شده است:

• در یک بعد:

چندجمله ای پایه از درجه ۱ (تابع خطی):

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x\}, m = 2$$

چندجمله ای پایه از درجه ۲ (تابع سهموی):

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, x^2\}, m = 3$$

در دو بعد:

چندجمله ای پایه از درجه ۱ (تابع خطی):

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}, m = 3$$

چندجمله ای پایه از درجه ۲ (تابع سهموی):

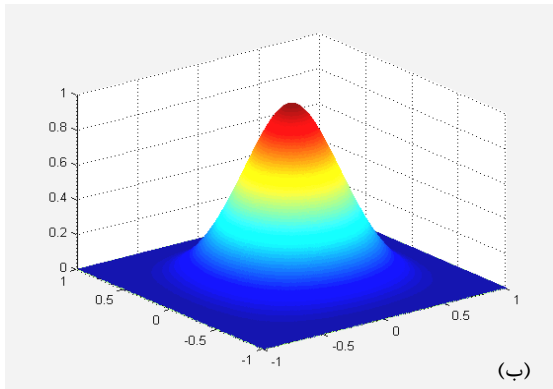
$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, y^2, xy\}, m = 6$$

ماتریس ضرایب مجهول از حداقل سازی نرم خطای وزندار L_2 که به صورت زیر است، به دست می آید:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{u}_I - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x})]^2 \quad (4)$$

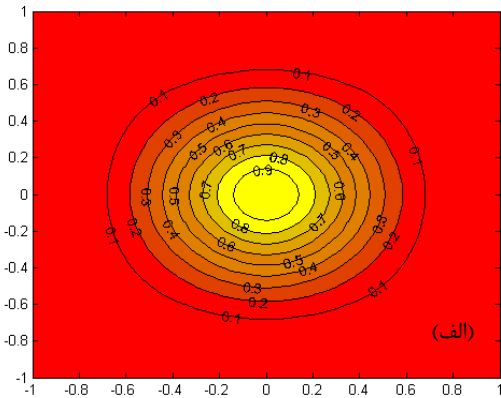
در این رابطه \mathbf{u}_I مقدار واقعی تابع در گره I برای $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$ می باشد. تابع وزنی نیز $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ یک تابع با

که در آن r فاصله نرمال شده گره ها از گره مرکزی و d_{Im} نیز دامنه تاثیر تابع وزنی می باشد. در شکل های (۱- الف) و (۱- ب) چگونگی تغییرات تابع وزنی با دامنه مستطیل شکل نشان داده شده است.



محدوده اثر محدود به مرکز گره I ام می باشد. n نیز تعداد گره هایی می باشد که مقدار تابع در این نقاط بر روی تخمین مقدار نقطه x تاثیر می گذارد. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع وزنی غیر صفر می باشد. در این مقاله از تابع وزنی مرسوم اسپیلاین درجه چهارم استفاده شده است. این تابع در مختصات قطبی به صورت زیر بیان می گردد.

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad r = \frac{d_I}{d_{Im}} \quad (5)$$



شکل ۱- تابع وزنی درجه چهارم با دامنه تاثیر مربع شکل: (الف) شکل کانتوری تغییرات، (ب) تغییرات مقدار تابع به صورت سه بعدی

۲-۲- تابع شکل در روش گالرکین بدون المان

برای یافتن مشتقات توابع شکلی، هر دو تابع $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ متغیر فرض می گردند؛ لذا مشتق توابع شکل به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\varphi_{,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,i}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{p}^T (\mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_{,i}) \quad (12)$$

مشتق گیری از تابع \mathbf{A}^{-1} را می توان با مشتق گیری از رابطه $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ به دست آورد که نتیجه آن عبارت است از:

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1} \quad (13)$$

۲-۳- معادلات گسسته سازی

در روش گالرکین بدون المان اعمال شرایط مرزی با روشهای مختلفی مثل روش پنالتی و روش ضرایب لاگرانژ صورت می گیرد. استفاده مستقیم از ضرایب لاگرانژ در معادلات باعث می گردد که در ماتریس سختی و به خصوص در قطر اصلی آن درایه هایی با مقدار صفر ایجاد گردد؛ که این موضوع باعث کاهش دقت تحلیل می گردد. همچنین افزایش تعداد مجهولات و بزرگتر شدن ماتریس سختی نیز خود باعث کاهش دقت و افزایش زمان لازم برای تحلیل می شود. به علاوه، وقتی در تحلیل ها، از مواد دارای خواص با مقادیر بالا مانند مدول الاستیسیته زیاد استفاده

با مشتق گیری از رابطه (۴) نسبت به عبارت $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ و برابر صفر قرار دادن آن می توان توابع شکل روش گالرکین بدون المان را ایجاد کرد.

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})} = 0 \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6)$$

که در این رابطه داریم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (7)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = [w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (8)$$

با توجه به روابط (۶)، (۷) و (۸)، ضرایب $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ را می توان اینگونه به دست آورد:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۱) تقریب زنده های MLS به صورت زیر به دست می آیند:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (10)$$

که با توجه به معادلات قبل، تابع $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ که همان تابع شکل است به شرح زیر بیان می گردد:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega - \int_{\Gamma_u} \varphi_i \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{N}^T \mathbf{S} \varphi_j d\Gamma \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \varphi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}^T \mathbf{N}^T \mathbf{S} \bar{u} d\Gamma \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \varphi_{I,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{I,y} \\ \varphi_{I,y} & \varphi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & \text{plane stress} \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} & \text{plane strain} \end{cases} \quad (24)$$

در این روابط، n_x و n_y به ترتیب بردارهای عمود بر سطح در جهات X و Y می باشند. مولفه های بردار \mathbf{S} نیز اینگونه تعریف می شوند:

$$s_x = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u_x \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ معلوم باشد.} \\ 0 & \text{اگر } u_x \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ مجهول باشد.} \end{cases} \quad (25)$$

$$s_y = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u_y \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ معلوم باشد.} \\ 0 & \text{اگر } u_y \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ مجهول باشد.} \end{cases} \quad (26)$$

۳- محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد FG

یکی از متداول ترین روش ها برای محاسبه ضرایب شدت تنش، استفاده از روش انتگرال J می باشد. فرم کلی انتگرال J برای مواد همسانگرد بر اساس انتگرال سطح به صورت زیر می باشد:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (27)$$

ولی در مواد FG با توجه به وجود گرادیان خواص، این رابطه به صورت زیر بیان می گردد [1]:

لازم برای تحلیل می شود؛ سطرها و ستون های ماتریس سختی که بر اساس ضرایب لاگرانژ ساخته شده اند؛ دارای مقادیر بسیار کمتری نسبت به سطرها و ستون های دیگر خواهند بود که این مساله نیز باعث افت دقت می گردد. به همین دلیل می توان به جای استفاده مستقیم از ضرایب لاگرانژ در معادلات، از تعبیر فیزیکی آنها در جملات ماتریس سختی و بردار نیرو استفاده کرد. با فرض تغییر مکان های کوچک، معادله تعادل استاتیکی در تئوری الاستیسیته برای مساله ای با دامنه Ω و مرز Γ عبارت است از:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (14)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش می باشد که متناظر با میدان تغییر مکان \mathbf{u} است. \mathbf{b} نیز بردار نیروی حجمی وارد بر جسم است. شرایط مرزی اعمال شده بر مساله نیز اینگونه هستند:

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_u \\ \sigma_{ij} . n_j = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (15)$$

با فرض توابع آزمون $u(\mathbf{x}) \in H^1$ (متعلق به فضای سوبولوف^۱ رسته یک) و ضرایب لاگرانژ $\lambda \in H^0$ (متعلق به فضای سوبولوف رسته صفر) برای تمام توابع آزمون داریم:

$$\delta \mathbf{V}(\mathbf{x}) \in H^1, \quad \delta \lambda \in H^0 \quad (16)$$

در این صورت اگر رابطه زیر برقرار باشد،

$$\int_{\Omega} \delta (\nabla_s \mathbf{v}^T) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T . \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T . \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T . (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T . \lambda d\Gamma = 0 \quad (17)$$

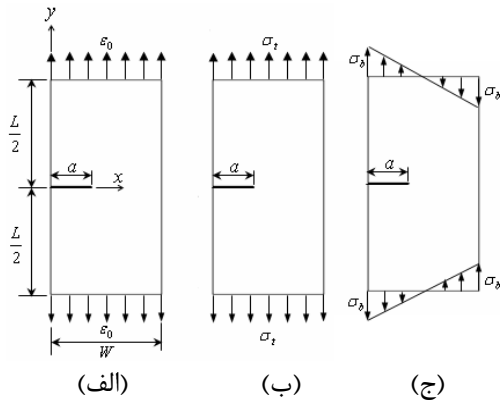
معادلات تعادل و شرایط مرزی ارضا خواهند شد. در رابطه فوق $\nabla_S \mathbf{v}^T$ بخش متقارن $\nabla \mathbf{v}^T$ و H^1 و H^0 به ترتیب فضای سوبولوف رسته صفر و رسته یک می باشند. به این ترتیب روابط بسط یافته در این روش به صورت زیر بیان می شود که با جایگذاری و حل رابطه (۱۶) می توان به نتایج مورد نظر رسید.

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (18)$$

که در آن:

انواع بارگذاری های اعمال شده در شکل (۲) نشان داده شده است.

$$\varepsilon_0 = 1 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{E_1 \varepsilon_0}{(1-\nu^2)}, \quad \sigma_t = \sigma_b = 1 \text{ unit}$$

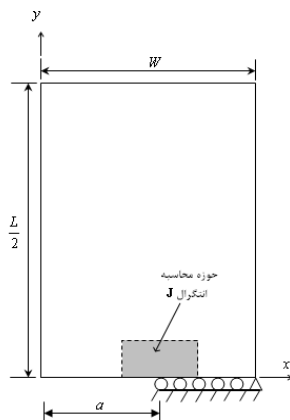


شکل ۲- صفحه دارای ترک لبه ای تحت مد I: (الف) حالت کرنش ثابت، (ب) تنش کششی ثابت، (ج) خمش خالص

تغییرات طول ترک نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\frac{a}{w} = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$$

ضریب پواسون ثابت و برابر ۰/۳ و شرایط کرنش صفحه ای در نظر گرفته شده است. به علت تقارن موجود در هندسه، بارگذاری و تغییرات خصوصیات فیزیکی، کافی است نصف صفحه مورد آنالیز قرار گیرد. لذا هندسه مورد آنالیز در این مثال، مانند شکل (۳) می باشد. نتایج مربوط به این سه قسمت در جدول های (۱) تا (۳) نشان داده شده است. در شکل های (۴) تا (۶) نیز برخی از نتایج بیان شده در این جدول ها به صورت نمودارهایی آورده شده است.



شکل ۳- ساختار مورد آنالیز با توجه به تقارن های موجود در شکل صفحه

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \int_A (\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}) q dA \quad (28)$$

اگر چه عبارت انتگرال دوم در رابطه (۲۸) برای مسیره های نزدیک به نوک ترک ناچیز می باشد و می توان از آن صرف نظر کرد؛ ولی برای دامنه های انتگرالی بزرگتر می بایست تأثیر این جمله نیز در نظر گرفته شود. با محاسبه انتگرال J و با استفاده از رابطه بین آن و ضرایب شدت تنش K_I می توان مقادیر ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد.

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (29)$$

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E(1-\nu^2)} \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (30)$$

۴- مثال های عددی

در این بخش، ضرایب شدت تنش در صفحات مستطیلی ساخته شده از مواد FG با هندسه و بارگذاری های مختلف محاسبه شده است. در تمامی مراحل برای انتگرال گیری، از روش تربیع گوس با تعداد ۸ گره در هر راستا استفاده شده است. به منظور در نظر گرفتن تغییرات خواص، تغییرات مورد نظر در هنگام انتگرال گیری بر روی نقاط گوسی اعمال می شوند تا تغییر خواص شکل هموارتری پیدا کند.

۴-۱- صفحه دارای ترک لبه ای ساخته شده از ماده FG تحت مد I

در این مسئله صفحه ساخته شده از مواد FG، تحت سه بارگذاری متفاوت کرنش ثابت، تنش کششی ثابت و خمش خالص قرار داده می شود. با توجه به شکل (۲) طول و عرض صفحه در این قسمت برابر ۱ و ۸ واحد نظر گرفته شده است تا شرایط بارگذاری دوردست و مقایسه نتایج با حل تحلیلی را فراهم سازد. طول ترک نیز برابر a می باشد که در مراحل مختلف آنالیز تغییر می کند. در این مسئله فرض شده است که تغییرات مدول الاستیسیته از تابع نمایی زیر پیروی کند.

$$E(x) = E_1 \exp(\eta x) \quad 0 \leq x \leq w \quad (31)$$

$$E_1 = 1, \quad \frac{E_2}{E_1} = 0.1, 0.2, 5, 10, \quad \eta = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \quad (32)$$

جدول ۱- ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای ترک لبه ای تحت شرایط کرنش ثابت

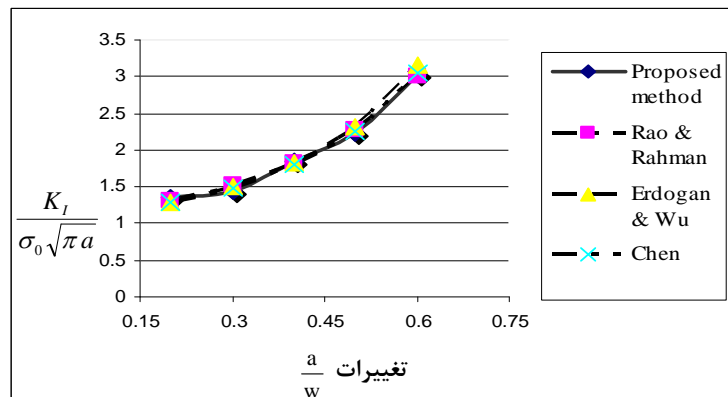
روش	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$				
		$\frac{a}{w} = 0.2$	$\frac{a}{w} = 0.3$	$\frac{a}{w} = 0.4$	$\frac{a}{w} = 0.5$	$\frac{a}{w} = 0.6$
نتایج حاصل از مقاله حاضر	0.1	۱,۳۴۹۴	۱,۴۳۲۲	۱,۸۴۴۵	۲,۲۲۳۸	۳,۰۲۴
	0.2	۱,۳۳۰۵	۱,۴۸۲۴	۱,۸۵۵۳	۲,۴۸۶۲	۳,۱۶۱
	۵	۱,۴۵۷۶	۱,۸۱۶۳	۲,۷۳۹۴	۳,۵۶۴۹	۵,۴۵۷۹
	۱۰	۱,۶۲۷۵	۲,۰۸۲	۲,۸۴۴۶	۴,۰۷۷۹	۶,۷۷۸۳
نتایج enriched EFG (Rao and Rahman [۲])	0.1	۱,۳۱۱۸	۱,۵۱۹۱	۱,۸۲۴۱	۲,۲۸	۳,۰۱
	0.2	۱,۳۱۸۶	۱,۵۴۶	۱,۸۸۳۷	۲,۳۹۶۶	۳,۲۲۷۴
	۵	۱,۴۸۳۵	۱,۹۱۶۱	۲,۵۸۱۹	۳,۶۶۹۸	۵,۵۷۰۸
	۱۰	۱,۵۵۵۷	۲,۰۷۲۴	۲,۸۷۸۹	۴,۲۲۳۴	۶,۶۲۶۶
نتایج تحلیلی (Erdogan and Wu [۵])	0.1	۱,۲۹۶۳	۱,۵۰۸۳	۱,۸۲۴۶	۲,۳۱۴	۳,۱۵۴۴
	0.2	۱,۳۰۵۸	۱,۵۳۳	۱,۸۷۵۱	۲,۴۰۳۱	۳,۲۹۸۱
	۵	۱,۴۹۴۶	۱,۹۱۱۸	۲,۵۷۳	۳,۶۵۷۳	۵,۵۷۰۴
	۱۰	۱,۵۷۴	۲,۰۷۲۳	۲,۸۷۳۶	۴,۲۱۴	۶,۶۳۱۹
نتایج EFG (Chen et al. [۶])	0.1	۱,۲۹۶۱	۱,۴۹۱۹	۱,۷۹۶۲	۲,۲۵۹۴	۳,۰۵۴۴
	0.2	۱,۳۱۴۵	۱,۵۲۸۳	۱,۸۶۵۹	۲,۳۸۷۷	۳,۲۹۱
	۵	۱,۵۴۱۴	۱,۹۴۹۹	۲,۶۲۳۸	۳,۷۴۲۹	۵,۷۹۳۶
	۱۰	۱,۶۲۹۶	۲,۱۲۰۶	۲,۹۳۹۸	۳,۲۲۷۲	۶,۹۱۷۱

جدول ۲- ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای ترک لبه ای تحت شرایط تنش ثابت

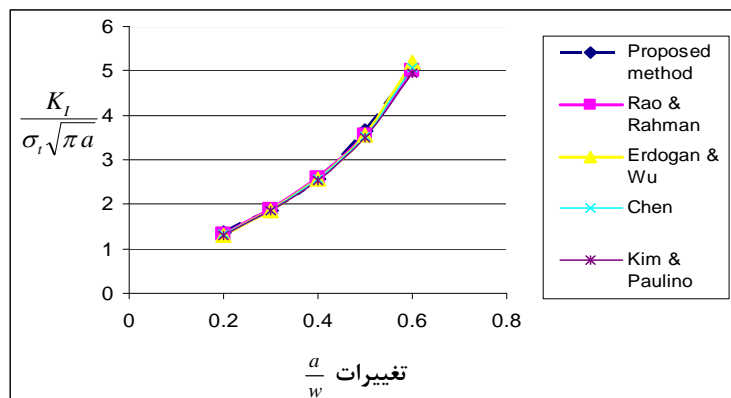
روش	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_I}{\sigma_1 \sqrt{\pi a}}$				
		$\frac{a}{w} = 0.2$	$\frac{a}{w} = 0.3$	$\frac{a}{w} = 0.4$	$\frac{a}{w} = 0.5$	$\frac{a}{w} = 0.6$
نتایج حاصل از مقاله حاضر	0.1	۱,۴۵۷۷	۱,۸۵۴۳	۲,۵۶۸۹	۳,۶۵۹۶	۵,۰۲۷۸
	0.2	۱,۴۴۱۱	۱,۹۰۱۹	۲,۵۶۱۸	۳,۲۱۵۶	۴,۷۹۳۶
	۵	۱,۰۱۱۴	۱,۲۲۹۱	۱,۵۸۱۵	۲,۱۲۹۱	۳,۰۹۹۴
	۱۰	۰,۹۲۶۳	۱,۱۴۰۳	۱,۵۳۴۱	۲,۰۵۲۹	۲,۹۷۱
نتایج enriched EFG (Rao and Rahman [۲])	0.1	۱,۳۳۷۴	۱,۸۹۷۶	۲,۵۹۳۸	۳,۵۴۷۲	۴,۹۹۵۶
	0.2	۱,۴۱۹۳	۱,۸۶۶۸	۲,۴۶۵۷	۳,۳۲۹۷	۴,۶۹۰۵
	۵	۱,۱۲۶۹	۱,۳۷۵۴	۱,۷۵۷۶	۲,۳۷۷۲	۳,۴۴۷۸
	۱۰	۰,۹۹۵۸	۱,۳۳۴۳	۱,۵۹۸	۲,۱۸۸۹	۳,۲۱۶۷
نتایج تحلیلی (Erdogan and Wu [۵])	0.1	۱,۲۹۶۵	۱,۸۵۸۱	۲,۵۶۹۹	۳,۵۷۰۱	۵,۱۸۸
	0.2	۱,۳۹۵۶	۱,۸۳۹۵	۲,۴۴۳۶	۳,۳۲۶۶	۴,۷۶۱۴
	۵	۱,۱۳۱۸	۱,۳۶۹۷	۱,۷۴۸۳	۲,۳۶۵۶	۳,۴۴۵۴
	۱۰	۱,۰۰۱۹	۱,۲۲۹۱	۱,۵۸۸۴	۲,۱۷۶۲	۳,۲۱۲۴
نتایج EFG (Chen et al. [۶])	0.1	۱,۳۱۹۳	۱,۸۶۴۲	۲,۵۵۸۸	۳,۵۲۱۳	۵,۰۷۲۶
	0.2	۱,۴۱۸۸	۱,۸۴۹۷	۲,۴۴۸۶	۳,۳۲۳۴	۴,۷۸۶
	۵	۱,۱۶۲۲	۱,۳۸۹۹	۱,۷۷۴۶	۲,۴۱۲۸	۳,۵۷۳۶
	۱۰	۱,۰۳۲۴	۱,۲۴۹۹	۱,۶۱۴۶	۲,۲۲۳۴	۳,۲۳۷۱
نتایج FEM (Kim and Paulino [۷])	0.1	۱,۲۸۴	۱,۸۴۶	۲,۵۴۴	۳,۴۹۶	۴,۹۶۲
	0.2	۱,۳۹	۱,۸۳۱	۲,۴۳۱	۳,۲۹۲	۴,۶۶۹
	۵	۱,۱۳۲	۱,۳۷	۱,۷۴۹	۲,۳۶۶	۳,۴۴۸
	۱۰	۱,۰۰۳	۱,۲۲۸	۱,۵۸۸	۲,۱۷۵	۳,۲۱۲

جدول ۳- ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای ترک لبه ای تحت شرایط خمش خالص

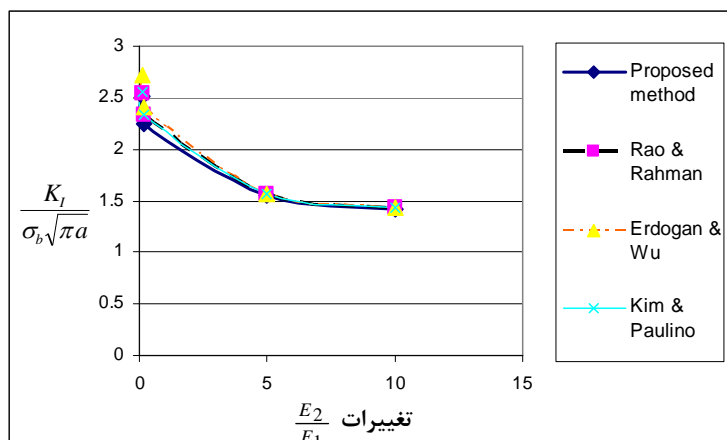
روش	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_I}{\sigma_b \sqrt{\pi a}}$				
		$\frac{a}{w} = 0.12$	$\frac{a}{w} = 0.13$	$\frac{a}{w} = 0.14$	$\frac{a}{w} = 0.15$	$\frac{a}{w} = 0.16$
نتایج حاصل از مقاله حاضر	0.1	۱,۹۶۱۳	۱,۷۴۳۹	۱,۹۹۶۱	۲,۰۰۷۹	۲,۵۱۸۹
	0.2	۱,۶۴۷۴	۱,۸۴۰۳	۱,۶۷۹۶	۲,۰۴۵۹	۲,۲۵۱۱
	۵	۰,۶۲۸۶	۰,۷۱۸۷	۰,۸۸۴۷	۱,۱۳۶	۱,۵۴۷۱
	۱۰	۰,۵۳۳	۰,۶۳۲۱	۰,۷۹۷۳	۱,۰۳۴	۱,۴۱۹۳
نتایج enriched EFG (Rao and Rahman [۲])	0.1	۱,۹۰۲۹	۱,۸۷۴۷	۱,۹۵۳۹	۲,۱۵۴۷	۲,۵۴۸۴
	0.2	۱,۵۹۷۶	۱,۶۱۰۹	۱,۷۱۵	۱,۹۳۲۲	۲,۳۳۴۷
	۵	۰,۶۸۶۵	۰,۷۸۳	۰,۹۳۱	۱,۶۶۶	۱,۵۶۲۶
	۱۰	۰,۵۶۳۵	۰,۶۶۳۷	۰,۸۱۲	۱,۰۴۴۷	۱,۴۳۴
نتایج تحلیلی (Erdogan and Wu [۵])	0.1	۱,۹۰۴	۱,۸۸۵۹	۱,۹۷۷۸	۲,۲۱۵۱	۲,۷۱۷
	0.2	۱,۵۹۵۲	۱,۶۱۲۲	۱,۷۲۱	۱,۹۵۳۴	۲,۴۰۳۷
	۵	۰,۶۸۷۱	۰,۷۷۷۸	۰,۹۳۳۶	۱,۱۵۱۸	۱,۵۵۹۷
	۱۰	۰,۵۶۴۸	۰,۶۵۸۸	۰,۸۰۴۳	۱,۰۳۵	۱,۴۲۸۶
نتایج FEM (Kim and Paulino [۷])	0.1	۱,۸۸۸	۱,۸۶۴	۱,۹۴۳	۲,۱۴۵	۲,۵۵۳
	0.2	۱,۵۸۸	۱,۶۰۱	۱,۷۰۶	۱,۹۲۵	۲,۳۴۱
	۵	۰,۶۸۷	۰,۷۷۸	۰,۹۲۴	۱,۱۵۸	۱,۵۶۱
	۱۰	۰,۵۶۵	۰,۶۵۹	۰,۸۰۴	۱,۰۳۵	۱,۴۲۹



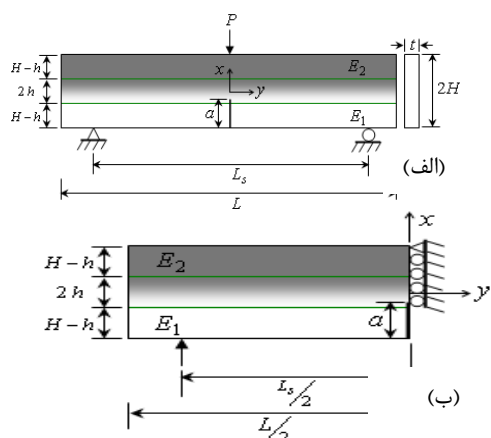
شکل ۴- تغییرات ضریب شدت تنش نرمال شده تحت شرایط کرنش برای صفحه ترک لبه ای و $\frac{E_2}{E_1} = 0.1$



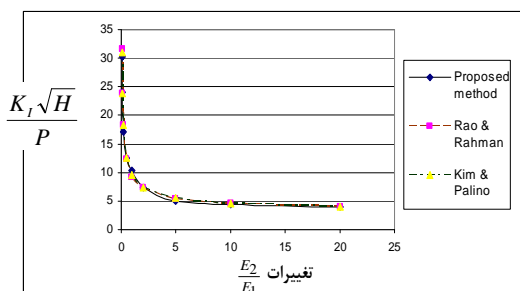
شکل ۵- تغییرات ضریب شدت تنش نرمال شده تحت شرایط تنش ثابت برای صفحه دارای ترک لبه ای و $\frac{E_2}{E_1} = 0.1$



شکل ۶- تغییرات ضریب شدت نرمال شده تنش تحت شرایط خمش خالص برای صفحه دارای ترک لبه ای و $\frac{a}{w} = 0.6$



شکل ۷- تیر تحت خمش تحت بارگذاری مد اول: (الف) هندسه و بارگذاری تیر (ب) نصف تیر مورد آنالیز



شکل ۸- تغییرات ضریب شدت تنش نرمال شده برای

تیر دارای ترک مرکزی و $\frac{a}{2H} = 0.5$

۳-۴- نوار مرکب ساخته شده از ماده FG تحت مد I نوار مرکب مربع شکلی با ابعاد $L = 1$ و $2h_1 = 0.6$ و $2h_2 = 0.4$ مطابق شکل (۹- الف) با ترکیبی به طول $a = 0.4$ بر روی خط $y = 0$ در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون این صفحه ثابت و برابر $\frac{1}{3}$ و تغییرات مدول الاستیسیته و تنش وارده بر روی این نوار به صورت زیر می باشد.

همانگونه که دیده می شود، نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج تحلیلی و عددی منتشر شده، انطباق قابل قبولی دارد.

۴-۲- تیر دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG تحت مد I

در این مثال، تیری مطابق شکل (۷) مورد آنالیز قرار گرفته است. این تیر در نقطه مرکزی تحت نیروی متمرکز P قرار گرفته است. همانگونه که دیده می شود، این تیر نسبت به خط مرکزی خود که ترک در آن قرار دارد، متقارن می باشد، لذا برای تحلیل، کافی است نصف تیر، مورد آنالیز قرار گیرد. شکل این قسمت و چگونگی قرار گرفتن شرایط مرزی در شکل (۷- الف) و (۷- ب) نشان داده شده است. ابعاد نشان داده شده در شکل (۶) و همچنین خواص این تیر به صورت زیر می باشند.

$$L = 54, \quad 2H = 10, \quad t = 1, \quad L_s = 50, \quad P = 1$$

$$E(x_1) = \begin{cases} E_2 & x_1 \geq h \\ \frac{E_2 - E_1}{2h}(x_1 + h) + E_1 & -h \leq x_1 \leq h \\ E_1 & x_1 \leq -h \end{cases}$$

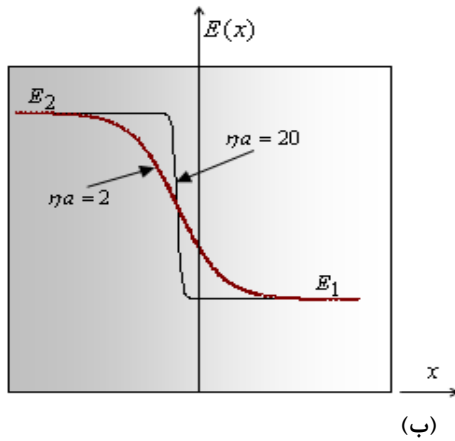
$$2h = 1, \quad E_1 = 1, \quad \frac{E_2}{E_1} = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20$$

$$\nu = 0.3 \quad \frac{a}{2H} = 0.45, 0.5, 0.55$$

در روابط فوق t ضخامت تیر و P نیروی اعمالی به تیر می باشد. این مسئله تحت شرایط تنش صفحه ای است. در شکل (۸) نمودار تغییرات ضریب شدت تنش نرمال شده برای این مسئله بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته در حالت $\frac{a}{2H} = 0.5$ نشان داده شده است.

یک نیروی کششی بر اساس رابطه (۳۲) روی لبه بالایی اعمال می‌شود که منجر به کرنش یکنواختی بر روی سطح بالایی نوار مرکب می‌گردد. شرایط تحلیل به صورت کرنش صفحه ای می باشد. مقادیر عددی زیر در این تحلیل مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

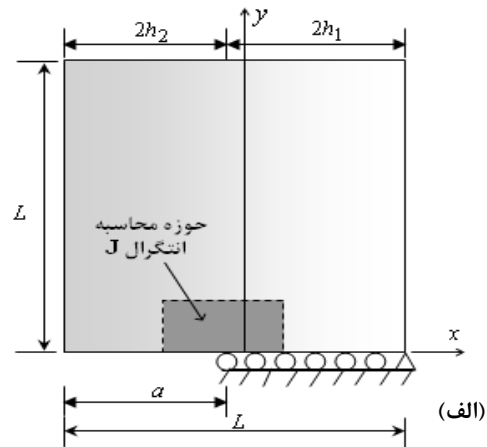
$$\varepsilon = 1, \quad \eta a = 0, 2, 4, 6, 20, \quad E_2 = 3, \quad E_1 = 1$$



$$E(x_1) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2} \tanh[\eta(x_1 + 0.1)] \quad -0.5 \leq x_1 \leq 0.5 \quad (33)$$

$$\sigma_{yy}(x,1) = \frac{\varepsilon E(x)}{(1-\nu^2)} \quad (34)$$

که در این عبارات E_2 و E_1 محدوده تغییرات مدول الاستیسیته را مشخص می‌کنند. در شکل (۹-ب) نیز تغییرات مدول الاستیسیته نشان داده شده است.

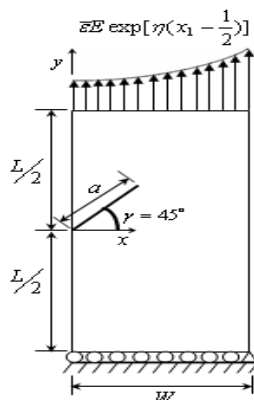


شکل ۹- نوار مرکب تحت بارگذاری مد اول: (الف) هندسه نوار مرکب (ب) تغییرات مدول الاستیسیته

در جدول (۴) مقادیر ضریب شدت تنش نرمال شده برای این مثال آورده شده است.

جدول ۴- ضریب شدت تنش نرمال شده برای نوار کامپوزیتی

ηa	$\frac{K_I}{\varepsilon E (-0.5) \sqrt{\pi a}}$		
	مقاله حاضر	Rao & Rahman [۲]	Eischen [۸]
۰	۲,۱۲۲۳	۲,۱۳۳	۲,۱۱۲
۲	۲,۱۱۰۴	۲,۳۰۴	۲,۲۹۵
۴	۲,۸۰۰۹	۲,۵۸۹	۲,۵۷۱
۶	۲,۸۴۵۴	۲,۷۶۹	۲,۷۳۳
۲۰	۳,۵۵۴۶	۳,۳۱۴	۳,۲۲۸



شکل ۱۰- صفحه دوطبقه دارای ترک مورب لبه ای

۴-۴- ترک مورب در صفحه FG تحت مد های I و II

مطابق شکل (۱۰) در یک صفحه مستطیل شکل دوطبقه ای با ابعاد $L = 2$ و $W = 1$ یک ترک زاویه دار با زاویه ثابت 45° درجه در نظر گرفته شده است. طول نرمال شده این ترک برابر می باشد. $\frac{a}{W} = 0.4\sqrt{2}$ تغییرات مدول الاستیسیته نیز در این صفحه از رابطه زیر پیروی می کند.

$$E(x_1) = E \exp[\eta(x_1 - \frac{1}{2})] \quad (35)$$

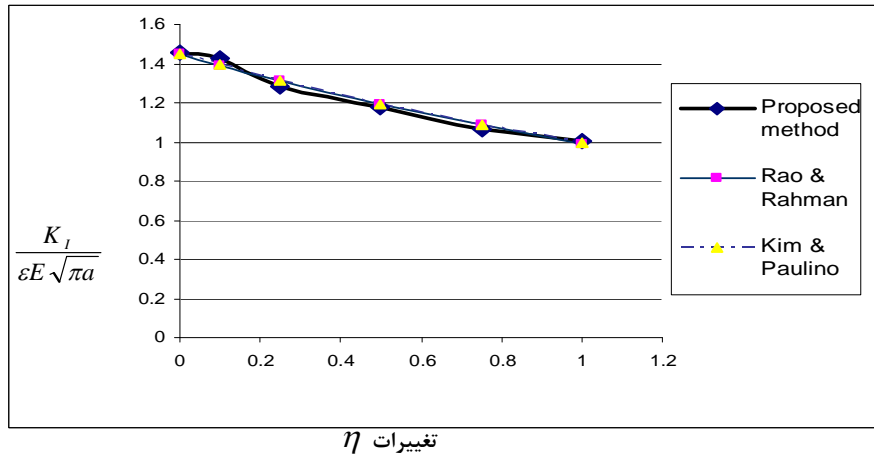
$$\sigma_{22}(x_1, 1) = \varepsilon E \exp\left[\eta\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (36)$$

مقادیر عددی زیر نیز در این تحلیل به کار گرفته شده است:

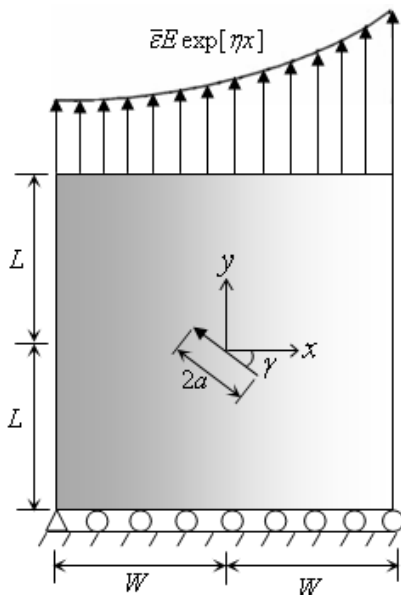
$$E=1, \quad \nu=0.3, \quad \eta=0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$$

در شکل (۱۱) مقادیر ضریب شدت تنش نرمال شده مد های I و II آورده شده است.

با توجه به اینکه در مرز بالایی حالت کرنش یکنواخت در نظر گرفته شده است؛ بار اعمالی در امتداد وجه بالایی به صورت زیر نشان داده می شود:



شکل ۱۱- تغییرات ضریب شدت تنش نرمال شده مد I در صفحه دارای ترک مورب نسبت به تغییرات



شکل ۱۲- هندسه و بارگذاری صفحه دوبعدی دارای ترک مورب مرکزی

۴-۵- صفحه FG دارای ترک مرکزی تحت مد های I و II

مطابق شکل (۱۲) صفحه ای مربع شکل به ابعاد $2L = 2W = 20$ با ترک مرکزی به طول $2a = 2$ و زاویه دلخواه γ نسبت به محور X در نظر گرفته می شود. تحلیل این صفحه تحت حالت تنش صفحه ای انجام می پذیرد. چگونگی قرار گرفتن شرایط مرزی در این تحلیل که در شکل نشان داده شده است به این صورت است که در امتداد لبه پایین صفحه، جابجایی در جهت قائم برابر صفر در نظر گرفته شده و نیز برای گره سمت چپ از لبه پایینی جابجایی در راستای افقی نیز ثابت در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون ثابت و برابر $1/3$ در نظر گرفته می شود. تغییرات مدول الاستیسیته در این صفحه بر اساس رابطه زیر می باشد.

$$E(x_1) = E \exp[\eta(x_1)] \quad (37)$$

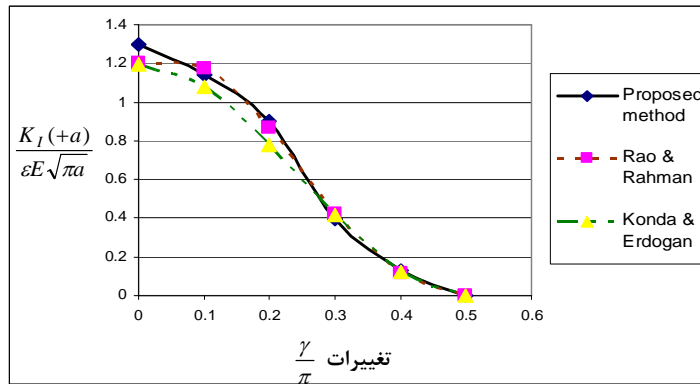
$$\varepsilon=1, \quad \frac{\gamma}{\pi}=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \quad \eta=0.25, 0.5$$

مقادیر عددی زیر نیز برای این تحلیل در نظر گرفته شده است:

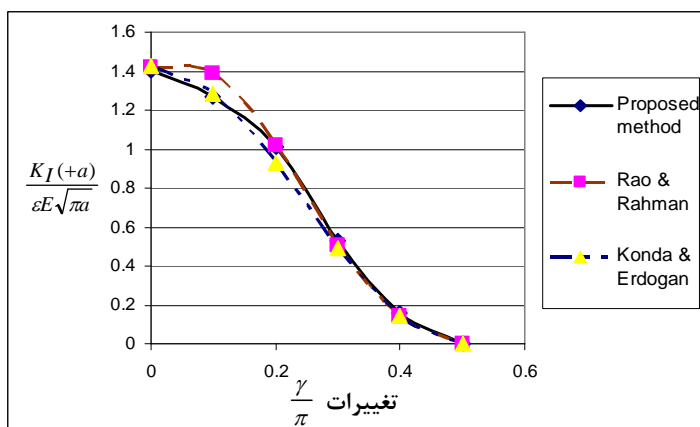
تنش اعمالی بر این صفحه نیز به صورت زیر می باشد:

در شکل های (۱۳) و (۱۴) نتایج به دست آمده برای ضرایب شدت تمرکز تنش مد های I و II برای این تحلیل به صورت منحنی تغییرات رسم شده است.

$$\sigma_{22}(x_1, 10) = \varepsilon E \exp(\eta x_1) \quad (38)$$



شکل ۱۳- تغییرات ضریب شدت تنش مد I در صفحه دارای ترک مرکزی مورب برحسب تغییرات زاویه ترک ($\eta = 0.25$)



شکل ۱۴- تغییرات ضریب شدت تنش مد I صفحه دارای ترک مرکزی مورب برحسب تغییرات زاویه ترک ($\eta = 0.5$)

۵- نتیجه گیری

خصوص که کاهش ابعاد ماتریس سختی باعث می گردد زمان لازم برای تحلیل کاهش پیدا کند. همچنین در این روش اعمال شرایط مرزی بسیار ساده تر از روش های دیگر بدون المان می باشد. در نهایت می توان گفت روش ارائه شده در این مقاله با توجه به نکات مثبتی که در مقایسه با روش المان محدود و روش گالرکین بدون المان معمول دارد برای تحلیل مسائل پیچیده مکانیک شکست مناسب می باشد.

در این مقاله از تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ در روش گالرکین بدون المان ، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مد- های I و II صفحات مستطیل شکل ساخته شده از مواد FG استفاده شد. هر چند به علت پیچیده بودن مسائل تحلیل شده، نتایج تحلیلی برای آنها ارائه نشده است؛ ولی با استفاده از مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج ارائه شده توسط محققان دیگر می توان از صحت روش استفاده شده در این مقاله اطمینان حاصل کرد.

با توجه به اینکه در این روش به جای استفاده مستقیم از روش ضرایب لاگرانژ از تعبیر فیزیکی آنها استفاده شده است، به نظرمی رسد نتایج این روش می بایست از دقت کمتری برخوردار باشند؛ ولی از آنجا که در این روش ابعاد ماتریس سختی کاهش می یابد و همچنین درایه های صفر در ماتریس سختی ایجاد نمی گردد، این روش کارایی مناسبی از خود نشان می دهد، به

مراجع

- [1] Erdogan, F., 1995, "Fracture mechanics of functionally graded materials", Compos Eng, vol 5, 753-70.
- [2] Rao, B.N., Rahman, S., 2003, "Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials", Eng. Fract. Mech., vol 70, 1-27.
- [3] Gibson, RE., 1967, "Some results concerning displacements and stresses in a nonhomogeneous elastic half space", Geotech., vol 17, 58-67.

- [4] Koizumi, M., 1993, "The Concept of FGM", Ceramic Trans. functionally graded material, vol 34, 3-10.
- [5] Erdogan, F and Wu, B.H., 1997, "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties", J. appl. Mech., vol 64, 449-56.
- [6] Chen, J and Wu, L., 2000, "Element free Galerkin methods for fracture of functionally graded materials", Key Eng. Mater., vol 183-187, 487-92.
- [7] – Kim, J.H. and Paulino, G.H., 2002, "Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials", Int. J. Number Methods Eng., vol 53 , 1903-35.
- [8] Eischen, J.W, 1987, " Fracture of nonhomogeneous materials", Int. J. Fract., vol 34, 3-22.
- [9] Konda, N. and Erdogan, F., 1994, "The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium", Eng. Fract. Mech., vol 47, 533-45.